



Association pour la
Recherche en Didactique
des Mathématiques



Commission Française
pour l'Enseignement des
Mathématiques

La démonstration : une logique en situation ?

par **Gilbert Arzac**

LIRDHIST (Université Claude Bernard – Lyon 1) et IREM de Lyon

Le titre choisi pourrait laisser croire qu'il va s'agir d'un exposé d'épistémologie. Il n'en est rien : le fil directeur est bien didactique, il s'agit d'étudier quelles questions peuvent être soulevées par diverses modélisations logiques très classiques qui ne seront d'ailleurs présentées que sur des exemples, lesquels suffiront à engendrer les questions. L'exposé se place dans la perspective d'un « pluralisme théorique » : un phénomène relatif à l'activité humaine est susceptible de nombreuses modélisations, dont plusieurs peuvent être éclairantes. Le point de vue proposé ici ne se veut nullement hégémonique.

L'exposé est aussi élémentaire que possible, avec l'ambition de pouvoir être utile à la fois pour la formation initiale des maîtres, et pour des recherches didactiques pouvant utiliser par la suite des théorisations plus complexes. Il cherche à répondre à quelques questions simples dont on peut penser aussi qu'elles sont fondamentales :

- Peut-on parler de démonstration de façon élémentaire sans se limiter au cas de la géométrie ?
- Peut-on en parler d'une façon qui soit pertinente à la fois pour la démonstration en 4ème (pas seulement en géométrie) et pour des démonstrations mathématiques de niveau élevé ?
- En quel sens peut-on dire que la logique en mathématique est une « logique en situation » ?
- Comment expliquer l'échec assez général des enseignements de logique visant à apprendre aux élèves ou étudiants à raisonner ?

Le plan est le suivant :

- Rappel rapide, car il s'agit de choses bien connues, des modélisations utilisant explicitement ou non la logique des énoncés, c'est-à-dire insistant sur la démonstration comme enchaînement de syllogismes, catégorie dans laquelle on peut regrouper les analyses épistémologiques et historiques de Lakatos comme les analyses didactiques de Raymond Duval. Sur un exemple simple, on montrera ce que peuvent apporter ces analyses dont le lieu d'application privilégié est souvent la démonstration géométrique.
- Insuffisance de la modélisation précédente quand on prend en compte les variables qui interviennent dans les énoncés. Etant donné la trop grande complexité du calcul des prédicats, nous utilisons, suivant une idée de Viviane Durand-Guerrier, la démonstration naturelle dans le calcul des prédicats, et nous examinons quelles questions et quelles réponses elle amène, dans différents domaines des mathématiques. Ceci nous permet de clarifier déjà la notion de logique en situation.
- En nous appuyant sur l'exemple des difficultés historiques des mathématiciens à raisonner sur les limites à propos du problème de la convergence uniforme, nous mettons en évidence l'importance primordiale d'un « outillage » adapté, en partie mental, car relatif aux concepts, mais fait aussi d'usage codifié du langage et d'un symbolisme adapté, pour pouvoir raisonner. Nous progressons ainsi dans la notion de logique en situation.

Conclusion : elle peut se résumer en un double paradoxe, suivi d'une question :

- Le raisonnement mathématique suit effectivement les lois de la logique.
- Mais la connaissance de ces lois ne suffit pas pour savoir raisonner mathématiquement.
- Question : « que faire ? » Y a-t-il un niveau à partir duquel un apprentissage d'éléments de logique, mais sous une forme à préciser, pourrait devenir une aide au raisonnement ?

Vendredi 16 octobre 2009

16 h - 18 h

Institut Henri Poincaré – Amphithéâtre Hermite

11, rue Pierre et Marie Curie – Paris 5ème