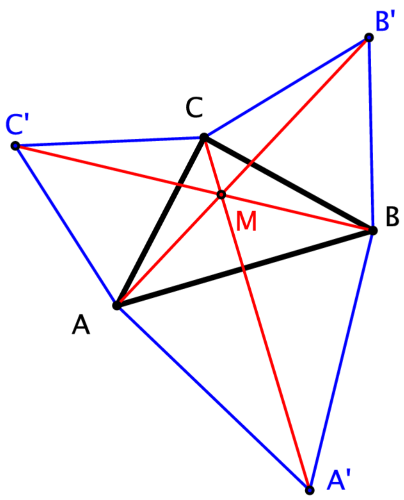
Actes des journées mathématiques
de l'Institut français de l'Éducation,
15 et 16 juin 2011, Lyon




# Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement

*Coordination scientifique :*
**Luc Trouche, Hamid Chaachoua, Magali Hersant,
Yves Matheron et Giorgos Psycharis**

INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION
RECHERCHE

ISBN 978-2-84788-337-4

Secrétariat de rédaction réalisé par les coordonnateurs

# Sommaire

**Ateliers**

# Préface

**Ghislaine Gueudet,**

*CREAD, IUFM de Bretagne – Université de Bretagne occidentale*

*Présidente de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques*

Les 15 et 16 juin 2011 se sont tenues à Lyon des journées intitulées : « Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement ».

Les termes « ressources », « qualité », « ensemble » évoquent les éditions successives des journées mathématiques de l'INRP (pour la participante assidue que j'ai été au fil des années, également responsable du comité des journées 2010) ; il ne faut toutefois pas s'y tromper, car même si la continuité était ici assumée, il s'agissait bien des premières journées mathématiques de l'IFÉ. Ces actes, qui constituent la mémoire de ces journées, donnent à voir une forme de stabilité mais également des évolutions majeures. Le lecteur découvrira dans les pages qui suivent le détail des contenus ; dans cette préface je tiens à souligner certains points que je retiens de ces actes, et de ma propre participation.

### Rencontre de chercheurs

Toute conférence, colloque ou séminaire est façonné par le collectif des chercheurs qui y prennent part. Les participants de ces journées, partageant un intérêt pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, étaient issus de contextes institutionnels très divers : des chercheurs français et étrangers, des mathématiciens et des didacticiens des mathématiques et des sciences expérimentales, des universitaires et des professeurs du premier et du second degré.

De nombreux chercheurs étrangers ont en effet contribué aux journées : dans le comité scientifique, avec Giorgos Psycharis et Paul Drijvers ; parmi les conférenciers, avec Ana Isabel Sacristan. Mais c'est surtout le nouveau dispositif de communications de recherche qui a conduit à la présence de chercheurs de différents pays (et amené le nombre maximum d'inscrits à être atteint nettement avant la date limite d'inscription !). Cette internationalisation nouvelle a constitué une grande richesse, permettant notamment aux participants français de découvrir des études, des propositions pour la formation des enseignants, issus de différents pays. Autre nouveauté, lors de cette édition 2011 : la présence de chercheurs en mathématiques. On retient en particulier la conférence de Olivier Druet, qui a enchanté le public tant par ses bulles de savon que par les modèles mathématiques sous-jacents ; l'atelier 1 (« interactions entre enseignants, mathématiciens et didacticiens »), et les communications associées.

L'ensemble des ateliers, centrés sur les travaux de groupes de recherche de l'IFÉ, ont permis un travail commun d'universitaires et d'enseignants « de terrain » ; les interactions sur des sujets communs ont été riches et profitables pour tous les types de participants, participants à des recherches menées par l'IFÉ de diffuser ces travaux au sein des IREM.

**La mise en lumière des technologies informatiques**

Ces journées 2011 marquent une certaine forme de retour à un intérêt spécifiquement porté aux technologies. Cette remarque peut étonner les participants réguliers : les technologies ont certes toujours été présentes dans ces manifestations. Toutefois, après la première édition en 2006, elles n'apparaissaient plus comme objet d'étude spécifique – notamment à cause de l'attention portée à l'ensemble des ressources disponibles pour les professeurs. Même en soulignant, parmi ces ressources, les spécificités des ressources numériques, ce point de vue général amène probablement à s'attacher en priorité aux traits qui sont communs à tous les types de ressources (par exemple, l'influence des choix didactiques faits dans un manuel, ou dans un site web, sur le travail mathématique des élèves).

Dans les journées 2011 une place spécifique était faite aux technologies, et à l'informatique, avec les conférences de Ana Isabel Sacristan et de Nicolas Balacheff ; avec les travaux de l'atelier 4, consacré aux outils technologiques susceptibles d'appuyer les processus d'enrichissement des ressources, et avec les communications qui y étaient associées. Cet atelier a repris, en particulier, les questions de qualité des ressources déjà abordées lors d'éditions précédentes des journées ; mais il a étudié ces questions sous l'angle nouveau des outils technologiques qui peuvent contribuer à l'objectif de qualité, en particulier les plateformes permettant un travail collaboratif.

**Les élèves, créateurs potentiels de sciences, et leurs professeurs**

Amener les élèves à développer en classe une activité mathématique riche est un objectif poursuivi par les travaux de nombreux groupes de l'IFÉ ; les questions associées à cet objectif ont donc été considérées dans toutes les éditions des journées. Ces questions peuvent concerner les ressources à proposer aux élèves, comme à leurs professeurs ; le travail des élèves en classe ; ou encore les modalités de formation des professeurs.

Dans cette édition des journées, ces questions étaient présentes dans la conférence de Alain Mercier, développant l'aspect des connaissances mathématiques des professeurs, nécessaires pour la poursuite de cet objectif ; et dans l'atelier 3, s'appuyant comme la conférence de Alain Mercier sur les travaux du projet AMPERES. Ces travaux proposent de redonner du sens aux mathématiques enseignées, en introduisant ces mathématiques comme réponses à des questions. L'une de leurs spécificités majeures est l'échelle retenue : pour éviter le morcellement, il s'agit de proposer des questions qui permettent d'aborder un ensemble conséquent de notions et propriétés mathématiques.

L'objectif de « rendre les élèves créateurs de science » était également présent dans l'atelier 2 (et naturellement, dans les communications associées). Son intitulé : « le travail collaboratif des enseignants : conception de ressources et formation » ne donne pas explicitement à voir l'objectif relatif aux élèves ; mais le contenu du travail de l'atelier montre que le travail collaboratif des enseignants, qu'il soit spontané, organisé par un dispositif de formation ou suscité par l'institution scolaire, visait bien cet objectif. Évolution importante, amenée par cet atelier : la présentation de travaux de didacticiens des sciences, questionnant des points communs et des spécificités des professeurs de différentes disciplines scientifiques, en ce qui concerne les démarches d'investigations, qu'ils sont amenés à considérer conjointement. Les liens entre mathématiques et autres disciplines a certainement vocation à être de plus en plus pris en compte par les travaux des groupes de recherche de l'IFÉ.

Au-delà de ces évolutions, pour des éditions ultérieures des journées IFÉ, il serait intéressant de reprendre et de prolonger le questionnement sur les effets des dispositifs, qu'avaient initié les journées 2010.

Ces actes participent au lancement d'une nouvelle aventure ; les journées IFÉ 2011 en étaient le coup d'envoi, le *kick-off meeting*, selon la terminologie anglophone. Comme telles elles amènent à placer dans l'avenir beaucoup d'espoir, tant les interactions et les échanges, au sein du nouveau collectif de participants, ont été riches scientifiquement et humainement.

# Introduction

**Luc Trouche**

*Directeur du département recherche de l'IFÉ*

*Coordonnateur du conseil scientifique des journées mathématiques 2011 de l'IFÉ – ENS Lyon*

Voici donc les actes des 6èmes journées mathématiques qui se sont tenues à Lyon, d'abord dans le cadre de l'INRP, et aujourd'hui dans le cadre du nouvel IFÉ, institut de l'ENS Lyon. Leur thème : « Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des *ressources* pour l'enseignement ».

C'est bien la thématique des ressources qui a assuré, depuis leur origine, la continuité de ces journées, un thème qui a été approfondi de rencontre en rencontre, et a révélé sa grande richesse scientifique.

### Les ressources pour faire, apprendre, enseigner les mathématiques, un enjeu de recherche majeur

Le choix d'orienter le regard sur les ressources pouvait apparaître motivé, lors des premières journées de 2006, essentiellement par l'évolution des environnements technologiques (logiciels de calcul formel ou de géométrie dynamique ou ressources en ligne) qui bouleverse les conditions dans lesquelles un professeur conçoit et réalise son enseignement. C'est en effet pour cette prise en compte de nouveaux outils, complexes et puissants, que se sont développés plusieurs dispositifs de recherche (voir par exemple Aldon *et al*. 2008), très actifs, qui ont donné matière à des collaborations avec plusieurs IREM, avant de déboucher sur un projet européen, EdUmatics. C'est aussi pour questionner le foisonnement des ressources sur Internet que s'est développé le projet européen Intergeo, proposant un cadre pour penser la *qualité* des ressources pour faire des mathématiques (Trgalová *et al*. 2011).

La question des *ressources* ne se réduit ainsi pas à ses aspects technologiques. Penser les ressources des enseignants, c'est interroger les situations didactiques (Brousseau 2008), penser des processus de conception de problèmes producteurs pour l'activité mathématique (Aldon 2009). C'est aussi penser des ressources qui ne se limitent pas à une séance de classe, mais qui soient des maillons de *parcours d'étude et de recherche* : c'est le projet du projet AMPERES, qui rassemble plusieurs équipes dans le cadre d'une collaboration IREM-IFÉ (Matheron 2008).

Penser les ressources des enseignants, c'est aussi penser leur formation. La recherche de l'IFE dans le cadre du dispositif de formation innovant Pairform@nce a ainsi interrogé, en particulier dans le domaine des mathématiques, les conditions *d'appropriation* de nouvelles ressources, à la fois pour les formateurs et pour les enseignants (Soury-Lavergne *et al*. 2011).

Finalement, c'est, à travers les ressources, un ensemble de dynamiques qui sont ainsi étudiées : l'action conjointe du professeur et des élèves dans la classe, le jeu entre le travail hors classe et en classe (du professeur comme des élèves), la collaboration entre enseignants. La thématique des *ressources vives* traduit bien ce jeu d'interactions, elle a donné matière à un ouvrage (Gueudet & Trouche 2010) rassemblant des contributions de bon nombre des acteurs de la recherche à l'IFÉ et donnant à des collaborations interdisciplinaires fécondes (informatique, didactique et histoire des mathématiques). Ce premier ouvrage a été suivi d'une publication internationale (Gueudet et al. 2012), mettant en évidence l'actualité de cette thématique au-delà de l'Europe.

**Un réseau de collaborations scientifiques à développer**

Le succès de ces journées est d'abord lié à une histoire, celle des journées mathématiques de l'INRP, qui, depuis 2006, ont permis de constituer une réelle communauté de recherche autour de l'enseignement des mathématiques, rassemblant, chaque année[1], des équipes d'enseignants associés, enseignant en collège, en lycée ou à l'université, et des enseignants chercheurs, mathématiciens, historiens ou didacticiens des mathématiques. L'ouverture de ces journées représentait bien cette communauté d'intérêt, avec Nicolas Saby, le président de l'Assemblée des Directeurs d'IREM, Robert Cabane, Inspecteur Général de mathématiques, Yves Winkin, directeur de l'IFÉ et Jean-François Pinton, directeur délégué à la recherche de l'ENS Lyon. Sébastien Hache, à l'origine du développement de l'association Sésamath, était aussi là, témoignant des collaborations anciennes avec l'IFÉ. Le déroulement des journées a mis en évidence, à nouveau, l'intérêt de cette action conjointe des mathématiciens des écoles, des collèges, des lycées et des universités.

[1] Des actes ont été édités, et sont disponibles en version électronique pour les années 2006, 2007 et 2010.

Le succès des journées est ensuite le fruit du travail du comité scientifique, que je voudrais remercier ici : Paul Drijvers, de l'Institut Freudenthal d'Utrecht, Hamid Chaachoua, de l'équipe MeTAH du LIG (Grenoble 1), Magali Hersant, du CREN (Nantes), Yves Matheron, de l'équipe ADEF (IFÉ) et Giorgos Psycharys, de l'Université Nationale et Capodistriaque d'Athènes ont assuré, à travers le processus de sélection des propositions, la diversité et la richesse des contributions des journées. C'était la première fois qu'un appel à contribution avait d'ailleurs été lancé[2], expérience à poursuivre sans doute, en repensant l'articulation des différents moments de ces journées.

Il est aussi le résultat de l'ouverture internationale de des journées : des doctorants, enseignants ou enseignants chercheurs d'Algérie, d'Italie, de Catalogne, du Québec, du Liban, de Colombie et du Mexique ont présenté leurs travaux. Une mention particulière pour Ana Isabel Sacristan, chercheure du CINVESTAV (Mexico) invitée à l'IFÉ, qui était accompagnée de ses trois doctorants, bénéficiant d'une bourse du gouvernement mexicain : sa conférence, sur l'intégration de la technologie dans l'enseignement des mathématiques, constituait une sorte de point d'orgue des interactions qui se sont développées, entre chercheurs et doctorants français et mexicains, pendant 3 mois.

L'intérêt de ces journées reposait enfin sur les interactions entre champs de recherche : la conférence d'Olivier Druet, mathématicien de l'ENS Lyon ; celle d'Alain Mercier, didacticien des mathématiques (IFÉ) et celle de Nicolas Balacheff (Laboratoire d'informatique de Grenoble), à la frontière entre didactique et informatique, ont été des moments particulièrement riches de ce point de vue.

Les interactions nouvelles entre les didacticiens et les mathématiciens, à l'intérieur de l'ENS Lyon, apparaissent sans doute comme un des acquis majeurs de ces journées, à développer comme sont à développer les interactions entre l'IFÉ et les deux anciennes composantes de l'ENS de Lyon (ENS-LSH et ENSL). Le soutien apporté à ces journées par le fonds recherche de l'ENS de Lyon est sans doute significatif de cette volonté partagée d'échanges.

**Une structuration en quatre thèmes**

La structuration des actes reprend naturellement celle des journées : ils s'ouvrent sur les quatre conférences invitées, se poursuivent par les communications et s'achèvent par les ateliers. Communications et ateliers sont structurés en quatre thèmes : 1) Quelles interactions entre enseignants, mathématiciens et didacticiens ? 2) Le travail collaboratif des enseignants : conception de ressources et formation 3) Comment rendre les élèves créateurs de mathématiques dans la salle de classe ?

---

[2] Les années précédentes, les journées étaient organisées autour de conférences invitées et d'ateliers, permettant aux équipes d'enseignants associés de confronter leurs travaux.

4) Quels outils technologiques pour appuyer les processus d'enrichissement des ressources ?

Ces thèmes se situent dans le fil des journées mathématiques antérieures, ils se prolongeront sans doute au-delà de ces journées, sans attendre les journées 2012 : les équipes de recherche, mobilisant chercheurs et enseignants associés, poursuivent leurs travaux, et le site EducMath veut constituer, à leur service, une ressource vive, support d'interactions renouvelées.


Aldon, G., Artigue, M., Bardini, C., Baroux-Raymond, D., Bonnafet, J.-L., Combes, M.-C., Guichard, Y., Hérault, F., Nowak, M., Salles, J., Trouche, L., & Zuchi, I., (2008), Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab (expérimentation Collaborative de Laboratoires mathématiques), *Repères-IREM,* 72, 51-78

Aldon, G. (2009), A resource to spread maths research problems in the classroom. in V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Éds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. January 28th - February 1st 2009, Lyon (France).

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (eds.) (2012), *From Textbooks to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Documentation*, *New York,* Springer.

Gueudet, G., & Trouche, L. (dir.) (2010), *Ressources vives. La documentation des professeurs en mathématiques,* PUR, Rennes et INRP.

Matheron, Y. (2008), Le projet AMPERES, *Cahiers pédagogiques* 466, 55-57.

Soury-Lavergne S., Trouche, L., Loisy, C., & Gueudet, G. (2011), *Parcours de formation, de formateurs et de stagiaires: suivi et analyse*, rapport à destination du MESR, INRP-ENSL.

Trgalová, J., Soury-Lavergne, S., Jahn, A. P. (2011), Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 43(3), 337-351.

# Ouverture des journées

**Ouverture par Yves Winkin, directeur de l'IFÉ, Nicolas Saby, président de l'assemblée des directeurs d'IREM et Robert Cabane, inspecteur général, groupe des mathématiques de l'IGEN**

## Yves Winkin, directeur de l'IFÉ

L'Institut national de recherche pédagogique a été dissous fin décembre 2010 ; l'Institut français de l'Éducation lui a succédé officiellement à la mi-avril 2011. Il s'agit d'une composante de l'Ecole normale supérieure de Lyon, qui se voit ainsi dotée d'un seul coup d'un excellent dispositif de formation et de recherche en éducation. Si le terme « éducation » remplace l'expression « recherche pédagogique », ce n'est évidemment pas parce que la recherche s'efface au profit de la formation (il suffit de lire les statuts de l'IFÉ pour se rendre compte que les missions de l'INRP, et en particulier la recherche, sont intégrées dans celles de l'IFÉ), mais parce que le périmètre s'élargit : l'IFÉ se donne pour ambition de couvrir à terme l'ensemble du spectre éducatif, du premier degré à l'université, et de s'ouvrir à différentes « éducations à », en convoquant non seulement les sciences de l'éducation mais l'ensemble des disciplines qui s'intéressent à l'éducation, de la philosophie à l'anthropologie, des sciences cognitives aux sciences de la communication.

Vaste, très vaste programme. Au cœur duquel on va retrouver les mathématiques, qui exercent en France un incontestable leadership en matière de réflexion sur les modes de transmission et d'apprentissage, à tout niveau d'enseignement. C'est ce rôle moteur exercé au niveau national que la didactique des mathématiques doit continuer à jouer au sein du nouvel IFÉ, en engageant le dialogue avec les disciplines qui commencent à y entrer, comme l'anthropologie des sciences ou les sciences de l'information.

Que la recherche sur l'enseignement des mathématiques se sente en phase à l'IFÉ avec l'anthropologie des sciences, telle qu'elle est aujourd'hui incarnée à l'IFÉ par Samuel Lézé[1], ne devrait pas étonner les lecteurs des travaux d'Yves Matheron, membre du laboratoire ADEF, que l'IFÉ partage avec l'Université de Provence à Marseille. Son dernier ouvrage s'intitule *Mémoire et étude des mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique* (2010). Il y est question de mémoire sociale, à la manière de Maurice Halbwachs, d'ethnomathématiques, sinon d'ethnométhodologie : tous les éléments sont en place pour un séminaire interdisciplinaire de haut niveau…

Les sciences de l'information sont depuis la rentrée 2011 représentées à l'IFÉ par Jean-Michel Salaün, qui a pour mission d'y développer l'« architecture de l'information »[2], une interdiscipline à la fois proche de l'informatique et de la sociologie des usages des nouvelles technologies. Ici aussi, on pressent le dialogue fécond qui va pouvoir s'établir entre les architectes de l'information et les didacticiens des mathématiques, qui se sont intéressés aux TIC dès leur apparition dans le paysage éducatif.

Pour que ces échanges aient lieu, il ne faut pas chercher à les provoquer avec trop d'empressement. Il suffit que des Journées annuelles telles que celles-ci aient lieu à l'IFÉ, que des actes en sortent et circulent, que des collègues les lisent et se demandent pourquoi ils n'y participeraient pas l'année prochaine. Bien sûr, il faudra veiller à les inviter, mais ce mouvement se fera de lui-même. C'est là où la grande expérience du travail collaboratif de Luc Trouche fait merveille : avec quelques collègues, il met calmement en place les conditions d'un renouvellement disciplinaire et générationnel de la didactique des mathématiques en France. L'IFÉ se doit de lui donner, de vous donner, d'excellentes conditions de travail. Et je me dois de lui exprimer, de vous exprimer, toute ma gratitude pour un apport décisif dans l'aventure intellectuelle que le nouvel IFÉ entame depuis quelques mois.

### Nicolas Saby, président de l'Assemblée des Directeurs d'IREM[3]

L'ADIREM se réjouit du succès croissant des journées mathématiques de l'IFÉ, ce qui prouve la vitalité des réseaux engagés. Ces premières journées qui prennent le relais de celles de l'INRP s'inscrivent dans une continuité. Elles sont avant tout pour l'ADIREM le symbole de la rencontre de deux réseaux : le réseau de l'IFÉ d'une part et celui des IREM d'autre part.

Si l'activité des IREM réside surtout dans des groupes de recherche débouchant

---

1 Fernandez, F., Lézé, S., & Marche, H. (dir.) (2008), Le langage social des émotions. Études sur les rapports au corps et à la santé, Anthropos Economica

2 J.-M. Salaün présente ce nouveau champ par une vidéo sur You Tube http://www.youtube.com/watch?v=5ICyFJouHv4

3 Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

sur des actions de formation continue et initiale, le réseau des IREM ne saurait se passer des activités plus orientées par des problématiques de recherche fondamentales ou appliquées. En ce sens, l'intégration récente de l'IFÉ dans l'ENS-Lyon est perçue comme un nouvel élan permettant d'enrichir mutuellement les travaux des deux réseaux. Ces rencontres sont ainsi l'occasion pour les IREM d'apprendre les nouveaux enjeux et recherches sur les questions de l'enseignement des mathématiques. C'est aussi l'occasion pour les animateurs des IREM, participants à des recherches menées par l'IFÉ de diffuser ces travaux au sein des IREM.

Bien sur, les bouleversements récents dans l'enseignement supérieur et dans la formation des enseignants ont quelque peu déstabilisé les structures, mais le succès de ces journées montrent à l'évidence la mobilisation des réseaux sur les questions d'enseignement des mathématiques qui ne manquent pas de se renouveler et nous pouvons résolument espérer que ces premières rencontres de l'IFÉ soient les premières d'une longue série.

**Robert Cabane, inspecteur général, groupe des mathématiques de l'IGEN**

Les journées mathématiques de l'IFÉ 2011 sont axées sur quelques thématiques fort importantes pour tous, qu'ils soient enseignants, chercheurs ou responsables du système comme les inspecteurs. Je commenterai brièvement trois de ces thématiques en les associant aux travaux actuels que nous menons en lien avec la mise en place du socle au Collège et de la réforme du lycée général et technologique.

***1. Quelles interactions entre les enseignements de mathématiques et de sciences expérimentales ?***

Dans le nouveau programme de Mathématiques pour la classe de Terminale S, nous avons choisi de mettre en avant les situations qui permettent au professeur de mathématiques d'établir des liens explicites entre les différents enseignements scientifiques ; nous espérons que, par cette approche, les élèves percevront mieux qu'avant le « continuum » des sciences que les « barrières disciplinaires » tendent à dissimuler voire à briser. Cette ambition est donc annoncée dès le préambule du programme par la phrase suivante :

*Les commentaires distinguent des thèmes pouvant se prêter à des ouvertures interdisciplinaires, en concertation avec les professeurs d'autres disciplines scientifiques.*

Voici quelques exemples (relevés dans la colonne « Commentaires » du programme) :

- *[SI] Gain lié à une fonction de transfert.*
- *[SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH.*

- *[SVT] Hérédité, génétique, risque génétique.*
- *[SVT] Analyse de graphiques où les données sont fournies par des intervalles de confiance.*

Le même choix a prévalu en ce qui concerne les séries STI2D et STL ; on trouvera par exemple la situation suivante : *Impédances, admittances complexes.*

Enfin, en série STD2A, ce sont les liens avec l'enseignement en arts appliqués qui ont sous-tendu toute l'écriture du programme.

Au plan pédagogique, il ne suffit pas de formuler de telles remarques dans le programme pour faire évoluer le contenu des enseignements : encore faut-il que les enseignants s'en saisissent et les intègrent dans leurs progressions.

Nous avons donc mis en chantier un certain nombre de documents de ressources pédagogiques dont la vocation n'est pas d'imposer des démarches (ce qui serait en contradiction avec le principe de liberté pédagogique de l'enseignant) mais de proposer des scénarios possibles pour la conception de cours et de travaux d'application mettant en œuvre l'ensemble des aspects des nouveaux programmes.

Ces documents, déjà publiés ou à paraître, concernent les domaines suivants :

- séries STI2D et STL PC : le document est pluridisciplinaire et concerne simultanément mathématiques, SPC et STI ;
- série STL Biotechnologies : le document est aussi pluridisciplinaire et concerne mathématiques et sciences biologiques (SBSSA) ;
- série STD2A : le document aborde différents aspects des liens entre mathématiques et arts et recoupe le programme de Physique à propos de la lumière et des couleurs ;
- séries S et STI2D : un document est déjà publié autour de l'enseignement de la Statistique et des Probabilités en classe de Première, un autre est en cours de réalisation pour les classes terminales.

Les démarches pluri- ou interdisciplinaires ne sont pas réservées au lycée ; en effet, nous avons aussi publié une banque de problèmes et de situations permettant l'approche et l'évaluation des tâches complexes au collège.

Au-delà du désir de présenter en cohérence le panorama des sciences, se distingue particulièrement l'enseignement des probabilités et statistiques qui vient d'être singulièrement renforcé avec l'introduction de la loi binomiale en classe de Première et de la loi normale en classe terminale ; la manipulation des intervalles de confiance ouvre la voie à l'étude de nombreuses situations issues des diverses sciences, technologies ainsi que de l'économie. Compte tenu de cet enjeu, deux documents de ressources pédagogiques sont en cours de réalisation, l'un partant du point de vue des mathématiques (déjà mentionné) et l'autre partant du point de vue des physiciens (autour des incertitudes des mesures et de la métrologie). La confrontation de ces approches promet de nous occuper quelque temps encore !

***2. La mise en activité des élèves***

Les inspecteurs, qui vont encore dans les classes, savent bien que les cours de mathématiques sont parfois ennuyeux ; pour les élèves soumis à de tels enseignements, « faire des mathématiques » s'identifie à une répétition d'exercices stéréotypés dont ils ne perçoivent pas le sens. Sans prétendre aucunement imposer une pédagogie « officielle » (ce serait une aberration), nous tenons à quelques objectifs pédagogiques simples :

- Essayons de rendre les élèves « acteurs de leurs apprentissages » : la meilleure manière de comprendre les mathématiques c'est de les essayer, de « jouer avec », notamment grâce à l'usage des moyens technologiques (voir ci-dessous). Les enseignements de spécialité (séries S, ES, L) fournissent aussi un contexte propice à cette mise en activité.

- Donnons envie aux jeunes de faire des mathématiques, faisons en sorte qu'ils y prennent du plaisir et qu'ils en perçoivent l'intérêt. Que ce soit ludique, intrigant, rassurant ou simplement utile pour d'autres sciences ou pour comprendre le monde ou la société, peu importe !

- Aussi souvent que possible, passons par la résolution de problèmes pour aborder les notions fondamentales, avec une petite limite cependant : les problèmes proposés ne doivent pas être totalement artificiels, sinon les mathématiques se réduisent à la résolution des problèmes inventés pour faire des mathématiques !

- Aussi souvent que possible, déconnectons le temps consacré à la formation des élèves du temps consacré à l'évaluation finale. Certes, les programmes précisent des capacités attendues, notion par notion, mais la formation des élèves ne saurait se limiter à un parcours d'obstacles correspondant à ces diverses capacités. C'est à travers une progression pédagogique soigneusement conçue, éclairant les notions les unes par les autres, que les enseignants parviennent à donner du sens à l'édifice ; les capacités attendues peuvent alors se mettre en place en temps et heure.

***3. Les outils technologiques et les ressources numériques***

Je m'appuierai encore sur les nouveaux programmes de mathématiques en série S, qui stipulent :

> *L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.*
>
> *En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.*

Si le premier paragraphe cité rappelle des prescriptions déjà anciennes, le second met en place un contexte un peu nouveau en proposant d'intégrer l'usage de systèmes de calcul formel dans la pratique quotidienne des mathématiques en classe terminale. Cette évolution, anticipée dans les programmes antérieurs, n'a rien de très original dans la mesure où l'usage du calcul formel (parfois nommé CAS c'est-à-dire Computer Algebra System) est devenu courant dans les lycées de nombreux pays dont l'Autriche et l'Allemagne.

Les logiciels de calcul formel sont aujourd'hui répandus et on en trouve de fort bons dans le cadre des logiciels libres (XCas, Maxima) comme dans certaines calculatrices.

Il serait évidemment souhaitable que l'évaluation terminale (c'est-à-dire, le bac) puisse tenir compte de cette dimension essentielle ; toutefois, le projet d'épreuves pratiques que nous avons expérimenté de 2006 à 2009 n'a pas abouti. L'effort des professeurs s'est donc partiellement reporté sur les calculatrices dont ils apprécient la souplesse mais déplorent la petite taille (faire de la géométrie dynamique sur une calculatrice tient parfois de l'exploit) !

Pourtant tout n'est pas perdu : dès cette année, l'évaluation en mathématiques dans le cadre du baccalauréat professionnel se fait en cours de formation et selon un protocole inspiré de ce que furent les épreuves pratiques, avec l'utilisation de grilles de compétences.

Pour conclure sur cet aspect, il est indéniable que nous disposons aujourd'hui de très bons outils logiciels pour illustrer les mathématiques et avant tout pour soutenir la mise en activité des élèves. Nous apprécions que les professeurs montrent des choses merveilleuses à l'aide du TNI ou de tel ou tel logiciel, mais nous apprécions bien plus que les élèves aient l'occasion de s'en servir réellement.

# *Conférences*

# Autoroutes et films de savon

▸ *conférence en ligne sur canal-u*

**Olivier Druet**

*UMPA-ENS Lyon*
*46, allée d'Italie*
*69364 Lyon cedex 7*

RÉSUMÉ. *Ce texte prend pour point de départ une manipulation présentée à des collégiens et lycéens dans le cadre de MathαLyon. Nous tentons de dégager quelques questions que les élèves se posent devant ces expériences et de montrer comment un mathématicien peut les prendre au vol pour accompagner les élèves dans une démarche de recherche en mathématiques.*

**Introduction : MathαLyon**

MathαLyon est une opération menée depuis deux ans par l'IREM de Lyon, l'Institut Camille Jordan (Université de Lyon 1) et l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées (ENS Lyon) soutenue par le CNRS, l'Université Lyon 1 et l'Ecole Normale Supérieure de Lyon. Une fois par mois, des chercheurs installent une mini-exposition de mathématiques dans un établissement du secondaire de l'Académie de Lyon pour deux jours. Cette exposition est une version réduite de l'exposition internationale « Pourquoi les mathématiques ? » qui a été créée en 2000 pour l'année mondiale des mathématiques avec le soutien de l'UNESCO et qui continue de circuler à travers le monde quelque dix ans après.

Les mathématiciens lyonnais, qui avaient fait venir l'exposition en 2006 au Museum, ont fait dupliquer un certain nombre de manipulations de cette exposition et la font maintenant circuler dans les établissements scolaires[1].

Le principe d'une intervention est le suivant : les manipulations (une douzaine de tables contenant chacune une ou deux manipulations) sont installées pour deux jours dans un établissement scolaire. Les classes y circulent sur leurs heures de cours, comme dans une mini-exposition. Une particularité de cette opération est que quatre chercheurs en mathématiques de l'Université de Lyon 1 ou de l'École

1 Et ce gratuitement pour les établissements.

Normale Supérieure de Lyon sont présents en permanence pour accompagner les élèves lors de leur passage.

L'idée essentielle est d'inciter les élèves à se poser des questions face à ces expériences[2], le but n'étant en aucun cas d'apporter des réponses. Les chercheurs sont là pour aider les élèves à adopter une démarche de mathématiciens en prenant les questions "naïves" au vol, en les transformant un peu et en les amenant à s'en poser d'autres, éventuellement plus simples, et surtout à bien les poser. C'est à notre sens la première démarche du mathématicien : bien poser les questions qui apparaissent naturellement. Cela demande de les mettre dans un cadre approprié à leur traitement mathématique.

## 1. La manipulation des films de savon

Parmi toutes ces manipulations, nous en choisirons une comme point de départ pour parler de mathématiques, à tous niveaux. C'est la manipulation des films de savon[3]. L'expérience, très appréciée des élèves[4], se présente ainsi : deux cuves sont remplies de savon[5] dans lesquelles les élèves sont invités à tremper des objets de deux sortes. Premièrement, deux plaques parallèles au sein desquels ont été insérés des plots ; deuxièmement, des polyèdres réguliers (cube, octaèdre, tétraèdre) dont les arêtes sont en métal. Lorsque ces objets sont trempés dans les cuves puis retirés délicatement, le savon s'accroche sur ces contours (plots ou arêtes) et forme un film de savon pour les relier. Les films formés sont magnifiques, d'une grande pureté, présentent certaines symétries, et une chose est sûre : le savon ne forme pas ces films par hasard. Par exemple, si on perturbe l'expérience en soufflant (un peu) sur les films ou même en détachant le savon de certaines arêtes, on voit le savon revenir à sa forme initiale ou aller en chercher une autre, tout aussi belle.

La question qui doit venir, et qui revient à chaque intervention, est : pourquoi le savon forme-t-il ces films ? Cette question est posée par les élèves essentiellement pour les polyèdres, qui donnent des formes magnifiques et surprenantes.

Pour répondre à cette question, il faut faire appel à la physique. Ce n'est pas le lieu de rentrer dans ce problème ici. La seule chose à savoir est que le savon, sous les contraintes qui lui sont imposées, va tenter de prendre une forme qui minimise l'aire de la surface du film de savon, et ce pour des raisons d'énergie de tension superficielle[6]. On peut d'ailleurs en convaincre les élèves en imposant au savon de s'accrocher à deux plots seulement d'une double plaque. Le savon forme alors un

2 Qui couvrent un large spectre des mathématiques : de la théorie des graphes aux probabilités, en passant par la géométrie des surfaces, et j'en oublie…

3 Nous renvoyons à l'excellent [Laurain 2011] sur le site "Images des mathématiques" pour des photos de ces expériences. Une page Web Math$\alpha$Lyon avec des photos fera également son apparition dans quelques mois.

4 Mais qui n'a pas été émerveillé par des bulles ou des films de savon, aux formes si pures ?

5 Liquide vaisselle, eau et glycérine.

film vertical dont la trace sur le plan est le segment de droite reliant les deux points de départ, ce qui est visiblement la surface d'aire minimale sous la contrainte d'être accroché à ces deux plots. Mais prenons ce fait comme un point de départ. Nous voilà maintenant sur le terrain des mathématiques ; le savon répond à la question suivante : quelle est la surface d'aire la plus petite possible sous la contrainte d'être accroché à un contour donné ? En fait, le savon ne répond pas exactement à cette question. Il ne "trouvera" qu'une surface qui minimise localement (i.e. parmi les surfaces vérifiant les contraintes proches de celle considérée) l'aire. On peut illustrer cela par un ballon lâché dans des montagnes russes. Celui-ci ira se placer en un point d'altitude minimale, mais seulement localement minimale. Nul ne dit qu'il n'y a pas dans le paysage un point d'altitude plus faible mais que le ballon ne pourra pas atteindre.

Mais la question reste entière : ces surfaces d'aire minimale présentent une certaine régularité, les mêmes motifs semblant revenir quel que soit le contour plongé dans la cuve. Pourquoi ?

## 2. Le problème des autoroutes et les points de Steiner

Le premier acte mathématique, une fois ce problème bien posé, est de simplifier le problème. Nous inciterons les élèves à commencer par le problème 2-dimensionnel, plutôt que d'essayer de comprendre immédiatement le problème dans l'espace. Les plaques sont construites pour réduire le problème d'une dimension en imposant au savon une invariance selon l'axe vertical.

Le problème devient alors : étant donnés quelques points dans le plan, quel est le plus court chemin pour les relier entre eux (cf. figure 1) ? Ce problème est connu sous le nom de problème des autoroutes[7]. Étant donnés quelques villages, comment construire un réseau routier permettant de joindre deux quelconques de ces villages en utilisant le moins de bitume possible, le paysage étant supposé plat ?

6 Nous renvoyons encore une fois à [Laurain 2011] pour une brève explication ou alors à [Isenberg 1978].

7 Ou plus scientifiquement sous le nom de problème de Steiner, du nom d'un mathématicien suisse (1796-1863), excellent géomètre du XIXe siècle.

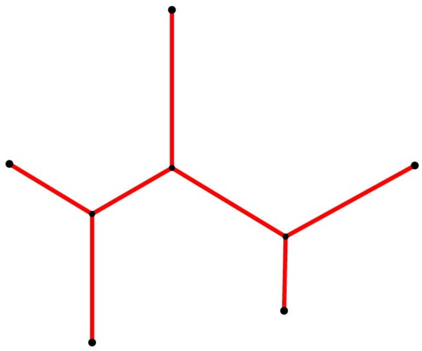


*Figure 1 - Le problème de Steiner.*

Pour deux points, la réponse est connue : c'est le segment de droite reliant ces deux points qui constitue le réseau le plus court. Mais cela commence à devenir intéressant lorsqu'il y a plus de villages (et qu'ils ne sont pas alignés).

### *2.1. Le triangle - L'expérience*

Commençons par le triangle. On peut faire des expériences avec du savon. Mais, faute de savon, on peut aussi utiliser un ordinateur, et plus particulièrement la petite application développée par Marc Lasson, Paul Laurain et Aurélien Pardon, cf. http ://perso.ens-lyon.fr/aurelien.pardon/steiner/. A notre avis, l'ordinateur a l'énorme défaut d'être une immense boîte noire et d'être peu convaincant pour celui qui ne connaît pas mathématiquement les réponses à la question posée puisque toute application de ce genre utilise d'une façon ou d'une autre quelques résultats mathématiques liés à la question[8]. Mais l'énorme avantage est qu'on peut répéter rapidement un nombre important de simulations. On trouve ainsi les résultats suivants :

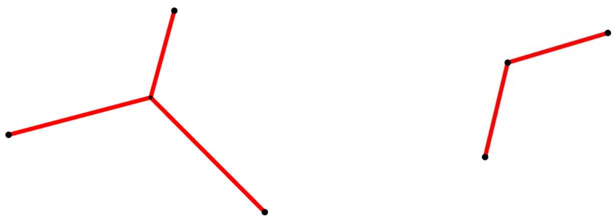


*Figure 2 - Le problème de Steiner dans le cas du triangle.*

8 Certes, avec le savon, il faut faire confiance à l'explication physique, mais ensuite, cela reste plus concret et beaucoup plus convaincant.

Il semble donc que la solution puisse être de deux types : soit les deux segments du triangle correspondant au grand angle de celui-ci lorsque cet angle est grand, soit un réseau composé de trois segments rejoignant les sommets à un quatrième point, qui reste à déterminer… Bien entendu, faute de place, nous ne donnons que deux exemples mais l'application mentionnée ci-dessus permet de faire beaucoup d'expériences à peu de frais pour se convaincre que seules ces deux situations arrivent.

Une première chose à remarquer est que, dans ce réseau, les routes sont droites[9], et qu'il y a éventuellement des intersections. Dans le cas de trois points, le lecteur se convaincra facilement qu'il n'y a aucun intérêt à avoir deux intersections : en effet, il faudra bien les joindre l'une à l'autre et il est plus court de joindre les points qui arrivent à la première directement à la seconde. Ceci nous permet de reposer le problème, dans le cas du triangle : où est le point $M$ tel que $MA+MB+MC$ soit minimal ? Etant entendu que ce point pourrait être en $A$, $B$ ou $C$ et étant entendu également qu'un mathématicien voudra également démontrer que ce point existe.

En observant quelques exemples, il semblerait que le point $M$ soit tel que les trois angles $\widehat{BMC}$, $\widehat{BMA}$ et $\widehat{AMC}$ soient égaux à 120 degrés. Sauf si l'angle le plus grand du triangle est trop grand (en fait supérieur à 120 degrés comme nous le verrons).

### *2.2. Le point de Steiner - une première preuve*

Admettons pour l'instant que ce point $M$ existe et supposons également dans un premier temps qu'il est différent des sommets du triangle. La figure ci-dessous donne une preuve[10] du fait que ce point $M$ est tel que $\widehat{BMC}$, $\widehat{BMA}$ et $\widehat{AMC}$ sont égaux.

---

9 Le plus court chemin pour joindre deux points étant le segment les joignant.

10 De niveau élémentaire.

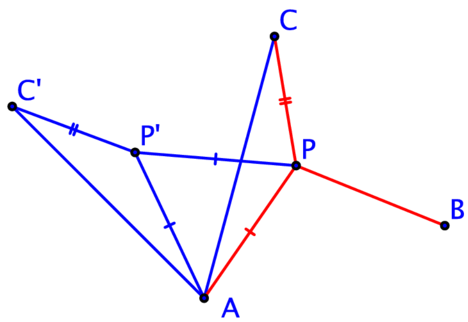



*Figure 3 - Egalité des angles (preuve).*

Comment cette figure est-elle construite ? On part d'un point $P$ qui n'est pas l'un des sommets du triangle $ABC$. En opérant une rotation de 60 degrés de centre $A$, on envoie $C$ sur $C'$ et $P$ sur $P'$. Les triangles $AP'C'$ et $APC$ étant isométriques, nous avons $AP=AP'$ et $PC=P'C'$. Mais le triangle $APP'$ étant équilatéral, nous avons également $AP=PP'$. Ainsi

$$AP+BP+CP=BP+PP'+P'C'\geq BC'$$

avec égalité si et seulement si les points $B$, $P$, $P'$ et $C'$ sont alignés. Il faut noter que ce point $C'$ ne dépend pas du choix de $P$ puisque c'est simplement l'image de $C$ par la rotation de 60 degrés de centre $A$. Le point $P$ sera donc celui qui minimise $AP+BP+CP$ si les points $B$, $P$, $P'$ et $C'$ sont alignés : il n'est pas difficile de se convaincre qu'alors, les trois angles $\widehat{BPC}$, $\widehat{BPA}$ et $\widehat{APC}$ sont égaux à 120 degrés.

Cette preuve, comme beaucoup de preuves géométriques "à la grecque", est simplissime, une fois donnée. Le problème est de savoir d'où elle sort. On peut imaginer que l'objectif est de substituer le problème de sommes de longueurs à un problème de points alignés puisque nous savons que la ligne droite est le plus court chemin. Certes, mais cela ne fait que redonner une certaine naturalité à la preuve *a posteriori*. Car rien ne nous dit a priori comment passer par construction du problème initial à ce problème d'alignement[11]. Heureusement, le 17ème siècle est passé par là, le développement de l'analyse ayant justement eu à cette époque pour

11 Tant qu'on ne connaît pas le résultat. Une fois qu'on le connaît, les angles de 120 degrés et la recherche d'alignement (180 degrés) peuvent faire penser à une rotation de 60 degrés).

moteur principal l'objectif de traiter ce type de questions d'une manière générale et efficace, sans recours aux "astuces" miraculeuses (cf. section 3.4).

Toujours est-il que cette preuve nous donne un moyen direct de construire ce point de Steiner puisqu'il doit se trouver à l'intersection des droites (*AB*'), (*BC*') et (*CA*') :

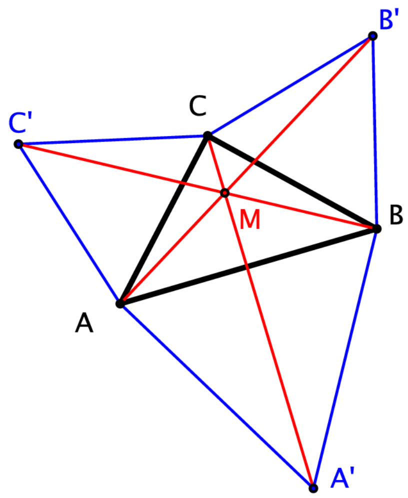



*Figure 4 - Construction du point de Steiner.*

### *2.3. Le point de Steiner - une deuxième preuve*

Voici une deuxième preuve que ce point *M* est tel que e $\widehat{BMC}$, $\widehat{BMA}$ t $\widehat{AMC}$ sont égaux. Nous admettons toujours que ce point *M* existe. Supposons qu'il soit différent des sommets du triangle. L'ensemble des points *P* tel que *PA*+*PB*=*MA*+*MB* est une ellipse de foyer *A* et *B*. Sur cette ellipse, le point *M* est celui qui minimise la distance entre *C* et *M*. Ainsi, c'est le pied du point *C* sur l'ellipse. Mais alors la tangente à l'ellipse se doit d'être perpendiculaire à la droite (*MC*). Il ne reste plus qu'à invoquer une propriété de l'ellipse pour conclure : les angles faits par la tangente en *M* avec les deux droites reliant *M* aux deux foyers *A* et *B*, i.e. les droites (*MA*) et (*MB*) sont égaux. Ainsi, il est clair que les angles *BMC* et *AMC* sont égaux. Comme on peut répéter l'argument à partir des sommets *B* et *C*, on obtient le résultat voulu.

### *2.4. Le point de Steiner - une troisième preuve*

Voici une dernière preuve, qui mobilise plus de connaissances mais qui a l'avantage, entre autres, de donner l'existence de ce point $M$, outre la propriété des angles égaux. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui à un point $M$ du plan associe $f(M)=MA+MB+MC$. La fonction distance à un point étant continue, et comme $f(M) \geq f(A)$ si $M$ est en-dehors du disque de centre $A$ et de rayon $AB+AC$, son minimum est atteint[12] en un point $M$. Donc ce point $M$ existe.

Si ce point M n'est pas un des sommets du triangle, alors la fonction est différentiable en ce point et écrire que sa différentielle est nulle, condition nécessaire pour être un point de minimum, donne directement que

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}+\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}=\vec{0}$$

La somme de trois vecteurs unitaires ne pouvant être nulle que si ces trois vecteurs unitaires forment des angles égaux deux à deux, nous avons donc montré que les trois angles $BMC, BMA$ et $\widehat{AMC}$ sont égaux si $M$ n'est pas un des sommets du triangle.

Si $M=A$, par exemple, $f$ n'est plus différentiable en $M$ mais rien n'empêche d'écrire que $f(P) \geq f(A)$ pour tout point $P$. Fixons $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ et posons $P_\varepsilon = A+\varepsilon\vec{u}$ pour $\varepsilon>0$. Ecrivons que

$$f\left(P_\varepsilon\right)=\varepsilon-\varepsilon\frac{\langle\overrightarrow{AB}|\vec{u}\rangle}{AB}-\varepsilon\frac{\langle\overrightarrow{AC}|\vec{u}\rangle}{AC}+o(\varepsilon)$$

où $o(\varepsilon)$ désigne une quantité qui devient négligeable devant $\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\frac{\langle\overrightarrow{AB}|\vec{u}\rangle}{AB}+\frac{\langle\overrightarrow{AC}|\vec{u}\rangle}{AC}\leq 1$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur unitaire $\vec{u}$ , on utilise le vecteur qui maximise le membre de gauche, i.e. $\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ avec

$$\vec{v}=\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

pour obtenir

$$\|\vec{v}\|\leq 1$$

ou encore, après développement,

12 Une fonction continue sur un compact, par exemple un disque, atteignant ses bornes.

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\left\langle\frac{\overrightarrow{AB}}{AB},\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right\rangle\leq-\frac{1}{2}$$

Ceci revient exactement à dire que l'angle $\widehat{BAC}$ est supérieur ou égal à 120 degrés. Ainsi, le point $M$ ne peut être en un des sommets du triangle que si l'angle en ce sommet est supérieur ou égal à 120 degrés.

Non seulement cette preuve nous donne l'existence d'un point $M$ mais elle nous permet de montrer également que ce point est unique. En effet, il est impossible, cf. la sous-section Le point de Steiner - une première preuve, d'avoir un point $M$ tel que les trois angles $\widehat{BMC}$, $\widehat{BMA}$ et $\widehat{AMC}$ soient égaux si un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120 degrés. De plus, cf. également section 2.1Le point de Steiner - une première preuve, il y a au plus un point $M$ différent de $A$, $B$ et $C$ ayant cette propriété.

## *2.5. Pourquoi tant de preuves ?*

Tout d'abord parce que cela donne l'occasion de faire une promenade mathématique à niveaux multiples (crescendo dans notre texte). Mais surtout car toutes ces preuves présentent un intérêt. La première a l'élégance des preuves géométriques élémentaires ; elle a l'évidence pour elle. Mais cette évidence ne vient qu'*a posteriori*, elle est trompeuse. La deuxième fonctionne de la même façon mais en utilisant un peu plus de géométrie (les propriétés de l'ellipse), elle gagne en naturalité. La minimisation de la somme des trois longueurs est nécessairement minimisation de la troisième, la somme des deux premières étant fixée. Une fois cette remarque faite, l'ellipse s'impose. La troisième utilise cet outil extraordinaire qu'est le calcul des variations (dans une forme simple), outil parfaitement adapté à tous ces problèmes où il s'agit de minimiser, maximiser, une quantité. Avec cet outil, on quitte le monde de la géométrie pure pour l'analyse. Mais ce n'est que pour mieux y retourner, muni des résultats de l'analyse. Une fois ces résultats obtenus, rien n'interdit de trouver une preuve géométrique, mais c'est toujours plus facile quand le résultat est connu. L'analyse ne nécessite pas d'avoir une intuition préalable du résultat[13], elle fournit des méthodes globales de résolution de problèmes.

Enfin, le mathématicien préfère toujours avoir plusieurs preuves d'un résultat. Non pas pour s'assurer encore plus de la véracité de celui-ci - pour cela, une preuve (juste) suffit - mais pour s'assurer une compréhension plus profonde du problème ainsi que pour se donner un réservoir de preuves à essayer sur des problèmes connexes et / ou plus généraux. Par exemple, c'est la dernière preuve qui se généralise aux surfaces dans $\mathbb{R}^3$ .

---

13 C'est le cas ici car le problème est simple. Il ne faudrait pas généraliser à toute l'analyse. Malgré tout, il y a une part de vrai là-dedans.

### *2.6. Et le carré ?*

La réponse naturelle est  : « les deux diagonales ». Cette réponse revient à tous les coups. Nous attendons naturellement autant de symétrie dans la solution que dans le problème de départ. Malheureusement, rien ne permet d'affirmer ce genre de propriétés. Seul l'ensemble des solutions aura nécessairement toutes les symétries des données initiales. Cette réponse donne lieu à une petite démonstration mathématique, toute simple, pour montrer qu'elle ne peut pas être la bonne. Tout est dans la figure suivante  :

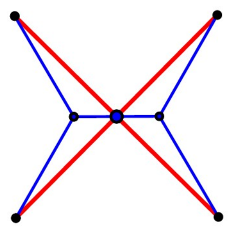


*Figure 5 - Le cas du carré*

Si les deux diagonales (rouges) constituaient le réseau le plus court pour joindre les 4 sommets du carré, alors elles seraient bien entendu également le réseau le plus court pour joindre les 4 sommets su carré plus le centre de celui-ci. Mais, pour joindre le centre avec deux sommets consécutifs du carré, c'est le réseau bleu qui est le plus court, ce que nous avons vu en traitant le cas du triangle. Ainsi, le réseau bleu est plus court que le réseau rouge. « Les deux diagonales » ne peut donc pas être la bonne réponse. Rien ne prouve que le réseau bleu soit minimal. En fait, c'est le cas mais nous ne l'avons pas démontré. Il n'a pas toutes les symétries du carré mais, par rotation de 90 degrés de centre le centre du carré, on obtient une autre solution au problème de Steiner. L'ensemble des solutions possède toutes les symétries du carré.

Sur cet exemple, nous voyons bien avec les élèves comment la réponse dans le cas le plus simple (celui des triangles) permet de démontrer des choses sur les cas les plus compliqués.

### 2.7. *Et ensuite ?*

Dans le cas général, nous serions bien en peine de trouver le réseau optimal. C'est même un problème algorithmique compliqué. L'application citée ci-dessus, tout comme le savon[14], ne donne que des solutions minimales locales ; trouver la solution optimale est autrement plus difficile. Mais une chose que nous pouvons démontrer[15] est que le réseau sera constitué de segments de droites, les intersections se faisant 3 par 3 avec des angles égaux.

## 3. Les surfaces minimales

Nous pouvons ensuite avec les élèves revenir à la question initiale posée le plus souvent dans le cadre des surfaces dans l'espace, les formes étant tout de même beaucoup plus jolies et surprenantes. L'intérêt du texte écrit devient limité, il faut alors absolument manipuler. Disons juste qu'avec le tétraèdre, nous retrouvons dans l'espace ce qui se passait pour le triangle et que le cube fait penser au carré. Disons aussi que les formes obtenues avec l'octaèdre sont tout simplement magnifiques.

Pour ceux ou celles qui auront la chance de voir ces manipulations (ou d'en trouver des photos), faisons remarquer que les plans semblent remplacer les droites, que ceux-ci s'intersectent trois par trois le long de droite avec des angles égaux, … Signalons tout de même que, dans l'espace, ce qui remplace les droites (qui minimisent localement la longueur) s'appelle « surfaces minimales » (qui minimisent, ou plus précisément qui sont points critiques, localement l'aire) et que ce monde est vaste : il n'y a pas que les plans qui soient des surfaces minimales. Mentionnons enfin que l'étude des surfaces minimales est un domaine de recherche extraordinairement actif de nos jours encore.

### *Références*

[1] Isenberg, C., (1978). *The science of soap films and soap bubbles*, Tieto Ltd.

[2] Laurain, P., (2011). *Mathématiques savonneuses*, Images des Mathématiques, http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html

---

14 En fait, cette application "imite" le savon.

15 Et nous ne sommes pas loin de pouvoir le faire rigoureusement avec ce que nous avons vu sur les triangles.

# Quelles mathématiques faut-il apprendre pour se préparer à répondre aux questions des élèves et à traiter leurs erreurs ?

## Le cas des commencements de l'algèbre

▸ *conférence en ligne sur canal-u*

**Alain Mercier***

**ADEF*
*Aix-Marseille Université, ENS-Lyon IFE*
*32 rue Eugène Cas*
*13006 MARSEILLE*
*Adresse mail : alain.mercier@ens-lyon.fr*

*RÉSUMÉ : Cet exposé repose sur le travail collectif des enseignants chercheurs (Yves Matheron, responsable du projet, Alain Mercier, Nadia Douek et Robert Noirfalise) et des 80 professeurs des équipes du projet AMPERES conduit par la Commission Inter-IREM « Didactique » et l'INRP. Il présente des résultats partiels mais cherche à rendre compte de ce que nous avons appris et démontré dans le cadre de la direction de plusieurs travaux doctoraux, qui ont donné lieu à publication : un enseignement non formel du travail algébrique est possible, mais cela suppose la constitution d'une culture collective des professeurs de mathématiques qui n'est pas formée dans le cadre de leurs études, quel que soit leur niveau de formation. En effet, cette culture ne relève pas des pratiques universitaires des mathématiques.*

*MOTS-CLÉS : commencements de l'algèbre, situations didactiques, outils symboliques, modélisation algébrique, systèmes d'équations, savoir professionnel.*

## Introduction

Nous appellerons « commencements de l'algèbre » ce qui, dans les programmes français, appartient au calcul littéral et dans le socle commun porte sur les expressions du premier degré ou sur des programmes de calcul. C'est l'initiation à ce que nous appelons le travail algébrique sur des formes qui sont supposées dénoter des nombres.

Chacun de ces termes, qu'il soit venu des textes officiels ou du travail épistémologique, prendra chair au fur et à mesure de l'exposé. Mais déjà, on peut en imaginer le sens en pensant à la géométrie euclidienne comme au travail géométrique sur des figures qui elles aussi sont supposées dénoter des grandeurs ou des nombres, et au lien entre les deux que faisait Descartes, appelant géométrie l'ouvrage où il expose les notations (devenues définitives ou presque) du travail algébrique.

## 1. ELEMENTS D'UN ETAT DES LIEUX

Voici ce que l'on trouve dans les programmes de Quatrième, classe traditionnelle de l'entrée dans un travail algébrique explicite. On y lit par exemple : « Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures (nous soulignons), se développe […] en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie (id). » Cependant, le texte définissant les attendus du « socle commun » se démarque : « dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue. »

### *1.1. Les textes institutionnels pourraient ouvrir des possibles*

En principe, un programme ouvre les possibles mais les professeurs (et souvent les corps d'inspection) les referment en enseignant seulement les exigences du socle (ce qui souvent élimine la plupart des objets de l'écosystème des exigibles et qui est une des causes d'échec repérée par les recherches sur ces questions. Les lettres figurant dans les formules et que l'on peut traiter comme des paramètres en font l'intérêt : que signifierait v=d/t (la vitesse est égale au rapport de la distance au temps), C=pQ (le coût est égal au produit du prix unitaire par la quantité), U=RI (la tension est égale au produit de la résistance et de l'intensité) ou S=eN (la surface occupée par la foule est égale au produit de l'espace occupé par chacun par le nombre des personnes rassemblées), si on restreignait ces « formules issues des sciences » à des « expressions à une seule lettre » ? Ce ne seraient plus des modèles dont on peut tirer la résolution algébrique ou graphique de l'équation qui rend compte de la question « quelle est la distance parcourue en trois heures ? », respectivement « le coût de douze tables de classe, la résistance connaissant l'intensité mesurée, ou le nombre de participants à un concert en plein air qui s'est tenu sur un terrain de trois hectares est-il plutôt de 20 000 ou de 5 000 ? (PISA 2000) » Les élèves ont le droit d'avoir été confrontés à de telles questions, qui selon certaines interprétations mobilisent des compétences n'appartenant pas aux exigibles du socle. Leurs parents et leurs professeurs devraient l'exiger.

Le résultat d'une interprétation réductrice des attendus du programme d'études, c'est que l'approche proposée aux élèves est finalement celle d'un système formel et c'est seulement *a posteriori* qu'un sens peut être cherché, pour des manipulations apprises formellement : ce que les attendus cités ici montrent déjà en nommant « calcul littéral » le domaine de pratiques auquel il s'agit d'initier les élèves, « lettres » les paramètres, variables, inconnues désignant des grandeurs, et « transformation d'écritures » le calcul permettant d'extraire une inconnue, d'exprimer une grandeur comme fonction des autres, de démontrer que deux formules sont équivalentes.

C'est pourquoi nos observations vont montrer que les programmes du Collège se paient de mots : « À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration**,** *les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique* : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution. » De fait la description du travail à faire contredit ces déclarations d'intentions : « De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules) […] apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation » et voici que les expressions littérales se trouvent opposées aux nombres, ayant perdu leur force dénotative. La suite le confirme : « - apprendre à effectuer des transformations simples d'écriture ; - initier à la notion d'équation. » ce qui signifie : « -*Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est* vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques. […]. *La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun*. »

Et en Quatrième le développement suit la même logique et le commentaire interdit de fait les formules dont l'intérêt est d'être paramétrées et donc, de donner des modèles généraux pour de vastes catégories de problèmes, méritant ainsi d'être étudiées.

### *1.2. Dans les manuels puis les classes,* **Factoriser** *est défini formellement*

« C'est transformer une expression, de la forme d'une somme à celle d'un produit » ; « C'est l'opération inverse du développement » ; « C'est écrire une expression sous la forme d'un produit de facteurs » écrivent les manuels (Abou Raad & Mercier, 2004). C'est donc une opération sur une forme, dont la présentation sur des exemples est faite par le professeur qui ainsi « la démontre ». Cette démonstration d'une manière conventionnelle de faire peut être répétée indéfiniment, et s'accompagne d'un commentaire qui n'arrive ni à justifier les manipulations réalisées ni à en donner le contrôle. En effet, la question de ce que les expressions expriment (ou plutôt, dénotent) n'est pas posée et ne pourrait l'être dans les termes qui sont proposés. Ainsi, Abou Raad et Mercier observent que les professeurs disent : « entre les deux on a un moins, avant et après on a un carré, on est donc arrivé à la troisième égalité remarquable » ou « Il n'y a pas de double produit, alors c'est a deux moins b deux » et encore « Il y a trois termes, c'est une des deux premières identités, j'écris une parenthèse et un carré à l'extérieur et pour le signe, je regarde le terme du milieu. » On peut dire que les professeurs inventent des discours non mathématiques pour nommer des pratiques supposées mathématiques. Or leurs manières de dire devraient faire fonction de théorie pour les formes que les élèves apprennent à manipuler, d'autant plus qu'on voit là tout ce que sera, pour la majorité de la population, l'expérience du travail algébrique. Le problème des professeurs produit le problème des élèves.

Nous reconnaissons donc ici les caractères de la transmission par l'usage des manières de faire : « y'a rien à savoir ! » vous dit-on, puisque « il n'y a qu'à faire ! » Depuis toujours, celui qui sait « démontre » la bonne combinatoire des assemblages en faisant le travail : il démontre le travail (ici, algébrique) comme un ensemble de manipulations formelles qu'il peut faire ; il montre qu'il anticipe les effets de son action (ici, la forme des écritures, en traçant par avance les parenthèses et les signes opératoires). Nous explorons ce phénomène qui pèse sur l'enseignement tout autant que naguère l'appel systématique au travail axiomatique de la réforme de 1970. Il est mondial.

Mais poursuivons l'exploration rapide engagée et son analyse. Comme personne ne peut agir de manière efficace sans avoir les moyens de parler de ce qu'il fait, professeurs et élèves nomment les objets sur lesquels porte l'action (il y a trois termes, j'aurai un carré avec un signe), ainsi que les relations qui sont expérimentées dans cette action (c'est la première identité). Et pour cela ils inventent des termes et des descriptions ad hoc (pour le signe je regarde le terme du milieu) qui peuvent augmenter les difficultés : ainsi, la bonne gestion des signes et des termes renforce les comportements de « conservation de l'information ostensive » dont on a montré (Tonnelle, 1979) qu'ils fondent les erreurs de manipulation algébrique qui perdurent des années durant. Michel Serfati (2005) décrit ainsi les pratiques relatives aux assemblages de symboles algébriques : « ce que nous appelons écriture ou expression est un assemblage symbolique ; l'assemblage bien formé de deux signes chiffrés comme 14+23 dénote un nombre, dont le signe chiffré est 37. » Et plus loin « (2p–1) + (2p+1) ne dénote aucun nombre mais peut être réduit à 4p. Cette réduction démontre que la somme de deux impairs consécutifs (…) est multiple de 4. » Un enseignement formel assumé porterait sur les assemblages bien formés et leurs usages. Pour autant, qu'on nous comprenne bien, nous ne pensons pas que la solution des difficultés des élèves et de leurs professeurs soit là, et nous cherchons donc une alternative. Le fait que le problème des élèves ait été identifié dans le monde entier, montre que la solution n'est pas évidente mais nous avons appris a minima qu'il faut interpréter un assemblage, pour dire ce qu'il dénote, ou pour comprendre ce qu'il démontre. Étudier ce qu'un même assemblage peut dénoter, et quels sont les systèmes de règles de manipulation que permettent les notations algébriques (qu'on pourrait comparer par exemple aux propriétés des notations géométriques), ne peut être un enjeu que dans un travail universitaire, mais ne figure pas semble-t-il dans le formation mathématique des futurs professeurs.

### *1.3. Ce type d'enseignement* par dressage *produit des idées erronées et des apprentissages lents*

Dans ces conditions, les élèves s'essaient donc à faire sans savoir, ils tâtonnent et généralisent sans contrôle. Les erreurs que l'on observe élèves sont les mêmes en tous pays au début du travail algébrique, comme nous l'avons noté plus haut et par exemple ils proposent avec insistance la transformation connue : $a^2 – b^2 = (a – b)^2$ qui conserve toute l'information que porte l'écriture puisque l'on retrouve les lettres a et b, le signe –, l'exposant 2. La mise en commun de 2 entre a et b revient donc aux étourdis, comme un mauvais pli. Et pire, les élèves peuvent bien en être persuadés, puisqu'ils y voient la transformation introduisant les parenthèses rondes, connue d'eux sous le nom de « distributivité ». Tonnelle a appelé le principe qui rend compte de cette manière « la conservation de l'information ostensive ». Ce type d'enseignement conduit à des apprentissages si lents qu'il est fort peu efficace : la plupart des gens s'y refusent et oublient rapidement tout cela, les autres apprennent une mécanique formelle qu'ils ne peuvent que difficilement retravailler pour en faire évoluer le sens ou les manières, puisqu'ils n'en disposent pas comme d'un savoir (Mercier, 1992).

## 2. PEUT-ON IMAGINER UNE AUTRE VOIE, NON FORMELLE ?

Ces représentations (en mathématiques, ce sont des systèmes de notations) sont des créations humaines sur lesquelles la pensée s'appuie. C'est ce qu'on appelle en mathématiques le calcul dans les modèles. Ainsi la pensée n'est plus en rapport immédiat au monde, et au-delà de la langue, dont l'expérience montre les insuffisances, la pensée s'outille d'artefacts, les représentations organisées en modèles d'un domaine de réalité. Nous affirmons que les représentations représentent non pas le monde, mais les idées que notre action dans le monde nous conduit à former sur le monde. Cela explique qu'on ne puisse pas enseigner efficacement la manipulation formelle des représentations.

Nous allons donc imaginer la genèse artificielle des connaissances algébriques scolaires sur le modèle générique d'un type d'objets qui a fait irruption dans la culture commune avec les usages de l'informatique, les jeux de console. Ceux-ci répondent en effet à certaines des conditions données par les théorisations de l'action en situation didactique, et ils fournissent donc une métaphore efficace pour les élèves comme pour les professeurs :

- le joueur s'y oppose à un milieu dénué d'intentions mais organisé, dont il apprend les propriétés pour y agir ;

- l'organisation des tableaux construit une progression en mettant en jeu la survie du joueur, qui en cas d'échec peut cependant rejouer du début.

De ce fait, l'idée permet de réinterpréter la théorie des situations (Brousseau,, 1997) en repensant les propriétés d'une « situation d'action » comme celles d'un « jeu vidéo par tableaux ». La différence tient bien sûr dans l'enjeu, qui est dans un cas la seule réussite de l'action et dans l'autre l'apprentissage d'un savoir. C'est pourquoi les situations didactiques ne sont pas seulement des jeux dans un milieu mais des jeux sous contrat didactique. Cela demande l'intervention d'un professeur, dont l'action a pour objet la désignation de l'enjeu didactique de la situation d'action, ce qu'il fait à la fois en jouant sur les variables de cette situation et en désignant explicitement cet enjeu comme savoir à apprendre.

### *2.1. La banque de problèmes permet de désigner aux élèves un type de tâche à étudier*

L'organisation des problèmes en « tableaux » permet de donner aux élèves la responsabilité de la résolution d'un *type de problèmes* (Chevallard, 2007), dont on organise l'exploration en tableaux de difficulté croissante. Pour notre premier exemple (banque de problèmes modélisables par un système de deux équations à deux inconnues) en 3ème, au début de l'année, les élèves ne disposent que connaissances arithmétiques et de quelques techniques relatives aux équations du 1er degré à une inconnue.

La donnée simultanée de plusieurs problèmes permet au dispositif d'engager les élèves vers l'épreuve de leur stratégie de première invention, le débat entre élèves est proposé à tout moment, entre élèves travaillant sur les mêmes problèmes, et c'est la comparaison de l'efficacité des modèles proposés qui fera la sélection des modèles pertinents et des stratégies efficaces. Le professeur peut cependant intervenir sur le travail d'un élève, chaque fois qu'il le juge utile, et organise la rencontre des élèves avec les situations que les problèmes de la Banque évoquent, en proposant différents moments de l'étude.

On peut parler en ces termes du processus qu'il conduit :

a) Pour chacun des niveaux de l'étude, le professeur organise, dans la classe, les conditions d'un débat qui permettra à chaque élève de passer progressivement de l'idée qu'il aura eue et de l'action qu'il aura mise en œuvre lors d'une phase de recherche personnelle à une manière de faire plus assurée.

b) Chaque élève aura éprouvé l'efficacité de sa manière, parce qu'il l'aura confrontée et, peut-être, partagée avec les autres élèves d'un groupe de travail. Il considérera ainsi la manière de faire qu'il se propose comme une stratégie d'action.

c) Le groupe des élèves accédera ainsi à une technique - une manière efficace qui sera devenue traditionnelle et qui aura été validée lors d'une présentation à toute la classe et d'un débat entre les groupes.

d) Chaque élève pourra alors éprouver personnellement la pertinence de cette technique, dans le traitement des problèmes sur lesquels lui et son groupe auront échoué dans un premier temps, juger de l'efficacité que procure son usage, poser les problèmes que pose sa mise en œuvre dans des situations nouvelles.

Le fait que les problèmes étudiés soient linéaires garantit que le tâtonnement produira une première connaissance du mode de vie du problème. La culture algébrique (minimale, mais existante) des élèves et l'intervention du professeur, qui oriente vers l'étude des comptes-rendus écrits de leurs stratégies en les faisant d'abord communiquer par groupes puis, en leur proposant la rédaction d'un transparent pour exposer à la classe, évitent cette impasse qu'est l'arithmétique : le raisonnement ne doit pas risquer de remplacer la modélisation algébrique. Nous savons que des formules numériques de la forme « 2 lits × 5 chambres + 8 chambres = 18 personnes logées » apparaissent d'abord comme moyen de vérifier qu'une première idée selon laquelle 5 chambres à deux lits et huit chambres à un lit permettent de loger 20 personnes est plausible mais fausse. L'usage systématique de ces écritures montre un format répété qui peut s'écrire $2x + y = 20$ et être l'objet de tentatives de traitement algébrique. Enfin, grâce à l'organisation explicite de la Banque en tableaux, le professeur peut organiser l'étude des diverses stratégies et des discours justificatifs qui leur sont associés, dans les divers temps de débat. La banque garantit en effet que les élèves sont en état de débattre de la validité des stratégies qu'ils proposent, parce qu'ils savent valider leurs réponses à partir de la connaissance qu'ils ont acquise par tâtonnements. Ainsi, l'accès à la banque peut être libre, et ne pas être limité au temps de classe. Voici donc le texte initial distribué aux élèves et lu collectivement :

*Avertissement*

*Les problèmes proposés ici relèvent tous d'une même classe, ce qui signifie qu'il existe une méthode générale de résolution de tous ces problèmes. Ils sont proposés à votre étude afin que, en cherchant une méthode pour en résoudre un, vous vous fassiez une idée des mathématiques qui sont au programme puis, en cherchant à les résoudre tous avec l'aide de vos camarades et sous la direction de votre professeur, vous puissiez découvrir par vous-même une partie des mathématiques au programme de votre classe.*

*Ces problèmes sont choisis de telle manière que vous puissiez résoudre certains d'entre eux avant même de connaître une méthode mathématique valable pour tous : pour chacun d'eux, vous pouvez vérifier par vous-même si votre réponse est juste. Cependant, leur difficulté graduée augmente de tableau en tableau avec votre expérience et vos connaissances : vous pouvez donc tenter de les résoudre tous d'emblée ou, au contraire, vous pouvez attendre que le travail collectif fait en classe vous ait donné accès à des méthodes éprouvées et mathématiquement* *reconnues. Vous emporterez chez vous ce cahier, pour chercher une solution aux problèmes que vous n'auriez pas résolu en classe ou pour étudier à loisir comment utiliser la méthode inventée par un autre élève ou par un autre groupe : vous pourrez ainsi vérifier si une méthode est valable pour tous les problèmes ou si elle échoue dans certains cas.*

L'annonce explicite de l'enjeu du travail proposé définit donc une situation, pour les élèves comme pour le professeur. L'idée que les mathématiques sont une invention permettant de résoudre des types de problèmes et non pas des problèmes isolés, aléatoirement rencontrés, est ici essentielle. Le professeur doit le savoir, pour « garder le cap » et ne pas prendre de décisions contraires au mouvement engagé. Le commentaire indique que toutes les idées sont bonnes à suivre. Nous verrons l'effet de cette déclaration avec le travail du premier élève que nous présenterons. La question de la vérification du résultat d'une stratégie personnelle est une des conditions de son existence. L'annonce de leur graduation permet enfin à un élève de s'arrêter en chemin et d'attendre, pour bénéficier des avancées des autres. Cela garantit le progrès collectif.

Les quatre problèmes du premier tableau sont les suivants :

*Premier problème : A la clinique "la Sauvegarde", il n'y a que des chambres à un lit et des chambres à deux lits. Aujourd'hui la clinique est complète : vingt malades occupent tous les lits des 13 chambres. Combien de chambres à un lit et de chambres à deux lits y a-t-il à la Sauvegarde ?*

*Deuxième problème : Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?*

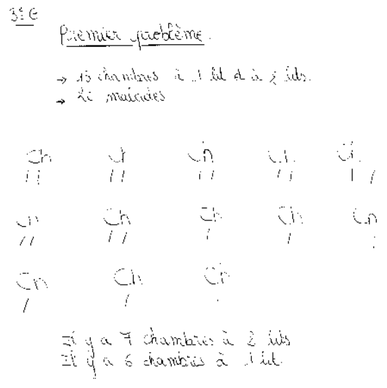
*Troisième problème : Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge…*

*Quatrième problème : Dans une colonie de vacances il y a des dortoirs de 5 lits et des dortoirs de 7 lits. Il y a 79 dortoirs et 469 enfants dans la colonie, où il n'y a plus un lit libre. Dans cette colonie de vacances, combien y a-t-il de dortoirs à 5 lits et de dortoirs à 7 lits ?*

On observe que les élèves commencent à chercher en utilisant diverses techniques personnelles, en recourant à des dispositifs ostensifs très variés. Nous trouvons un éventail étendu de ces objets graphiques : dessin de chambres et lits, écritures en toutes lettres, flèches, traits, symboles mathématiques, etc. Certains de ces ostensifs (Bosch & Chevallard, 1997) sont des symboles appartenant au monde du travail algébrique et ont été précédemment introduits en classe comme les symboles d'opérations : croix + trait – étoile × deux points : mais aussi comme le symbole d'égalité : deux traits = et les symboles d'agrégation : parenthèse ouvrante (, parenthèse fermante ), ou le trait de fraction _____ et même, l'accolade }. Les productions des élèves sont donc variées et le professeur peut suivre leur évolution. Nous présentons ci-dessous deux exemples de ce que l'on rencontre.

### 2.2. *Premières productions : Albert*

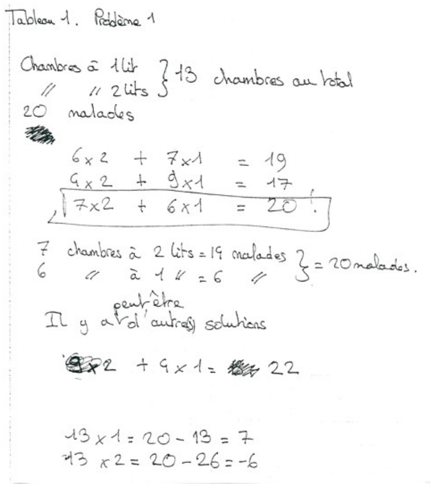
Pour Albert, au-delà du tâtonnement, une première stratégie est portée par cette représentation, qui est iconique mais permet l'expérimentation : situer les chambres par le signe « ch » et placer sous chacune des traits représentant les lits des malades.




Nous avons vérifié que de très jeunes élèves réussissent à résoudre le problème par cette méthode, et notre commentaire initial a encouragé les élèves de 3e qui n'ont pas imaginé mieux à procéder ainsi. On remarque que cette représentation décrit « la distribution de 20 malades dans 13 chambres », et donne une formule de vérification que nous qualifierons d'autant plus aisément de « rhétorique » qu'elle ne mobilise aucun symbole algébrique mais seulement les nombres en symboles chiffrés. La technique est efficace sur les deux premiers problèmes de ce premier tableau. Elle conduit Albert à développer une stratégie consistant à attribuer deux lits à chacune des chambres, avant de créer des chambres de quatre lits jusqu'à obtenir le nombre total de lits de l'énoncé. C'est une stratégie qui n'est déjà plus un tâtonnement bien qu'elle ne puisse être qualifiée de fausse position. Elle permet en effet un calcul direct, que nous observerons pour le problème suivant : 12 chambres à deux lits par chambre, cela fait 24 lits ; le nombre de lits restant est 30 - 24 = 6, il reste donc à fabriquer 3 chambres à 4 lits. S'il fallait qualifier cette technique nous dirions qu'elle appartient donc plutôt au monde du raisonnement combinatoire.

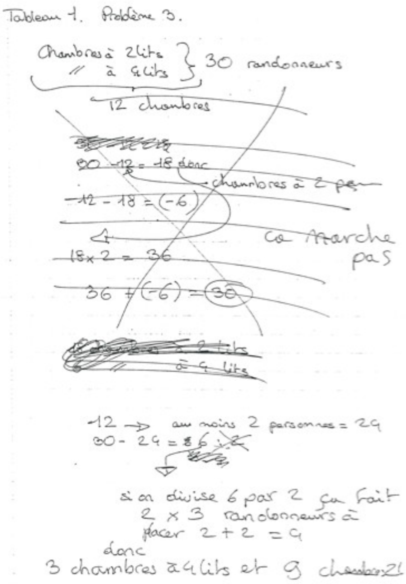
### 2.3. *Premières productions : Bernadette*

Pour Bernadette, le tâtonnement est organisé par sa présentation sur la feuille, et




l'usage immédiat de la formule numérique mobilisant les symboles ×, +, =. Les meilleurs élèves commencent ainsi. On remarque aussi une disposition des écritures tentant de rendre compte des deux contraintes de l'énoncé en utilisant les deux directions du plan, ce qui sera atteint au deuxième essai. L'accolade sépare alors les raisonnements sur les chambres et sur les malades, et en montre les liens entre les deux énoncés qui déterminent les contraintes du problème.

L'élève conduit l'exploration à partir de cette représentation,. La formule en ligne est donc un acquis central, que le professeur aura à faire diffuser en organisant rapidement un exposé des diverses manières de traiter le problème que porteront les divers groupes d'élèves. La forme rhétorique qui est utilisée pour énoncer une première réponse est donc liée à donc une forme de type algébrique, calculable, permettant l'exploration : un modèle du problème. Cependant, la présentation du résultat montre l'usage rhétorique du signe =, pris comme verbe d'un énoncé.




Au troisième problème, Bernadette pense les deux équations avec deux accolades horizontale et verticale, mais cherche à sortir de la stratégie de tâtonnement. Elle imagine donc une suite d'opérations conduisant directement à un résultat : un algorithme. Mais si l'idée qu'elle met en œuvre (et qui est présente chez Albert) fonctionnait immédiatement dans le cas précédent (distribuer les randonneurs soit, remplir des chambres en y casant un randonneur ce qui permet de caser 12 randonneurs, et justifie une soustraction) elle doit être ici adaptée. On le comprend, le travail est toujours un raisonnement, les écritures algébriques ne sont pas manipulées formellement mais sous le contrôle de leur interprétation rhétorique. Nous verrons bientôt l'importance de ce raisonnement, qui apparaît chez des élèves fort différents.

### *2.4. Le travail d'enseignement : le jeu sur les variables de la situation*

Après la mise en commun des trouvailles de chacun dans des groupes dont l'enjeu était la production d'un transparent et la présentation à la classe du travail des 6 groupes de 4 élèves, lecture est donnée d'un « commentaire » qui ensemble fait la théorie de l'activité conduite et propose un premier prolongement à l'activité.

*Commentaire 1, lu après le premier tableau*

*a) Pour vérifier vos réponses, vous avez progressivement appris à écrire des formules qui notent, à partir des calculs correspondant au problème, l'égalité qu'il faut obtenir. Ces formules expriment les relations entre les grandeurs dont parle l'énoncé du problème, que l'on appelle des variables. L'ensemble des égalités qui doivent être vérifiées est un modèle de la situation que l'énoncé expose. Vous* *pouvez écrire un modèle de chacun des quatre problèmes du premier tableau : pour cela vous utilisez chaque fois deux variables, et vous pouvez voir un phénomène nouveau pour vous : la solution d'un de ces problèmes vérifie deux formules à la fois.*

*b) Pour chercher les valeurs des variables qui vérifient ces formules, on peut les considérer comme des équations : pour disposer d'une technique algébrique générale de résolution de ces problèmes, vous devez donc apprendre à résoudre ensemble deux équations qui comprennent chacune deux inconnues. Or, vous savez transformer une formule à l'aide des règles du calcul algébrique, il s'agit donc maintenant d'apprendre à faire systématiquement les transformations qui aboutissent à la réponse.*

*c) Vous pouvez reprendre chacun des problèmes du premier tableau : vous avez inventé des manières de les chercher qui peuvent vous aider à imaginer des calculs algébriques intéressants et vous pouvez vérifier vos calculs puisque vous connaissez les valeurs des variables qui sont les solutions du problème. Mais vous pouvez aussi tenter de résoudre les problèmes du deuxième tableau par des calculs et des raisonnements algébriques, puis, vérifier vos calculs après coup, en testant les réponses auxquelles vous aboutissez.*

La première partie du commentaire pose le problème nouveau de la classe : utiliser un modèle de la situation pour produire la réponse en cherchant la solution. Elle engage d'abord les élèves à reprendre leur travail sur les 4 problèmes de ce premier tableau, pour tester les nouvelles connaissances qu'ils peuvent mobiliser maintenant, ce qui permet à tous de rattraper le mouvement. Cela suppose que le professeur et les élèves reconnaissent comme formule des écritures du type de celles que l'on peut observer : « $33\times2 + 17\times1 = 83$ et $33 + 17 = 50$ » ou « 33 chambres à 2 lits et 17 chambres à 1 lit cela fait 83 lits pour 50 chambres ». L'accord des élèves est aisé parce qu'ils ont effectivement utilisé de telles formes comme des formats, soit pour guider le tâtonnement soit pour énoncer la réponse.

Mais le texte donné par le professeur va plus loin en nommant variables les grandeurs du modèle, qui peuvent varier pour donner selon le cas la formule numérique répondant aux contraintes (comme pour les exemples ci-dessus) ou une formule qui n'y répond pas (comme dans les tâtonnements des élèves). De ce fait, la notion de modèle peut prendre sens, à la fois comme forme générique des quatre problèmes proposés et comme forme spécifiée de chacun de ces quatre problèmes, permettant l'exploration formelle de l'espace des réponses possibles, exactes ou erronées. Le défi serait impossible à tenir s'il n'engageait les élèves à s'attaquer de nouveau aux quatre problèmes dont ils connaissent une solution, avant de vérifier que la nouvelle technique qu'ils auront inventée sera efficace sur les problèmes du deuxième tableau.

L'enjeu n'est absolument plus le même et il n'est plus question, par exemple, de représenter les situations par un dessin : le travail est dorénavant dans le monde des représentations symboliques (Brousseau, 2005). La confiance des élèves en leur capacité à produire une solution est fondée sur une propriété essentielle des expressions algébriques : on peut vérifier une proposition de solution en cherchant le nombre que la formule dénote lorsque l'on attribue une valeur numérique aux signes, et cette action est consistante avec une compréhension rhétorique des assemblages symboliques.

Les instructions de la troisième partie du commentaire ont donc pour enjeu de montrer aux élèves que le travail algébrique qu'ils peuvent engager se fera sous le contrôle des résultats qu'ils connaissent, et donc sous leur responsabilité.

### *2.5. Retour sur le premier tableau : Albert*

Après une mise en commun des trouvailles de chacun dans des groupes dont l'enjeu était la production d'un transparent et la présentation à la classe du travail des 6 groupes de 4 élèves, le commentaire a donc été lu.

On en voit les effets : Albert s'empare de la disposition de l'énoncé inventée par Bernadette et son groupe, puis il tente d'entrer dans un travail algébrique en nommant x et y les variables du problème, mais il n'arrive pas à une formule sur laquelle il puisse calculer. Albert s'attaque alors aux problèmes du deuxième tableau et là, le dessin est rendu impraticable, non seulement parce que les nombres sont grands mais aussi parce que les « pièces de 5 » ne peuvent être représentées comme « contenant 5 pièces de 1 », tandis que les « chambres de 4» contenaient « 4 lits » (et donc, pas 4 chambres de 1 lit : la forme langagière différente interdit d'énoncer la question des pièces pour la représenter à l'identique de la question des chambres).

*Deuxième tableau*

*Premier problème Dans mon porte-monnaie, il n'y a que des pièces à 1 euro et des pièces à 5 euros. Aujourd'hui j'ai 20 pièces et j'ai 56 euros. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?*

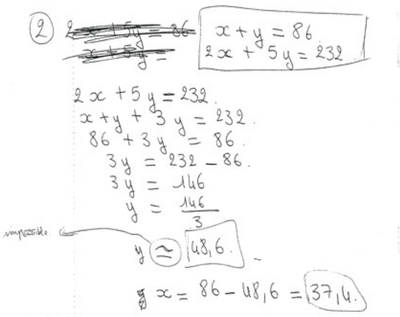
*Deuxième problème*

*Dans mon porte-monnaie, il n'y a que des pièces à 2 euros et des pièces à 5 euros. Aujourd'hui j'ai 232 euros et j'ai compté 86 pièces. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?*

Les problèmes portent sur la valeur et le nombre de pièces de monnaie. Cela a pour but de disqualifier la stratégie de distribution des malades dans les chambres. C'est de bonne guerre dans les jeux vidéo et cela ne devrait pas décourager Albert, qui va bientôt devoir reprendre son travail du début faute d'être entré dans l'apprentissage de la technique maintenant indispensable.

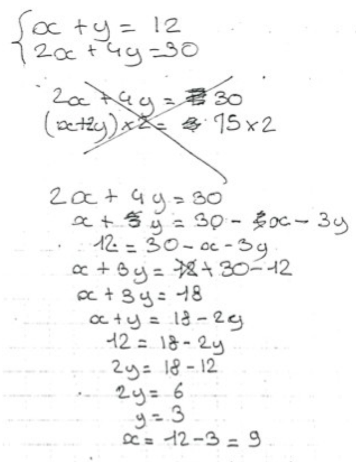
Et en effet c'est à ce moment que Albert se décide à revenir au premier problème du premier tableau avec la technique des deux équations, qui a entre-temps été présentée publiquement dans le commentaire et montrée au moins une fois à propos d'un des problèmes du premier tableau. Il écrira d'abord les formules de vérification avant de s'essayer au traitement des formules génériques tel que nous l'observons ici. Le dispositif fonctionne donc et bientôt, Albert écrit (difficilement) les deux formules qui modélisent la situation.

On le voit alors engager le travail sur ces formules et la stratégie est étonnante : il isole deux fois « x+y » dans 2x+5y=232 afin de le remplacer par 86. Oublions son erreur (c'est 2(x+y) qu'il cherchait à isoler, et cela fait 172). Remarquons que sa technique produit en effet une transformation radicale du problème : il n'y a plus qu'une seule inconnue et Albert sait résoudre ce type d'équations. Même, il en déduira la valeur de l'autre inconnue. Nous pensons alors que ce calcul démontre que le travail algébrique de Albert est fondé sur la manière dont il a raisonné quand il a résolu ce type de problèmes sans outil algébrique.




Ce travail algébrique est l'inscription d'un raisonnement : son écriture est sous le contrôle de ce raisonnement, qui fonctionne comme une théorie des manipulations possibles dans le monde dont les équations rendent compte. C'est en ce sens que nous pouvons donc affirmer que, pour Albert, la situation que nous lui avons proposée a fonctionné comme « une situation fondamentale pour le travail des systèmes d'équations », au sens de Brousseau (1997). Nous allons maintenant montrer que nos affirmations sont fondées sur des observables.

### *2.6. Du travail algébrique sur les formules à la résolution des équations*

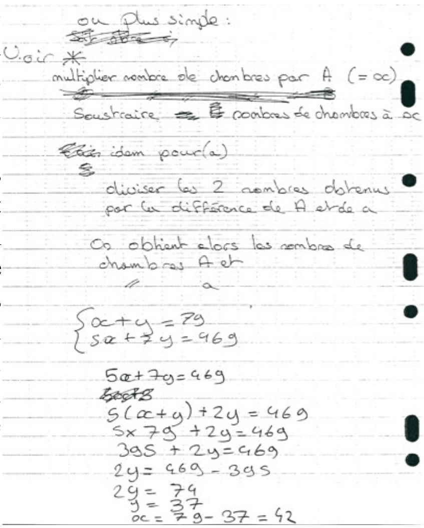



Le professeur va maintenant consister à orienter les élèves vers la production de raisonnements algébriques capables d'accompagner leur travail sur les systèmes d'équations. On voit ici la reprise du deuxième problème du premier tableau, par Albert, dont nous suivons l'évolution.

L'élève tente une transformation formelle du système, mais la manière dont les accolades sont utilisées ne porte pas l'information ostensive que portait le modèle des élèves, observé chez Bernadette..

Albert tente une autre transformation qui se fonde sur l'interprétation de ces écritures comme des formules : il transforme la formule 2x+4y=30 afin d'isoler x+y, ce qui lui permet de remplacer x+y par sa valeur, 12, et comme cela n'élimine pas x, il recommence ! Son calcul est exact. Que demander de mieux puisqu'il aboutit à la résolution de l'équation ?

On trouve ici enfin, sur la feuille de travail d'Albert, les deux formes du raisonnement qu'il a conduit, dans le cas du 4e problème du tableau 1, qu'il reprend en fin de séquence. L'observation de cette page permet de confirmer nos interprétations : le raisonnement qui avait été rédigé maladroitement pour son quatrième emploi et formalisé comme « méthode plus simple » pour résoudre tous les problèmes de ce type, supporte le calcul conduit sur les deux formules qui modélisent le problème et qui met en évidence, justement, cette différence entre ce que Albert nommait A et a.


ou plus simple :
Voir *
multiplier nombre de chambres par A (= x)
Soustraire nombres de chambres à x
idem pour (a)
diviser les 2 nombres obtenus par la différence de A et de a
On obtient alors les nombres de chambres A et a
$\begin{cases} x+y=79 \\ 5x+7y=469 \end{cases}$
$5x+7y=469$
$5(x+y)+2y=469$
$5\times 79+2y=469$
$395+2y=469$
$2y=469-395$
$2y=74$
$y=37$
$x=79-37=42$

Ce que nous observons n'est plus le travail de formes pures, vides de sens, que nous avons dénoncé en introduction. L'algèbre devient pour les élèves « La langue bien formée qui permet le calcul des raisonnements », ce qu'elle était pour ses inventeurs.

Cela suppose seulement mais c'est beaucoup, car cet exposé ne montre qu'une toute petite partie des difficultés à surmonter, sur une question seulement et à un seul niveau d'enseignement au Collège, que les élèves peuvent constituer le raisonnement sur les catégories de problèmes qu'ils apprennent à résoudre avant d'engager le travail algébrique de production d'une technique.

Les professeurs ne savent pas le chemin qui conduirait leurs élèves vers cette production. Son identification complète par l'ensemble de la profession supposerait des études spécialisées bien plus développées que ce que l'année de formation permet. Car le processus est loin d'être achevé : je n'en ai décrit que le commencement, mais comment les élèves vont-ils maintenant décrire leurs calculs ? Comment le professeur pourra-t-il nommer les opérations qu'ils réalisent s'il ne dispose que de deux propriétés axiomatiques (distributivité, conservation de l'égalité par soustraction d'un même terme aux deux membres). Par exemple, Albert *isole* l'expression x + y dans 5x + 7y, *substitue* à 5(x + y) sa valeur numérique 5×79 dans la formule, par ce procédé, il *élimine la variable* x et produit une équation à une inconnue qu'il résout etc. Ces termes sont-ils disponibles, normalisés, pourraient-ils faire l'objet d'un enseignement visant à démontrer leur consistance ?

Une des difficultés du mouvement didactique proposé, c'est par exemple que les élèves vont demander ce qu'il se passerait si on donnait trois équations, et il faudra alors leur montrer que trois équations à deux inconnues ne sont pas nécessairement compatibles, et que l'équation qui permet de donner la réponse est stable tant qu'elle est combinaison d'équations compatibles aux deux premières. Or « une technique systématique de résolution des équations du premier degré à une inconnue ne fait pas partie des compétences exigibles du socle commun » et on comprend les professeurs qui renoncent à l'usage d'un outil d'enseignement efficace mais trop technique : les sociétés inventent et utilisent les moyens technologiques que leur culture moyenne leur permet.

## 3. Discussion : ce que nous savons sur la question

### *3.1. Imaginer des situations pour faire émerger des représentations*

Nous appellerons notions des éléments de discours qui relèvent des expériences culturelles réalisées dans des domaines d'expérience. Les notations sont alors des objets substitutifs des objets du domaine d'expérience étudié comme domaine de réalité. Les notations rendent compte des pratiques dans ce domaine de réalité. Elles permettent des manipulations réglées (u calcul) sous le contrôle des notions et des discours associés, qui proviennent de l'expérience, et donnent un sens pratique au calcul. En ce sens, les notations représentent les propriétés des objets du domaine de réalité sur lesquels l'action se réaliserait.

En mathématiques, et surtout dans leur enseignement, les notations (des manières de représenter des objets et des relations pour en faire les objets d'un calcul) sont presque toujours données aux élèves comme des outils tout faits, qu'il suffirait d'apprendre à mettre en œuvre. Cela crée de nombreuses difficultés et des quiproquos dont l'exploration a été longue et difficile, je vous en ai rapidement présenté les résultats les plus significatifs.

Le problème est alors le suivant : de même que les outils mobilisés dans les pratiques quotidiennes ont une fonction de représentation de l'action, c'est leur sémioticité, ces outils désignent (à qui les connaît) l'activité qu'ils outillent ; ils désignent (à qui en connaît par expérience l'usage) la technique mobilisée pour résoudre le problème que l'activité rencontre, les notations montrent donc « ce que l'on pourrait faire ». Les notations, comme les outils, ne montrent cela qu'à qui connaît culturellement et personnellement leur usage. C'est un cercle vicieux comme on l'a vu pour le travail algébrique, mais il en va de même pour tous les apprentissages silencieux, par dressage sur le tas ou à l'école.

Une école devrait avoir d'autres ambitions que d'organiser l'apprentissage du travail algébrique par un dressage de plusieurs années. Mais il ne suffit pas de le dire et d'imaginer une voie de réponse, il faut aussi développer les infrastructures nécessaires à l'appropriation sociale de la technique qui résout la question : comme le transport aérien, qui suppose les aéroports, l'enseignement proposé ici suppose une culture universitaire productrice et porteuse de ces connaissances. La responsabilité de la situation n'appartient plus, aujourd'hui, aux IUFM et aux formateurs qui étaient sur le point de découvrir ces phénomènes en travaillant les questions didactiques qu'ils observaient. Elle appartient aux universitaires, dont on a supposé que leur manière de produire des mathématiques allait les conduire à savoir tout cela tout naturellement. Nous verrons bien, il suffit d'observer patiemment comme nous le faisons depuis quarante ans, à l'INRP et partout où des didacticiens travaillent, et de continuer à montrer que le chemin est connu, mais qu'il faut le viabiliser.

### *3.2. Comprendre le travail d'enseignement*

Quelques résultats en didactique, dont nous avons montré l'usage :

1) Pour nous, il faut donc appuyer l'enseignement sur des expériences culturelles ou anthropologiques (Dewey, 1958 ; Boero et al., 1995). Nous appelons *situations* les conditions de ces expériences et quand elles sont artificielles scolaires nous les appelons Situations Didactiques avec Brousseau.

Le travail du professeur est alors de définir des situations permettant l'émergence de représentations, puis de faire vivre ces situations, pour que les élèves identifient les représentations produites et en explorent les propriétés (Brousseau, 2005). C'est manifestement le travail de toute une profession et non pas celui de chaque professeur en particulier. Les didacticiens travaillent sur le fait que les élèves peuvent produire par eux-mêmes des représentations, qu'ils peuvent faire évoluer vers les notations attendues si on leur propose des situations adaptées. Les didacticiens ont vérifié que ce faisant, les élèves produisent les notions correspondantes à la condition que le professeur en observe les prémisses et les reçoive en les nommant.

2) Nous avons montré par ailleurs (depuis vingt ans que nous observons les élèves de tous âges et niveaux engagés dans un processus d'apprentissage), que des expériences culturelles ou anthropologiques non scolaires fournissent aux élèves les métaphores (les éléments discursifs) pour l'interprétation des situations didactiques qu'ils ont à affronter lorsqu'on les enseigne. Ces métaphores sont fondatrices de leurs connaissances: nous les qualifions pour cela de fondamentales. Le professeur doit savoir y faire appel en mobilisant les jeux de langage qui ont été formés à leur occasion.

Le travail du professeur est alors d'interpréter les pratiques de mathématisation initiales des élèves. Pour enseigner, le professeur qui a organisé une situation initiale accompagne les élèves en reconnaissant publiquement les pratiques mathématiques émergentes des élèves, afin qu'elles aient un avenir et que les élèves puissent développer collectivement une pensée outillée et validée.

3) Ce qu'il faut savoir pour accompagner les élèves dans les apprentissages que l'enseignement demande, c'est donc ce que sont ces expériences fondamentales et quelles sont leurs conditions d'évolution. Nous cherchons maintenant à montrer que dans des conditions bien définies (des situations que les professeurs doivent connaître), les élèves (qui mobilisent les métaphores fondamentales que la situation évoque pour eux et que le professeur connaît) peuvent produire d'eux-mêmes les

systèmes de notations dont ils ont besoin : mieux, ces systèmes sont ceux que l'on cherche à leur enseigner.

Le professeur en organise l'exploration, il nomme les objets ainsi produits et engage les élèves à développer des jeux de langage stables à leur propos pour accompagner le processus dans lequel les élèves s'engagent. Pour cela, il doit être au fait des moments nécessaires de toute situation didactique. Ces moments sont au moins trois, comme nous avons pu le voir sur l'exemple étudié :

1) la formation d'une expérience du problème,

2) la formalisation d'une représentation du problème,

3) l'étude et l'épreuve des propriétés de cette représentation.

En mathématiques, nos observations et nos travaux vont de la maternelle à la Terminale en passant par tous les niveaux intermédiaires (projets École Kleber, École Saint Charles, AMPERES). J'ai rapidement montré deux des moments du travail algébrique, en Troisième autour des systèmes d'équations à deux inconnues, correspondant environ à trois heures de travail en classe. Nous avons bien d'autres exemples, par exemple au début du Collège autour des premières écritures algébriques (Krysinska, Schneider et Mercier 2009), ou en Cinquième avec les programmes de calcul comme appui à l'introduction des relatifs. Nos travaux d'ingénierie consistent donc à développer les suites de situations 1) qu'un professeur puisse définir pour les élèves, 2) où un professeur puisse les accompagner parce qu'il en connaîtra les moments clés, les points d'appui et les enjeux épistémologiques : trois dimensions à décrire pour rendre nos productions robustes et fiables.

Les connaissances qu'un professeur doit mobiliser pour faire son travail sont multiples, elles relèvent de ce qu'appellerai, pour dire en une seule formule ce que j'ai tenté de montrer sur un exemple, une analyse épistémique des domaines d'expérience culturelle et des situations didactiques que ces domaines fondent. Des travaux en ce sens se développent, dans le monde (Shulman, 1986). Les auteurs qui réfèrent à Shulman appellent « Pedagogical Content Knowledge » les savoirs pratiques du professeur qui résultent de ces analyses, et Shulman affirmait, lors d'une conférence devant l'assemblée des professeurs de mathématiques des USA, que contrairement au dicton selon lequel « ceux qui savent faire font, ceux qui ne savent pas faire enseignent », il fallait bien comprendre que « ceux qui enseignent sont ceux qui ont une compréhension profonde de ce qu'il y a à faire. » J'affirme pour ma part, en complément de ce que dit Shulman, que pas plus que dans le cas des pilotes d'avion que dans celui des ingénieurs des travaux publics, « la formation de cette compréhension nécessaire ne peut être laissée aux hasards du développement de l'expérience professionnelle des professeurs. » Il y faut le travail collectif d'étude de ce domaine de réalité qu'est ce que nous appelons le didactique.

## 4. Bibliographie


Abou, R. N., & Mercier, A. (s. d.). Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 29. Num. 2*. p. 155-188.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., et al. (1995). Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. *PME conférence* (Vol. 1, p. 1–151).

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(1)*, 77-123.

Brousseau, G., Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990*. Kluwer academic publishers.

Chevallard, Y. (2007). Readjusting didactics to a changing epistemology. *European Educational Research Journal, 6(2),* 131–134.

Dewey, J. (1958). Experience and nature (Vol. 1). Dover Pubns.

Goody, J. (1997). *Representations and contradictions: ambivalence towards images, theatre, fiction, relics and sexuality*. Wiley-Blackwell.

Ma, L. (s. d.). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (Vol. 46).

Matheron, Y. (s. d.). *Mémoire et Etude des Mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique*.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changement de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique*.

Serfati, M. (s. d.). *La révolution symbolique*.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15(2),* 4–14.

Tonnelle, J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. DEA, universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille II.

# Ressources numériques, pratiques enseignantes et dynamique de la salle de classe

▸ conférence en ligne sur canal-u

**Ana Isabel Sacristán**

*Chercheuse invitée, IFÉ (mars-juillet, 2011)*

*Cinvestav-IPN*
*Depto. de Matemática Educativa*
*Av. Instituto Politécnico Nacional 2508*
*C.P. 07360 México, D.F., Mexique*
*asacrist@cinvestav.mx*

*RÉSUMÉ : On aborde le thème de l'intégration des ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et les implications pour la pratique et le rôle des enseignants, ainsi que sur la dynamique des salles de classe. On analyse les possibles contributions des ressources numériques pour l'apprentissage mathématique et l'on présente l'idée d'utiliser ces ressources comme catalyseurs de transformation des pratiques éducatives. On discute l'exemple d'un programme d'implémentation des ressources numériques aux collèges du Mexique, et les difficultés des enseignants pour changer leurs pratiques. Finalement on présente un modèle de formation professionnelle pour une intégration significative des ressources numériques aux pratiques enseignantes.*

*ABSTRACT: Here, we examine the issue of integration of digital technologies in the teaching and learning of mathematics, and the possible implications for the teaching practice and in the classroom dynamics. We analyse the possible affordances of digital technologies and present the idea of using those resources as a catalysts for transforming teaching-learning practices. We discuss an example of a program for implementing digital technologies in Mexican middle-schools, and the challenges that the teachers involved faced. Finally, we present a model of professional development for a meaningful integration of digital technologies in teaching practices.*

*MOTS-CLÉS : Ressources numériques, pratiques éducatives, transformation, formation professionnelle.*

*KEYWORDS: Digital technologies, teaching practices, transformation, professional development*

## Introduction

Dans cette présentation, j'aborde le thème de l'intégration des ressources numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et les implications pour la pratique et le rôle des enseignants, ainsi que sur la dynamique des salles de classe. J'aborde ce thème surtout à partir de mes propres expériences et observations, et de plusieurs recherches dans mon pays (le Mexique). Évidemment, l'intégration des ressources numériques dans les salles de classe est une nécessité inévitable face au monde numérique dans lequel nous vivons. Il y a un discours politique dans cette direction, ainsi qu'un *push*, de plus en plus fort, de la société. Mais cette intégration, si on veut qu'elle soit effective, n'est pas simple.

## 1. Usages plus communs et potentialités des ressources numériques

Pour commencer, regardons les usages que l'on fait des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que leurs potentialités *(affordances*) pour l'éducation. Kaput, Hegedus et Lesh (2007) décrivent les potentialités des ressources numériques en termes de celles qui apportent des infrastructures de représentation et celles qui supportent la communication. En termes généraux, on peut dire que quelques apports immédiats des ressources numériques sont :

- la facilitation des calculs : des simples calculs arithmétiques, à travers des représentations plus ou moins algébriques – e.g. en utilisant des calculatrices, des tableurs numériques, jusqu'aux systèmes plus symboliques et algébriques de calcul formel (*CAS*, en anglais),
- la facilitation de représentations visuelles et de leur construction,
- la facilitation de représentations dynamiques,
- la possibilité d'interactivité avec l'environnement numérique,
- la facilitation d'accès à l'information et à des moyens de communication, d'échanges et de connectivité.

Mais ces infrastructures de représentation et de communication ont un potentiel qui va plus loin de ce qui est immédiatement évident. Néanmoins l'usage que l'on fait de ces ressources reste souvent limité. Par exemple, dans une enquête menée en Amérique latine en 2006 (Julie *et al.* 2010) la réponse dominante dans beaucoup de pays de cette région à la question « quelles ressources numériques on utilise pour les classes de mathématiques », fût des logiciels d'édition de texte (Word, LaTex, PDF) et de présentation (Powerpoint), qui sont des outils dans ces cas utilisés pour la communication et non pas pour faire ou explorer les mathématiques. Dans une autre enquête récente au Mexique (voir Rodríguez-Vidal & Sacristán, 2011 ; dans ces actes) nous avons vu que la connaissance de logiciels qui peuvent êtres utiles pour les mathématiques, par des enseignants du second degré, est encore assez limitée (avec l'Internet étant la ressource la plus connue) et l'utilisation en classe est encore faible et plutôt pour faire, surtout, des graphes de fonctions. Dans ces deux enquêtes, l'utilisation d'autres ressources comme les tableurs numériques, les logiciels de géométrie dynamique et CAS (utilisé surtout en enseignement supérieur) reste encore très faible. Tandis que les deux utilisations plus communes (des ressources des suites bureautiques ; et des représentations graphiques de fonctions) représentent un emploi des ressources numériques limité à présenter et visualiser, c'est-à-dire pour la communication.

On peut même dire que certains autres types de ressources, comme les tableaux interactifs, sont plutôt aussi des ressources de communication, comme le sont beaucoup de ressources Internet (ressources de communication et d'accès à l'information). Il semble donc que l'utilisation dominante des ressources numériques en éducation (au moins au Mexique) est dirigée, au meilleur des cas, pour faire ou vérifier des calculs, ou vers l'information et la communication – comme le sont les TIC. Mais les technologies numériques sont beaucoup plus que des « TIC » (raison pour laquelle je préfère ne pas utiliser ce terme) et ont un potentiel, en particulier pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, plus fort. Et même quand on utilise des ressources qui ont un potentiel fort pour l'enseignement et l'apprentissage – ainsi que pour réaliser des investigations – des mathématiques, comme peut l'être un environnement de géométrie dynamique, les principes essentiels de ces ressources sont souvent sous-utilisés ou même oubliés. Tel a été le cas d'une observation d'un groupe d'élèves au Mexique qui devaient construire un triangle avec ses bissectrices avec Cabri-géomètre (figure 1). Au début de la séance de travail, ces élèves avaient fait une construction de manière parfaitement correcte, mais soudainement, ils ont tout effacé et ils ont recommencé leur construction ; quand on leur a demandé pourquoi ils avaient fait ça, ils ont répondu que c'était pour faire un triangle plus grand. Cela indique une méconnaissance de l'environnement et de la possibilité de déplacer les points (sommets du triangle) pour facilement agrandir le triangle ; peut-être l'enseignant n'a pas su transmettre à ses élèves un des principes des plus fondamentaux de la géométrie dynamique.

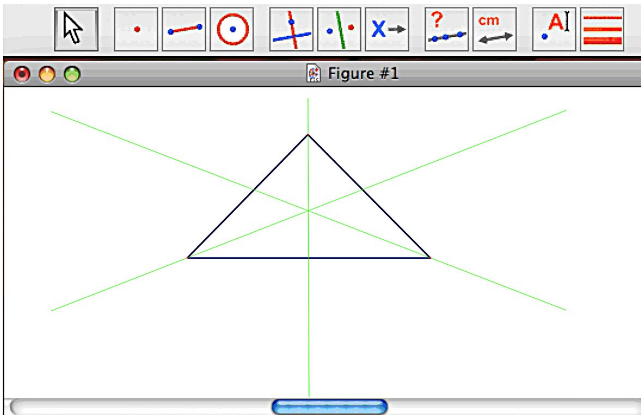



Figure 1 : *triangle et ses bissectrices en Cabri-géomètre.*

Un autre problème qu'on observe souvent au Mexique (voir Caballero, 2009), c'est que, quand les enseignants commencent à utiliser des ressources numériques en classe, c'est très souvent au niveau technique de l'utilisation du logiciel, avec peu de considérations mathématiques et avec des méthodes traditionnelles d'enseignement. En fait, il semble demeurer tendance à faire avec les technologies presque exactement les mêmes problèmes et activités qui étaient faits sans technologie et d'une façon très similaire, en n'utilisant souvent les ressources numériques que pour la vérification de résultats (Sacristán, Parada, Sandoval & Gil, 2009) ou pour faciliter les calculs ou la construction de représentations graphiques.

Mais, comme je l'ai déjà signalé, je considère que le potentiel des ressources peut et doit être exploité beaucoup plus. Je considère même que ces ressources ont un potentiel pour être *catalyseurs de transformation* de la façon dont on enseigne et apprend les mathématiques dans les écoles.

## 2. Les ressources numériques comme catalyseurs de transformation

Je voudrais ici rappeler une conception du potentiel des technologies numériques pour l'éducation mathématique qui me semble avoir été un peu oubliée. Depuis les années soixante-dix, Seymour Papert (1972, 1980) a considéré que les ordinateurs pouvaient être utilisés pour que les élèves « fassent des mathématiques » au lieu d'apprendre « sur » les mathématiques, en permettant que les élèves s'engagent dans des démarches d'investigation et aboutissent à leurs propres découvertes mathématiques. Il a donc proposé l'idée du « constructionisme » (Harel & Papert, 1991) où l'apprentissage est facilité quand on construit quelque chose d'externe (c'est-à-dire quelque chose qui puisse être partagé et discuté) comme peut l'être le code d'un programme d'ordinateur. Dans le constructionisme, l'idée de faciliter *l'expressivité* des élèves est centrale ; et les ordinateurs sont utilisés de cette manière : pour s'exprimer et pour *construire*.

Pendant les années 1980 et 1990, il y a eu beaucoup d'études pour l'enseignement des mathématiques avec succès, basées sur ce paradigme éducatif du constructionisme, surtout avec le langage de programmation Logo (Noss & Hoyles, 1996), mais la difficulté de leur appropriation et mise en pratique par des enseignants non formés, entre autres raisons, fut que ces expériences sont restées à petite échelle (pour une étude intéressante des problèmes sociaux d'appropriation de Logo, voir Agalianos, Noss & Whitty, 2001). En particulier, la dénommée philosophie Logo exige une transformation des pratiques d'éducation, et cela n'est pas facile. Mais en fait, c'est précisément ça qui peut être l'apport plus riche des ressources numériques : une transformation éducative, ainsi que de la façon d'aborder les mathématiques.

Plus récemment, Papert (2006) nous a défié à dédier 10 % de notre temps à réfléchir sur quelles nouvelles connaissances et pratiques enseignantes peuvent émerger des ressources numériques. Il a critiqué le fait qu'on utilise ces ressources pour servir des curriculums qui ont été créés sans elles, en disant :

« Nous n'aurions jamais eu des avions […] si on avait contraint les nouveaux transports aux horaires des bateaux et des charrettes à chevaux. Mais c'est ce que nous faisons dans nos écoles. […] les écoles sont dictées par des technologies, par des technologies obsolètes : le papier et le crayon ».

Il faut donc trouver des façons pour profiter des technologies. Ce n'est pas suffisant de faire la même chose que ce qu'on faisait avant, mais « embelli » ou aidé par des ressources numériques. Il faut une intégration significative des ressources numériques dans les classes de mathématiques.

## 3. Vers une intégration significative des ressources numériques dans les classes de mathématiques

Pour vraiment profiter du potentiel des ressources numériques, et pour intégrer ces ressources de manière significative dans les salles de classe, il faut repenser la pratique et les processus d'enseignement et d'apprentissage (même si ce n'est pas facile, comme on le discute ci-dessous). Les enseignants doivent développer de nouvelles compétences ; s'adapter aux changements apportés par ces ressources ; comprendre comment utiliser les outils pour exploiter leur potentiel ; modifier leurs pratiques afin de promouvoir un apprentissage significatif de leurs élèves.

Au Mexique, un programme national initié en 1997 et nommé Enseignement des mathématiques avec technologies (EMAT), a essayé d'incorporer dans les collèges des ressources numériques – en particulier des logiciels *expressifs universels*[1], tels que les tableurs numériques, la géométrie dynamique, calculatrices graphiques, et l'environnement de programmation Logo – avec un modèle pédagogique et un modèle d'intégration avec formation et support pour les enseignants (Rojano, 2006). Ce programme a été conçu en prenant comme fondements les résultats internationaux de recherche en éducation mathématique et sur l'utilisation de ressources numériques. Une des idées derrière la conception d'EMAT, c'était d'utiliser les ressources numériques et le modèle pédagogique, comme moyens (catalyseurs) pour transformer les pratiques éducatives de collège au Mexique (Rojano, 2006). Un aspect fondamental de ce programme fut donc le modèle pédagogique.

Pour la conception de ce modèle, et les recommandations (Ursini & Rojano, 2000) de ce que, dans EMAT, on a appelé les « laboratoires de mathématiques », on a utilisé beaucoup de fondements philosophiques et pédagogiques sous-jacents à l'idée de micromondes mathématiques proposés par Hoyles et Noss (1987). C'est-à-dire, on prend en compte les aspects pédagogiques (outils pédagogiques, rôle de l'enseignant, etc.), techniques (logiciels et ressources numériques, équipement), et du contexte de travail des élèves et de la dynamique de la salle de classe. C'est un

1 ressources « universelles » sont celles qui sont facilement disponibles ; les logiciels « expressifs » sont ceux qui permettent à l'utilisateur exprimer ses idées de quelque façon (par exemple à travers des constructions, des programmes, etc.), ou de modifier leur fonctionnement.

modèle où l'activité se centre autour de démarches d'investigation avec outils numériques, de divers thèmes ou problèmes mathématiques, par les élèves.

Il est pertinent de décrire ici sommairement ce modèle car je le considère comme un exemple pour une intégration effective des technologies numériques dans les salles de classe de mathématique. Dans les terrains pédagogiques et du milieu de travail, les activités sont structurées à travers des fiches de travail[2] (qui encouragent aussi la réflexivité) et on recommande que les démarches d'investigation soient réalisées dans un espace de travail collaboratif, avec deux ou trois élèves par ordinateur ; on conseille même de placer les ordinateurs dans la salle de façon telle que la discussion et l'échange d'idées soient facilités (par exemple en forme de U avec un espace de rassemblement au centre ; figure 2). Le rôle de l'enseignant est fondamental mais très différent du rôle traditionnel : il/elle est organisateur(trice) et guide, et doit encourager un esprit d'enquête et de réflexion parmi ses élèves ; mais il/elle doit aussi soutenir des discussions en classe pour rendre explicites les connections entre les activités avec technologies et les mathématiques formelles du programme scolaire, et pour que les élèves puissent présenter leurs idées à ses camarades.

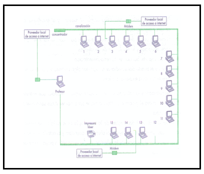


Figure 2 : r*ecommandation pour le placement des ordinateurs* (Ursini & Rojano, 2000)

Je considère que ce modèle a été assez bien conçu, encourageant un esprit (assez constructioniste) d'investigation, découverte et expression d'idées mathématiques, en essayant de combiner certains principes importants de la vision de Papert, avec un programme d'étude formel dans un milieu institutionnel. Mais même avec une bonne conception, tant pédagogique et technique, comme du point de vue administratif et d'implémentation, son application n'est pas simple (voir Sacristán & Rojano, 2009, pour un rapport de la mise en scène d'EMAT). En particulier (voir ci-dessous), il est clair que les changements nécessaires pour l'implémentation d'un tel modèle ne sont pas faciles pour les enseignants.

## 4. Les difficultés des enseignants de modifier leurs pratiques pédagogiques

Les résultats de plusieurs recherches (aux niveaux locaux ainsi que national) avec enseignants en service au Mexique, et en particulier de la mise en place du programme EMAT (par exemple Trigueros & Sacristán, 2008) montrent que, même si les enseignants sont enthousiastes pour l'intégration des ressources numériques,

---

2 Les fichiers de travail d'EMAT peuvent être téléchargés à partir de : <http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/emat/ematlibros.htm>.

dans leur pratique, ils doivent faire face à plusieurs difficultés. Un des problèmes principaux, c'est le manque d'expérience et de compétences techniques et pédagogiques de l'utilisation de ces ressources. Ces déficiences entraînent souvent des peurs et insécurités qui font que les enseignants évitent l'usage des ressources numériques dans leur pratique ; et cela engendre un cercle vicieux car, sans cette utilisation, ils ne pourront pas acquérir l'expérience et les compétences nécessaires pour surmonter leurs insécurités. Je considère que les façons limitées d'utiliser les ressources numériques discutées dans la première section de cet exposé, ainsi que l'approche traditionnelle d'enseignement qui souvent accompagne ce type d'usage, sont aussi dues à un manque d'expérience et de formation pédagogique.

Dans le programme EMAT, on a essayé de mettre en scène un programme de formation des enseignants. Mais, pour des raisons administratives qui dépassent le cadre de cette présentation (voir pour cela, Sacristán & Rojano, 2009), en général les formations furent trop courtes et insuffisantes. On a donc observé des problèmes de manque d'appropriation du modèle pédagogique (ainsi qu'un usage très inconsistant, irrégulier et discontinu des ressources numériques en classe). Par exemple, on a souvent observé un manque de capacité des enseignants à faire des interventions didactiques pendant les travaux pratiques avec technologies, ainsi qu'un manque d'activités de discussion et de réflexion (Trigueros & Sacristán, 2008) ; tandis que quelques enseignants ne laissaient pas à leurs élèves explorer librement les thèmes des activités d'investigation (Sacristán, 2005).

Cependant, on a aussi observé des cas de réussite ; comme celui d'un enseignant qui, graduellement, après plusieurs années de travail avec les ressources et le modèle EMAT, a réussi à développer, avec ses élèves, des démarches collaboratives d'investigation à long terme, en utilisant de manière intégrée plusieurs ressources (e.g. Logo, géométrie dynamique, tableurs numériques, ainsi que d'autres logiciels) pour, en particulier, explorer des concepts de trigonométrie : quelques-uns de ces projets furent ceux de « Trigonométrie sans douleur », construction de pyramides en 3D ou construction de la Tour Eiffel (voir Jiménez-M. & Sacristán, 2010).

Néanmoins, nous avons vu que, même avec une formation continue des enseignants et une volonté de changer de leur part[3], il a fallu, à peu près, trois ans pour que les enseignants arrivent a implémenter de manière effective les activités avec ressources numériques, et qu'ils changent de manière significative leurs démarches d'enseignement (Trigueros & Sacristán, 2008). À partir de ces résultats, nous avons conclu que ce qui est très important, ce sont les programmes de formation et de soutien continus des enseignants.

## 5. Un modèle de formation des enseignants

À partir du 2005, j'ai participé à un programme de trois ans de formation professionnelle pour enseignants de mathématiques, visant l'intégration des

3 Dans Sacristán (2005) nous avons montré que l'attitude des enseignants est un facteur important pour une intégration effective des ressources numériques en classe.

ressources numériques dans leur pratique enseignante. En prenant en compte les résultats comme ceux exposés ci-dessus, on a conçu un modèle de formation pour aider les enseignants-participants à développer des nouvelles compétences ; à comprendre comment utiliser les outils numériques pour exploiter leur potentiel ; à modifier leurs pratiques afin de promouvoir un apprentissage significatif de leurs élèves ; et à s'adapter aux changements entraînés par l'introduction de ces ressources et d'un nouveau modèle pédagogique. Pour cela on a favorisé des processus de réflexion et d'analyse de la pratique enseignante, comme recommandé par divers experts (voir : Godino, Rivas, Castro & Konic, 2008).

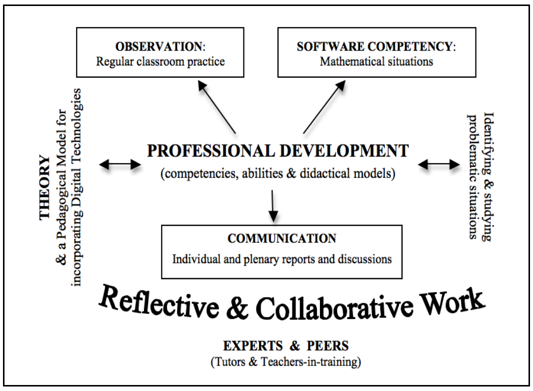



Figure 3 : le modèle de formation professionnelle

Dans la figure 3, je présente un schéma du modèle de formation professionnelle (présenté aussi dans Sacristán, Sandoval & Gil, à paraître) que nous avons suivi avec nos enseignants-participants, et qui comprenait plusieurs activités simultanées (j'utilise le terme « simultanées » car il y a eu une constante interaction de ces activités – les expériences pratiques ont enrichi les connaissances acquises dans le programme de formation à travers des réflexions individuelles et collectives[4]) :

i) *Formation et développement de compétences techniques et pédagogiques pour l'intégration des ressources numériques pour l'enseignement des mathématiques.* D'abord, on a voulu que les participants connaissent, tant de façon pratique que théorique, des ressources numériques potentiellement utiles pour leurs classes de mathématiques, en particulier des logiciels universels, comme les tableurs numériques, la géométrie dynamique, CAS et Logo, et quelques applets interactifs, en analysant les potentialités et limitations de chacune des ressources. On a aussi essayé qu'ils connaissent et comprennent un modèle pédagogique pour une intégration significative des ressources numériques ; pour cela, nous avons suivi, dans les activités pratiques du programme de formation des enseignants, un modèle pédagogique comme celui du programme EMAT décrit en haut, en encourageant les enseignants à participer à des démarches d'investigations collaboratives avec les

4 Pour un autre modèle intéressant pour la réflexion des enseignants, voir Parada-Rico (2011), dans ces actes.

ressources numériques comme des outils pour « faire », découvrir et exprimer des idées mathématiques (comme recommandé par Papert, 1972, 1980).

ii) *Conception, planification et mise en scène de stratégies et activités d'enseignement avec ressources numériques*. Entre chaque séance en présence de formation, les participants ont dû implémenter avec leurs élèves des activités avec ressources numériques, même s'ils se ne sentaient pas encore compétents. La philosophie était que « pour apprendre à nager, il faut sauter dans l'eau ».

iii) *Activités d'observation et de réflexion de leur pratique lors de l'implémentation des nouvelles technologies.* Pendant la mise en scène avec leurs élèves, on a demandé aux enseignants-participants de s'engager dans des processus d'auto-observation et réflexion de leurs expériences, ainsi que d'analyser les changements qui sont survenus ou dont ils ont éprouvé un besoin, et de faire des communications écrites de ces réflexions. Puis, dans les séances du programme de formation, ils ont dû discuter et analyser avec les autres participants leurs expériences et observations. On a aussi réfléchi collectivement à quelles nouvelles connaissances et pratiques enseignantes pourraient émerger de l'utilisation des ressources numériques, comme le demandait Papert (2006).

Pour aider les participants dans leurs réflexions, on leur a conseillé d'analyser les changements, en prenant en compte différentes perspectives (Sacristán, Sandoval & Gil, 2007) :

a.) La perspective de l'enseignant et de l'usage didactique des technologies :
- Changements dans le rôle de l'enseignant (d'exposant à médiateur) et les difficultés de ces changements ;
- Changements des méthodologies/stratégies d'enseignement ;
- Changements dans leurs croyances et conceptions ;
- Usage et conception d'activités et TP avec technologies numériques ;
- Articulation des activités avec les programmes d'études ;
- Conception de techniques d'évaluation pour les activités avec technologies numériques ;
- Complémentarité des différentes ressources numériques, entre elles, et avec celles sans technologies numériques (avec papier et crayon) ;
- Nouvelles connaissances mathématiques et nouvelles perspectives à partir de l'usage des nouvelles technologies.

b.) La perspective des interactions dans la salle de classe :
- Changements de la structure d'enseignement ;
- Changements des relations enseignant-élèves ;
- Changements des relations élèves - élèves (travail collaboratif) ;
- Changements de la disposition du mobilier et du milieu de travail.

c.) Le possible impact sur les élèves :
- En leur apprentissage ;

- En leur motivation. ;
- En leurs attitudes (envers les mathématiques), croyances et participation.

d.) La perspective technique :

- Connaissances techniques pour l'utilisation des ressources numériques (e.g. logiciels, ordinateurs) ;
- Autres difficultés techniques.

e.) La perspective du contexte social

- Changements dans la communauté scolaire ;
- Le rôle des autorités scolaires ;
- Impact sur, et collaboration avec, les autres enseignants ;
- L'interaction avec les parents.

Ainsi, on a travaillé, de près, avec six enseignants en service avec ce modèle de formation et de réflexion. Au bout de trois ans, tous ces participants ont changé considérablement leur pratique, tant avec technologies comme sans elles. Et leurs conceptions des processus d'enseignement-apprentissage ont aussi été modifiées, comme dans l'exemple ci-dessous. Il y a eu un consensus concernant l'importance des activités pratiques ainsi qu'activités réflexives, mais aussi sur le fait qu'il faut être patient car les changements sont très graduels et prennent du temps.

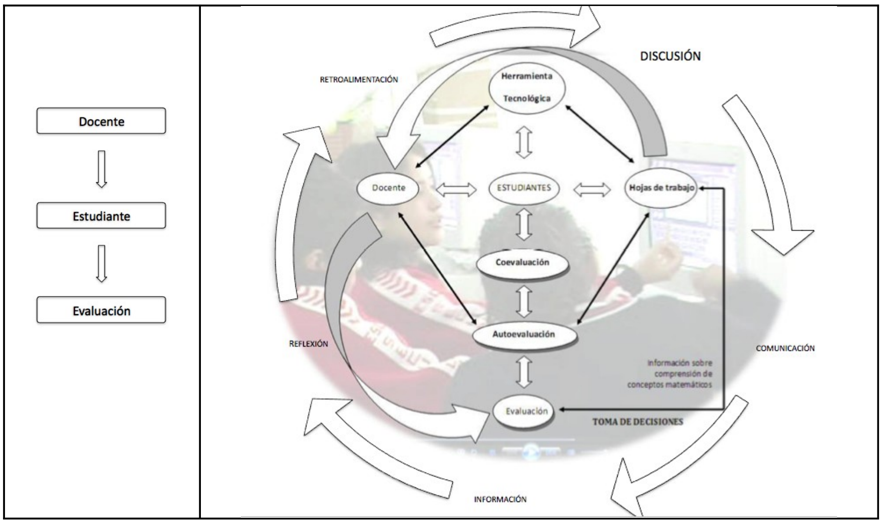



Figure 4 : conception de l'enseignement-apprentissage : avant (gauche), linéaire ; et après (droite), un système d'interactions collaboratif (Hernández-Sánchez, 2009).

Comme exemple de ces changements, il y a le cas d'une enseignante de collège (Hernández-Sánchez, 2009) qui a représenté (figure 4) comment au début (figure 4, gauche) sa conception de l'enseignement des contenus mathématiques « était très linéaire » et centrée sur l'enseignant et de celui/celle-ci vers les élèves ; tandis qu'après (figure 4, droite), sa conception est d'un système d'interactions entre élèves, avec l'enseignant, avec les ressources technologiques, et avec d'autres instruments pédagogiques (comme les fiches de travail) et d'évaluation, dans un milieu de travail collaboratif.

## 6. Remarque finale

J'ai essayé dans cette présentation, d'initier une réflexion sur la manière d'utiliser les ressources numériques dans l'enseignement des mathématiques ; et de montrer des idées et exemples d'utilisation de ces ressources pour transformer les pratiques enseignantes et pour trouver des nouvelles façons d'aborder les idées mathématiques. Ce sont des implémentations et changements qui ne sont pas faciles, mais je pense que la prise en compte de ces idées peut aider à commencer ce processus de transformation.

## 7. Bibliographie


Agalianos, A., Noss, R. & Whitty, G. (2001). Logo in mainstream schools : The struggle over the soul of an educational innovation. *British Journal of Sociology of Education* 22(4) : p. 479-500.

Caballero C., A. (2009). *Cambios en la enseñanza de las matemáticas al incorporar tecnologías digitales al taller de computación de una escuela telesecundaria.* Thèse de Master. Mexico : Cinvestav-IPN.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia.* Centro de Profesores y Recursos. Murcia, 17-19 Abril 2008. Disponible sur Internet : <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/competencias_anadida_24junio08.pdf>.(consulté le 10 juin 2011).

Hernández-Sánchez, M. (2009). *Incorporación de herramientas tecnológicas a la enseñanza de las matemáticas: Cambios en el aula y búsqueda de nuevas formas de evaluación*. Thèse de Master. Mexico : Cinvestav-IPN.

Hoyles, C. & Noss, R. (1987). Synthesising mathematical conceptions and their formalisation through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 18(4), p. 581-595.

Jiménez-M., J. & Sacristán, A.I. (2010). Eight years of journey with Logo leading to the Eiffel tower mathematical project. Dans J. Clayson & I. Kalas (eds) *Constructionist approaches to creative learning, thinking and education : Lessons for the 21 st century – Proceedings Constructionism 2010*. Paris : AUP / Comenius University.

Julie, C., Leung, A., Thanh, N.C., Posadas, L., Sacristán, A.I., Semenov, A. (2010). Some regional developments in access and implementation of digital technologies and ICT. Dans C. Hoyles and J.-B. Lagrange (éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. New ICMI Study Series, New York : Springer, vol. 13, p. 261-383.

Kaput, J., Hegedus, S., & Lesh, R. (2007). Technology becoming infrastructural in mathematics education. In R. A. Lesh, E. Hamilton & J. J. Kaput (éd.), *Foundations for the future mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, p. 173-191.

Papert S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 3, p. 249-262.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York : Basic Books.

Papert, S. (2006). *From the math wars to the new new math.* Adresse présentée pendant la conférence de la 17e Étude ICMI « Technology Revisited », Hanoi, Vietnam.

Parada Rico, S.E. (2011). Communautés de pratique : une alternative pour encourager la réflexion et l'apprentissage des enseignants de mathématiques. *Actes des Journées Mathématiques IFÉ-ENS de Lyon 2011*.

Rodríguez-Vidal & Sacristán, A.I. (2011). Introducción a profesores de matemáticas de niveles de secundaria y bachillerato a paradigmas pedagógicos digitales. *Actes des Journées Mathématiques IFÉ-ENS de Lyon 2011*.

Rojano, T. (éd.), (2006). *Enseñanza de la física y las matemáticas con tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula.* Mexico : SEP-OEI.

Sacristán (2005). Teachers' difficulties in adapting to the use of new technologies in mathematics classrooms and the influence on student's learning and attitudes. Dans Lloyd, G. M., Wilkins, J.L., & Behm, S.L. (éd.) *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Eugene, OR: All Academic, [Cédérom]

Sacristán, A., Parada, S., Sandoval, I., Gil, N. (2009). Experiences related to the professional development of mathematics teachers for the use of technology in their practice. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (éd.), *Proceedings of PME 33*,. Thessalonique, Grèce : PME, vol. 2. p. 41-48.

Sacristán, A.I. & Rojano, T. (2009). The Mexican national programs on teaching mathematics and science with technology: the legacy of a decade of experiences of transformation of school practices and interactions. In A. Tatnall and A. Jones (éd.). *Education and technology for a better world*, WCCE 2009, IFIP Advances in Information and Communication Technology. Boston : Springer, p. 207–215. DOI : 10.1007/978-3-642-03115-1_22.

Sacristán, A.I., Sandoval, I. & Gil, N. (2007). Incorporating digital technologies to the mathematics classroom: In-service teachers reflect on the changes in their practice. Dans Lamberg, T., & Wiest, L. R. (éd.). *Proceedings of PME-NA 29 - Exploring Mathematics Education in Context.* Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno. p. 137-144, [Cédérom].

Sacristán, A.I., Sandoval, I. & Gil, N. (à paraître). Teachers engage in peer tutoring and course design inspired by a professional training model for incorporating technologies for mathematics teaching in Mexican schools. *Proceedings 10th International Conference on Technology in Mathematics Teaching,* July, 2011. University of Portsmouth.

Trigueros, M & Sacristán, A.I. (2008). Teachers' practice and students' learning in the Mexican programme for teaching mathematics with technology. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life-Long Learning (IJCEELL),* 18 (5/6), p. 678-697.

Ursini, S. & Rojano, T. (2000). *Guía para integrar los talleres de capacitación EMAT*. Mexico : SEP-ILCE.

# *Communications*

## Thème 1 :
## Quelles interactions entre enseignants, mathématiciens et didacticiens ?

# Créer des mathématiques à partir de problèmes ouverts


**Stéphanie de Vanssay**

*EDA*
*Centre universitaire des Saints-Pères*
*45 rue des Saints-Pères*
*75270 Paris*
*stephanie.devanssay@laposte.net*



*RÉSUMÉ : Cette communication se propose de présenter une recherche en cours sur les effets d'un travail sur des problèmes ouverts en classe de CE1. Dans un premier temps, nous avons étudié ces effets sur des publics différents (élèves de ZEP et élèves non-ZEP) dans les conditions d'une gestion optimale des séances par une enseignante chevronnée spécialiste de la démarche des problèmes ouverts. Nous avons observé un certain nombre de progrès dans la résolution de problèmes arithmétiques. Puis nous avons cherché à savoir comment ces résultats résistent à la variabilité des gestions de ces situations par des enseignants intéressés et volontaires mais non-spécialistes de cette démarche.*

*ABSTRACT: This communication's purpose is to present an ongoing research on the effects of a work on open problems with 7-8 years old students. The first step was to study these effects on different groups: "priority education zone" students and "no priority education zone" students, in the context of optimal management of sessions by an experienced teacher, who is a specialist of the open problems approach. We observed some progress in solving arithmetic problems. Then, we tried to find out how these results would vary when that same approach was handled by interested and voluntary teachers, though not specialized in this approach.*



*MOTS-CLÉS : problèmes ouverts, problèmes additifs, école primaire*

*KEYWORDS: open problems, additive problems, elementary school*

## Introduction

Apprendre les mathématiques, c'est les créer pour soi. Chercher à résoudre un problème c'est se construire une représentation, interpréter, sélectionner et opérationnaliser (Julo, 1995), c'est transformer pour soi un énoncé en démarche mathématique. C'est comme Régine Douady (1984) le suggère organiser l'enseignement en intégrant des moments où la classe simule une société de chercheurs en activité, rompant ainsi avec la méthode du j'apprends, j'applique et ouvrant vers une attitude active.

## 1. Impact des problèmes ouverts sur la résolution de problèmes additifs en CE1

### *1.1. Premier dispositif*

Afin de tenter de vérifier si un travail sur des problèmes ouverts en CE1 peut améliorer les résultats des élèves sur des problèmes scolaires classiques, le dispositif retenu pour cette recherche a été le suivant : quatre classes de CE1 (deux en école ZEP et deux en école non-ZEP) ont bénéficié de dix séances de mathématiques sur des problèmes ouverts. Dans les quatre classes, les séances ont été menées par une même enseignante « spécialiste » du travail sur les problèmes ouverts avec l'assistance de l'enseignant de la classe. Les élèves de ces quatre classes ainsi que ceux de quatre classes témoins (deux en école ZEP et deux en école non-ZEP) ont passé deux évaluations équivalentes (pré-test et post-test) comportant quatre problèmes scolaires classiques afin de pouvoir mesurer les progrès des élèves dans les différentes classes, celles ayant bénéficié des interventions et les autres. Les deux groupes ne sont cependant pas équivalents car nous avons dû tenir compte de la demande institutionnelle et accepter de proposer les interventions sur les problèmes ouverts en priorité aux écoles où les élèves de CE1 ont eu l'an dernier les moins bons résultats en mathématiques aux évaluations nationales. Les classes témoins sont d'un meilleur niveau que les classes avec interventions. Nous étudierons donc les écarts de progression de chaque groupe.

### *1.2. Pré-test et post-test*

Pour observer l'impact des séances de problèmes ouverts sur la réussite des élèves en résolution de problèmes nous avons fait les choix suivants avec à chaque fois deux problèmes équivalents (même structure et même ordre de grandeur des nombres de l'énoncé), un pour le pré-test, un pour le post-test. Nous avons choisi des problèmes en nous appuyant sur la typologie des problèmes additifs/soustractifs selon Gérard Vergnaud (1981). Cette typologie concerne les problèmes à deux données dont il faut trouver la troisième, dans le champ des structures additives,.

- Le problème 1 est une transformation d'état, transformation positive, avec recherche de l'état final codé selon la typologie de Vergnaud « e t+ E ».
- Le problème 2 est une transformation d'état, transformation négative, avec recherche de l'état final codé « e t- E ».
- Le problème 3 est plus délicat, car statique, de composition de deux états avec recherche d'une partie, il est codé « e E e ».
- Le problème 4 est complexe, il s'agit d'une transformation d'état, transformation négative, avec recherche de l'état initial codé « E t- e ». L'énoncé des deux problèmes incite à effectuer une soustraction par la présence des verbes « reculer » et « descendre » alors qu'il faut effectuer une addition pour les résoudre.

### *1.3. Les séances de problèmes ouverts*

Nous avons volontairement fait le choix de ne pas chercher à faire de lien entre le choix des problèmes ouverts à travailler et les problèmes proposés dans le pré-test et le post-test.. Les problèmes choisis sont plus complexes et ne sont absolument pas des entraînements, ils ne sont même pas des problèmes additifs. Nous avons choisi des problèmes variés qui semblaient intéressants du point de vue de la démarche de recherche qu'ils nécessitaient. Chaque séance a duré environ une heure et comportait une phase d'appropriation, une phase de recherche en individuel ou en petits groupes et une mise en commun. Certains problèmes ont été travaillés durant 2 ou 3 séances[1].

### *1.4. Résultats*

Une analyse statistique[2] des résultats aux tests des deux groupes d'élèves a permis de déterminer les marges de progression de chaque groupe et de pouvoir les comparer. Cela a donné les résultats suivants :

Les élèves ayant bénéficié des séances de travail sur les problèmes ouverts ont une meilleure représentation des trois premiers problèmes (figure 1) et ce de façon significative concernant les problèmes 2 (e t- E) et 3 (e E e). Cette meilleure représentation se traduit essentiellement par la production de davantage de dessins pertinents de la situation. La représentation est considérée comme exacte, même si le résultat écrit est parfois faux (erreur de calcul, de gestion ou autre), s'il y a présence d'un dessin pertinent, d'un calcul pertinent et/ou du bon résultat montrant que l'élève s'est fait une représentation exacte du problème.

---

1 Le détail des séances menées est disponible en ligne à cette adresse : http://lewebpedagogique.com/devanssay/2010/04/03/10-seances-de-problemes-ouverts-cle-en-main/

2 Nous avons effectué des comparaisons entre les deux évaluations (pré-test et post-test) pour chaque groupe d'élèves (avec ou sans interventions), qui reposent sur le test du Khi-2 de Mc Nemar avec un seuil alpha à 1 % (échantillons appariés). Les résultats significatifs sont signalés par * quand l'écart est significatif pour les classes avec interventions et pas pour les classes témoins.

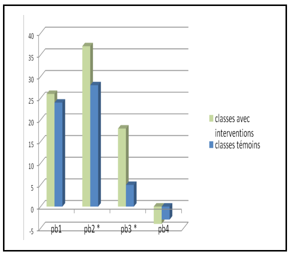



**Figure 1.** *Représentations exactes, écarts entre le pré-test et le post-test*

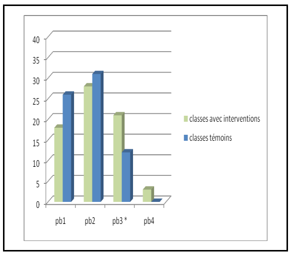



**Figure 2.** *Réponses exactes, écarts entre le pré-test et le post-test*

Les élèves ayant travaillé sur les problèmes ouverts ont mieux réussi à donner une réponse exacte pour un problème avec une structure un peu complexe pour des élèves de CE1 (problème 3 e E e). Les élèves témoins, d'un meilleur niveau général, l'avaient mieux réussi au pré-test mais les élèves bénéficiant des interventions les ont dépassés au post-test (figure 2).

On voit que ce travail a permis aux classes avec interventions, d'un niveau de départ plus faible que les classes témoins, de progresser vers une meilleure représentation des problèmes. Les élèves des classes témoins gardent l'avantage concernant la production de réponses exactes excepté pour le problème 3 qui est « difficile mais pas trop » c'est-à-dire dans *la zone de proche développement ou ZPD* (Vygotski, 1934) des élèves de CE1. On peut définir la ZPD comme étant la distance entre ce que l'enfant peut réussir seul et ce qu'il peut réaliser avec l'aide d'un plus expert que lui ; en deçà de cette zone l'enfant n'apprend pas et au-delà cela est hors de portée pour lui.

## 2. Ces résultats résistent-ils à la variabilité des gestions ?

### *2.1 Deuxième dispositif*

Il s'agit maintenant de chercher à savoir si les premiers résultats obtenus résistent à la variabilité des gestions des situations de problèmes ouverts par les enseignants. Des observations ont été menées dans deux classes CE1 de deux écoles différentes. Ces deux classes sont tenues par des enseignantes qui ont bénéficié avec leurs élèves de l'année précédente des dix séances de problèmes ouverts menées en leur présence. Une classe est dans l'école ZEP, l'autre dans l'école non-ZEP. Cette fois-ci ce sont les enseignantes des classes qui ont mené les séances, elles sont intéressées et volontaires mais non-spécialistes du travail sur des problèmes ouverts. Pendant les séances, les enseignantes portaient sur elles un dispositif d'enregistrement audio avec un micro, elles restaient ainsi mobiles et enregistraient aussi les propos des élèves aidés individuellement. Les élèves ont passé les mêmes tests que les élèves de l'année précédente avant et après les séances.

## 2.2 *Résultats aux tests*

Pour voir si les résultats obtenus l'année précédente résistent à la variabilité des gestions de situations problèmes dans les classes, nous allons comparer ici les résultats obtenus l'année précédente avec une enseignante « spécialiste » des problèmes ouverts (gestion experte) avec ceux obtenus quand les séances sont gérées par l'enseignante de la classe qui est volontaire pour le faire (gestion volontaire). Il s'agit des deux mêmes écoles pour les deux années, les résultats sont exprimés en pourcentages pour permettre les comparaisons. Concernant les représentations, les progrès sont plus marqués en ZEP les deux années pour les problèmes 2 et 3 qui sont difficiles mais pas trop (figures 3, 4, 5 et 6). Les élèves de cette année sont d'un meilleur niveau au pré-test que ceux de l'an dernier. Les évolutions des classes ZEP et non-ZEP se ressemblent davantage pour l'année dernière que pour cette année, il est difficile de déterminer si cela tient aux deux gestions différentes ou s'il s'agit d'un effet de seuil dû au très bon niveau des élèves de la classe non-ZEP de cette année.

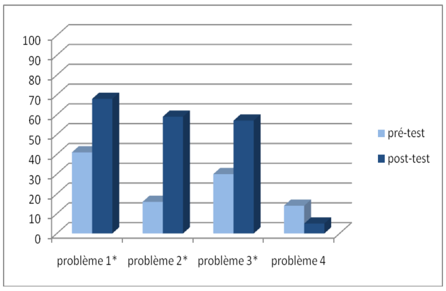



**Figure 3.** *Représentations exactes ZEP – gestion experte*

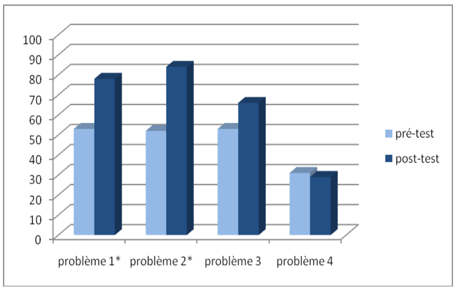



**Figure 4.** *Représentations exactes Non-ZEP – gestion experte*

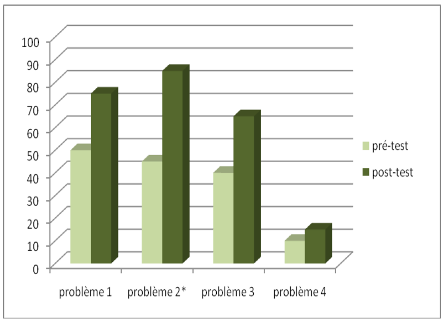



**Figure 5.** *Représentations exactes ZEP – gestion volontaire*

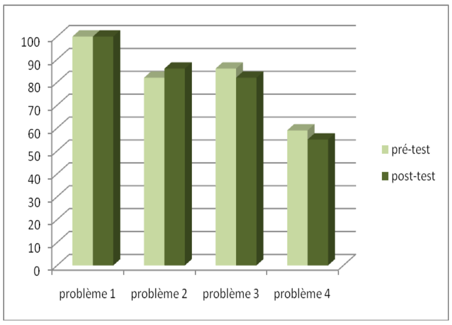



**Figure 6.** *Représentations exactes Non-ZEP – gestion volontaire*

Concernant les réponses exactes, les histogrammes (figures 7, 8, 9 et 10) se ressemblent beaucoup avec les deux types de gestion, sauf pour le problème 4 bien mieux réussi par les élèves non-ZEP de cette année, étant donné leur meilleur niveau par rapport aux élèves de l'année précédente. Ce problème semble rentrer pour eux dans la catégorie « difficile mais pas trop » ce qui n'est pas le cas pour les élèves ZEP. Les élèves non-ZEP avec une gestion volontaire ont fait de nets progrès concernant les réponses exactes. Ils semblent donc avoir acquis des aptitudes pour une meilleure gestion des opérations et de la mise en forme des résultats. Les élèves ZEP ont progressé sur les deux plans avec la gestion volontaire : représentation des problèmes et capacité à en déduire une réponse exacte.

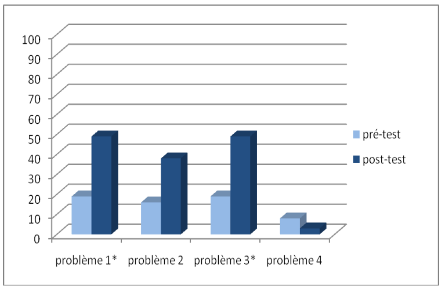



**Figure 7.** *Réponses exactes ZEP – gestion experte*

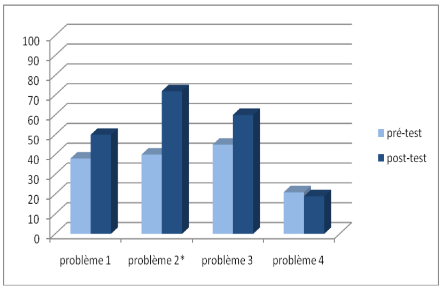



**Figure 8.** *Réponses exactes Non-ZEP – gestion experte*

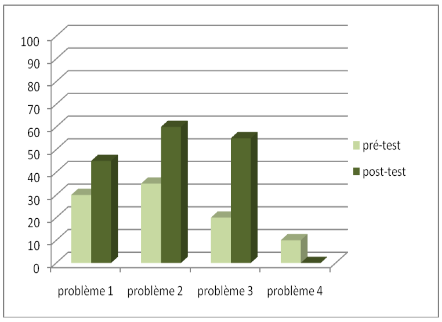



**Figure 9.** *Réponses exactes ZEP – gestion volontaire*

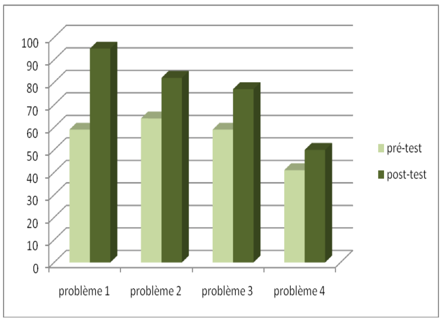



**Figure 10.** *Réponses exactes Non-ZEP – gestion volontaire*

Ces résultats montrent que malgré les changements de gestion certains points de progression semblent demeurer :

- une meilleure représentation des problèmes quand ils ne sont pas au-delà de la ZPD des élèves et quand il reste une marge de progression suffisante
- davantage de réponses exactes, donc une meilleure gestion des opérations et de la mise en forme des résultats, toujours pour les problèmes n'étant pas au-delà de la ZPD des élèves.

On peut donc penser que ces progrès sont intrinsèquement liés à l'activité « problèmes ouverts » au-delà des différences de gestion. Nous allons maintenant voir de plus près certains aspects des gestions des séances et tenter de voir si cela éclaire les résultats constatés.

## 3 En guise de conclusion

Cette recherche est modeste et non achevée, nous pensons néanmoins pouvoir en tirer les enseignements suivants :

- travailler sur des problèmes ouverts, avec de jeunes élèves, ouvre des perspectives intéressantes pour les faire progresser dans la résolution de problèmes additifs dans leur ZPD
- ces effets bénéfiques semblent résister à la variabilité des gestions, du moins quand il s'agit d'enseignants volontaires ayant eu l'occasion d'observer une gestion experte de problèmes ouverts

Il nous reste à étudier plus finement comment les enseignantes contribuent aux apprentissages de leurs élèves, comment elles s'approprient une ingénierie didactique en prenant en compte les contraintes institutionnelles, tout en développant des pratiques individuelles originales cohérentes et logiques dans la marge de manœuvre qui leur reste (Roditi, 2005). Nous cherchons également à saisir comment les enseignantes procèdent pour s'adapter à chaque élève et quels effets cela engendre sur l'activité de l'élève afin de mieux percevoir comment ces séances de résolution de problèmes ouverts contribuent à la construction de connaissances mathématiques par les élèves, autrement dit, à ce que les élèves créent des mathématiques pour eux-mêmes.

## 4. Bibliographie


Douady, R. (1984). Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Thèse de doctorat d'état. Université Paris VII, Paris.

Julo, J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques: un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement. Presses universitaires de Rennes.

Roditi, É. (2005). Les pratiques enseignantes en mathématiques: entre contraintes et liberté pédagogique. Editions L'Harmattan.

Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne: Peter Lang.

Vygotski, L. (1934). Pensée et langage (F. Sève, trad.) (1985 éd.). Sociales.

# La position de chercheur en didactique dans une étude de résolution de problème ouvert par des élèves et par un mathématicien

**Gardes Marie-Line***

** S2HEP – Université Lyon 1*
*La Pagode - 38 Bd Niels Bohr*
*69622 Villeurbanne cedex*
*marie-line.gardes@univ-lyon1.fr*

*RÉSUMÉ : De nombreux travaux, dont ceux de l'équipe DREAM, étudient la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques. Dans ce cadre-là, notre étude a pour objectif de mettre en perspective les processus de recherche d'un mathématicien, d'élèves et d'étudiants afin de repérer l'existence d'éléments invariants dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient favoriser l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants. En nous appuyant sur nos recherches en cours, nous montrerons comment les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien ont nourri le processus de construction d'une situation didactique mettant l'élève en position de mathématicien.*

*ABSTRACT: Several studies, including those of DREAM (a research team) investigate the implementation of problem-solving in math class. In this research, we propose problem solving to pupils, students and researchers and we study their process of research. The aim is to identify the existence of invariant elements in the mathematician's research and to promote mathematical research students. In this article, we show how the interaction between researcher in math education and mathematician helped build a learning situation.*

*MOTS-CLÉS : problème ouvert, conjecture d'Erdös-Straus, processus de recherche, théorie élémentaire des nombres, dimension expérimentale en mathématiques.*

*KEYWORDS: unsolved problem, the Erdös-Straus Conjecture, process of research, number theory, experimental approach in mathematics.*

## Introduction

Depuis plusieurs années, de nombreuses expériences, au collège et au lycée, ont été menées sur la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques (Polya 1957, Schoenfeld 1985, Arsac et al. 1988, Arsac & Mante 2007). Actuellement, ces travaux se poursuivent, notamment au sein de l'équipe

EXPRIME[3] (2006-2010) puis DREAM[4] qui pose plus particulièrement la question de la dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématiques (Aldon et al. 2010). Un des enjeux majeurs de ces recherches est de mettre l'élève dans une position de chercheur lui permettant, sous certains aspects, la reproduction de la position du mathématicien. Dans notre travail de recherche en didactique des mathématiques, nous étudions une recherche de résolution d'un même problème ouvert (au sens non résolu) en théorie élémentaire des nombres par des élèves et des étudiants d'une part et par un mathématicien d'autre part. Notre objectif est de mettre en perspective les deux processus de recherche afin de repérer l'existence d'éléments invariants dans la recherche d'un mathématicien qui pourraient favoriser l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants. Dans cette étude, nous avons eu de nombreuses interactions avec le mathématicien engagé dans la recherche du problème. En nous appuyant sur nos recherches en cours, nous montrerons comment ces interactions ont nourri le processus de construction d'une situation didactique mettant l'élève dans la position de mathématicien. Dans une première partie, nous présentons le problème mathématique que nous avons retenu pour conduire cette recherche, ainsi que quelques résultats associés et dans une seconde partie, nous détaillons les différentes interactions que nous avons eues en tant que chercheur en didactique avec le mathématicien engagé dans la recherche de la conjecture.

## 1. Présentation du problème mathématique et de quelques résultats

Ernst Straus (1922-1983) et Paul Erdös (1913-1996), tous deux mathématiciens, s'intéressent, en 1948, à la décomposition d'une fraction $a/b$ en une somme de fractions unitaires[5] et énoncent la conjecture (Erdös, 1950) selon laquelle :

*Pour tout n au moins égal à 2, on peut trouver des entiers x, y, z (non nécessairement distincts) tels que : 4/n = 1/x + 1/y + 1/z.*

Depuis 1950 et jusqu'à aujourd'hui, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à cette conjecture. Voici les trois résultats majeurs actuellement connus :

*Résultat de Mordell* (Mordell, 1969) : Cette équation a des solutions pour tous les nombres non congrus à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840. Ces solutions sont polynomiales en $n$. Exemple : Si $n \equiv 2[3]$ alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n-3} + \frac{1}{\frac{n-2}{3}} + \frac{1}{\frac{(n-3)(n-2)}{3}}$.

*Résultat de Schinzel* (Schinzel, 2000) : Pour tous les nombres congrus à 1, $11^2$, $13^2$, $17^2$, $19^2$, $23^2$ modulo 840, il n'existe pas de formule polynomiale globale en $n$ donnant une solution.

3 EXpérimenter des Problèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole.

4 Démarche de Recherche et d'Expérience pour l'Apprentissage des Mathématiques. L'équipe a écrit un article dans ces présents actes.

5 Une fraction unitaire est une fraction où le numérateur est 1 et le dénominateur est un entier positif.

*Résultats de Swett* (Swett, 1999) : La conjecture a été vérifiée pour tous les nombres inférieurs à $10^{14}$. Plus récemment, suite à notre intervention dans un séminaire en février 2009, Michel Mizony, maître de conférences à l'IREM de Lyon, s'intéresse à la résolution de cette conjecture. Les recherches qu'il a menées l'ont conduit à établir l'identité suivante :

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}, \qquad [1]$$

où $m$ est un entier naturel non nul et $d$ un diviseur de $m^2$. L'intérêt principal de cette identité est d'obtenir une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires sous la seule condition que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. Ainsi il reformule la conjecture d'Erdös-Straus sous la forme : pour tout nombre premier $n$, il existe un entier $m$ et un diviseur $d$ de $m^2$ tels que $mn + d$ soit divisible par $4m - 1$. La validité de cette conjecture entraîne celle d'Erdös-Straus. Cette formulation établit de plus un lien étroit entre décompositions en somme de fractions égyptiennes[6] et une propriété des nombres premiers. Un autre intérêt de cette identité est de produire de nombreuses formules polynomiales qui lui ont permis, avec un collègue[7], en juin 2010, d'établir des algorithmes afin de vérifier la conjecture pour tous les nombres premiers inférieurs à $10^{17}$ (Gardes et Mizony 2011).

## 2. Les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien

Notre étude comporte trois approches : mathématique, épistémologique et didactique. L'approche mathématique consiste en l'étude approfondie de la conjecture d'Erdös-Straus et de quelques résultats associés. L'approche épistémologique est dans ce cas l'étude du processus de recherche d'un mathématicien. L'approche didactique a pour objectif d'élaborer une situation didactique à proposer à des élèves et à des étudiants. Les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien que nous analysons sont à l'articulation de ces trois approches. La première interaction se situe à l'articulation des approches mathématique et épistémologique et la seconde interaction se situe à l'articulation des approches épistémologique et didactique.

6 Une fraction égyptienne est synonyme d'une fraction unitaire.

7 Marc Deléglise, Maître de conférences à l'université Lyon 1.

### *2.1. Une première interaction : entre approche mathématique et approche épistémologique.*

L'étude de l'articulation des approches mathématique et épistémologique a pour objectifs d'analyser et comparer différentes approches mathématiques de la conjecture, d'identifier les liens entre différentes notions qui sont repérées et de mettre en évidence la place prégnante de la dimension expérimentale[8] dans la recherche mathématique. Pour conduire cette analyse, nous suivons la recherche – en cours actuellement – d'un mathématicien, Michel Mizony, sur la conjecture d'Erdös-Straus[9] en l'analysant mathématiquement et épistémologiquement. Nos interactions avec le mathématicien comportent deux volets : l'analyse des contenus mathématiques de sa recherche et l'analyse de son processus de recherche.

*2.1.1. Interactions lors de l'analyse des contenus mathématiques de la recherche.*

Le suivi mathématique de la recherche en cours du mathématicien consiste en l'analyse mathématique du contenu de ses résultats : appropriation, réécriture détaillée et articulation avec d'autres résultats (notamment ceux de Mordell, Schinzel et Swett). Cela donne lieu à des entretiens ou des correspondances où nous lui posons des questions mathématiques relatives à ses recherches. Ces interactions nous ont permis de comprendre ses résultats et de les articuler avec les résultats existants de Mordell, Swett et Schinzel. Ainsi nous avons pu établir que ces différents résultats, utilisant des outils et concepts mathématiques différents, étaient équivalents. Par exemple, suite à la remarque d'un collègue, Michel Mizony a montré que l'on peut obtenir son identité [1] à partir de la décomposition obtenue avec un théorème de Mordell[10] : $\frac{4}{n} = \frac{1}{BCD} + \frac{1}{ABDn} + \frac{1}{ACDn}$. Pour cela, posons $m = ABD$ et $d = B^2D$ qui divise $m^2$ dans l'équation ci-dessus. Exprimons $A$ et $D$ en fonction de $m$, $d$, $B$ et $C$ : $\frac{4}{n} = \frac{B}{Cd} + \frac{B}{Cmn}$ qui se réduit à $\frac{Cd}{B} = \frac{mn+d}{4m-1}$. Or $B$ divise $d = B^2D$, donc $(mn + d)/(4m - 1)$ est un entier. Par suite, on obtient l'identité [1]. Nous nous sommes ensuite posé la question de la réciproque afin d'obtenir une équivalence entre ces deux résultats. Nous avons ainsi montré que l'identité [1] de Michel Mizony était équivalente à la décomposition [2] de Mordell en montrant qu'il existe trois entiers $A$, $B$ et $D$ tels que $d = B^2D$ et $m = ABD$ et en posant $C = (An + B) / (4m - 1)$.

Nos interactions avec le mathématicien nous ont également permis de produire nous-mêmes un résultat partiel sur cette conjecture. Nous avons ainsi établi une identité du

---

8 La définition que nous utilisons pour la dimension expérimentale est la suivante : « c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets ». (Durand-Guerrier 2006, p.17)

9 Présentée au paragraphe précédent. Pour en savoir plus, consulter le site Internet de Michel Mizony http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/ ou (Gardes et Mizony 2011).

10 Pour $n$ premier, si $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$, alors il existe 4 entiers $A$, $B$, $C$ et $D$, avec $A$, $B$ et $C$ premiers entre eux deux à deux tels que $x = BCD$, $y = ABD$ et $z = ACD$.

même type que celle de Michel Mizony, mais dans le cas où $n$ est de la forme $4k + 1$ avec $k$ entier :

$$\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{k+a} + \frac{(4a-1)c}{(k+a)(k+a+c(4k+1))} + \frac{4a-1}{(4k+1)(k+a+c(4k+1))},$$

où $a$ et $c$ sont des entiers. On obtient une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires si $c$ divise $(k + a)^2$ et $pgcd(k + a , c)\times(4a - 1)$ divise $k + a + c(4k + 1)$. Cette identité complète le résultat de Michel Mizony car elle permet d'écrire de nouvelles formules polynomiales.

*2.1.2. Interactions lors de l'analyse du processus de recherche.*

Le suivi épistémologique de la recherche en cours du mathématicien consiste en l'étude de son processus de recherche. Lors d'entretiens, nous lui posons des questions sur les pistes de recherche suivies, celles abandonnées, sur l'utilisation de l'ordinateur et des concepts, sur les liens entre ses différentes approches, comme l'illustre l'extrait suivant :

> MLG : Et euh, enfin, j'ai pris deux trois notes. Est- ce que, euh, au départ, vous avez cherché déjà à vous séparer du modulo 840 parce qu'il n'y avait pas de…
> MM : Parce que pour moi ça me choquait,
> MLG : Oui c'est ça
> MM : Ce n'était pas naturel
> MLG : Oui voilà, c'était pas naturel
> MM : Pour moi il y avait le modulo 24 […]
> MLG : D'accord, donc en fait c'est ce que j'avais écrit, que, donc euh, il y avait cette première partie modulo 24, après la réduction modulo 12 […]
> MM : Oui ça a été une astuce pour moi pour synthétiser […]
> MLG : Et il y a eu un moment donné quand même le rôle des pythago, enfin des nombres de la forme 4m - 1
> MM : Oui
> MLG : Enfin ça a joué à un moment donné
> MM : Ah ça a joué un rôle énorme
> MLG : Oui et à ce moment-là, c'est là où vous avez donné un résultat pour les nombres de la forme 4m - 1 et vous avez remarqué que x n'était plus une partie entière mais que c'était un multiple de n et après on peut dire que c'est à partir de, et du résultat intermédiaire où vous avez voulu enlever la partie entière
> MM : Hum hum
> MLG : Que finalement avec des tas d'algorithmes derrrière, cette formule est
> MM : Est apparue

Ces interactions nous ont permis de mettre en évidence la richesse du problème sur les concepts et notions utilisées (nombres premiers, nombres pythagoriciens, diviseurs, congruences…) d'une part, et la richesse de la recherche de ce problème pour mettre en œuvre une dimension expérimentale (essais pour différentes valeurs de $n$, utilisation d'algorithmes…) d'autre part. Elles nous ont permis également de repérer et identifier des gestes mathématiques invariants lors de la recherche (présentés au paragraphe 2.3).

Ces interactions chercheur en didactique/mathématicien nous ont également permis d'affiner et de compléter les critères pour le choix d'un problème mathématique répondant à notre question didactique, à savoir, comment mettre l'élève en position de chercher. Ainsi, aux critères qui caractérisent les problèmes ouverts– énoncé court n'induisant ni la méthode, ni la solution et se trouvant dans un domaine conceptuel familier des élèves (Arsac et Mante 2007), nous ajoutons l'importance de l'aspect expérimental, déjà soulignée dans un autre cadre (la géométrie dans l'espace) par Dias et Durand-Guerrier (2005).

### *2.2. Une deuxième interaction : entre approche épistémologique et approche didactique*

Cette étude, à l'interface des approches épistémologique et didactique, a pour objectif de nous appuyer sur les résultats de l'étude épistémologique : gestes mathématiques invariants identifiés[11] et importance de la démarche expérimentale, pour conduire notre étude didactique, visant à mettre l'élève en position de chercheur. Nos entretiens avec le mathématicien sur son processus de recherche ainsi que quelques expérimentations avec des élèves nous ont alors permis, d'une part de déterminer quatre gestes qui sont potentiellement des gestes invariants dans la recherche mathématique et d'autre part de repérer la mise en œuvre d'une dimension expérimentale dans la recherche mathématique.

#### *2.2.1. Gestes invariants de la recherche mathématique.*

En analysant la recherche du mathématicien, nous avons identifié quatre gestes mathématiques susceptibles d'être invariants au cours de l'activité de recherche mathématique chez un chercheur. Tout d'abord, nous avons repéré la réduction du problème à un problème équivalent. Dans le cas de la conjecture d'Erdös-Straus, il s'agit de la réduction de la recherche de solutions pour tout entier naturel $n$ à tout nombre premier $n$. C'est la première étape effectuée chez le mathématicien alors que chez les élèves, elle n'apparait que dans certains groupes et après un certain temps de recherche collective sur le problème. Ainsi nous pensons que la réduction d'un problème à un problème équivalent à traiter peut être un invariant dans la recherche mathématique. Le second invariant qui est identifié est le questionnement des exemples. Un chercheur examinera particulièrement un exemple afin d'en tirer des informations, par exemple déterminer s'il peut être un exemple générique ou non. Les élèves se sont rarement autorisés à questionner les exemples comme l'illustre cette réplique : « *avec 2 ?* » […] « *ouais mais après il faut le prouver dans le cas général, tu ne vas pas le faire pour chaque* ». Une des raisons que nous avançons pour l'expliquer est l'utilisation peu présente du raisonnement inductif (preuve par généralisation) dans l'enseignement secondaire. Le troisième geste potentiellement invariant que nous avons repéré est de faire des liens entre différentes notions mathématiques qui peuvent être en jeu dans le problème. Le lien établi par le mathématicien entre la conjecture d'Erdös-Straus et les nombres premiers illustre bien l'importance de ce geste, très souvent absent dans la recherche des élèves. Enfin, la collaboration entre pairs est le quatrième geste invariant que nous avons

11 Présentés au paragraphe 2.3.

identifié. La recherche de Michel Mizony s'est conduite en interactions avec plusieurs chercheurs, notamment pour établir la vérification de la conjecture pour tout $n$ inférieur à $10^{17}$(Gardes et Mizony 2011). Il précise d'ailleurs que *« le travail en groupe chez le chercheur, disons l'échange d'informations est quelque chose d'important ».* Nous pensons que ce geste pourrait être reproduit, d'une certaine manière au niveau scolaire lors de recherches collectives.

*2.2.2. Mise en œuvre d'une dimension expérimentale.*

Nous avons caractérisé la dimension expérimentale par des allers-retours entre théorie et expérience et plus précisément par un « va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets » (Durand-Guerrier 2006). En étudiant le processus de recherche du mathématicien, nous nous sommes attachés à repérer ces va-et-vient entre la manipulation d'objets et l'élaboration d'une théorie. Nous avons ainsi pu remarquer que ce sont les allers-retours entre la construction de nombreux algorithmes et la tentative d'élaboration d'une preuve papier-crayon qui l'ont conduit au résultat phare de sa recherche, l'identité [1]. La mise en œuvre d'une dimension expérimentale dans sa recherche lui a permis d'avancer et de produire ce résultat partiel. Nous pouvons avancer cette même conclusion pour la recherche des élèves puisque nous avons observé que le va-et-vient entre théorie (recherche de preuves des conjectures émises) et expérience (essai pour différentes valeurs de $n$, formulation de conjecture) leur a permis d'établir et de démontrer deux résultats intermédiaires : si $n$ est pair ou si $n$ est multiple de 3, la conjecture est vraie (Gardes, 2010).

## Conclusion

Les interactions entre chercheur en didactique et mathématicien à l'articulation des trois approches mathématique, épistémologique et didactique nous ont permis de déterminer et d'identifier plusieurs éléments afin de construire une situation didactique. Notre travail de recherche se poursuit avec l'ambition d'élaborer une ingénierie didactique qui permettrait à l'élève, sous certains aspects, la reproduction du travail du mathématicien. Actuellement, nous construisons un milieu permettant de mettre en place une activité de recherche mathématique en classe. Dans ce but, nous avons commencé à définir un « contrat de recherche », inséré dans le contrat didactique de la classe, qui comprendrait, entre autre, l'apprentissage et l'usage d'un vocabulaire spécifique à la recherche (conjecture, contre-exemple, validation…) ainsi qu'une représentation particulière de l'activité de recherche mathématique (savoir qu'un problème peut se chercher avec plusieurs méthodes, qu'il peut se chercher plusieurs heures…). Nos recherches se centrent sur la caractérisation de ce contrat de recherche ainsi que sur la construction du milieu. Une nouvelle séance avec des étudiants est prévue afin d'expérimenter notre situation didactique.

## Bibliographie


Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M., & Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom INRP.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et Situation-problème*, IREM de Lyon, université Claude-Bernard, Lyon 1, 117p.

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Dias, T, & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM 60*, pp. 61-78.

Durand-Guerrier, V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique, in L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & Mercier A. (eds), *Actes des journées mathématiques de l'INRP*, 17-23, INRP.

Erdös, P. (1950). On a Diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaries), *Mat. Lapok1*, 192-210.

Gardes, M.-L. (2009). Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème en arithmétique. Mémoire de Master 2 HPDS, Université Lyon 1.

Gardes, ML. (2010). Investigations arithmétiques en terminale: entre essais et conjectures. *Revue Petit x83*, Ed. IREM de Grenoble, 51-78.

Gardes, ML., Mizony, M. (2011). La conjecture d'Erdös-Straus: expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM 85. A paraitre.*

Mizony, M. (2009). Sur la conjecture d'Erdös-Straus : une identité. Disponible sur Internet : <http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/> (consulté le 30 juin 2011).

Mordell, L.J (1969). *Diophantine equation.* London, New York, Academic press 1969, chapter 30.

Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Garden City N.Y : Doubleday.

Schinzel, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx.Comment. Math. 28 : 187-194, 2000.*

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Swett, A. (1999). The Erdös-Strauss Conjecture. Disponible sur Internet : http://math.uindy.edu/swett/esc.htm (consulté le 30 juin 2011).

# Un point de rencontre entre recherche mathématique et recherche didactique

**Benoît RITTAUD*, Laurent VIVIER****

** LAGA & Institut Galilée, université Paris 13*
*rittaud@math.univ-paris13.fr*

*** LDAR, université Paris Diderot*
*laurent.vivier@paris7.jussieu.fr*

*RÉSUMÉ : Nous exposons les interactions entre deux chercheurs, un mathématicien et un didacticien, lors d'une recherche commune sur un codage des nombres en base de Fibonacci. D'abord mathématique, cette recherche a donné lieu à des investigations en didactique. Le texte tente de pointer les apports de chacun des deux chercheurs, avec leurs caractéristiques propres, même s'il est bien difficile dans une collaboration aussi étroite de faire une distinction. Nous précisons les différents points de vue abordés tout en expliquant le cheminement des recherches mathématique et didactique.*

*ABSTRACT: We present interactions between two researchers, the first one in mathematics and the second one in didactic, that occurred during a common work about codage of numbers in the Fibonacci numeration system. Purely mathematical in the beginning, this research led to didactic investigations. This paper tries to stress the contributions of each of the two researchers, even though it is hard in such a closed collaboration to make a distinction. We specify different points of view while showing the progress of both mathematical and didactical researches.*

*MOTS-CLÉS : nombres rationnels, développement périodique, écriture décimale, suite de Fibonacci, praxéologie mathématique.*

*KEYWORDS: rational numbers, periodical expansion, decimal expansion, Fibonacci's sequence, mathematical praxeology.*

## Introduction

L'objet de ce texte est de rendre compte d'un travail collaboratif entre deux chercheurs : Benoît Rittaud est un mathématicien qui s'intéresse à la suite de Fibonacci et aux codages symboliques des nombres et Laurent Vivier est un didacticien qui s'intéresse à la didactique du nombre et plus spécifiquement aux aspects praxéologique et sémiotique du cadre numérique. Précisons que la distinction mathématicien / didacticien que nous utilisons est un peu caricaturale : B. Rittaud s'intéresse à l'enseignement des mathématiques (premier et second degrés) et a publié de nombreux ouvrages de vulgarisation des mathématiques et L. Vivier a une formation doctorale de mathématicien. En outre, la recherche dont il est ici question ne constitue pas la première collaboration « Rittaud & Vivier ».

Dans le chapitre 8 d'un livre de vulgarisation de Rittaud (2006) on trouve une extension infinie du codage des nombres entiers qui permet une représentation des nombres $p$-adiques. Le *didacticien*, très intéressé par la lecture de cette partie, se voit proposer par le *mathématicien* une recherche commune en mathématiques (cf. section 1). Nous exposons en sections 2 et 3 les points importants de cette recherche en pointant les apports du *mathématicien* et du *didacticien* ainsi que, en section 4, les recherches en didactiques que les résultats mathématiques ont permises.

## 1. Le cadre de la recherche mathématique

Le système d'écriture des entiers que nous utilisons s'appuie sur la suite des puissances de dix. Ce système se généralise en remplaçant dix par un entier $B>1$ : on choisit alors la suite des puissances ($B^n$). D'autres suites sont utilisables pour coder les entiers et nous nous intéressons ici au système de numération de Zeckendorf (1972) défini par la suite de Fibonacci (cf. annexe). Dans ce système, tout entier positif s'écrit de manière unique comme une suite finie de 0 et de 1 ne montrant jamais deux 1 consécutifs. Ainsi, par exemple, les nombres entiers de un à onze sont [12] : 1, 01, 001, 101, 0001, 1001, 0101, 00001, 10001, 01001 et 00101. Le nombre cent s'écrit $3 + 8 + 89 = F_2 + F_4 + F_9$ soit 0010100001.

Dans ce texte, nous nous focalisons sur la somme. En base de Fibonacci, une addition de deux entiers peut faire apparaître soit 11 soit 2 qu'il faut alors réduire pour avoir une forme admissible. On utilise pour cela les deux réductions suivantes (on souligne les chiffres pour marquer les rangs identiques avant et après réduction) : $\underline{11} \rightarrow \underline{00}1$ provenant de la définition de la suite de Fibonacci et $\underline{2} \rightarrow 10\underline{0}1$ car pour $n \geq 2$ on a $2 \times F_n = F_{n-2} + F_{n+1}$ (on traite les cas $n$=0 et $n$=1 à part). Par exemple : 7 + 4 = 0101 + 101 = 1111 = 00101 et 5 + 6 = 0001 + 1001 = 1002 = 11001 = 00101.

---

12 Les nombres sont écrits ici de gauche à droite pour avoir une bonne congruence entre les écritures chiffrées et la décomposition additive comme $100101 = F_0 + F_3 + F_5$.

Les nombres $F$-adiques sont obtenus en considérant une série infinie de 0 et de 1 sans jamais avoir deux 1 consécutifs. Cela revient à considérer des séries $\Sigma\ \varepsilon_i F_i$ où $\varepsilon_i=0$ ou 1 avec $(\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1}) \neq (1,1)$. L'ensemble obtenu possède une structure de groupe topologique abélien totalement ordonné (Rittaud & Vivier, 2011a). Deux séries jouent un rôle fondamental : 010101… = 01 et 101010… = 10 (le cadre sert à marquer une période) puisque si l'on ajoute 1 (ou 1000…) alors, par un *jeu de dominos* reproduisant successivement la réduction 110→001, on trouve 000….

Nous nous sommes tout d'abord attachés à prouver la conjecture suivante relative aux nombres rationnels : les éléments périodiques (sous-entendu périodiques à partir d'un certain rang) s'identifient avec les fractions d'entiers (c'est-à-dire une solution d'une équation $D \times x = N$ où $D$ et $N$ sont deux entiers naturels, $D$ est non nul).

La détermination chiffrée de fractions simples a permis d'affiner la conjecture. Avec un travail *à la main*, il n'est pas trop difficile de déterminer certaines fractions et de constater qu'elles sont périodiques. Par exemple, les solutions de $2 \times x = 1$ sont 0010100100 et $0010\overline{100100} + 010\overline{1001}$ 010100100 et les solutions de $3 \times x = 1$ sont 100010100000, 01000010100000 et 001000010100000. Ainsi, avec quelques autres exemples, nous avons conjecturé qu'une équation $D \times x = N$ possède exactement $D$ solutions $F$-adiques. Pour tester cette conjecture, nous nous sommes attachés à déterminer les solutions de $5 \times x = 1$ en nous répartissant la tâche : le *mathématicien* cherchait une solution commençant par 10 et le *didacticien* une solution commençant par 010. Une minute plus tard, une solution était trouvée, $100\overline{10}$, alors que l'autre résistait aux tentatives de recherche *à la main* par le *didacticien*. Cette répartition aléatoire du travail a peut-être joué un rôle important (cf. section 2.1 ci-dessous).

## 2. Les deux moments clés

Dans cette section, nous exposons les deux moments clés de la recherche : le premier, lié à la didactique, a initié le travail notamment par l'utilisation de l'informatique et le second, essentiellement mathématique, a permis de débloquer une situation qui semblait dans l'impasse.

### *2.1. Abaque et go !*

Pour la recherche d'une solution de $5 \times x = 1$ commençant par 010, le *didacticien* a développé plusieurs dispositifs dont l'idée provenait directement des connaissances didactiques sur l'enseignement des nombres à l'école primaire comme l'utilisation de feuilles à carreaux (pour placer un chiffre par case) ou des essais de compteurs découpés dans du papier à carreaux (pour gérer les réductions). Bref, le *didacticien* s'attachait à trouver un bon artefact pour traiter le problème. Bien entendu, et dès le début de la recherche, le *mathématicien* avait mentionné la possibilité d'une programmation informatique qui permettrait de faire des recherches systématiques. Mais cette idée a été repoussée à cause de l'investissement important que demandait la programmation.

L'idée est alors venue d'utiliser un jeu de go comme abaque : les cases représentent les rangs d'un nombre *F*-adique (le nombre de cases est conséquent) et les jetons blancs permettent de signaler l'emplacement d'un 1. Les jetons noirs ont changé de statut dans le processus d'instrumentalisation : d'abord marquant la présence d'un 0, ils ont finalement marqué un chiffre inconnu, un 0 ou un 1. Les 0 effectifs sont alors marqués par une absence de jeton sur une case. Nous présentons en figure 1 une reconstitution du résultat obtenu sur le jeu de go (sans jetons noirs).

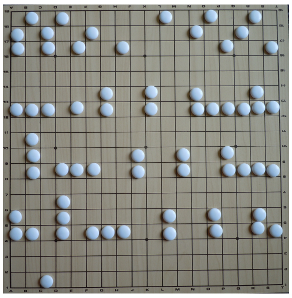


**Figure 1.** *Le jeu de go – abaque*.

Aux trois premières lignes on trouve le début du codage du nombre cherché qui multiplié par 5 donne 1. Ainsi, il faut considérer que chaque jeton blanc devient un 5 après multiplication (les « . » marquent les changements de ligne) :

0505000000050050050.505005000000500500.505050050000005005

Il faut alors réduire ces 5 et c'est précisément le rôle des quatre lignes du dessous (les réductions font apparaître d'autres nombres que des 1 qui sont codés par des jetons blancs placés à la verticale ; cf. annexe pour la manière de réduire un 5) :

1110102002002111121.03011100200200211 1.2103011100200200021.001

qui se réduit, par le *jeu de dominos* utilisant <u>11</u> → <u>00</u>1, en 10…01 (avec 56 zéros). Les trois lignes du haut gardent en mémoire le nombre initial et les lignes du dessous sont le lieu des manipulations des jetons c'est-à-dire des transformations des écritures chiffrées. Par des allers-retours entre ces deux parties, l'abaque permet une recherche dynamique d'une valeur approchée de la solution. Cette technique d'approximation est identique à celle qui est couramment utilisée pour effectuer des sommes de deux rationnels en écriture décimale (cf. figure 2).

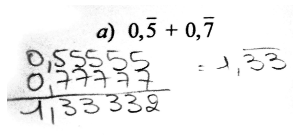



**Figure 2.** *Somme effectuée par un étudiant professeur en mathématiques.*

Comme en écriture décimale, la valeur approchée, ici trouvée après de nombreuses heures de recherche avec le jeu de go, permet de déterminer la solution qui est $010\overline{100000010010010101}$. La période est de 20 chiffres, ce qui implique un travail sur l'abaque avec une quarantaine de chiffres. Une vérification sur papier est bien entendu effectuée, mais c'est surtout la nécessité de l'informatique qui s'est naturellement imposée. Ainsi, un programme informatique, qui a été affiné au fur et à mesure des résultats, a été écrit.

### *2.2. Une idée fondamentale*

Avec l'informatique, la recherche mathématique sur les rationnels a trouvé un nouveau souffle : des listings de nombres ont été produits, des périodes sont trouvées (la conjecture est toujours vérifiée) et de nouvelles conjectures ont vu le jour. Malgré tout cela, la recherche stagne et les règles de formation des rationnels restent particulièrement opaques : nous sommes face à des données brutes provenant des recherches informatiques dont on ne sait que faire. C'est l'impasse !

Nous avions compris que, pour trouver une solution de $D \times x = N$, qui serait périodique d'après la conjecture, il nous faudrait d'abord trouver la période $\pi$. Nous recherchions $\pi$ par la propriété : $D \times (\pi\pi\pi\ldots)$ est de période 01 (tout simplement parce que 1+010101…=000000… par le *jeu de dominos*). Mais hormis des recherches informatiques systématiques basées sur la technique d'approximation, nous ne savions pas comment utiliser cette propriété puisque les retenues peuvent se répercuter sur plusieurs périodes (par exemple pour $D = 5$, la réduction d'un 5 pour le calcul de $5 \times x$ *déborde* de 3 rangs à droite et de 4 rangs à gauche). La situation semblait inextricable. C'est alors que, lors d'une de nos réunions hebdomadaires, le *mathématicien* a eu une idée qui a tout débloqué. Au lieu de prendre le nombre $x$ dans sa totalité, il suffit de prendre une période et de compter <u>sur elle-même</u> les retenues produites. La simplicité de cette idée est frappante car on simule ainsi les retenues provenant des autres périodes. Le travail de recherche est relancé. En particulier nous définissons un algorithme de somme pour les éléments périodiques en traitant de manière séparée le début du nombre et la partie périodique. Vérifier qu'une séquence est une période d'un dénominateur $D$ devient simple puisqu'il suffit de ne considérer qu'une période sans faire appel à un argument du type valeur approchée. Prenons par exemple le cas de la période trouvée par le jeu de go :

5×10000001001001010100 = 50000005005005050500
= 10020020021112103011 (réduction de tous[13] les <u>5</u> en 1001<u>0</u>001)
= 20020020010102001010 (réduction de tous les 11 en partant de la gauche)
= …
= 10101010101010101010 (il faut réduire les 2 un à un)

Sans entrer dans les détails, signalons que les conjectures s'affinent, des résultats importants sont prouvés, le programme informatique est réécrit pour être plus efficace, de nouvelles conjectures sont avancées et prouvées, etc.

---

13 L'algorithme général demande de réduire les 5 un à un et les 11 qui apparaissent alors.

## 3. Avancement des recherches en mathématiques : analogies avec la base dix

Dès lors, les choses s'emballent. Le *didacticien* se demande si cette idée peut s'appliquer aux écritures illimitées périodiques en base de numération usuelle (en base dix ou autres). La réponse est positive et débouche sur une construction du corps **Q** uniquement à partir des *écritures à virgule* périodiques pour lesquelles nous obtenons des algorithmes pour les quatre opérations usuelles (Rittaud & Vivier, 2011b). La simplicité de l'algorithme de somme est particulièrement frappante. Par exemple, pour effectuer 0,5+0,7 $0,\overline{5}+$ la somme des périodes fait 3 (2 plus 1 de retenue) et il y a un 1 de retenue à comptabiliser tout à gauche, soit 1,3.

Les analogies vont bon train, et dans les deux sens. Par exemple, en base usuelle, pour obtenir les périodes d'un dénominateur $D$, il suffit de trouver le nombre $l$ tel que $10^l - 1$ soit divisible par $D$ : $l$ est la taille des périodes cherchées qui s'obtiennent toutes à partir du quotient de $10^l - 1$ par $D$ (voir Rittaud & Vivier 2011b pour des exemples et un exposé complet). La forte similitude algébrique entre les nombres 9…9 en base dix (en base $B$, il faut remplacer 9 par $B - 1$) et 01…01 et 10…10 en base de Fibonacci amène rapidement à la conjecture suivante : pour avoir, dans l'ensemble des nombres $F$-adiques, les périodes de dénominateur $D$, il faut trouver un entier $l$ tel que $F_{l-1} - 1$ et $F_l - 1$ soient tous deux divisibles par $D$ et le quotient permet de déterminer les périodes qui sont alors de taille $l$ ($l$ est toujours un nombre pair). La conjecture est prouvée (Rittaud & Vivier, 2011a). Pour chercher, par exemple, les périodes de dénominateur 5 on voit que la condition est remplie pour $F_{19} - 1$ et $F_{20} - 1$ qui sont tous deux divisibles par 5 (cf. annexe). Ainsi, les périodes de dénominateur 5 sont de taille 20 et on les obtient en calculant 17710 / 5 = 3542. Ce nombre s'écrit dans la base de Fibonacci : $3542 = F_3 + F_6 + F_9 + F_{11} + F_{13} + F_{16}$ soit 00010010010101001 c'est-à-dire, pour avoir vingt chiffres, 00010010010101001000 qui est la période[14] obtenue par le jeu de go.

## 4. Des recherches en didactique

L'algorithme de somme de rationnels en écriture décimale a donné naissance à des recherches en didactique. Cet algorithme a été testé en classe de seconde et de première année d'université (Vivier, 2011a). Il se révèle facile à utiliser pour des élèves de seconde (grade 10) même si les justifications font défaut, notamment à cause d'un manque de compréhension du système décimal. La compréhension de l'algorithme ne semble plus poser de problème en première année d'université.

Une expérimentation a également été menée en formation d'enseignant : une situation a été proposée à des étudiants-professeurs du second degré (la figure 2 est extraite de cette expérimentation) qui leur a permis de produire un algorithme de somme (Vivier, 2011b). En outre, la possibilité de faire des sommes de périodes est

14 Toutes les périodes de dénominateur 5 s'obtiennent en combinant, par des sommes, cette période avec celle provenant de $(F_{19} - 1) / 5 = 2189$ = 00100100101010010000.

apparue comme on peut le voir à la figure 3 où l'on note l'interrogation liée à la gestion de la retenue :

$\longrightarrow$ si $N+M < 10^{k_1}-1$ $\longrightarrow$ sinon $\bar{N}+\bar{M} = 1 + ???$

alors $\bar{N}+\bar{M} = \overline{N+M}$

**Figure 3.** *Introduction des sommes de périodes par des étudiants-professeurs.*

Dans toutes ces expérimentations, on étudie de fait une praxéologie ponctuelle (Chevallard, 1999) liée au type de tâches *somme de deux rationnels* dans le registre de l'écriture décimale. Nous référons à (Vivier 2011a) pour des détails.

D'autres recherches en didactique, toujours en collaboration entre Benoît Rittaud et Laurent Vivier, sont actuellement en cours, notamment sur l'égalité 0,999… = 1. En effet, l'algorithme de somme devrait permettre de faire comprendre la nécessité numérique de cette égalité comme dans l'expérimentation de Weller, Arnon et Dubinsky (2009). Leur recherche s'appuie sur un logiciel informatique qui effectue les sommes dans le registre fractionnaire avec une double conversion masquée pour l'utilisateur. Notre algorithme de somme permet d'éviter cette utilisation opaque de l'informatique et de travailler directement sur le nombre.

## Conclusion

Évidemment, il a été décisif d'avoir un mathématicien dans l'équipe de recherche. A-t-il été important d'avoir eu un didacticien ? Un programmeur qui aurait dès le début utilisé l'informatique aurait évité le problème soulevé en section 2.1. Y aurait-il eu la recherche plus modeste liée aux mathématiques de l'enseignement secondaire ? Peut-être, et ce point est important si l'on pense aux analogies entre les deux systèmes d'écriture des nombres qui ont été très productives en conjectures et résultats. Y aurait-il eu des recherches en didactique ? On peut fortement en douter et la recherche mathématique sur les nombres *F*-adiques aurait pu rester dans le strict domaine des mathématiques universitaires. Finalement, c'est le tandem mathématicien / didacticien, qui a fonctionné en symbiose et qui a été particulièrement fructueux.

Du côté des ressources, deux points de vue sont à discuter. La ressource essentielle pour la recherche mathématique est le langage de programmation informatique. Bien sûr, cette ressource est modelable dans sa constitution même puisque l'on se fabrique soi-même l'instrument avec des modifications parfois profondes au fil des résultats mathématiques. En particulier il a été complètement remodelé avec l'idée fondamentale de travailler sur les périodes (cf. section 2.2).

Plus important peut-être, ces recherches fournissent une ressource nouvelle constituée par l'algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale. Cette ressource est utilisable dans l'enseignement secondaire que ce soit en classe, pour éclaircir certains points liés aux développements décimaux, ou en formation d'enseignant, pour appuyer les professeurs du second degré dans les calculs traditionnels permettant de montrer que tout développement décimal périodique représente une fraction. Toutefois, il est à signaler que le curriculum français actuel ne laisse que peu de place à ce type de question sur les nombres.

## Bibliographie


Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

Rittaud, B. (2006). *Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$, éditions Le pommier.

Rittaud, B. & Vivier, L. (2011a). Circular words, *F*-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320,…, *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* (accepté).

Rittaud, B. & Vivier, L. (2011b). The fields Q from the standpoint of circular words, *en preparation*. Une version simplifiée en français est disponible sur Internet : <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf>).

Vivier, L. (2011a). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. (Soumis à *El cálculo y su enseñanza*, México, <http://mattec.matedu.cinvestav.mx>).

Vivier, L. (2011b). Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. (Accepté au GT6 de EMF 2012.)

Weller, K., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2009). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), Routeledge.

Zeckendorf, E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. de la Société Royale des Sciences de Liège, **41***.


## Annexe : la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et pour tout $n$ entier par la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Les premiers termes sont :

| $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ | $n$ | $F_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 21 | 11 | 233 | 16 | 2584 | 21 | 28657 |
| 2 | 3 | 7 | 34 | 12 | 377 | 17 | 4181 | 22 | 46368 |
| 3 | 5 | 8 | 55 | 13 | 610 | 18 | 6765 | 23 | 75025 |
| 4 | 8 | 9 | 89 | 14 | 987 | 19 | 1094 | 24 | 121393 |
| 5 | 13 | 10 | 144 | 15 | 1597 | 20 | 1771 | 25 | 196418 |

À partir des réductions de base $\underline{11}\rightarrow\underline{00}1$ et $\underline{2}\rightarrow10\underline{0}1$, on en déduit les autres en ajoutant 1 au rang souligné : $\underline{3}\rightarrow10\underline{0}01$ ; $\underline{4}\rightarrow10\underline{1}01$ ; $\underline{5}\rightarrow1001\underline{0}001$ ; $\underline{6}\rightarrow1000\underline{0}101$ ; $\underline{7}\rightarrow1000\underline{0}0001$ ; $\underline{8}\rightarrow1000\underline{1}0001$ ; $\underline{9}\rightarrow1010\underline{0}1001$ ; …

# Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution

## Un tour en géométrie dynamique tridimensionnelle

**Mathieu Blossier*, Philippe R. Richard****

** Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Rouen*
*Avenue de Broglie B.P. 138*
*76821 Mont-Saint-Aignan*
*mathieu.blossier@ac-rouen.fr*

*** Université de Montréal et Universitat Autònoma de Barcelona*
*C.P. 6128, succursale Centre-ville*
*Montréal (Québec) H3C 3J7*
*philippe.r.richard@umontreal.ca*

*RÉSUMÉ : Afin de soutenir le développement d'une compétence de modélisation au début du lycée, nous analysons brièvement deux situations-problèmes à l'aide du logiciel GeoGebra3D. Le premier problème débouche sur les coniques d'Apollonius et le second soulève quelques considérations sur les nids d'abeille. Notre propos vise à montrer l'effet de la modélisation instrumentée sur les conceptions a priori en considérant la coordination des opérateurs mis en œuvre, des systèmes de représentation employés et des structures de contrôles mobilisées dans l'interaction entre l'élève et le milieu informatique.*

*ABSTRACT: In order to support the development of a competence of modelling at the beginning of the high school, we briefly analyze two situation-problems using the software GeoGebra3D. The first problem leads to the Apollonius conical and the second raises some considerations on the honeycombs. Our matter aims at showing the effect of the instrumented modelling on the conceptions a priori by considering the coordination of the operators implemented, the systems of representation employed and the structures of controls mobilized in the interaction between the student and the computer (informatic) milieu.*

*MOTS-CLÉS : didactique des mathématiques, modélisation instrumentée, représentation, conception, espace de travail géométrique, géométrie dynamique tridimensionnelle.*

*KEYWORDS: didactic of mathematics, instrumented modelling, representation, conception, geometrical workspace, three-dimensional dynamic geometry.*

## Introduction

La notion de modèle en mathématique est probablement aussi ancienne que la science géométrique. Alors que l'on cherchait à représenter toutes sortes de situations, d'objets et de structures du monde réel, les Anciens purent simuler la réalité du monde de l'espace et des formes et ainsi anticiper sur ses propriétés. Mais qui dit modélisation dit aussi simplification, ce qui donne au modèle des caractéristiques qui lui sont propres, en toute indépendance de réalité originelle. C'est-à-dire que la géométrie, dans son interprétation et ses traitements, se comporte comme une nouvelle réalité, à la fois abstraite dans sa logique et concrète dans ses modes de représentation. Et depuis l'avènement des logiciels de géométrie dynamique, le modèle géométrique semble se réinventer, offrant même un espace de simulation au sein du modèle qui devient une autre réalité.

Dans notre texte nous commençons avec des acceptions classiques des processus de représentation de modélisation (section 1.1) afin de les appliquer à la constitution d'un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnel, le GeoGebra3D, pour lequel le développement informatique cherche à rapprocher les modèles géométriques à la réalité de l'institution scolaire (section 1.2). Nous introduisons ensuite trois notions clefs, issues de la didactique des mathématiques (section 1.3), de façon à soutenir l'exploration de deux situations d'interaction entre les mathématiques et sa didactique (section 2). Nous terminons sur quelques considérations générales pour l'enseignement des mathématiques (section 3).

## 1 Quelques références théoriques

### *1.1. Représentation et modélisation : deux processus charnières aux cœur de l'apprentissage de la géométrie*

Dans un même contexte géométrique, les notions de représentation et de modélisation peuvent prendre des sens forts différents. Du point de vue de la théorie des signes (perspective sémiotique), le dessin est un modèle de la figure (au sens de représentation sémiotique), cette dernière étant un objet mathématique issu du modèle euclidien (au sens de théorie représentante). Ce double jeu autorise la multiplicité des processus de représentation et de signification du registre figural (Richard, 2004a). C'est-à-dire que si un même objet géométrique peut être représenté par des unités figurales différentes, un même support peut être utilisé pour différents modèles. Ainsi, on peut «voir» qu'un dessin est effectivement un carré à cause de son apparence visuelle (approche synthétique) ou parce que l'on peut en établir la nature par le raisonnement (approche analytique). À l'inverse, qu'il soit dessiné sur papier ou visible par l'activation de pixels à l'écran d'un ordinateur, ce même carré peut en représenter un en géométrie euclidienne ou bien représenter un cercle en géométrie du chauffeur de taxi (Krause, 1986) – sur les nœuds d'un quadrillage par exemple, où les déplacements en diagonale à travers les édifices sont impossibles, l'ensemble des points équidistants d'un même centre sont sur un carré.

La distinction entre «matérialisation» et «modèle» de la figure permet notamment de souligner l'autonomie de l'ordre symbolique constitué par le dessin de ce qu'il est censé signifier, en ce sens qu'un dessin géométrique étant lui-même constitué de formes, il peut être son propre modèle, tel un fait donné. Avant d'illustrer dans une situation d'apprentissage les effets producteurs et réducteurs dans la représentation figurale, nous introduisons la modélisation du point de vue de la formation des sciences (perspective épistémologique). Selon Delahaye (2008), lorsqu'on utilise les mathématiques pour modéliser le monde ou certains de ses aspects particuliers :

> Le mot «modèle» est alors pris dans le sens de représentation : les objets mathématiques jouent le rôle des objets réels, et de leur connaissance on espère tirer une compréhension du monde réel lui-même. Lorsque la modélisation est correcte, l'étude du modèle mathématique donne des informations sur la situation, l'objet ou les structures que vise le modèle. Ces informations peuvent provenir de l'étude mathématique du modèle, ou bien de son utilisation pour mettre au point des programmes informatiques qui, lorsqu'ils fonctionnent, simulent la situation, l'objet ou la structure modélisée.

La superposition des deux jeux de la représentation a beau être cohérente, la prédominance d'un jeu sur l'autre est susceptible d'engendrer des effets diamétralement opposés dans une situation de modélisation. C'est ce qui se produit en classe lorsque des élèves fondent un raisonnement à partir des propriétés spatiales du dessin au lieu des propriétés géométriques de l'objet représenté, même s'ils travaillent déjà sur une réalité modélisée (Richard, 2010a et b).

### *1.2. GeoGebra3D : un outil en évolution*

Le développement de GeoGebra3D en tant que logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle s'inscrit dans la foulée du gratuiciel libre GeoGebra (GGB). En bout de piste, il s'intégrera à la version 5.0 du logiciel source[15], ce qui permettra en toute transparence la mise en œuvre de situations géométriques qui réunissent simultanément la représentation figurale dans le plan, la modélisation numérique d'objets géométriques en déplacement (fenêtres «algèbre» et «tableur»), le calcul formel et la représentation dynamique dans l'espace, dont l'opportunité de montrer des coupes transversales. Dans notre propos, nous n'entrons pas en amont dans la subtilité des modèles mathématiques nécessaires à l'exercice de programmation informatique ni dans celle des modèles discrets de la représentation d'objets géométriques à l'interface de l'ordinateur. Nous restons en aval pour constater l'effet du logiciel lorsqu'il est en interaction avec un individu, que ce soit en vue de situations didactiques ou d'activité de résolution de problème. En revanche, cette interaction présumée dans un contexte scolaire est à l'origine des choix informatiques pour le perfectionnement de GeoGebra3D.

---

15 Pour connaître l'état actuel, voir <http://www.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebra3D>.

### *1.3. Les interactions a priori entre l'élève et le milieu*

Si les connaissances mathématiques ne sont pas innées, l'élève possède tout au moins une capacité à analyser, raisonner et communiquer des idées qui se rapportent fondamentalement à la culture mathématique (PISA, 2006), que ce soit au regard de la quantité, l'incertitude, les variations et les relations, ou l'espace et les formes. Mais l'élève a été engagé très tôt dans sa scolarité à poser, formuler ou résoudre des problèmes au sein de modèles mathématiques pour lesquels il a dû en interpréter les solutions. Qu'il s'agisse d'une réponse à une intention d'enseignement ou d'un questionnement personnel, c'est donc en interaction avec un milieu porteur de connaissances mathématiques que l'élève a pu animer les siennes.

Dans ce qui suit, nous utilisons la notion de milieu en tant que concept unificateur de l'ensemble des supports qui véhiculent des connaissances mathématiques lorsque ceux-ci sont en interaction avec un élève, qu'il s'agisse de systèmes de signes, d'outils, de mises en scène ou de tout autre matériel à usage didactique, depuis les documents papiers jusqu'aux médias électroniques, en autant que ce soit en réaction aux propositions de l'élève dans une perspective d'apprentissage (Richard, 2011). Dans cette perspective, le milieu se considère hors des situations proprement didactiques (Brousseau, 1998) et c'est l'élève qui souhaite faire évoluer la connaissance de son propre chef.

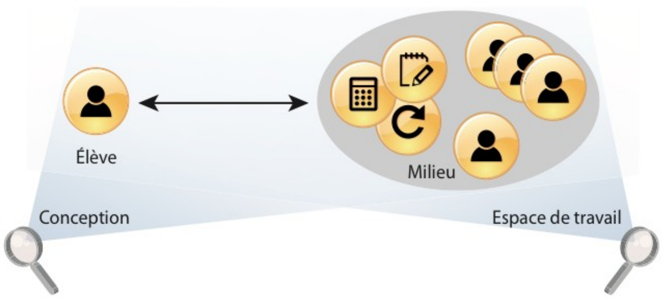



**Figure 1.** Deux éclairages du système élève-milieu.

Puisque les connaissances mathématiques opératoires émergent de l'interaction entre l'élève et le milieu, la littérature didactique offre un double éclairage sur ces interactions (figure 1). En regardant l'élève au premier plan, la notion de conception permet de rendre compte d'une instance de la connaissance de l'élève, qui se distingue par la représentation et les traitements qu'elle met en œuvre et les contrôles qu'elle mobilise, et dont la portée est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (Balacheff et Margolinas, 2005). Par ailleurs, lorsque c'est le milieu qu'on regarde au premier plan, la notion d'espace de travail mathématique permet de rendre compte de l'environnement qui amorce la genèse des connaissances mathématiques à partir d'une articulation entre un référentiel théorique, des objets géométriques et un milieu matériel (Kuzniak, 2009). Alors que la notion d'espace de travail se structure d'abord selon trois composantes (ensemble d'objets, ensemble d'artéfacts et référentiel théorique), nous y intégrons la démarche de l'élève en instance de réalisation (Coutat et Richard, 2011).

## 2 Exemples d'interactions possibles dans le traitement de deux problèmes

### *2.1. Les jardins de Madrid*

Le problème de départ consiste à situer un lampadaire pour éclairer au mieux un jardin triangulaire (Richard, 2010a). Selon un point de vue aérien, le pied du lampadaire pourrait conduire à la notion de cercle circonscrit au triangle. Mais lorsqu'on tient compte des immeubles environnants, le faisceau lumineux projeté sur le toit ou les façades permet de signifier et d'approfondir les coniques d'Apollonius dans une réalité prémodélisée (figure 2).

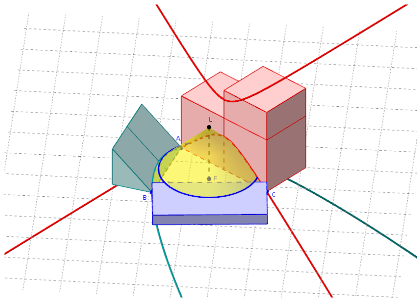
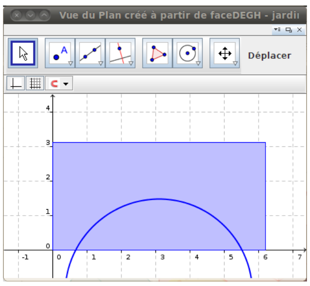
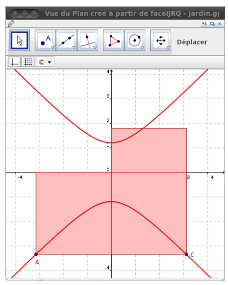


**Figure 2.** Zones d'intersection du cône lumineux au delà du jardin.

L'espace occupé par les solides et la forme des coniques relèvent de la géométrie synthétique, mais leur représentation demeure dans le plan. Bien que la 3[e] dimension est déjà visible par les jeux d'ombre, de lumière et de texture, c'est surtout par le déplacement, donc dans l'interaction avec le sujet, qu'elle révèle son ampleur. Les coupes transversales interactives selon les plans directeurs (figures 3a, b et c) et les représentations analytiques des coniques (*ib.* d) participent également à l'exercice conceptuel, en ajoutant cette fois un point de vue issu de la géométrie analytique. Si la représentation se gère d'abord par le milieu, celui-ci réagit à l'action de l'élève qui doit coordonner son expérience sur les réalités et les modèles géométriques.



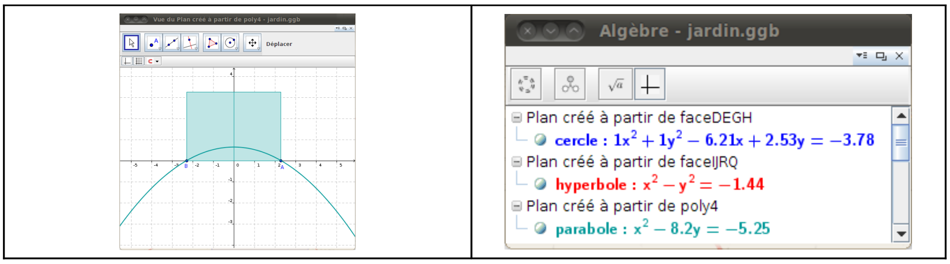



**Figure 3a, b, c et d.** Vues interactives des coniques dans les plans directeurs et fenêtre d'équations correspondantes.

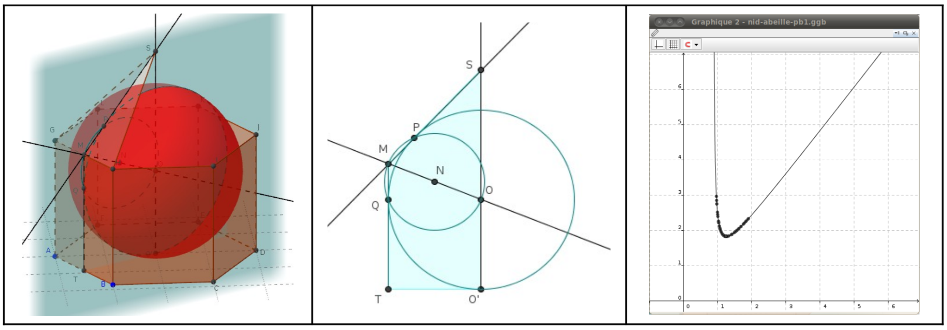
### *2.2. Le travail des abeilles*

#### *2.2.1. La géométrie du gâteau de cire*

Un gâteau de cire présente deux côtés parallèles, constitués d'un faisceau de «tubes» prismatiques dont les ouvertures forment un pavage hexagonal. Ces tubes sont les alvéoles au fond desquels l'abeille dépose ses œufs et son miel. L'interface entre ces deux côtés n'est pas plane : chaque tube se termine par trois losanges, comme le fond d'un dodécaèdre rhombique. Cette configuration semble non seulement optimiser la quantité de cire utilisée (Hales, 2001), mais elle permet également une meilleure proximité des œufs, réduisant ainsi les déperditions de chaleur (Richard, 2006). Nous posons alors la question suivante : étant donnée une sphère tangente aux parois d'un prisme droit et régulier à base hexagonale, la «fermeture» du prisme en dodécaèdre rhombique est-elle optimale ? En guise d'exploration, nous commençons par considérer la situation d'un fond pyramidal et nous poursuivons avec l'intuition du fond rhombique.

#### *2.2.2. Première situation : refermer le prisme à l'aide d'une pyramide*

L'enjeu du problème consiste à concevoir une pyramide afin que ses parois soient tangentes à une sphère (figure 4a). La situation se laisse ramener à la construction du sommet S d'un côté de la pyramide dans le plan médiateur de sa base [GH] (figure 4b). Si P est le point de tangence de l'apothème [MS], alors le triangle MOP est rectangle en P. Sous ces contraintes, la variation de la hauteur TM du prisme, pour $OO' < TM \leq 2 \cdot OO'$, engendre un ajustement conséquent de la position du point S. Comme dans la situation des *jardins de Madrid*, l'interaction cognitive entre l'élève et le milieu doit coordonner plusieurs réalités et modèles géométriques. Mais en posant un problème d'aire maximale, le traitement dominant intègre des processus de variation (réalité sous-jacente) et de modélisation en analyse fonctionnelle, par exemple avec la représentation graphique dynamique qui s'obtient par un lieu géométrique de points ou par une trace numérique (figure 4c). Lorsque l'élève expérimente sur les figures (*ib.* 4a ou b), il fait bien plus qu'une résolution instrumentée dans un espace de travail. Il agit directement sur la représentation figurale en tant que système sémiotique, donc sur les conceptions.




**Figures 4a, b et c.** Construction du point S dans l'espace et dans le plan médiateur et modélisation de la quantité de cire nécessaire pour recouvrir la demi-sphère.

*2.2.3. Deuxième situation : refermer comme les abeilles*

La figure cherchée repose sur un postulat de symétrie. Il s'agit de construire trois losanges ayant un sommet commun situé dans l'axe central du prisme et dont les autres sommets sont situés sur ses arêtes latérales. Les sommets H, J et L d'une part, et G, I et K d'autre part se trouvent alternativement dans deux plans parallèles à la base hexagonale du prisme. La position de l'un de ces six sommets détermine tous les autres, y compris S, mais le dynamisme est plus complexe et l'interaction cognitive exige un effort de contrôle ajouté entre les conceptions en jeu (figure 5).

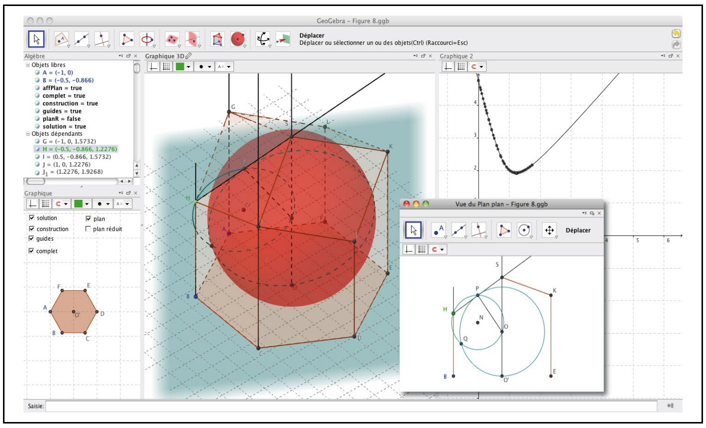


**Figure 5.** Étude du fond rhombique d'une alvéole.

Puisque le point de tangence P est dans le même plan que le point H et l'axe central du prisme, les considérations dans ce plan sont similaires à celles de la situation 1, mais l'approche analytique de la fonction d'aire est plus difficile à traiter. S'il est remarquable que l'optimisation de la quantité de cire coïncide avec le dodécaèdre rhombique, la configuration satisfaisante le fait apparaître sur la réalité prémodélisée (vue tridimensionnelle à la figure 5).

## 3 Conclusion

Malgré son enracinement plus qu'évident dans la vie de l'élève et son pouvoir de modélisation éprouvé dans l'histoire, la géométrie tridimensionnelle ne reçoit pas l'attention qu'elle mérite. Pourtant, les possibilités de représentation interactives s'ouvrent sur des situations autrefois peu accessibles à la réalité scolaire. L'usage d'un logiciel de géométrie dynamique, fut-il en trois dimensions, n'est certes pas une panacée. Mais il rapproche la logique de l'expérimentation scientifique aux processus de découverte mathématique. Avec l'aide d'enseignants sensibles aux enjeux de l'apprentissage instrumenté, on peut créer des activés dans lesquelles la motivation principale réside dans la compréhension de concepts mathématiques.

Même si les contraintes du texte ne nous ont pas permis de détailler davantage les activités de modélisation instrumentée, le double éclairage apporté par les notions de conception et d'espace de travail géométrique demeure utile pour l'anticipation des interactions entre l'élève et le milieu. On sait d'abord que la mise au point de situations-problèmes ou de matériel pédagogique est une activité quotidienne des enseignants. On sait aussi que cette activité procède souvent de manière intuitive et artisanale, parant au plus pressé et sans grande planification. Bien qu'il s'agisse souvent de moyens ad hoc qui prétend concilier les demandes paradoxales de l'institution ou soulager le frottement entre des connaissances préalables, la production est efficace pour le lendemain, son usage reste local et temporaire. Pour l'enseignant qui veut aiguiser son intuition fondée ou qui souhaite réaliser une production ou une intervention dont l'usage serait plus large, les notions précédentes constituent un système de référence susceptible d'orienter sa démarche, jusqu'à l'évaluation même des compétences mathématiques des élèves.

### Références bibliographiques


Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ck¢, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coutat, S. & Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 97-126.

Delahaye, J.P. (2008). *Modélisation, mathématique*. Encyclopædia Universalis France.

Hales, T. (2001). The Honeycomb Conjecture. *Discrete & Computational Geometry, 25*, 1-22.

Krause, E.F. (1986). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Mineola, New York : Dover Publications.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. Dans Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier (Éds) *Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques*, 71-89.

PISA (2006). *Cadre d'évaluation de PISA 2006. Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*. Les publications de l'OCDE.

Richard, P.R. (2004a). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics, 57*(2), 229-263.
Richard, P.R. (2004b). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne: Peter Lang.
Richard, P.R. (2006). Quand les abeilles font de la géométrie. In Pallascio, R. et Doddridge, É. (Dir.) *Montrez cette mathématique que je ne saurais voir!,* 57-63. Montréal: Les Éditions nouvelles.
Richard, P.R. (2010a). La geometría dinámica como herramienta para desarrollar competencias de modelización en el bachillerato. (2010b). La evaluación de competencias matemáticas: una apuesta de aprendizaje desde la elección de situaciones-problemas. *Competencias matemáticas. Instrumentos para las ciencias sociales y naturales*, 89-115 et 180-198. Ministerio de Educación et IFIIE.
Richard, P.R. (2011). La interacción con applets Java para el aprendizaje de las matemáticas. *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas, 58*, 8-24.

# *Communications*

## Thème 2 :
## Le travail collaboratif des enseignants : conception de ressources et formation

# Représentations des enseignants de mathématiques et de sciences expérimentales sur quelques concepts épistémologiques des démarches d'investigation : expliciter pour mieux interagir

**Réjane Monod-Ansaldi*/ ** /***, Jacques Vince* /****, Michèle Prieur* /*** et Valérie Fontanieu***

** IFé ; **ACCES, ***EducTice - S2HEP ; ****ICAR ; jvince@ac-lyon.fr rejane.monod-ansaldi; michel.prieur ; valerie.fontanieu@ens-lyon.fr ;*

*RÉSUMÉ : Les instructions officielles pour l'enseignement des sciences dans le secondaire décrivent une Démarche d'Investigation (DI) prototypique et soulignent sans les expliciter, la proximité et les spécificités de cette démarche entre les disciplines. Mais quelles représentations de ces démarches sont construites par les enseignants à l'intérieur de leur discipline et d'une discipline vers l'autre ? L'enquête nationale que nous avons menée sur les représentations des enseignants de mathématiques, SPC et SVT au sujet des DI montre que : les postures épistémologiques des enseignants de mathématiques et de sciences expérimentales sont assez divergentes ; les représentations de certains concepts épistémologiques sont fortement dépendantes des disciplines.*

*MOTS-CLÉS : démarche d'investigation, pluridisciplinarité, épistémologie, instructions officielles, représentations enseignantes.*

*ABSTRACT: Official instructions for science teaching in French secondary schools describe a prototypical inquiry with proximity and specificity across topics, but without indicating what is common and what is specific of each topic. To explore teachers' understanding of inquiry on their own topic and on the others, we design a national survey about the inquiry for mathematics, physic-chemistry, and biology-geology teachers. Our results show that the understanding of the nature of science is quite different for mathematics teachers and experimental science teachers and that the perceptions of epistemological concepts are strongly topics dependent.*

*KEYWORDS: inquiry based science teaching, codisciplinarity, epistemology, official instructions, teachers' perception*

## Introduction

Le socle commun de connaissances et de compétences[1], l'introduction commune aux programmes de mathématiques, sciences et technologie de collège[2], et dans leur continuité, les programmes de la classe de seconde en particulier pour l'enseignement d'exploration « *Méthodes et pratiques scientifiques* »[3] visent l'initiation des élèves aux démarches d'investigation (DI) en interaction entre les disciplines. Ces instructions officielles décrivent une DI prototypique et soulignent sans les expliciter, la *proximité* et les *spécificités* de cette démarche dans les différentes disciplines. La DI constitue donc un objet pluriel à décliner dans chaque discipline, à articuler entre les disciplines, à construire et évaluer collectivement. Mais quelles sont effectivement les convergences et les spécificités des DI envisagées dans les différentes disciplines scientifiques ? Quelles représentations les enseignants ont-ils construit de ces démarches, à l'intérieur de leur discipline et d'une discipline vers l'autre ? Pour mieux comprendre les difficultés potentielles sur le terrain et faciliter dialogue et collaboration entre disciplines lors de la mise en œuvre de DI, nous avons réalisé une enquête nationale auprès des enseignants de mathématiques, sciences physiques et chimiques (SPC), sciences de la vie et de la Terre (SVT) et technologie, dont nous présentons ici une partie des résultats concernant les représentations des répondants de mathématiques, SPC et SVT, au sujet des savoirs scientifiques et des concepts épistémologiques de *problème*, *hypothèse, expérience* et *modèle* envisagés dans le cadre des DI.

## 1. Cadre théorique

Les directives officielles sur les DI dans la classe, relèvent de la transposition didactique des démarches des experts (Coquidé et *al.*, 2009) et des concepts épistémologiques mobilisés en référence à la démarche hypothético-déductive tels que *problème, hypothèse, expérience*, et *modèle* (Darley, 2007). Généralement, les représentations des démarches des chercheurs et celles des DI à mener en classe oscillent entre une méthode scientifique rigoureuse et normée et le cheminement d'une pensée plus divergente ou vagabonde (Develay 1989). Les représentations des DI en classe sont également influencées par la posture épistémologique des enseignants (Gandit et *al*, 2010). Porlan-Ariza et ses collaborateurs (1998) distinguent différentes postures chez des enseignants du primaire : le rationalisme, attaché à la cohérence interne des savoirs ; l'empirisme, donnant à l'induction une place prioritaire souvent modérée par une expérimentation falsifiante ; et une posture alternative intégrant une construction sociale de savoirs en constante évolution. Favre et Joly (2001) pour leur part, modélisent les « postures épistémiques » sur un axe entre traitement dogmatique et non dogmatique de l'information. Comment se

[1] Décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006

[2] Bulletin officiel spécial n° 6, 28 août 2008

[3] Bulletin officiel spécial n° 4 du 29 avril 2010

situent les postures des enseignants de mathématiques, SPC et SVT sur cet axe ? Quelle position adoptent leurs représentations des DI entre méthodologie rigoureuse et cheminement ouvert ? Quelles convergences et quelles spécificités s'expriment entre les trois disciplines scientifiques au niveau de ces représentations ?

Pour aborder ces questions, nous avons réalisé une enquête sur les représentations des enseignants de SVT, SPC et mathématiques concernant les savoirs de leur discipline et les concepts épistémologiques liés aux DI.

## 2. Méthodologie

### *2.1. Construction et diffusion du questionnaire en ligne*

L'enquête visait les enseignants de collège et lycée, de mathématiques, SPC, SVT et technologie. Notre équipe, issue des sciences expérimentales (SVT et SPC), a collaboré avec des chercheurs en didactique des autres disciplines pour élaborer le questionnaire. Celui-ci a été construit suite à des entretiens semi-dirigés, puis testé auprès d'enseignants des quatre disciplines. Le formulaire proposé du 11 janvier au 15 mars 2011 sur un serveur d'enquête (LimeSurvey), a permis aux enseignants de répondre de manière anonyme. La diffusion du questionnaire a été assurée sur le territoire national par des listes de diffusion des académies, des associations professionnelles, des formateurs IUFM, etc. Le réseau des corps d'inspection n'a pas été directement sollicité pour la diffusion, dans le but de minimiser l'influence des prescriptions institutionnelles sur les réponses.

### *2.2. Représentativité de l'échantillon de répondants*

La population visée par l'enquête est constituée de l'ensemble des enseignants de mathématiques, SPC, SVT et technologie du secondaire de France métropolitaine et des DOM-TOM. La population des répondants prise en compte dans cet article représente 478 enseignants de mathématiques, 771 de SPC et 702 de SVT. Les modalités de passation de l'enquête ne permettaient pas de recueillir un échantillon représentatif de la population étudiée selon des critères socio-démographiques. Une comparaison *a posteriori* de la population des répondants avec la population de référence à l'aide de données fournies par la DEPP[4] montre une sous-représentation des enseignants de mathématiques par rapport aux autres disciplines. Indépendamment de cela, la possibilité de comparer les disciplines entre elles est confortée par des effectifs de réponses importants pour chacune d'entre elles. Une surreprésentation des enseignants de collège en SPC (52 % en collège contre 37 % attendus) et une faible surreprésentation des enseignants agrégés de chaque discipline sont également observées dans l'échantillon. Les autres caractéristiques

4 Direction de l'Evaluation, de la Prospective et du Pilotage (DEPP) du Ministère de l'Education Nationale

combinées sont proches de celles de la population cible. Le mode de diffusion de l'enquête laisse penser que les répondants constituent une population plus particulièrement interpellée par la problématique des DI.

## 3. Résultats

### *3.1. Des représentations épistémologiques contrastées entre les mathématiques et les sciences expérimentales*

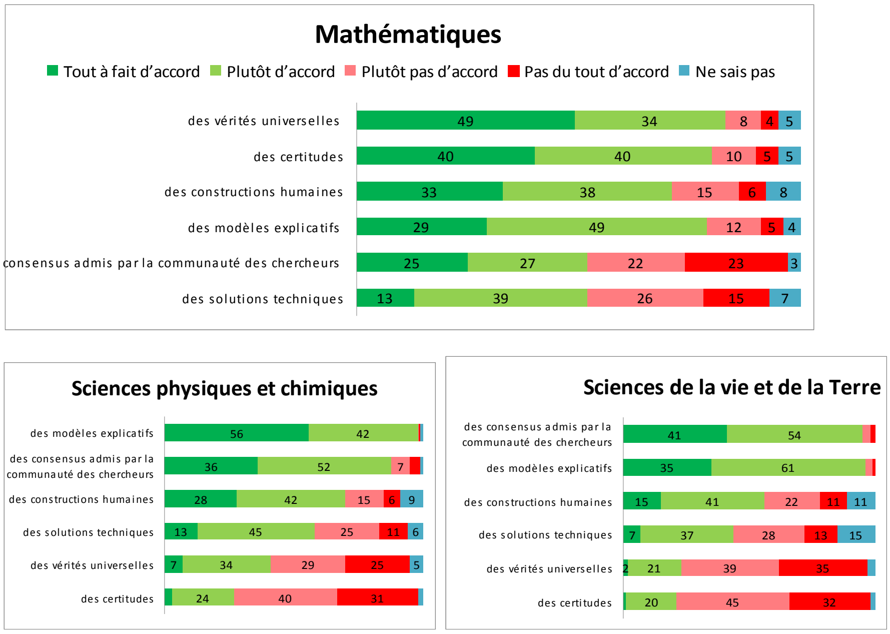



**Figure 1 :** Opinion des enseignants de mathématiques, SPC et SVT en réponse à la question « Les savoirs de vos disciplines sont… ».

Les représentations des enseignants de mathématiques et de sciences expérimentales concernant les savoirs scientifiques de leur discipline sont très contrastées (figure 1). Les répondants de mathématiques retiennent « *les vérités universelles* » (83 % d'accord) et « *les certitudes* » (80 % d'accord), alors que ces deux propositions sont les plus rejetées en sciences expérimentales (1/2 à ¾ de désaccord) où les « modèles » remportent un fort accord (plus de 96 %). Il peut paraître surprenant qu'une forte proportion d'enseignants de mathématiques sélectionne les « modèles explicatifs » (80 %) et les « *certitudes* » (78 %) pour définir les savoirs de leur discipline, si l'on considère la dimension évolutive des modèles scientifiques. L'accord le plus faible va aux « *consensus admis dans la* *communauté des chercheurs* ». Ces réponses font apparaître une représentation globale plutôt dogmatique des savoirs. Cependant, ces postures épistémologiques ne sont que des représentations moyennes, des tendances pour chaque discipline. Une recherche de profils à l'intérieur des disciplines fait émerger des sous-populations ayant des représentations différentes. Pour les mathématiques, on peut différencier les répondants « dogmatiques » (33 %) très attachés aux savoirs certitudes et vérités universelles, les « non dogmatiques » (33 %), qui au contraire insistent sur la modélisation et la construction sociale des savoirs et les « indécis » (27 %) qui sont assez d'accord avec toutes les propositions.

### *3.2. Approche comparative des concepts méthodologiques associés aux DI*

Invités à comparer le sens des termes *problème*, *hypothèse, expérience et modèle* dans leur propre discipline avec le sens qu'ils prennent dans les autres disciplines, une part non négligeable des enseignants affirme que la signification est la même (8 à 78 % selon les termes et les disciplines), ou indiquent qu'ils ne savent pas répondre (6 à 30 %). En particulier, 1/5 des répondants de mathématiques et de SVT et plus d'un 1/3 en SPC ne sont pas conscients de la polysémie du terme *hypothèse* entre mathématiques et disciplines expérimentales. L'analyse des convergences et des spécificités des trois disciplines paraît donc nécessaire.

#### *3.2.1. Problème*

Un consensus se dégage entre les disciplines pour placer le *problème* à l'origine d'une démarche de résolution. Près des 2/3 (64 à 72 %) des enseignants retiennent pour sa définition « *une question permettant la formulation de propositions, d'hypothèses ou de conjectures* », « *une question qui débouche sur une démarche explicative* » ou « *une question qui débouche sur une recherche de solution* ». Pour plus de 90 % des répondants, le problème « *mobilise différentes compétences* » et *« peut être résolu de différentes façons* », ce qui intègre une certaine complexité et s'oppose à l'idée d'une DI linéaire et guidée. Près des 2/3 des répondants des trois disciplines rejettent l'idée qu'un problème « *concerne un sujet totalement nouveau* » (64 à 71 %). Une grande part d'entre eux (72 à 85 %) s'accorde également sur le fait que le problème *« doit être formulé ou reformulé par les élèves* ».

Des différences s'expriment cependant entre les disciplines. Les définitions « *un exercice permettant de réinvestir des connaissances* » et « *une succession de questions articulées entre elles* » sont un peu plus spécifiquement retenues en mathématiques, où les 2/3 des répondants pensent que le problème « *nécessite des acquis antérieurs* ». En sciences expérimentales, le problème se caractérise par son articulation avec l'observation pour 83 % (SPC) et 95 % (SVT) des répondants, l'expérimentation (79 % en SPC et 59 % en SVT) et la vie quotidienne ou l'actualité (64 % en SVT et 73 % en SPC).

*3.2.2. Hypothèse*

En première analyse, une représentation consensuelle du concept d'hypothèse se dégage des réponses. Quand la question est posée sans référence explicite à un contexte ou une discipline, la définition « *une proposition provisoire destinée à être éprouvée* » est la plus choisie dans toutes les disciplines (40 à 84 %). En mathématiques, la définition correspondant au postulat *« une supposition non démontrée sur laquelle on s'appuie pour résoudre un problème »* est également fortement sélectionnée (40 %). Quand il s'agit de caractériser les hypothèses explicatives ou conjectures, la majorité des répondants indique que leur formulation implique « *une observation du réel* » (59 à 75 % selon les disciplines), « *des connaissances préalables* » (48 à 58 %) et « *la prise en compte des représentations initiales des élèves* » (76 à 83 %). L'*hypothèse* mobilise à la fois pensée divergente et pensée convergente puisque plus de 7/10 répondants sélectionnent au moins un adjectif relatif à chacun de ces modes de pensée, comme qualité nécessaire à sa formulation. Enfin, elle implique « des conséquences ou implications vérifiables » pour 69 % (mathématiques) à 85 % (SVT) des enseignants. Cette représentation consensuelle est donc très proche de l'hypothèse initiant une démarche hypothético-déductive, décrite dans la DI prototypique des instructions officielles.

Une analyse multidimensionnelle des réponses à ces questions a toutefois permis de révéler une typologie plus fine des représentations de l'hypothèse (Prieur et *al.*, 2011) avec 4 classes qui sont très liées aux disciplines des répondants. Les représentations associées aux sciences expérimentales s'attachent à éprouver l'hypothèse. Les répondants de SVT inscrivent plus spécifiquement l'hypothèse dans une démarche hypothético-déductive rigoureuse, alors que les enseignants de SPC la mobilisent dans une démarche inductive moins contrainte, mue par un souci de motivation des élèves. Dans la représentation associée aux mathématiques, la formulation de conjecture est reconnue comme audacieuse et s'appuie sur les connaissances des élèves et sur un tâtonnement exploratoire.

*3.2.3. Expérience*

Les éléments de consensus autour du concept d'expérience concernent sa fonction de mise à l'épreuve : les définitions les plus sélectionnées sont « *un test conçu pour éprouver une hypothèse* » (59% en SVT, 33 % en SPC, 24 % en maths) et « *une mise en œuvre de stratégies pour résoudre un problème* » (30% en maths, 25 % en SVT et 24 % en SPC). Les autres définitions retenues font apparaître des spécificités. En mathématiques, l'*« exploration par tâtonnement »* et l'« *exploration d'exemples* » choisies par 3/10 enseignants, font ressortir le caractère exploratoire de l'expérience, souvent située en amont de la conjecture. Les enseignants de SPC retiennent plus spécifiquement « *une activité pendant laquelle les élèves manipulent du matériel* » (26%) et « *une observation précise du réel* » (6%), montrant leur attachement à l'ancrage dans le réel matériel par l'activité manipulatoire et l'observation. Les répondants de SVT attachés à une méthode scientifique normée articulent l'expérience à l'hypothèse.

*3.2.4. Modèle*

Le questionnaire demandait de classer 13 fonctions possibles du *modèle* dans la discipline enseignée. Dans les trois disciplines, la fonction « représenter » est choisie dans une des trois premières positions par presqu'un enseignant sur deux, les fonctions « expliquer » et « comprendre » étant également retenues par près d'un enseignant sur trois. D'autres fonctions du modèle sont préférées dans certaines disciplines, telles que « servir de référence » en mathématiques, « interpréter » en SPC et « permettre des analogies » en SVT. Concernant la forme des modèles, si le « schéma » est retenu par les trois disciplines, les réponses des enseignants de SPC s'approchent plus de celles des répondants de mathématiques qui retiennent « formule mathématique » et « construction mentale » que de celles des professeurs de SVT préférant « maquettes », « simulation » et « animation ».

## 4. Discussion

Notre étude montre que les postures épistémologiques des enseignants de mathématiques et de sciences expérimentales sont assez divergentes. Les premiers réfèrent à des savoirs démontrés formellement ayant un caractère modélisant, mais également une portée universelle et une valeur de certitude. Les seconds considèrent les savoirs de leurs disciplines comme des modèles du réel, évolutifs, issus d'une construction collective, et sans doute moins définitifs. Est-ce parce que les savoirs enseignés en mathématiques sont très robustes et davantage stabilisés qu'ils prennent cette force ? Se pose également la question des connaissances épistémologiques des enseignants des trois disciplines, et du traitement de ces questions au cours de leur formation. Si les enseignants de sciences expérimentales semblent adopter une posture moins dogmatique, c'est peut-être que l'épistémologie des sciences s'est beaucoup construite autour des SPC et des SVT. Cela peut aussi s'expliquer par une meilleure médiatisation des nouveaux savoirs produits par les sciences expérimentales contemporaines, ou par une plus grande diffusion des controverses scientifiques historiques les concernant. Le positionnement épistémologique des enseignants de SVT peut également être induit par l'évolution des programmes d'enseignement de leurs disciplines qui incluent fréquemment des actualisations.

Si certains consensus, d'ailleurs en lien avec les instructions officielles, se dégagent des réponses à l'enquête concernant les concepts épistémologiques de *problème*, *hypothèse*, *expérience* et *modèle*, leurs représentations semblent toutefois être fortement dépendantes des disciplines. Restent à identifier les relations entre ces différentes représentations et les spécificités épistémologiques des disciplines de référence, les coutumes d'enseignement de chaque discipline ou encore la formation des enseignants. L'explicitation par chacun de sa vision de la science, des savoirs de sa discipline et des DI paraît en tout cas nécessaire, car les significations des concepts abordés semblent rester implicites au sein même de chaque discipline pour de nombreux enseignants. Le travail co-disciplinaire, aboutissant à la co-construction de sens à propos d'un même objet d'étude (Blanchard-Laville, 2000), qui respecte et articule les positions épistémologiques de chacune des disciplines (Chevallard 2004) est peut-être une voie dans ce sens. Il nécessite en effet la confrontation des représentations des enseignants, pour mieux appréhender la polysémie des termes couramment usités dans le cadre des DI et pour mieux identifier les concepts qu'ils recouvrent dans chacune des disciplines. Des ressources et des formations à destination des enseignants prenant en charge ces questions pourraient être envisagées dans le but de minimiser les risques de quiproquo dans la collaboration entre enseignants et avec les élèves et pour outiller la mise en œuvre de DI donnant véritablement du sens à chacune des disciplines.

**Remerciements**

Les auteurs remercient tous ceux qui ont répondu à l'enquête et/ou facilité sa diffusion, ainsi que Gilles Aldon, Martine Paindorge, Jean-Philippe Perret et Anne-Marie Rossetto qui ont participé à son élaboration et à l'analyse des résultats.

### *Bibliographie*

Blanchard-Laville, C. (2000). De la co-disciplinarité en sciences de l'éducation. *Revue Française de Pédagogie*, 132, p. 55-66.

Chevalard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité - Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Communication aux Journées de didactique comparée 2004 (Lyon, 3-4 mai 2004). Version retouchée du 19 mai 2004. Disponible sur Internet : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/recherche.php3?recherche=codisciplinarit%E9 (consulté le 24 août 2011).

Coquidé, M., Fortin, M., Rumelhard, G. (2009). L'investigation : fondements et démarches, intérêts et limite. *Aster*, 49, p. 51-78.

Darley, B. (2007). La démarche d'investigation et son vocabulaire. *Grand N* , 79, p. 99-111.

Develay, M. (1989). Sur la méthode expérimentale. *Aster*, 8, p. 83–15.

Favre, D. et Joly, J. (2001). Évaluation des postures cognitives et épistémiques associées aux modes de traitement dogmatique et non-dogmatique des informations. *Revue Psychologie et Psychométrie*, 3-4(22), p. 115–151.

Gandit, M., Triquet, E., Guillaud, JC. (2010). Démarches scientifiques, démarches d'investigation en sciences expérimentales et en mathématiques : représentations d'enseignants stagiaires de l'IUFM. *Actes du Congrès AREF*. Disponible sur Internet https://plone2.unige.ch/aref2010 (consulté le 24 août 2011).

Porlan-Ariza, R., Garcia-Garcia, E., Rivero-Garcia, A. et del Pozo, R. M. (1998). Les obstacles à la formation professionnelle des professeurs en rapport avec leurs idées sur la science, l'enseignement et l'apprentissage. *Aster,* 26, p. 207–235.

Prieur, M., Monod-Ansaldi, R., Fontanieu V. (2011) L'hypothèse dans les démarches d'investigation en sciences, mathématiques et technologie : convergences et spécificités disciplinaires des représentations des enseignants. Communication S-TEAM 2011, Grenoble.

# Communautés de pratique : une alternative pour encourager la réflexion et l'apprentissage des enseignants de mathématiques

**Sandra E. Parada**

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del IPN*
*Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco*
*México, 07360 DF*
*sparada@cinvestav.mx*

*RÉSUMÉ : On montre dans ce document des résultats d'une recherche qui a pour objectif d'analyser quel impact sur leur activité professionnelle on peut observer chez des professeurs de mathématiques constituant une communauté de pratique (CoP) où l'on réfléchit à l'activité mathématique développée dans les classes. Ces réflexions s'appuient sur un modèle théorique qui prend en compte les processus de réflexion avant, pendant et après la classe, par rapport à des aspects spécifiques du travail d'enseignement. Nous montrons ici quelques processus de réflexion réalisés dans l'une des CoP.*

*MOTS-CLÉS : communauté de pratique; processus de réflexion; modèle théorique; développement professionnel; collège.*

*ABSTRACT: In this document are displayed findings of an investigation that aims to analyze the teaching work of mathematics teachers that make a community of practice (CoP) and who reflect on mathematical activity that they promote in their classrooms. These reflections are permeated by a theoretical model, which favors the processes of reflection before, during and after class, in relation to specific aspects of teaching work. Here are some reflections processes carried out by one of the CoP.*

*KEYWORDS: community of practice; processes of reflection; theoretical model; professional development; basic secondary education.*

## Introduction

Dans des rapports de recherche sur la formation des professeurs, on voit mentionner la nécessité que ceux-ci s'impliquent dans des processus de réflexion sur leur propre pratique. Nous présentons ici un modèle théorique, que nous avons proposé (Parada, 2010) pour favoriser chez les enseignants le déroulement de tels processus de manière critique au sein de communautés de pratique (CoP) (Wenger, 1998). Ce modèle est sous-tendu par l'hypothèse que les réflexions individuelles vont être enrichies grâce à la communication et au partage d'expériences.

C'est pourquoi nous avons proposé la constitution de CoP comme des espaces de formation pour les enseignants, car si les professeurs restent isolés dans leur pratique enseignante, il y a un risque qu'ils perdent un sens critique face aux programmes scolaires en vigueur.

## 1 Un modèle pour la réflexion

Un objectif de notre recherche était l'apport de quelques éléments théoriques pour construire un modèle qui aide le professeur de mathématiques à réfléchir sur l'activité mathématique (AM) qu'il permet à ses élèves. Nous décrivons brièvement dans ce paragraphe les constituants de ce modèle.

En accord avec Chevallard et *al*. (1997), nous considèrerons l'AM comme le travail de la pensée qui construit des concepts pour résoudre des problèmes, pose de nouveaux problèmes à partir des concepts introduits, modifie les concepts pour résoudre de nouveaux problèmes, généralise et unifie des concepts mathématiques articulés avec d'autres.

### *1.1. Trois aspects de la réflexion*

Le modèle propose une réflexion qui porte sur trois aspects considérés comme générateurs de l'AM développée en classe, caractérisés comme suit.

ι) Les connaissances des mathématiques enseignées (CME) qui renvoient aux contenus mathématiques que le professeur dispense au niveau et dans les conditions de son enseignement, conformément aux programmes scolaires.

ιι) Les connaissances pédagogiques et didactiques (CPD) sur la mathématique enseignée qui sont relatives aux manières d'approcher les CME avec les élèves, en cherchant les formes les plus utiles pour les représenter et les faire comprendre. Dans cet aspect nous incluons la nécessité de réfléchir sur l'évaluation formative de l'activité mathématique attendue, en conformité à ce qu'avance Abrantes (1990) au sujet de l'évaluation, dont il considère l'existence nécessaire au service des apprentissages.

ιιι) Usage et choix des ressources pédagogiques, les ressources désignant tout matériel et outil d'enseignement à disposition du professeur pour le fonctionnement de sa classe : problèmes, questions, feuilles de travail, objets manipulables, ressources informatiques, manuels, et tout particulièrement le langage mathématique.

### *1.2. Processus réflexifs des professeurs*

La réflexion est un processus de résolution de conflits, de doutes, en même temps qu'une disposition à revoir sa façon de faire (Dewey,2004). La réflexion des professeurs commence au moment où la pratique amène à rencontrer des difficultés ou à voir surgir des problèmes dont la solution n'est pas immédiate.

Au centre du modèle que nous présentons se trouve la préoccupation de favoriser les processus de réflexion sur l'AM. L'élaboration du modèle a résulté de la prise en compte de quelques idées exposées par Dewey (2004) et Schön (1994). Trois périodes sont proposées pour la réflexion, comme suit :

a. réflexion pour l'action, qui a lieu lors de la préparation de la classe et qui demande l'analyse par le maître de ses CME et CPD sur le thème en étude ;

b. réflexion dans l'action, dont le maître a besoin pour sa conduite de classe dans le sens de l'AM prévue et sa capacité à réagir aux différentes situations qui se présentent ;

c. réflexion sur l'action, où il s'agit pour le maître de comparer l'AM qui a été réalisée par l'élève avec l'AM que lui-même attendait.

### *1.3. Communautés de pratique*

Sur les communautés de pratique (CoP), nous sommes en accord avec la définition et la caractérisation de Wenger (1998), lorsqu'il dit que dans les CoP : a) on partage et enrichit la connaissance partielle de chaque participant, b) on poursuit des intérêts communs et, même si les besoins peuvent différer, une négociation de sens pour la construction collective de savoir est favorisée, c) on acquiert un langage propre produit de la pratique ou adopté lors de la pratique. Est également à mettre en avant la figure d'un modérateur, en tant qu'animateur et dynamiseur pour l'enrichissement mutuel et l'échange d'expériences.

Le modèle se veut une alternative pour le développement professionnel scientifique et technique des enseignants de mathématiques. Les pratiques concernées sont celles que Ponte & Serrazina (2004) signalent comme l'exercice proprement dit de l'activité enseignante et qui sont : i) la promotion de l'AM dans la classe, ii) le choix, l'usage et l'élaboration de ressources d'enseignement, iii) la communication dans la classe, iv) la prise en compte des programmes, v) l'évaluation, vi) la participation à la communauté éducative, vii) sa propre professionnalisation.

## 2. Processus de participation et réflexion à l'intérieur d'une CoP

Les résultats que nous rapportons ici proviennent de l'application de notre modèle à une CoP constituée depuis 2007 dans la ville de Ciudad Juárez (Mexique, État de Chihuahua). La mise en place de la CoP a été due à l'initiative d'un groupe de professeurs intéressés par l'introduction des techniques informatiques dans leurs classes. La tâche de modérateur de cette CoP incombe à l'auteur de ces lignes depuis janvier 2009, et la CoP bénéficie de la collaboration de chercheurs des départements de Mathématique Éducative de l'Université autonome de Ciudad Juárez et du Cinvestav-IPN.

### *2.1. Élaboration du travail en communauté*

Le programme de travail propose d'une part des sessions en ligne, d'autre part des séances regroupant les participants. Une plateforme collaborative a été mise en place sur le site web du Cinvestav pour les activités en ligne. Les outils qu'elle offre sont de deux types : i) outils de développement professionnel (articles, activités, compte rendu des sessions de travail, liens vers d'autres sites), ii) outils de communication, tels que forums de discussion et blogs.

Les activités à distance se sont plus particulièrement focalisées sur l'étude de contenus mathématiques pointés au sein de la CoP comme des sources de préoccupation et de difficultés. Ces activités ont été pensées pour favoriser la réflexion du professeur sur ses CME et CPD du thème étudié. Elles sont de deux grands types, d'une part la résolution de problèmes, d'autre part des propositions pour la construction (ou la reconstruction) d'activités d'apprentissage. Ces propositions prennent la forme d'activités préparées pour les élèves et accompagnées de documents pour le professeur. Les activités destinées aux élèves se présentent sous forme de feuilles de travail, de fichiers et d'applets, la pratique proposée s'appuyant sur la méthodologie ACODESA (Apprentissage collaboratif, débat scientifique et autoréflexion) (Hitt, 2007).

Les séances ont été organisées à raison d'une par mois, d'une durée de trois heures. Elles ont proposé des conférences de chercheurs, des discussions sur les processus de réflexion de professeurs, des ateliers organisés par degré d'enseignement, des sessions de planification de groupe et la mise en commun d'expériences de classes.

### *2.2. Quelques résultats des processus de participation et réflexion*

Une première expérience de réflexion de la CoP a impliqué 15 professeurs enseignant au niveau du second degré dans différents établissements scolaires de Ciudad Juárez et a été consacrée à l'analyse du thème : aire et périmètre de polygones. Nous présentons les résultats selon les trois périodes de réflexion, en signalant quelques occasions de renforcement ou de correction des CME ou CPD qui se dégagèrent du travail collaboratif de la communauté.

*2.2.1. Processus de réflexion pour l'action*

Nous extrayons de la première activité de planification en groupe un exemple de réflexion pour l'action. Pour l'équipe des professeurs de première année secondaire (élèves de 12-13ans) il s'agissait de préparer l'enseignement du thème : ajouter, mesurer et calculer des aires et des périmètres de polygones. Les enseignants commencèrent par opposer une certaine résistance à l'idée même de planification dans ce cas. Un commentaire fut *: Mais le travail est déjà fait, nos plans de classe sont préconstruits… Nous avons déjà l'activité, le problème à résoudre et les suggestions méthodologiques.*

Suite à ce commentaire, il leur fut proposé de préparer la clase en observant les suggestions que les textes officiels donnent pour l'étude du thème. Il apparut que les enseignants ne voyaient pas bien comment répondre et en conséquence il fallut intervenir pour guider collectivement le travail.

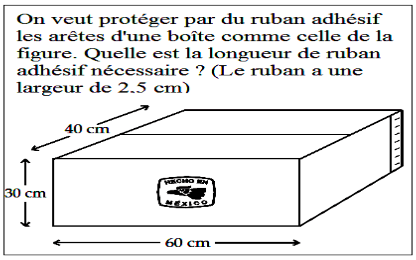



**Figure 1.** *Un problème*

Une enseignante commença à lire le problème présenté sur la figure 1, tiré du livre du professeur (SEP, 2004, p. 223), pour aborder le contenu à étudier. Par la suite, on les incita à discuter des manières selon lesquelles eux-mêmes enclencheraient l'AM à partir de ce problème.

Au cours des échanges qui résultèrent de l'essai de repenser les activités proposées dans les lignes de travail données par la SEP (le ministère mexicain de l'Enseignement Public, il apparut que la planification d'une classe ne fait pas partie des pratiques habituelles des enseignants. Voici des extraits de ces échanges :

*Professeur 1 – Nous pensons qu'ils doivent obtenir la longueur uniquement en ajoutant des quantités. Sur le dessin, seules les mesures de trois arêtes apparaissent. En leur montrant physiquement la boîte, ils vont voir qu'il y en a d'autres.*

*Professeur 2 – Ce serait bien d'utiliser Cabri. Mais les consignes sont accompagnées d'indications de durées et si nous les changeons, nous allons prendre du retard.*

Peut-être les professeurs ont-ils pu discuter sur la manière d'étudier avec les élèves la caractérisation géométrique de la boîte représentée sur la figure 1. Il y a lieu de préciser qu'il s'agit d'un parallélépipède rectangle, dont les faces opposées sont congruentes. En entrant dans cette caractérisation, on peut remarquer qu'il y a deux façons de résoudre le problème, une seule faisant intervenir le périmètre de rectangles d'une manière probablement trop subtile pour des élèves : *puisque chaque arête appartient à deux faces, on obtient, en calculant la somme des périmètres des faces de la boîte, le double de la somme des arêtes de la boîte ; mais comme chaque face rectangulaire visible sur la figure est accompagnée de son opposée, en effectuant seulement la somme des périmètres des trois rectangles visibles, on obtient finalement la somme de toutes les arêtes*. Au terme de la planification en groupe, certains professeurs firent la remarque qu'eux-mêmes ne sont pas habitués à préparer ainsi leurs classes ou à mener une réflexion sur les thèmes à enseigner.

A la suite de l'observation de faiblesses conceptuelles ou pédagogiques chez les maîtres sur ce thème, une série d'activités guidées a été proposée sur le forum, afin de déclencher des réflexions sur le sujet. Les discussions furent distillées à raison d'une activité par semaine de manière à ce que les maîtres, s'appuyant sur leur propre expérience, puissent voir de quelles manières il est possible d'explorer et de construire les objets mathématiques d'étude spécifiques au thème, en ayant recours à différentes acceptions et ressources.

De la même manière dans la poursuite du thème, une proposition d'activité pratique fut de planifier une classe en s'appuyant sur les activités qui apparaissent en figure 2 : *Aire et périmètres de triangles*. Il s'agissait de réaliser la séquence de classe, puis de mettre en commun les résultats atteints lors de son expérimentation. Trois des professeurs se lancèrent, introduisirent sur le site Internet leur planification de séquence en spécifiant les adaptations faites en conformité avec les programmes de chaque niveau scolaire intéressé.

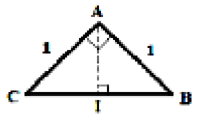
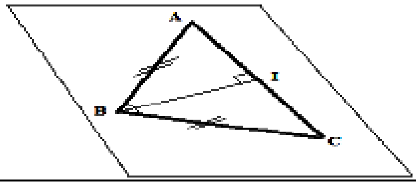
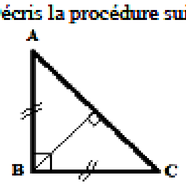
<table>
<tr>
<td>Activités<br><br>1. Exercice individuel<br>Explique la méthode à suivre pour trouver l'aire du triangle représenté.<br>
</td>
<td>2. Exercice en groupe complet<br>Dégager les procédures employées dans les exercices 1 et 2.<br>Discussion de groupe : Quelle procédure doit-on suivre pour obtenir l'aire d'un triangle comme celui de la figure ci-dessous ?<br>
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Exercice en équipes<br>Partage avec tes camarades d'équipe la réponse à l'exercice 1.<br>Discute avec tes camarades sur la question : Quelle est l'expression algébrique qui permet le calcul de l'aire du triangle dessiné ci-dessous ? Décris la procédure suivie.<br>
</td>
<td>4. Exercice en équipes<br>a. Explorer le fichier AREAS_2 (à décharger de la base de fichiers de la plateforme). Déplace les points et réponds aux questions :<br>- Quand obtient-on la plus grande aire pour chaque triangle ?<br>- Quand obtient-on le plus grand périmètre pour chaque triangle ?<br>b. Aligne les trois sommets de chaque triangle et réponds alors aux questions :<br>- Que se passe-t-il pour les aires des triangles ?<br>- Que se passe-t-il pour les périmètres des triangles ?</td>
</tr>
</table>

**Figura 2.** *Feuille de travail proposée sur le forum*

*2.2.2. Processus de réflexion dans l'action*

Les professeurs qui adaptèrent la feuille de travail l'utilisèrent dans leurs groupes et deux d'entre eux réalisèrent des enregistrements vidéo de leurs classes. Par la suite, ils mirent en ligne leurs réflexions, qu'ils présentèrent aussi en séance de travail. Ainsi, une enseignante de troisième année (élèves de 14-15 ans), que nous nommerons Nancy, montre dans la vidéo de sa classe sa manière de guider les élèves dans les activités prévues. Dans les deux premiers exercices (cf. figure 2), elle les conduit à utiliser la formule de l'aire du triangle et à interpréter les représentations géométriques. Dans la troisième activité, elle les amène à distinguer le triangle représenté de ceux déjà vus et leur propose un découpage du triangle isocèle en triangles rectangles pour appliquer la formule de Pythagore.

On peut voir sur les enregistrements la manifestation des réflexions préalables de Nancy sur l'AM qu'elle cherchait à susciter chez ses élèves. Sont également mises en lumière les difficultés éprouvées par les élèves qui n'ont pas assimilé certains des concepts nécessaires au déroulement de l'activité. Nous présenterons dans d'autres textes une analyse plus détaillée des classes observées, analyse qui demande de coucher sur le papier des scripts de leur déroulement.

*2.2.3. Processus de réflexion sur l'action*

Il nous paraît intéressant de rapporter ici les réflexions de deux enseignantes, Nancy que nous avons déjà rencontrée (cf. 2.2.2.), et Isabel qui enseigne au premier niveau scolaire du second degré (élèves de 12-13 ans). Toutes deux se lancèrent dans l'expérience d'adapter les activités à leur niveau d'enseignement et communiquèrent leurs observations. Voici quelques unes des remarques d'Isabel à propos des réactions de ses élèves.

*... Ils n'ont vu le triangle que comme il se présente sur la feuille, ils ont dû batailler pour reconnaître la base et la hauteur. J'ai pensé à leur dessiner un autre triangle que j'ai découpé et que je leur ai donné…*

*... Certains n'utilisèrent que la formule, d'autres quadrillèrent le triangle, complétèrent des carrés et divisèrent par 2…*

*... Ils ont demandé le sens des traits qui barrent certains côtés et du petit carré placé dans l'angle droit…*

Il est fort possible que l'usage de la formule par la majorité des élèves soit dû au respect scrupuleux par les enseignants des suggestions méthodologiques de leur livre du maître (SEP, 2004), dans lequel les propositions d'exercices conduisent généralement à l'application directe d'algorithmes. Suite à la présentation de classe de Nancy, dont nous avons indiqué quelques éléments en , la CoP dégagea les aspects suivants. *a) Dans l'enseignement du second degré, les élèves continuent à utiliser les méthodes du primaire ; b) C'est l'obtention du résultat qui anime les élèves ; c) Ce n'est pas la feuille de travail qui à elle seule fait la classe; d) Dans le type d'exercices proposés (ceux des figures 1 et 2), les technologies digitales seraient utiles.*

### *2.3. Quelques points d'accord de la CoP*

À l'issue des réflexions conduites selon le modèle que nous avons présenté, la communauté s'est accordée sur un certain nombre de points, notamment :

*i)* valoriser la planification comme une pratique nécessaire et mettre en lumière la nécessité de prévoir les difficultés des élèves pour pouvoir introduire des alternatives dans la conduite de la classe ;

*ii)* reconnaître que la réflexion sur les CME et CPD personnels permet que soient identifiés des points forts et des opportunités d'apprentissage ;

*iii)* faire sienne l'idée que ce qui importe pour l'enseignement n'est pas tant la création de nouveau matériel, que la planification de l'usage de l'existant pour en tirer le meilleur parti.

## Remerciements

L'auteur remercie François Pluvinage pour avoir traduit de l'espagnol le texte original et les documents de travail de la communauté présentés dans les figures 1 et 2.

## Bibliographie

Abrantes, P. (1990). Diz-me como avalias, dir-te-ei como ensinas… *Educação e Matemática*., 16, p. 1.

Chevallard, Y., Bosch, M. , Gascón, J.. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona: ICE/Horsori.

Dewey, J. (2004). *Comment nous pensons.* Paris : La découverte

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (éd.) *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques*. Paris: Hermes

Parada, S. (2010). Conformación de comunidades de práctica de profesores de matemáticas para la reflexión sobre su práctica profesional. Documento predoctoral no publicado. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Ponte, J.P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13 (2), p. 51-74

Schön, D. (1994). *Le praticien réflexif. A la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel.* Montréal : editions Logiques

Secretaría de Educación Pública (2004) *Libro para el maestro matemáticas secundaria*. México, D.F.: Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de la Educación Básica y Normal, SEP.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity.* Cambridge : University Press.

# Une ingénierie didactique de développement sur la numération décimale

## Présentation de choix de conception d'une ressource et de difficultés rencontrées par les enseignants lors de son utilisation.

**Frédérick TEMPIER**

*Doctorant au LDAR, Université de Paris 7*
*Formateur 1[er] degré à l'Université de Poitiers*
[frederick.tempier@univ-poitiers.fr](mailto:frederick.tempier@univ-poitiers.fr)

*RÉSUMÉ : Suite à un constat sur l'enseignement de la numération décimale à l'école primaire en France qui ne prend pas suffisamment en compte l'aspect décimal de la numération, nous avons mis en place une ingénierie didactique de développement. Nous décrivons nos principaux choix pour la conception d'une ressource pour les enseignants, puis nous présentons certaines difficultés qu'ils ont rencontrées lors de son utilisation.*

*ABSTRACT:. After presenting the fact, about the teaching of place value at school in France, that it is doesn't take enough account of base-10 system, we construct a didactical design. We describe the methodology used and our main choices for the conception of a resource for teachers, we present some difficulties encountered by the teachers*

*MOTS-CLÉS : Ingénierie didactique, développement, numération décimale, ressource, enseignant*

*KEYWORDS: didactical design, place value, resource, teacher*

## Introduction

Dans un travail précédent (Tempier 2009, 2010), nous avons fait un constat concernant les contraintes institutionnelles pesant sur l'enseignement de la numération en France. Notre système de numération est à la fois positionnel (le premier rang à partir de la droite correspond aux unités, le deuxième rang aux dizaines, etc.) et décimal (10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.). Mais il apparaît principalement sous son aspect positionnel dans les manuels du niveau concerné (CE2, 3ème primaire) ainsi que dans les programmes et évaluations nationales. Les unités de la numération (unités, dizaines, centaines, milliers) apparaissent alors uniquement pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres des nombres mais les relations entre ces unités ne sont pas un enjeu pour l'enseignement. Nous avons également pu constater que les guides du maître associés à ces manuels offrent peu d'apports à ce sujet pour permettre aux enseignants de prendre conscience des savoirs en jeu dans les tâches proposées. Pourtant la connaissance de l'aspect décimal de la numération est nécessaire dans les mathématiques de l'école primaire puisqu'elle est notamment en jeu dans la compréhension des techniques opératoires des quatre opérations. Cet apprentissage tient une place importante à l'école primaire dans les programmes officiels français.

Notre travail de thèse est une recherche développement qui consiste à chercher à améliorer cet état de fait à travers la conception d'une ressource destinée aux enseignants. Cette ressource se limitera à l'apprentissage de la numération en CE2 pour l'introduction des nombres à 4 chiffres. A la suite de Ball et Cohen (1996) nous pensons qu'une ressource doit permettre à la fois l'apprentissage des élèves et la formation des enseignants sur la numération. Plus précisément, du côté des élèves notre objectif est une compréhension de l'écriture chiffrée d'un nombre sous ses deux aspects (position et décimalité). En particulier nous voulons les amener à s'approprier des techniques mettant en jeu l'aspect décimal de la numération. Par exemple nous viserons la résolution de problèmes de recherche de « nombre de » dans des contextes varié, comme : quel est le nombre maximum de billets de 100 € que l'on peut utiliser pour payer une somme de 2378 € ? Du côté des enseignants, notre objectif est principalement de leur permettre à la fois d'élaborer une séquence (un projet local) permettant la construction de ces savoirs et de mettre en œuvre des situations (action didactique, en classe) avec une gestion adaptée (dévoluer la situation, réguler l'activité des élèves et institutionnaliser les savoirs visés).

## 1. Les cadres théoriques et la méthodologie

Nous nous inscrivons dans le cadre de l'ingénierie de développement dont les caractéristiques sont définies par Perrin-Glorian (2010). Ce type de recherche demande de « prévoir plusieurs niveaux d'ingénierie (au moins deux mais peut-être plus) avec des objectifs différents » (Perrin-Glorian, 2010). Un premier niveau pour définir les choix fondamentaux de l'ingénierie (les situations-clés en lien avec l'organisation mathématique visée) et étudier leur validité. Un deuxième niveau pour définir des choix de conception pour la ressource (pour communiquer avec les enseignants : description des situations, apports mathématiques …) et étudier leur validité. Nous nous appuyons sur différents cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques auxquels nous empruntons des « outils de conception » (Ruthven, Laborde, Leach, Tiberghien, 2009) : la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) pour la notion de milieu, d'adidacticité, de variable didactique et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) pour la notion d'organisation mathématique (ou praxéologie) et d'ostensif. Ces outils permettent la conception de l'ingénierie de premier niveau.

Notre méthodologie consiste à faire des choix *a priori* de conception pour la ressource (aux deux niveaux d'ingénierie) et à tester leur validité lors de l'utilisation de la ressource par des enseignants ordinaires (d'au moins cinq années d'expérience). Pour cela nous avons constitué deux groupes d'enseignants qui vont utiliser la ressource : un groupe « de travail » pour lequel nous observons les enseignants lors de la mise en œuvre de quelques séances dans leur classe. Ce groupe participe aussi à la conception de la ressource lors de deux réunions de travail collaboratif. Un groupe « libre » pour lequel nous n'intervenons pas du tout au cours de leur utilisation de la ressource. Pour les enseignants de ces deux groupes nous réalisons des entretiens individuels avant et après la séquence et nous faisons passer deux évaluations aux élèves (avant et après la séquence également). Pour évaluer l'utilisation générale de la ressource par les enseignants nous utilisons les concepts issus de l'ergonomie des EIAH : utilité, utilisabilité et acceptabilité (Tricot et *al*. 2003, Georget 2010).

Ce que nous proposons dans cet article concerne un seul cycle d'expérimentation : nous allons présenter la ressource telle qu'elle a été proposée aux enseignants cette année et certaines difficultés qui ont été rencontrées. Il s'agit d'un travail en cours. Toutes les analyses n'étant pas terminées, nous indiquerons seulement les premiers résultats obtenus.

## 2. Présentation de la ressource et de certains choix de conception

Pour permettre aux enseignants de s'approprier les choix « fondamentaux » du premier niveau d'ingénierie (non présentés dans cet article) et pour atteindre nos objectifs de départ nous avons fait des choix pour la conception de la ressource.

Nous sommes partis de l'hypothèse suivante : une bonne appropriation des enjeux mathématiques de la séquence devrait aider les enseignants à la fois à avoir une gestion adaptée des situations en classe (dévolution et institutionnalisation) et à construire une séquence permettant aux élèves de s'approprier ces savoirs. Nous faisons alors le choix de laisser des marges de manœuvre pour les enseignants dans la description des situations et de la séquence mais nous proposons une description fine des mathématiques en jeu pour chaque situation. Par exemple, pour la construction des séances et pour leur mise en œuvre dans la classe, nous ne donnons pas de prescription concernant le temps ou l'organisation de la classe (travail individuel, de groupe …). Pour la construction de la séquence, l'enseignant a pour seule contrainte de mettre en œuvre les cinq situations principales, mais il reste à sa charge de construire sa séquence par le choix de situations complémentaires, la conception d'exercices d'entraînement, de traces écrites, d'évaluations ...

Nous ne nous sommes pas imposé *a priori* de support particulier pour cette ressource. Elle prend pour le moment, la forme d'un site web[5]. Le choix de ce support est lié aux facilités de diffusion qu'il propose (un objectif à moyen terme étant une diffusion plus large) ainsi qu'aux possibilités de proposer une quantité importante d'informations, liberté étant laissée aux enseignants d'y accéder ou pas, par une organisation en menus et lien hypertextes.

Le site est organisé en trois parties. La première partie (« la numération décimale ») consiste en des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques pour l'enseignant. Les deux aspects de la numération sont présentés. Cela permet de pointer tout de suite l'aspect décimal comme enjeu essentiel. Pour appuyer cela, nous indiquons certaines difficultés dans l'apprentissage de la numération liées à la mobilisation de ce savoir. Ensuite, nous faisons le constat que l'aspect décimal n'est pas un enjeu dans les activités courantes des manuels et nous présentons quelques considérations didactiques relatives à l'utilisation du matériel de numération, des unités de numération et du tableau de numération. Enfin nous montrons comment l'aspect décimal intervient dans le calcul posé (en revenant sur les quatre opérations) et le lien avec les conversions de mesures de grandeurs (longueurs en particulier).

La deuxième partie (« les situations ») contient les situations principales qui constituent un passage obligé. Il est d'abord proposé un tableau récapitulatif de ces situations principales en tenant compte, à la fois, des types de tâches en jeu et des contextes utilisés. Quelques situations complémentaires sont également proposées : elles permettent de travailler les mêmes types de tâches (ou d'autres) dans des contextes différents.

La description des cinq situations est faite selon le même modèle :

- une description rapide du problème posé aux élèves ;
- une description des savoirs en jeu pour l'enseignant : identifier le type de tâche, les techniques et les technologies en jeu ;
- une description de la situation : l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire, une description rapide de la mise en œuvre : description du problème avec un ou plusieurs exemples de valeurs numériques associées, les variables, des éléments pour la gestion de la phase collective de validation et une indication de conclusion de la situation par une phase de synthèse ;

---

5 Ce site est consultable à l'adresse suivante : http://numerationdecimale.free.fr mais il sera modifié pour le prochain cycle de conception à partir de septembre 2011.

- des éléments de synthèse pour permettre à l'enseignant de pointer avec ses élèves les savoirs en jeu dans la situation (ici dans le contexte de la situation) ;
- des compléments qui portent sur des précisions pour la mise en œuvre de la situation dans la classe, sur des variantes ou prolongements possibles.

La troisième partie (« la séquence ») expose les contenus des programmes officiels sur la numération en lien avec les tâches travaillées dans les situations. Elle recense également les autres tâches qu'il est nécessaire de travailler dans le cadre d'une séquence sur la numération (avec des exemples mais pas ici sous forme de situation pour la classe). Enfin les liens avec le calcul posé et les conversions de mesure sont rappelés pour aider l'enseignant à identifier les savoirs de numération en jeu lors du travail sur d'autres notions. Nous allons maintenant présenter certaines difficultés rencontrées par les enseignants au cours de cette deuxième année d'expérimentation.

## 3. Quelques difficultés rencontrées par les enseignants lors de leur utilisation de la ressource

Pour les enseignants dont l'aspect décimal n'était pas un enjeu pour leur enseignement de la numération les années précédentes, l'utilisation du site a permis de changer leur façon de voir et de travailler la numération : ils ont pris conscience qu'ils ne travaillaient qu'un seul aspect de la numération. Pour ceux qui travaillaient déjà l'aspect décimal, l'intérêt semble beaucoup plus limité (apport de situations nouvelles principalement). De manière unanime les enseignants souhaitent réutiliser la ressource l'année prochaine, mais pour des raisons variées. Voici ce qu'ils citent : intérêt du matériel (à la fois du point de vue pratique et pour l'apprentissage), des situations nouvelles, travail sur l'aspect décimal, des situations motivantes pour les élèves ou qui apparaissent comme de petits défis… Cependant, du côté des élèves certaines difficultés persistent : les enseignants ont pu le constater dans l'évaluation proposée en fin de séquence. Pourtant aucun ne remet en cause l'intérêt de l'utilisation de la ressource. Mais cela est peut-être lié à notre présence dans l'entretien.

L'attention portée, dans la ressource, à la description des enjeux de savoirs, a donné lieu à des institutionnalisations différentes par les enseignants lors des séances observées. En particulier, les synthèses de fin de séances, quand elles ont lieu, peuvent avoir des orientations différentes : un simple rappel de la tâche travaillée, un bilan sur la (ou les) technique(s) émergente(s) mais sans éléments technologiques permettant de la (ou les) justifier ou encore un bilan des éléments technologiques en jeu mais sans formulation de la technique qui les met en jeu. Nous n'avons donc pas observé de description d'une organisation mathématique ponctuelle complète (avec type de tâche/technique/technologie) comme cela apparait dans la ressource. Il y a aussi des variations pour un même enseignant, d'une situation à l'autre : par exemple dans une situation, un enseignant va faire une synthèse sur une technique associée à un type de tâche mais dans une autre juste rappeler le type de tâche travaillé. De plus, souvent il n'y a pas de décontextualisation amorcée lors de ces moments de synthèse : les techniques sont décrites dans le contexte de la situation.

Tous les enseignants ont mis en œuvre les cinq situations principales (qui étaient présentées comme des passages obligés) mais pour la construction de leur séquence nous avons pu également observer des différences entre les enseignants. Concernant les exercices d'entraînement tout d'abord, nous avons observé des enseignants qui proposent des exercices d'entraînement seulement après avoir enchaîner les quatre premières situations à la suite. Du coup des techniques ne sont pas suffisamment maîtrisées par les élèves quand ils abordent certaines situations. Cependant, suite à ce problème d'utilisabilité de la ressource (qui est parfois lié à des contraintes de temps de préparation trop court), ces enseignants ont pris conscience de l'importance de petits exercices réguliers d'entraînement et signalent qu'ils en proposeront l'année prochaine. Pour les enseignants qui ont créé des exercices entre les situations, le travail proposé se situe presque exclusivement dans le contexte de la situation. Ainsi les enseignants utilisent très peu les situations complémentaires qui permettent de travailler une technique dans un contexte différent de celui dans lequel elle a émergé.

Les enseignants (en particulier ceux qui ne travaillaient déjà pas l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres) nous font également part du fait que pour cette première année d'utilisation de la ressource ils ont plutôt cherché à faire ce qui était proposé en essayant de se laisser guider. Ainsi maintenant qu'ils ont essayé et vu comment cela se passait, ils se sentiront plus à même de proposer des adaptations pour l'année prochaine, comme l'explique Fabrice : « La première fois tu découvres. […] Cette année j'ai suivi alors que maintenant je vais plus m'en détacher ». Ils signalent également ne pas avoir utilisé la troisième partie sur « la séquence ».

Enfin, du côté des élèves, dans l'évaluation finale, nous avons pu relever des difficultés liées aux constats précédents : ils ont eu du mal à utiliser leurs connaissances dans un problème de monnaie (contexte qui n'apparait pas dans les situations principales). Ils ont également rencontrées des difficultés dans les tâches décontextualisée de recherche du « nombre de » (centaines ou dizaines) ou de conversions entre unités. Cela nous semble être une conséquence d'un manque d'entraînement sur des exercices décontextualisés de ce type au cours de la séquence.

## 4. Conclusion et poursuite du travail

Cette ingénierie didactique de développement nous a amené à faire certains choix pour l'enseignement de la numération (1er niveau d'ingénierie) et à concevoir une ressource pour les enseignants dans laquelle nous proposons des situations à mettre en œuvre dans les classes ainsi que des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques (2ème niveau). Nous avons montré ici quelques résultats concernant l'utilisation de la ressource par les enseignants : même si les enseignants se sont approprié l'enjeu mathématique, cela ne suffit pas à avoir des pratiques harmonisées au niveau de l'institutionnalisation des savoirs en jeu (séance), à proposer un travail d'entraînement des techniques rencontrées dans les situations principales et à construire une séquence prenant en compte la nécessaire décontextualisation des connaissances (2$^{ème}$ niveau).

Ces difficultés rencontrées par les enseignants ont des conséquences sur les apprentissages des élèves (ce que l'évaluation finale met en évidence).

Dans les modifications à apporter, il semble donc nécessaire de travailler sur la question d'un « scénario » à proposer aux enseignants pour les aider à construire une séquence (projet local). Mais des questions se posent alors sur la manière de décrire ce scénario, des marges de manœuvre à laisser aux enseignants … ou encore sur les apports didactiques qui doivent accompagner cette description. Tout cela devra donc s'accompagner d'un travail au premier niveau d'ingénierie qui ne se limitera plus à la conception de situations, mais qui devra prendre en compte le travail des techniques et la décontextualisation des connaissances. Nous pourrons pour cela nous appuyer sur des travaux de recherche en didactique des mathématiques comme les *assortiments didactiques* (Genestoux, 2002), le *processus d'institutionnalisation* avec ses *deux niveaux* (Perrin-Glorian, 1993), les *bilans de savoir* (Butlen, Pézard, 2003), etc.

## Bibliographie


Ball, D., Cohen, D. (1996). Reform by the Book : What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational Researcher*, 25-9, p. 6-14.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Butlen, D., Pezard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/1, p. 41-78.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/2, p. 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*, p. 705-746.

Genestoux, F. (2002). Les assortiments didactiques. In J.L. Dorier., M. Artaud., M. Artigue, R. Berthelot., R. Floris (éd.) *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Georget, J-P. (2010). Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de l'Espace Mathématiques Francophone (EMF), Dakar, Sénégal, 6-10 avril 2009.

Perrin-Glorian, M.J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13 n° 1/2, p. 5-118.

Perrin-Glorian, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et *al*. (éd.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Ruthven, K., Leach, J., Laborde, C., & Tiberghien, A. (2009). Design Tools in Didactical Research: Instrumenting the Epistemological and Cognitive Aspects of the Design of Teaching Sequences. *Educational Researcher, 38*(5), p. 329-342.

Tempier, F. (2009). L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants, *Cahier Didirem*, 60. Paris : IREM Paris 7.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N,* 86, p. 59-90

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J-F., Amiel, A., Lutz, G., et Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain*. ATIEF INRP. 391–402.

# Evaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique

## Un outil pour le développement de compétences professionnelles des enseignants de mathématiques

**Jana Trgalová*, Philippe R. Richard**, Sophie Soury-Lavergne***

** S2HEP-IFE-ENSL*
*19, Allée de Fontenay*
*69007 Lyon*
*{jana.trgalova, sophie.soury-lavergne}@inrp.fr*

*** Université de Montréal et Universitat Autònoma de Barcelona*
*C.P. 6128, succursale Centre-ville*
*Montréal (Québec) H3C 3J7*
*philippe.r.richard@umontreal.ca*

*RÉSUMÉ : Cette contribution explore l'implication des enseignants de mathématiques dans l'analyse de ressources de géométrie dynamique (GD) à l'aide d'un questionnaire qui se veut un moyen de leur développement professionnel quant à l'intégration de la GD dans leurs classes. Ce questionnaire a pour but de permettre l'évaluation de la qualité mathématique, didactique, pédagogique et ergonomique des ressources déposées sur la plateforme i2geo par ses utilisateurs. Dans cette contribution, nous présentons deux expérimentations d'utilisation du questionnaire par des enseignants et en tirons des conclusions sur son potentiel dans le développement de compétences requises pour un usage efficace de la GD.*

*ABSTRACT: This contribution explores the involvement of mathematics teachers in the analysis of dynamic geometry (DG) resources using a questionnaire as a means of their professional development aiming at the DG integration in classrooms. This questionnaire aims at enabling an assessment of mathematical, didactical, pedagogical and ergonomic quality of resources deposited on the platform i2geo by its users. In this contribution, we present two experiments of the use of the questionnaire by teachers and draw conclusions on its potential in the development of skills necessary for an effective usage of DG in classrooms.*

*MOTS-CLÉS : géométrie dynamique, ressource, qualité, genèse instrumentale, travail documentaire.*

*KEYWORDS: dynamic geometry, resource, quality, instrumental genesis, documentational work.*

## Introduction

L'utilisation efficace d'un outil technologique exige l'élaboration de nouvelles tâches qui donnent du sens aux concepts mathématiques (Laborde 2001). Cependant, la conception de tâches réellement nouvelles est plutôt rare ; les enseignants préfèrent modifier et adapter des tâches existantes (Laborde, 2008). Les enseignants doivent renforcer leurs compétences d'analyse de tâches, ce qui demeure une activité complexe. En effet, il faut non seulement être capable de résoudre la tâche avec l'outil technologique, mais aussi d'analyser son rôle dans la définition de la tâche et dans le processus de résolution, ainsi que la pertinence pour l'apprentissage et la nécessité, ou le coût, d'introduction de nouvelles techniques instrumentées (ibid.). Pour la mise en œuvre de ces tâches en classe, les enseignants doivent pouvoir anticiper les techniques de résolution possibles, les apprentissages potentiels, ainsi que les orchestrations favorisant les apprentissages visés (Trouche et Drijvers 2010). Ils doivent encore pouvoir gérer les relations entre les techniques instrumentées et les techniques traditionnelles (Guin et Trouche 1999).

Un des moyens de soutenir l'intégration des technologies est alors de mettre à disposition des enseignants des ressources proposant des activités avec des outils technologiques. Cependant, l'accessibilité des ressources n'est pas suffisante. Selon Robertson (2006), le manque de métadonnées décrivant précisément leur contenu, l'absence d'indications sur leur qualité et la difficulté de leur appropriation sont les principaux obstacles à la réutilisation de ressources existantes et, par conséquent, à l'intégration des technologies dans les pratiques des enseignants.

Dans cette communication, nous exploitons l'implication d'enseignants dans l'évaluation de la qualité de ressources de la géométrie dynamique (GD) comme un moyen d'atténuer les difficultés précédentes.

## 1. Démarche qualité pour des ressources de géométrie dynamique

La plateforme i2geo s'est constituée au cours du projet Intergeo (Kortenkamp et *al.*, 2009) afin de mettre à la disposition des enseignants des ressources de GD. La plateforme est fondée sur le principe du développement communautaire : c'est un environnement ouvert où tout utilisateur peut déposer des ressources pour les mutualiser avec d'autres utilisateurs, il peut réutiliser les ressources disponibles, les commenter, partager ses expériences avec l'usage de ces ressources dans sa classe. Afin de permettre l'amélioration de la qualité des ressources d'i2geo, nous avons mis en place une démarche qualité qui s'appuie sur un questionnaire organisé autour de neuf dimensions de ressources de GD que nous jugeons pertinentes pour évaluer sa qualité mathématique, didactique, pédagogique, technique et ergonomique (Trgalová et *al.*, 2011). Ces dimensions se résument en (1) métadonnées, (2) aspect technique, (3) validité mathématique, (4) dimension instrumentale, (5) valeur ajoutée de la GD, (6) implémentation didactique, (7) implémentation pédagogique, (8) intégration dans une progression et (9) aspect ergonomique. Un item général (en gras dans la Figure 1) et un ensemble de critères plus détaillés sont associés à chaque dimension.

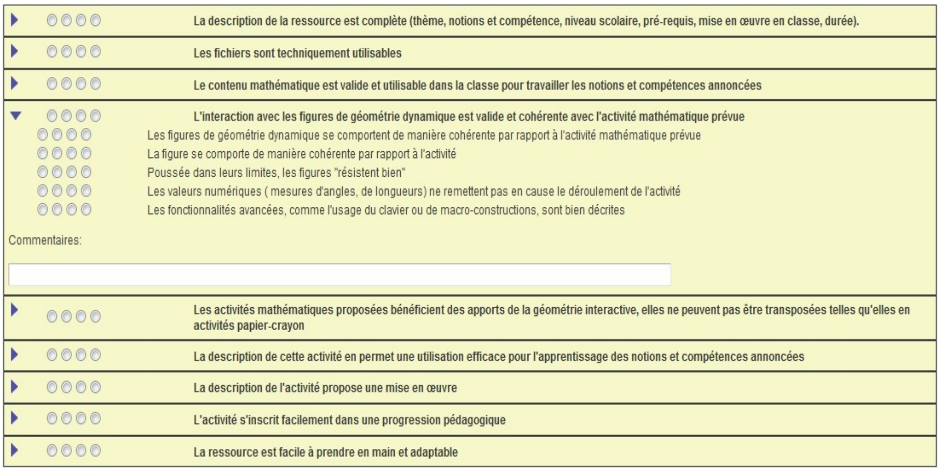



**Figure 1.** *Questionnaire de qualité*

Les items et les critères sont des affirmations où les utilisateurs expriment leur degré de satisfaction sur une échelle quaternaire (de « tout à fait d'accord » à « pas du tout d'accord »). Ces réponses qualitatives peuvent être complétées par des commentaires rédigés librement dans des champs prévus à cet effet. Ces derniers sont importants pour l'évolution de la ressource évaluée puisqu'ils doivent permettre d'en identifier les faiblesses et indiquer des pistes d'amélioration.

## 2. Cadrage théorique

Pour étudier la manière dont les enseignants s'approprient le questionnaire comme outil d'analyse de ressources de GD et la manière dont cette analyse peut contribuer au développement de leurs compétences professionnelles, nous nous appuyons sur les approches instrumentale et documentaire.

L'*approche instrumentale* (Rabardel, 1995) est fondée sur la distinction entre un *artefact*, disponible pour un utilisateur, et un *instrument* que cet utilisateur construit à partir de cet artefact, ou d'une partie de celui-ci, au cours de l'action qui mobilise son utilisation. Un artefact devient ainsi un instrument pour cet utilisateur dans un processus, appelé *genèse instrumentale*, qui articule deux processus imbriqués :

- les processus d'*instrumentalisation* qui concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact ;

- les processus d'*instrumentation* qui sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués, etc. (ibid., p. 111)

Le schème est défini comme une organisation invariante de l'activité et de la conduite pour une classe de situations donnée, composée de buts, de règles d'action, d'invariants opératoires ou théorèmes en acte. Un instrument est donc une entité composée de l'artefact (ou d'une partie) et de schèmes d'utilisation.

Nous nous appuyons sur cette approche pour étudier le processus par lequel un enseignant transforme le questionnaire, que nous considérons comme un artefact, en un instrument pour l'analyse de ressources.

Les principes fondateurs de l'approche instrumentale ont été repris et approfondis par Gueudet et Trouche (2008) pour étudier le travail documentaire des enseignants qui consiste à exploiter un ensemble de ressources données, les sélectionner, adapter et recombiner pour concevoir de nouvelles ressources. L'*approche documentaire* propose la distinction entre *ressource*, disponible pour l'enseignant, et *document* construit par l'enseignant dans un objectif précis. Le document résulte donc d'un processus, appelé *genèse documentaire* (figure 2).

Cette approche nous semble pertinente pour étudier le travail documentaire des enseignants concerné par le choix, l'analyse et l'adaptation de ressources de GD.

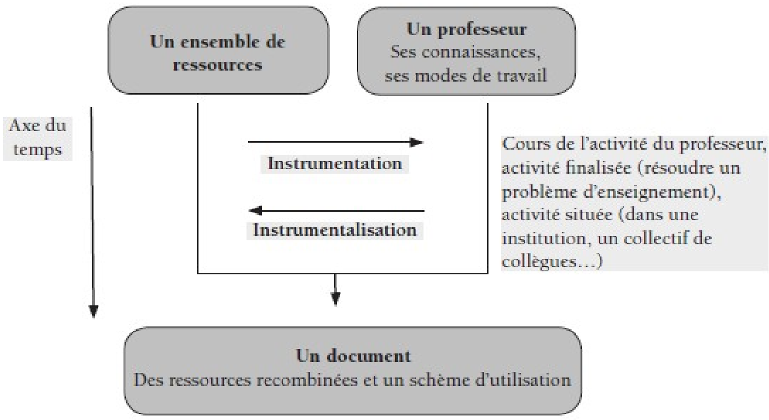



**Figure 2.** *Genèse documentaire (Gueudet et Trouche, 2008, p. 10).*

### *2.1. Expérimentation avec des enseignants français*

Cette expérimentation, faisant partie du cycle conception-test du questionnaire d'analyse de ressources, avait un triple objectif : (1) analyser la pertinence et la clarté des critères de qualité dans le questionnaire pour des enseignants, (2) étudier les premiers usages du questionnaire pour l'analyse de ressources, et (3) identifier les représentations des enseignants sur les ressources de « qualité », en particulier quels aspects des ressources déterminent leur sélection et lesquels facilitent leur appropriation pour un usage en classe. Les deux premiers objectifs concernent les genèses instrumentales relatives au questionnaire considéré comme un artefact, tandis que le troisième concerne les genèses documentaires relatives aux ressources.

Trois ressources ont été proposées aux enseignants, portant sur un même concept mathématique. Les trois ressources étaient composées d'un fichier de GD accompagné d'un fichier texte s'adressant soit à l'enseignant, soit aux élèves, soit aux deux. De plus, les trois ressources suggéraient l'usage de la GD en salle informatique où les élèves manipuleraient eux-mêmes les figures.

Six enseignants, ayant une expérience professionnelle plus ou moins longue (entre 5 et 15 ans) et un niveau d'intégration technologique assez hétérogène, ont participé à cette expérimentation. Le travail documentaire des enseignants consistait à (1) prendre connaissance, individuellement, des contenus des trois ressources, (2) les analyser ensuite en binômes avec le questionnaire et (3) décider, individuellement, s'ils auraient choisi ces ressources pour les utiliser en classe, avec ou sans modifications, puis éventuellement en suggérer des pistes d'amélioration.

Les résultats de l'expérimentation montrent que certains enseignants éprouvaient des difficultés à se concentrer précisément sur le contenu des ressources dans leur analyse. Leurs réponses à certains items ne correspondaient pas aux informations fournies par la ressource, mais témoignaient plutôt d'un effort de leur interprétation à la lumière de leurs propres expériences. Par exemple, la question « Les éléments permettant la prise en charge du problème par l'apprenant sont-ils explicites ? » a été interprétée comme « Les élèves peuvent-ils facilement comprendre ce qu'il faut faire et s'engager dans la résolution du problème ? ». Les enseignants ont ainsi anticipé la manière dont la dévolution de l'activité pouvait être assurée en classe au lieu de chercher simplement la présence d'indications à ce sujet dans la ressource, demande effective dans la question. Du point de vue de l'approche instrumentale, il s'agit d'une *catachrèse* de la question, écart entre le prévu et le réel dans l'utilisation de l'artefact (Rabardel, 1995, p. 99). Il ne s'agit cependant pas d'un détournement de l'artefact par rapport aux fonctions prévues, mais plutôt d'un indice du processus d'attribution à l'artefact « de fonctions non anticipées ou prévues par les concepteurs » (ibid., p. 101). Il s'agit donc d'un processus d'instrumentalisation de la question. Cette interprétation particulière se traduit également par la mise en œuvre de schèmes d'exploration nouveaux amenant l'enseignant à interroger le contenu de la ressource d'une certaine manière, portant davantage sur son usage potentiel en classe que sur les informations fournies, ce qui témoigne d'un processus d'instrumentation.

Le questionnaire lui-même a été utilisé différemment par les binômes. Un binôme l'a utilisé dès le départ pour éliminer les ressources les moins pertinentes. Leur analyse avait ainsi pour but d'identifier les défauts rédhibitoires des ressources. Une fois déterminés pour une ressource donnée, les enseignants en ont arrêté l'analyse, sans essayer de vérifier si les autres aspects constituent ou non sa force. Les deux autres binômes ont, en revanche, réalisé une analyse détaillée de toutes les dimensions de la ressource. A la question « auriez-vous choisi ces ressources pour une éventuelle utilisation dans votre classe ? », certains enseignants de ces binômes ont pu envisager leur utilisation, à condition d'y apporter des modifications permettant d'améliorer les aspects considérés comme faibles. Ainsi, même si tous les binômes ont trouvé certaines faiblesses identifiées inacceptables, celles-ci n'ont pas empêché certains de continuer l'analyse pour identifier des points forts des ressources. Ces résultats permettent d'anticiper différents usages possibles du questionnaire qui correspondent à différentes genèses instrumentales conduisant au développement de différents instruments d'analyse de ressources.

Parmi les critères de choix de ressources pour une éventuelle utilisation en classe, il apparaît que le contenu mathématique valide intervient en condition nécessaire. De plus, les enseignants accordent une grande importance à la valeur ajoutée de la GD dans les activités proposées. D'autres dimensions sont plus ou moins importantes en fonction de l'expérience des enseignants. Ainsi, les enseignants peu familiers avec l'usage des technologies en classe jugent la dimension relative à l'implémentation didactique de la ressource, c'est-à-dire présence d'indications sur la gestion par l'enseignant des apprentissages des élèves, comme l'une des plus importantes.

### *2.2. Expérimentation avec des futurs enseignants québécois*

Cette expérimentation a eu lieu pendant 2 mois lors d'un cours en formation initiale des enseignants de mathématiques dans une université québécoise. Elle visait l'étude de la manière dont les ressources et les outils d'i2geo peuvent être mis à profit pour le développement professionnel des enseignants du point de vue de la capacité à porter un regard critique sur les ressources existantes, à adapter au contexte québécois des ressources conçues pour un système d'enseignement étranger, à concevoir de nouvelles ressources ou encore à améliorer des activités suite à l'évaluation par les pairs.

Trente quatre étudiants, groupés en binômes, ont participé à cette expérimentation. Leur travail consistait en l'analyse, avec le questionnaire, de deux ressources disponibles sur la plateforme i2geo correspondant à un thème mathématique au choix, l'adaptation de deux ressources au contexte québécois, la conception de trois ressources et leur amélioration suite au retour critique des pairs. De plus, ils devaient argumenter leur point de vue sur l'utilité du questionnaire d'analyse de ressources.

Même si les données recueillies sont en cours d'analyse, nous pouvons présenter quelques traits saillants sur le regard critique des étudiants face au questionnaire.

Treize binômes sur dix-sept ont donné leur avis sur l'utilité du questionnaire en soulignant ses points forts et ses points faibles. Parmi ces binômes, onze considèrent le questionnaire d'une grande utilité, permettant de réaliser une analyse approfondie de ressources de GD. Huit binômes indiquent que grâce au questionnaire, ils ont pu considérer des aspects des ressources auxquels ils n'auraient pas pensé sans celui-ci. Parmi les points forts du questionnaire, les étudiants relèvent les questions bien élaborées, faciles à comprendre, bien structurées dans de grandes catégories permettant ainsi une analyse rapide et complète des ressources. Certains binômes affirment que le questionnaire leur a également été utile pour concevoir de nouvelles ressources, d'autres mettent en relief son utilité pour l'amélioration des ressources existantes, suite aux avis des évaluateurs. Quelques points faibles ont également été relevés, comme la redondance de certains critères ou le fait que certains critères ne s'appliquent pas à toutes les ressources et qu'il n'y ait pas la possibilité de le signifier. Enfin, quatre binômes trouvent que le résultat de l'évaluation faite avec le questionnaire ne correspond pas toujours à leur avis *a priori* sur la ressource. En revanche, la plupart des étudiants estiment que le questionnaire mène à une meilleure évaluation de la ressource que s'ils ne pouvaient pas en disposer.

## Conclusion

Une des conclusions concerne l'imbrication de genèses instrumentales et documentaires chez les enseignants dans l'analyse des ressources qui s'appuie sur le questionnaire. Ainsi, la genèse instrumentale du questionnaire soutient le travail documentaire. Pourtant, le questionnaire a été utilisé de manière différente, ce qui a conduit au développement de différents instruments menant à diverses analyses de ressources. Ainsi, l'analyse des ressources et ses différentes finalités ont façonné l'utilisation du questionnaire et, par conséquent, l'instrument qui en résulte pour l'analyse des ressources. La genèse documentaire influence donc la genèse instrumentale du questionnaire. Cette interconnexion des deux genèses est l'une des clés du développement professionnel, mais en même temps elle présente une grande complexité pour les enseignants.

L'analyse du travail documentaire des enseignants et de leurs genèses instrumentales relatives à l'usage du questionnaire tend à montrer un impact positif de l'implication des enseignants dans l'analyse des ressources sur le développement de leurs compétences professionnelles. Nous avons observé entre autres que l'analyse des ressources passe par une vérification explicite de la valeur ajoutée de la GD en comparaison avec l'environnement papier-crayon et qu'une attention particulière est accordée au rôle du déplacement. Il s'agit d'une compétence nécessaire pour une analyse efficace des ressources de GD. Le développement de cette compétence a été visé dès la conception du questionnaire et les résultats des expériences montrent que le questionnaire permet en effet d'atteindre cet objectif.

Les résultats montrent que les enseignants apprécient le questionnaire car il permet d'effectuer une analyse détaillée des ressources. Toutefois, il faudra reprendre les points critiqués afin de repenser certains items qui apparaissent redondants et surtout, sur les raisons pour lesquelles l'évaluation de la qualité de la ressource ne traduit pas toujours correctement l'avis global des évaluateurs.

Même si notre étude montre que l'évaluation de la qualité des ressources de GD peut soutenir le développement professionnel des enseignants, il apparaît également que la complexité d'une telle activité pour les enseignants nécessite un soutien spécifique. De nouveaux moyens et outils d'accompagnement des utilisateurs de la plateforme doivent donc être conçus, ce qui ouvre la voie à d'autres projets.


## Remerciements

La recherche présentée dans cette communication a été financée en partie par la Communauté européenne dans le cadre du programme ContentPlus.


## Bibliographie


Gueudet, G., Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique,* 2(3), p. 7-33.

Guin, D., Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *IJCML,* 3(3), p. 195-227.

Kortenkamp, U., Blessing, A.M., Dohrmann, C., Kreis, Y., Libbrecht, P., Mercat, C. (2009), Interoperable interactive geometry for Europe – First technological and educational results and future challenges of the Intergeo project. In V. Durrand-Guerrier et *al*. (éd.), *Proceedings of the CERME6 conference* (pp. 1150-1160), Lyon, France. disponible sur internet http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg7-11-kortenkamp.pdf (consulté le 29 août 2011).

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *IJCML,* 6(3), p. 283–317.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In A. P. Canavarro et *al*. (éd.) *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 29-43). Lisboa: SEM/SPCE.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Richard, P.R. (2010). La evaluación de competencias matemáticas: una apuesta de aprendizaje desde la elección de situaciones-problemas. Competencias matemáticas. Instrumentos para las ciencias sociales y naturales, 180-198. Ministerio de Educación et Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa.

Robertson, A. (2006). *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*, *Rapport pour le Réseau d'enseignement francophone à distance du Canada*. disponible sur internet http://www.refad.ca/ (consulté le 23 août 2011).

Trgalová, J., Soury-Lavergne, S., Jahn, A. P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project. *ZDM,* 43(3), p. 337-351.

Trouche, L., Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education, flashback to the future. *ZDM,* 42(7), p. 667-681.

# *Communications*

## Thème 3 :
## Comment rendre les élèves créateurs de mathématiques dans la salle de classe ?

# Situation de recherche en classe et productions mathématiques des élèves

**Mathias FRONT**

*IREM et IUFM de Lyon*
*S2HEP – Université Lyon 1*
*mathias.front@univ-lyon1.fr*

*RÉSUMÉ : La question de la production de mathématiques par les élèves est au cœur du travail du groupe DREAM. Nous cherchons à montrer en quoi et comment certaines situations de recherche en classe permettent d'envisager un travail sur les concepts. Après une réflexion sur ce que l'on peut entendre par activité mathématique dans le cadre d'une situation de recherche, nous chercherons à montrer des élèves, qui en explorant des possibles, naturalisent de l'abstrait et/ou structurent de nouveaux objets mathématiques.*

*ABSTRACT: The question of the production of mathematic by the pupils is in the heart of the work of the group "DREAM". We try to show how situations of research in class allow envisaging a work on the concepts. After a reflection on what we can hear by mathematical activity within the framework of a situation of search, we shall try to show how pupils, by exploring the possible, can naturalize abstract and organize new mathematical objects.*

MOTS-CLÉS : *situation de recherche en classe, naturalisation d'objets, production, élaboration, pavages.*

*KEYWORDS: research situation in classroom, naturalization of objects, production, elaboration, tilings.*

## Introduction

Depuis de nombreuses années déjà, les travaux de l'IREM de Lyon ont su montrer l'intérêt du dispositif « problème ouvert » qui favorise une modification du contrat didactique dans la classe de mathématiques. Plus récemment, les travaux des équipes EXPRIME (2006-2010) et DREAM se sont également intéressés aux possibilités d'un tel dispositif en termes de travail des concepts mathématiques. Dans cette optique nous allons tout d'abord présenter quelques réflexions sur l'activité de l'élève dans une situation de recherche en classe. Cette activité est envisagée sous l'hypothèse que les apprentissages se réalisent dans le cadre d'une relation bien spécifique aux objets mathématiques en jeu, relation que nous pouvons envisager de favoriser par les explorations que permet la part expérimentale du travail mathématique. Pour l'élaboration de situations spécifiques de cette problématique, c'est alors le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) qui s'impose à nous. Pour autant, dans l'approche choisie, il va s'avérer nécessaire d'affiner l'étude du mode de relations aux objets que met en œuvre tout chercheur engagé dans la recherche proposée, et c'est pourquoi l'étude épistémologique est un autre aspect fort des situations élaborées. Nous illustrerons ici, avec deux exemples de situations, la pertinence de cette approche centrée sur les actions sur les objets. Le premier exemple mettra en évidence le fait que l'exploration des possibles par les élèves participe de la naturalisation d'objets mathématiques et le deuxième qu'en appui sur ces naturalisations les élèves sont producteurs de mathématiques.

## 1. L'activité de l'élève dans une situation de recherche en classe

Nous débutons cette partie en empruntant à G. Longo (Longo, 1997) un questionnement qui permet dans le cadre géométrique d'interroger la notion d'activité mathématique : « Les calamars font-ils de la géométrie [1] ? » Longo répond : « *Si la géométrie est une de nos constructions conceptuelles qui émergent dans la praxis, [...], et que nous la construisons dans notre rapport aux régularités du monde (ses symétries, ses homogénéités ...), [...], dans sa simulation-prévision mentale, ainsi que dans l'appréciation de certains invariants spatiaux (les formes), alors les calamars « font » un embryon de cette géométrie qui sera la nôtre*. »

Alors, en imaginant nos élèves entre calamars et mathématiciens, il nous semble possible de provoquer une activité géométrique issue de la *praxis*, de l'action sous-tendue par une idée vers un résultat. Pour ce qui concerne l'observation d'une telle activité géométrique mise en œuvre par les élèves, nous chercherons alors à identifier :des projections, simulations, prévisions, des manipulations d'objets mathématiques ou de certaines de leurs représentations (matérielles ou non), des interprétations de perceptions, des appréciations de certains invariants, des formulations de conjectures, des élaborations de raisonnements, de démonstrations, d'algorithmes (Euclide, Pythagore, ...), des définitions, structurations « d'objets à savoir[2] ». Et il se trouve que les travaux de l'IREM de Lyon ont montré que le dispositif « problème ouvert » favorise une part de cette activité en particulier parce qu'il incite aux essais, aux conjectures, à l'élaboration de processus et de

1 Il est clair que le type d'action que nous identifions ici s'entend au-delà du domaine géométrique et fondent une grande partie de l'activité mathématique telle que nous souhaitons la mettre en évidence.

raisonnements. Nous pouvons ainsi imaginer nous appuyer sur ce dispositif pour envisager des situations dont l'un des objectifs est de permettre aux élèves d'être producteurs de mathématiques[3]. Toutefois il est alors nécessaire de le compléter pour prendre en compte l'aspect action et travail sur les objets mathématiques qui n'était pas jusqu'alors problématisé. Nous formulons dans ce cadre plusieurs hypothèses :

- Lors de la recherche de problèmes en classe, dans le cadre de situations spécifiques, se produit une activité permettant la construction de connaissances mathématiques,
- Ainsi, ce ne sont pas uniquement des compétences transversales qui peuvent être travaillées mais également des concepts de mathématiques,
- Si on ne peut soumettre les objets mathématiques à aucune expérience... !! (au sens des sciences expérimentales), en considérant a minima que l'expérimentation en mathématiques consiste à explorer et développer les possibles, cela se produit lors de manipulations qui agissent sur du concret, c'est-à-dire « de l'abstrait rendu familier par l'usage »[4],
- La recherche de problèmes en classe de mathématiques est fondamentale dans la construction des connaissances des élèves en ce sens qu'elle leur permet de faire fonctionner des notions, de naturaliser les objets manipulés, d'élargir le champ d'expériences, de produire des élaborations théoriques, des connaissances nouvelles.

Nous allons par la suite illustrer sur deux exemples ces différents aspects. Mais revenons tout d'abord sur la nécessaire démarche d'étude épistémologique approfondie que l'on doit mener pour construire des situations didactiques favorables.

## 2. Elaboration de situations favorables

Là encore nous nous sommes appuyés, pour débuter nos travaux, sur les ressources de l'IREM de Lyon et sur des situations mathématiques déjà repérées comme « résistantes »[5]. La nécessité de porter notre intérêt sur les objets mathématiques en jeu nous amène ensuite à questionner de manière encore plus approfondie la consistance épistémologique des situations que nous voulons proposer. Marie-Line Gardes (Gardes, 2009) a récemment abordé l'étude de la consistance par l'observation d'une recherche contemporaine autour de la conjecture d'Erdös-Straus[6], et Mathias Front (Front, 2010) par une enquête historique autour de la recherche de Kepler des pavages semi-réguliers du plan[7].

Un cadre théorique pour ces élaborations nous est fourni par les travaux

2 Suivant une expression de Pierre Duchet (Association MATh.en.JEANS) qui introduit, dans le cadre des situations-recherche, un objet de recherche, objet d'étude, objet « à » savoir et non objet « de » savoir ».

3 Comme ce que nous proposons s'inscrit clairement dans un processus global d'enseignement/apprentissage pour les classes du secondaire nous rappelons que nos préoccupations intègrent bien évidemment l'acquisition des connaissances et compétences des programmes de mathématiques du collège et du lycée.

4 Langevin, P. (1950). *La pensée et l'action, textes recueillis et présentés par Paul Larenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Gniot*. Paris : Les Editeurs Français Réunis.

5 Une situation résistante est une situation mathématique qui peut être abordée en utilisant des concepts mathématiques élémentaires, et qui permet des recherches n'aboutissant pas à une solution globale et définitive rapidement. Un grand nombre de ces situations sont disponibles dans (Arsac & Mante, 2007) et (Aldon et *al*., 2010).

6 Cette étude fait l'objet d'un article dans ces présents actes.

7 La situation adossée à cette dernière étude sera évoquée plus loin dans le texte.

d'Isabelle Bloch (Bloch, 2002) : ils permettent la théorisation du va et vient entre le milieu épistémologique, le milieu expérimental *a priori* et la confrontation à la contingence pour l'élaboration des situations. Dans ce cadre, nous étudions dans un premier temps les conditions nécessaires à l'élaboration de la situation du point de vue « théorique » par une analyse de la structure mathématique de l'objet à savoir (manifestations anciennes ou contemporaines de ce savoir, environnement mathématique, culturel et social, place dans les mathématiques actuelles, obstacles épistémologiques relatifs à cet objet).

Puis nous envisageons l'élaboration d'un jeu relatif à l'objet à savoir mettant en présence un acteur ou des acteurs et un milieu matériel susceptible de rétroactions, avec une composante adidactique importante. Nous étudions des conditions suffisantes pour qu'un jeu existe avec une première analyse de la pertinence de la situation didactique envisagée par rapport au savoir mathématique et au savoir antérieur requis, une recherche des variables de cette situation, une analyse de la consistance de la situation (il s'agit de vérifier que les variables retenues ne sont pas contradictoires c'est-à-dire ne conduisent pas à des connaissances incompatibles, même provisoirement, pour l'actant).

Une troisième étape permet de construire l'ingénierie didactique effective, relative à l'objet à savoir, de fixer les variables, de définir le milieu avec exactitude, d'anticiper, de prévoir des comportements, les jeux possibles de l'élève et les jeux du professeur, de prévoir de recueillir des observables, de les organiser, de les interpréter dans le cadre défini.

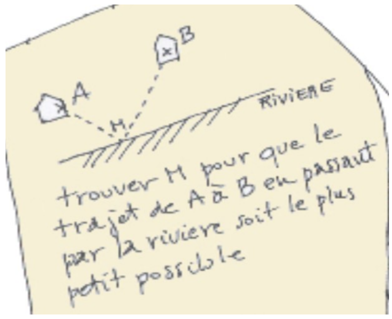
Suivent des confrontations à la contingence, indispensables pour juger de la pertinence des analyses précédentes et les affiner. Lors de ces confrontations à la contingence, nous sommes, pour ce qui nous préoccupe ici, particulièrement attentifs à l'engagement des élèves dans un processus de va et vient entre l'exploration du problème, en appui sur les manipulations d'objets, et les élaborations théoriques.

Concernant les actions et les élaborations dans l'action, nous pouvons préciser qu'il s'agit bien d'identifier des instants constitutifs de l'élaboration conceptuelle ou de processus, au-delà de l'action sur les objets. Car rappelons-le, si les objets « délimitent *a priori* l'espace discursif dans lequel n'importe quoi ne peut pas être dit » (Durand-Guerrier & Dias, 2008), leur prégnance empêche parfois les constructions conceptuelles attendues. Ces identifications se font essentiellement par les analyses des échanges, lors du travail en groupes ou lors des débats sur la validité des résultats présentés. Nous présentons maintenant deux illustrations de la mise en œuvre de situations didactiques élaborées dans ce contexte.

## 3. Deux illustrations

### *3.1. La rivière : des élèves qui explorent des possibles et naturalisent de l'abstrait*

Les éléments que nous présentons ici sont issus d'une expérimentation de février 2011, en classe de Terminale scientifique, dans le cadre d'une étude du transfert de notre ressource documentaire à des collègues du secondaire.




Le professeur de la classe s'étant approprié efficacement le dispositif, la séance observée laisse la place à 10 minutes de recherche individuelle puis aux actions libres des élèves lors d'un travail par groupe de quatre d'environ 50 minutes. Les élèves disposent, pendant ce temps, d'ordinateurs sur les bords de la salle et ont en particulier à disposition un logiciel de géométrie dynamique familier. A l'issue, chaque groupe produit un transparent qui est présenté à l'ensemble de la classe par un rapporteur.

Les observations confirment qu'il y a une infinité de manières d'objectiver un domaine de la réalité empirique (qui peut être soumis à l'expérimentation) et qu'il n'y a pas une seule manière de résoudre un problème[8] ! Lors de l'expérimentation, nous avons pu identifier une activité mathématique correspondant à celle attendue et plus précisément ici, des élèves qui essayent, conjecturent, réalisent des manipulations de concepts (barycentres, symétries, optimisation numérique, analytique, ...) ce qui participent de leur naturalisation. Si nous examinons les écrits figurant en annexe 1, on peut observer :

– une première recherche qui propose une conjecture s'appuyant sur les projections orthogonales. Cette conjecture est éprouvée et rapidement rejetée. A l'issue de cette première phase la recherche se trouve réduite ;

– une nouvelle approche utilisant un cercle de diamètre fixé. La conjecture sous-jacente est là partiellement rejetée, en particulier par l'usage du logiciel de géométrie dynamique. L'absence de raisonnement associé à cette approche est relevée.

D'autres propositions sont faites, utilisant par exemple les notions de tangente à un cercle, de tangentes communes à deux cercles, de barycentre[9], et également une approche analytique (*cf*. annexe 2). Le débat sur les procédures, engagé à l'issue de chaque présentation, participe de la naturalisation des différents objets introduits et la séance d'institutionnalisation pourra se conclure sur des preuves[10] possibles, s'appuyant sur des objets désormais plus familiers.

### *3.2. Pavages semi-réguliers du plan : des élèves qui explorent des possibles et structurent un nouvel objet mathématique*

La situation proposée maintenant s'appuie sur la détermination de tous les pavages semi-réguliers du plan, c'est-à-dire des pavages stricts du plan à l'aide de polygones réguliers convexes, et présentant certaines régularités autour d'un nœud[11]. La planche ci-dessous montre en L, M, N, P, R, S, V des pavages semi-réguliers identifiés par Kepler. Les écrits de l'*Harmonices Mundi* (Kepler, 1619/1980), particulièrement détaillés, mais aussi ceux de ses successeurs Badoureau, Lévy, ont permis une étude épistémologique approfondie. Il a alors été possible :

---

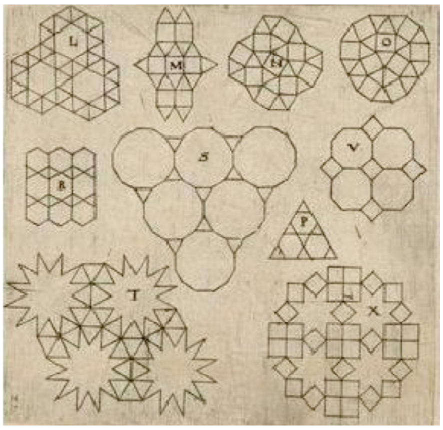
8 Ce dont il faut se convaincre avant d'observer l'activité des élèves pour rester ouvert à démarche même surprenante *a priori*.

9 Il est à noter que plusieurs de ces propositions portent en elles des approches pertinentes pour la résolution du problème.

10 Sans perdre de vue que la création d'un processus est aussi importante que l'établissement d'une preuve.

11 *Cf.* Front, M. (2010), déjà cité.

- d'identifier des objets potentiellement travaillés,
- d'identifier des démarches possibles,
- d'identifier des obstacles, des erreurs,
- de percevoir l'influence des relations spécifiques aux objets[12],
- d'envisager les limites de l'action sur les objets.



Sur ce dernier point, nous pouvons par exemple suspecter que, quand Kepler écrit « nous affirmons à juste titre que le côté de l'heptagone fait partie des *non-êtres ; j'entends* connaissables », le polygone à sept côtés va avoir une place bien particulière dans le milieu objectif de la recherche.

Sans aller ici plus avant dans cette analyse historique et épistémologique, nous pouvons affirmer que la situation se révèle propice aux actions sur de nombreux objets, que des élaborations théoriques sont possibles et que la relation que chacun entretient avec les objets mathématiques a une influence fondamentale, particulièrement pour ce qui concerne la dimension expérimentale de la recherche. Montrons sur trois extraits, issus d'expérimentations en Terminale scientifique (TS) et en formation continue du second degré, la forme que peuvent prendre les actions sur les objets et les productions.

Après un premier travail numérique, un groupe en TS s'engage dans la manipulation de représentations de certains polygones réguliers, découpées dans du papier de couleur (annexe 3). Cette manipulation engendre un questionnement sur la congruence des longueurs.

> « - tu veux dire si on en prend un de c'te longueur là et ben ça marche ?
> - mais on peut pas !
> - et pourquoi ?
> - ben parce que le coin de là il est dans la longueur là et c'est dit...
> - ah ouais c'est vrai
> - on exclut de ce problème les pavages tels que le sommet d'un polygone appartienne au côté ...
> - on aurait du y penser tout de suite alors ».

Cette congruence, dont le questionnement n'est pas fréquent, se déduit ici d'une interaction entre la manipulation et les données du problème. Le même groupe a produit l'affiche reprise en annexe 4 qui montre un début de structuration de l'ensemble des pavages semi-réguliers du plan :

- avec la représentation de certains éléments de cet ensemble (dont un candidat invalidé lors du débat) ;
- avec l'élaboration de conditions nécessaires, sur la congruence des côtés, sur la somme des angles autour d'un nœud ;
- avec la reconnaissance de l'aspect non suffisant de cette dernière condition dans une considération globale.

---

12 La recherche de Kepler sur les pavages, qui s'inscrit dans une recherche globale de l'Harmonie du monde, s'appuie sur une relation aux objets et une représentation du monde très personnelle et spécifique (on pourra consulter sur cet aspect Simon (1979)). L'étude d'autres auteurs confirme que chacun entretient une relation particulière au monde et aux objets mathématiques, relation qui induit des pratiques spécifiques et des élaborations nécessairement différentes.

Suite à une expérimentation en formation continue, l'étude d'un échange permet d'identifier un retour aux actions sur les objets, lors de l'analyse problématique d'une relation obtenue dans l'étude des pavages réguliers. Mis en difficulté par la relation $180 \times \frac{n-2}{n} = \frac{360}{p}$, des collègues du second degré s'interpellent :

> « Non mais c'est des trucs que tu vois en terminale »... (en référence à des équations diophantiennes). Mais si on en met plus de 6 on va peut-être trouver un angle trop aigu. Si si on va s'en sortir parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement, on peut pas faire moins que 60 ... et oui oui ... *n* il est forcément plus grand ou égal à 60 euh… Non pas $n, p$ »

Et c'est ainsi, par la manipulation d'images mentales des polygones réguliers, que ces collègues trouvent une piste qui leur permettra ultérieurement, la détermination de tous les candidats pavages. Ces extraits illustrent ainsi que la situation proposée permet, en appui sur des connaissances déjà naturalisées ou naturalisées pendant la séance, de produire :

- des éléments de l'ensemble des pavages archimédiens,
- des conditions nécessaires (pour l'existence d'un pavage strict, pour l'assemblage autour d'un nœud),
- des caractérisations (aspect global, travail sur le type d'un nœud, ...),
- des preuves, dans certains cas particuliers,
- des processus de constructions.

## Conclusion

Dans l'étude des productions mathématiques des élèves, élaborées lors de situation de recherche en classe, il apparait indispensable de prendre en considération les objets disponibles dans le milieu de la recherche, les actions engagées sur ces objets, les relations que les individus entretiennent avec les objets. Les illustrations présentées ici permettent de montrer des élèves qui, dans le cadre des situations proposées, se familiarisent avec des concepts, structurent des objets mathématiques, produisent des processus qui conduisent à des élaborations théoriques. Les pistes proposées par le travail du groupe DREAM autour de ces situations permettent ainsi d'envisager des apprentissages conceptuels dans ce cadre, les modalités du dispositif garantissant par ailleurs que chaque élève peut s'engager dans les élaborations mathématiques.

Cette réflexion sur les investigations mathématiques possibles autour d'une situation construite dans ce paradigme se doit d'être poursuivie à l'heure où la demande institutionnelle oriente l'activité attendue des élèves dans cette direction.

## Bibliographie

Aldon, G., Cahuet, P.-Y., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M. & Tardy, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école.* Cédérom INRP.

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier, V. & Dias, T., (2008). Faire l'épreuve des objets en mathématiques. Le cas des polyèdres réguliers, *Actes du colloque international, efficacité et équité en éducation*.

Front, M. & Legrand, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP, n° 486*, 60-66

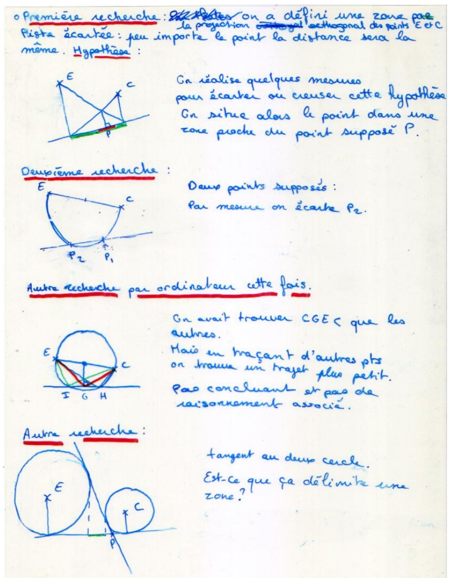
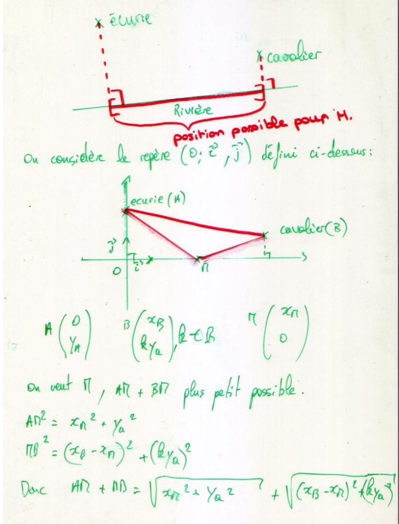
Front, M. (2010). *Pavages semi-réguliers du plan. Élaboration d'une situation favorable à la dialectique théorie-objets.* Mémoire de master HPDS de l'Université Lyon 1.

Gardes, ML. (2009). *Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème en cours en arithmétique.* Mémoire de master HPDS de l'Université Lyon 1.

Kepler, J. (1980). *Harmonie du monde. Harmonices Mundi. Traduit du latin avec un avertissement et des notes par Jean Peyroux*. Paris : Blanchard.

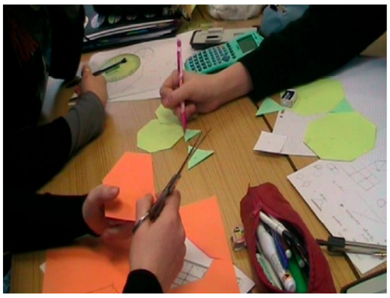
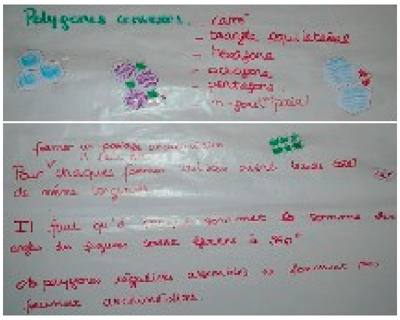
Longo, G. (1997). De la cognition à la géométrie.http ://www.di.ens.fr/~longo/download.html

Simon, G. (1979). *Kepler astronome astrologue.* Paris : Gallimard, Bibliothèque des sciences humaines.

| ANNEXES | |
|---|---|
| **Annexe 1** | **Annexe 2** |
|  |  |





| **Annexe 3** | **Annexe 4** |
|---|---|
|  |  |

# Des Situations de Recherche pour la Classe

## Quels apports en terme d'« autonomie mathématique » de l'élève ? Quels types de ressources pour les enseignants ?

**Simon MODESTE**

*Institut Fourier*
*100 rue des Maths, BP 74*
*38402 St Martin d'Hères cedex, (France)*
*simon.modeste@ujf-grenoble.fr*

*RÉSUMÉ : On s'intéresse ici aux Situations de Recherche pour Classe (SiRC), qui sont une transposition à la classe de l'activité du chercheur professionnel. On présentera leurs apports en terme de créativité mathématique de l'élève. Puis, en se basant sur deux travaux précédents de l'équipe 'Maths à Modeler', on amorcera une réflexion sur la transmission de ces SiRC.*

*ABSTRACT: We are interested here in Research Situations for the Classroom (RSC), which are a transposition in the classroom of the activity of the professional researcher. We will show how RSC contribute to the development of pupils' mathematical creativity. Then, we will discuss the transmission of those RSC, on the basis of two previous articles from the 'Maths à Modeler' team.*

MOTS-CLÉS : *Situation de Recherche pour la Classe, SiRC, transmission, ressources, créativité mathématique, activité de recherche*

*KEYWORDS: Research Situation for the Classroom, RSC, transmission, ressources, mathematical creativity, research activity*

## Introduction

Les *Situations de Recherche pour la Classe* (SiRC) sont développées par l'équipe *Maths à Modeler* depuis plusieurs années. Elles sont une transposition dans la classe de l'activité du chercheur en mathématiques. Une spécificité des SiRC tient au fait que leur objectif principal n'est pas la découverte ou l'apprentissage d'un concept mathématique désigné par le curriculum, ni la mise en place ou le travail d'une technique spécifique, mais bien la pratique de la démarche de recherche en elle-même. Dans une première partie nous présenterons les SiRC et quelques exemples.

Lors d'une SiRC, une forte responsabilité est laissée à l'élève, notamment au travers de variables didactiques particulières, laissées à sa disposition, les *variables de recherche*. Dans ces situations, l'élève a à sa charge de répondre à une question mathématique initiale, mais aussi de formuler ses propres questions, de définir les objets qu'il manipule, de formuler ses propres conjectures, de les prouver etc. L'élève se retrouve donc en position de chercheur, et en ce sens de créateur de mathématiques. Dans la deuxième partie, nous verrons en quoi les SiRC permettent la mise en place d'un tel processus et analyserons les types de savoirs en jeu.

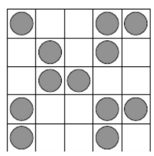
Par ailleurs, la réussite d'une SiRC est conditionnée par une rupture spécifique du contrat didactique, demandant une gestion particulière de la classe, souvent aidée par la présence d'un chercheur auprès de l'enseignant. La gestion de ces situations par un enseignant seul est souvent difficile. Des propositions de formation existent, et des ressources, à destination des enseignants et des formateurs, ont été développées en collaboration avec des enseignants. Ce sera l'objet de la troisième partie de ce texte.

## 1. Des situations de recherche pour la classe

### *1.1. Exemples*

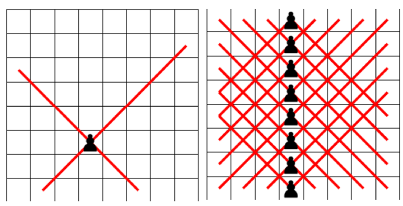
Voici trois exemples, que nous ne développerons pas, mais qui montrent quels types de problèmes sont proposés pour une SiRC. Ils ne sont pas nécessairement présentés tels que nous les proposons à la classe.

**La chasse à la bête :**



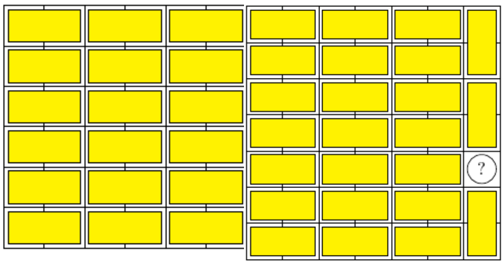
Dans une grille 5 × 5 (le « jardin »), des « bêtes » (3 cases alignées verticalement ou horizontalement) peuvent entrer. On peut les en empêcher en disposant des pièges  dans le jardin : lorsqu'une case contient un piège, une bête ne peut plus s'installer dessus. On peut, par exemple, empêcher toute bête d'entrer en disposant 12 pièges de comme ci-contre. La question se pose alors : Peut-on faire mieux ? Quand est-on sur d'avoir la meilleure solution ?

**Les pièces d'échiquier :**



Sur un échiquier (8 × 8), on veut placer une pièce d'échec (un fou ♟ par exemple) le plus grand nombre de fois sans qu'aucune ne soit en position de manger une autre. Combien au maximum peut-on mettre de fous sur l'échiquier ? Comment être sur que l'on a atteint le maximum ? Ci-contre : le déplacement du fou et une solution avec 8 fous : on ne peut pas en ajouter d'autres mais est-ce la meilleure solution ?

**Pavage par les dominos :**



On souhaite paver un carré avec des dominos. Pour un 6 × 6, il est facile de trouver une solution. Mais pour un 7 × 7, il reste toujours une case libre. La case libre peut-elle occuper la place que l'on veut dans le carré ?

### *1.0. Une caractérisation :*

Grenier & Payan (2003) donnent la caractérisation suivante des SiRC :
1. Une SiRC est proche de questions de recherche actuelles.
2. La question initiale est facile d'accès.
3. Des stratégies initiales simples existent.
4. Plusieurs développements et stratégies d'avancée sont possibles.
5. Une question résolue doit pouvoir amener à de nouvelles questions.

### *1.2. Un format : les ateliers Maths à Modeler*

Dans les classes, généralement, une SiRC est présentée en tant qu'atelier *Maths à Modeler*, dont la forme est inspirée de l'expérience *MATh.en.JEANS*. L'atelier se déroule sur 6 à 8 semaines, à raison d'une séance d'une heure environ par semaine. Les élèves cherchent par groupes de 3 ou 4. Un bilan est fait en fin de chaque séance. Les 2 dernières séances sont souvent consacrées à la préparation d'un exposé pour un *séminaire junior* où plusieurs classes présentent leurs recherches.

## 2. L'élève créateur de mathématiques

### *2.1. Variables de recherche*

Lors d'une SiRC une forte responsabilité est déléguée à l'élève. En effet, à partir de la question initiale, il a le choix de ses questions et donne une direction de son choix à ses recherches. Certaines variables de la situation (didactiques ou non) sont laissées à la disposition de l'élève pour organiser son travail de recherche.

Par exemple, lors du problème de pavage par des dominos, lorsque l'élève-chercheur trouve un pavage de tout carré pair, il peut vouloir généraliser en se demandant si l'on peut paver un rectangle pair. Mais il peut aussi se poser la question pour des carrés impairs ou encore essayer de changer la forme du « pavé ». Ces variables sont appelées les *variables de recherche* de la situation. « Elles déterminent la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème (modélisation). » (Grenier & Payan, 2003)

En ce sens, l'élève devient *acteur* de sa recherche et peut s'atteler à la résolution de ses propres questions. « L'élève se retrouve en effet en position de « chercheur » mais aussi en situation de « gestionnaire » de sa propre recherche : c'est lui qui choisit et modifie les valeurs des variables de recherche. » (Cartier et *al.*, 2006)

### *2.2. Activité mathématique*

L'objectif principal d'une SiRC est la transposition dans la classe de l'activité du chercheur. Cette activité peut être appelée *activité mathématique*, *démarche de recherche mathématique*, *démarche de preuve*, *raisonnement mathématique* ou *pensée* *mathématique*. Ces terminologies sont équivalentes dès qu'on les considère dans un sens global. Elles diffèrent uniquement par le fait qu'elles mettent chacune l'accent sur un aspect spécifique de la démarche, selon le point de vue adopté.

Nous écartons cependant le terme de *démarche d'investigation*, qui fait référence à un type de contrat ou une méthode d'enseignement. Une démarche d'investigation peut, *a priori*, n'avoir aucun lien avec l'activité du chercheur. Les SiRC entrent effectivement dans le cadre d'une démarche d'investigation, mais ce cadre ne permet pas d'analyser les situations et problèmes mathématiques ainsi que l'activité de recherche, vue comme transposition de l'activité du chercheur.

Les SiRC permettent à l'élève-chercheur d'entrer dans une démarche de recherche, cela a été largement montré dans les travaux de l'équipe *Maths à Modeler*. Citons entre autres, les travaux de Giroud (2008) sur le rôle de l'expérimental dans l'activité mathématique et notamment lors des SiRC, ceux de Cartier (2008) concernant notamment l'activité de modélisation dans le cadre de la théorie des graphes, ou ceux de Ouvrier-Buffet (2007) concernant la définition et qui fournissent un cadre pour analyser cette activité dans les cadre des SiRC.

Les SiRC permettent à l'élève d'expérimenter, conjecturer, prouver, rejeter une conjecture par un contre-exemple, modéliser, définir les objets manipulés, généraliser ou particulariser, etc. Ces phases font partie intégrante de l'activité du chercheur. Lorsqu'il entre dans cette démarche, l'élève-chercheur est alors en position de *créateur de mathématiques*. La preuve est au cœur de l'activité mathématique, elle est le but principal de la recherche (professionnelle ou en SiRC). Elle est structurée par des raisonnements, qui sont un objectif d'apprentissage central des SiRC. Citons les notions de conditions nécessaire et suffisante, le raisonnement par l'absurde, par induction, l'utilisation de contre-exemples, la preuve par forçage, la recherche d'invariants, l'activité de définition, etc, comme raisonnements pouvant intervenir dans les SiRC.

Tous ces savoirs et savoir-faire en jeu sont particuliers, nous les appelons *savoirs transversaux*. Ils sont transversaux en deux sens. D'abord, ils sont transversaux aux mathématiques : ils ne sont pas spécifiques à une branche ou une autre et font partie d'une culture commune à tous les mathématiciens. Ensuite, ils ne font pas l'objet d'une partie ou d'un chapitre spécifiques des programmes. D'ailleurs, les nouveaux programmes du lycée (2009) contiennent une rubrique *Notations et raisonnement mathématiques,* « consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique [et qui] ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire ».

## 3. Ressources et formations pour les SiRC

Le contrat didactique lors d'une SiRC est en rupture forte avec le contrat usuel de la classe. Notamment, on peut relever les contrastes suivants :

| | Contrat « usuel » | Contrat SiRC |
|---|---|---|
| Démarche | Linéaire, déterminée par une suite de questions préparées par l'enseignant | Non-linéaire, allers-retours entre les différents moments, EC[13] peut explorer plusieurs pistes ; EG veille à ce que ces choix ne mènent pas systématiquement à des impasses |
| Questions | Posées par l'enseignant | Soulevées par EC ; EG est garant qu'elles relèvent des mathématiques |
| Définitions | Fixées par le professeur, déjà adaptées aux besoins de la classe | À construire, peuvent évoluer selon les besoins ; la nécessité de communication, par exemple, peut créer un besoin de poser une définition |
| Validation | L'enseignant valide ou invalide le résultat de l'élève | L'élève est responsable de la validation de ses conjectures, l'enseignant veille à la validité des raisonnements en les requestionnant |
| Fin | L'activité s'arrête lorsque toutes les questions sont traitées | L'activité n'a qu'une fin dans le temps, certaines questions restent sans réponse, ou avec une réponse partielle |

Généralement, cette rupture de contrat est aidée par la présence dans la classe d'un chercheur. Cependant, pour que la pratique des SiRC se généralise, il faut se demander comment l'enseignant peut gérer seul de telles situations et quels types d'accompagnements et de documentations pourraient être mis en place.

D'autre part, comme le notent Gandit et Giroud (2009), « les enseignants peuvent être réticents à s'engager dans une pratique qui met en jeu des savoirs qui ne leur sont pas familiers ou qu'ils n'ont peut-être jamais fréquentés ». Chez les enseignants du secondaire, s'ajoute généralement une réticence à engager la classe sur un temps aussi long, d'autant plus qu'une SiRC ne traite aucun chapitre du programme. Cependant, la rubrique *notations et raisonnement mathématiques* des programmes de lycée pourrait dorénavant fournir une réponse à cette préoccupation. Chez les enseignants du primaire, il semble que ce soit plutôt des craintes concernant la gestion mathématique de la situation qui prédominent.

### *3.1. Formations et ressources*

La construction de ressources pour l'enseignant, ainsi que la formation des enseignants aux SiRC se révèlent complexes. Nous allons étudier deux propositions de transmission des SiRC, l'une sous forme de fiche à destination des enseignants, l'autre sous forme d'une proposition de formation aux SiRC en formation initiale.

#### *3.1.1. Une fiche Maths à Modeler*

Gravier, Payan et Colliard (2008), deux mathématiciens et une professeur des

13 EC = élève-chercheur ; EG = enseignant-gestionnaire

écoles proposent de réaliser des fiches pour « mettre à disposition des enseignants certaines de ces situations ». Ils proposent ensuite une fiche pour la situation de pavage par des dominos. La structure de cette fiche est la suivante :

- Présentation des caractéristiques des SiRC
- Chronologie globale d'un atelier
- Compétences en jeu (en lien avec les programmes de 2005)
- Présentation du problème et organisation d'un atelier sur la base de sept séances où chaque séance est détaillée en « Objectifs », « Matériel », « Déroulement et durée de la séance » et « Avertissements »
- Récapitulatifs des apprentissages transversaux et notionnels

Les auteurs insistent aussi sur le fait que l'enseignant doit chercher seul sur le problème avant toute lecture de la fiche.

Une telle fiche donne un bon aperçu du déroulement d'une SiRC, et permet à un enseignant de se convaincre de la possibilité de sa mise en œuvre. Elle fournit en quelque sorte, à la fois un mode d'emploi et une analyse *a priori* de la situation. L'inconvénient est que la démarche de recherche est rendue plus linéaire, et chaque séance est destinée à l'étude d'un point précis du problème. Cependant, les allers-retours entre conjecture et preuve peuvent encore vivre au cours d'une séance. Ce type de fiche permet, en théorie, à un enseignant de mettre en place effectivement une SiRC dans sa classe. Cependant, il serait à tester si la démarche de recherche vit réellement après une telle transmission, notamment en fonction de l'expérience personnelle qu'a l'enseignant de la recherche de problèmes. Notons aussi qu'une telle fiche est parfaitement adaptée pour un enseignant ayant déjà une expérience de gestion des SiRC mais désirant proposer un nouveau problème.

*3.1.2. SiRC et formation initiale*

Giroud et Gandit (2009) font une proposition de formation aux SiRC, à destination d'enseignants en formation initiale qui seraient intéressés par « la pratique en classe des SiRC – pratique dans le quotidien de la classe – sans aide extérieure de la part de chercheurs ». Après avoir présenté les SiRC *via* le problème des pièces d'échiquier, et l'intérêt de travailler la démarche scientifique en classe, ils se posent la question de transmettre les SiRC : « Les enseignants concernés doivent être persuadés que les apprentissages réalisés à l'aide des SiRC sont suffisamment importants pour qu'il soit légitime d'y consacrer des heures du temps scolaire. Comment amener les enseignants à cette conviction [...] ? » (op. cit.) Pour répondre à cette question, ils font la proposition suivante :

- Mettre les stagiaires en situation de recherche sur un temps court (1 heure) sur le mode du débat scientifique, plusieurs variables de la situation étant fixées,
- Montrer aux stagiaires une vidéo d'un séminaire junior ou les faire assister à un tel séminaire pendant le reste de la séance. « Cette première partie de la formation permet d'établir un lien direct entre les SiRC et les élèves et montre la faisabilité de cette pratique. » (op. cit.),
- Mettre les stagiaires en situation de recherche, par petits groupes, sur un temps plus long (2 à 3 séances) avec des variables de recherches plus libres. Les séances se concluant sur une présentation des résultats de chaque groupe. La fin de la dernière séance pouvant être consacrée à une discussion sur les connaissances en jeu,
- Faire vivre aux stagiaires une SiRC complète, sur quatre séances, suivie d'une discussion sur la position de l'enseignant et la rupture du contrat didactique.

Une autre modalité évoquée est un accompagnement personnalisé du stagiaire.

Cette proposition, relativement longue, paraît adaptée à une appropriation des caractéristiques des SiRC par les stagiaires. *A priori*, les stagiaires auront un vécu fort d'une démarche de recherche dans toute sa complexité. On peut imaginer que des enseignants seront tentés de mettre en place des SiRC dans leur classe. Là aussi, il faudrait tester si la démarche de recherche survit aux contraintes de l'enseignant.

### *3.2. Complémentarité*

Dans les deux propositions, certains aspects communs sont à souligner. Une expérience de recherche sur un temps long pour l'enseignant semble primordiale, ainsi qu'une recherche suffisante sur le problème proposé à la classe. Cela a une implication directe sur la capacité de l'enseignant à reconnaître la validité ou non des arguments des élèves-chercheurs. En effet, l'enseignant doit « être capable de repérer les résultats valides, les conjectures erronées avec un contre-exemple (ce qui peut s'avérer difficile à expliciter), les stratégies pertinentes qu'il peut inciter à poursuivre en cas de découragement des élèves... Ce qu'il pourra ainsi repérer ne doit pas être dit aux élèves pendant leur recherche, mais permet les relances et sera utile à certains moments d'institutionnalisation, prévus à l'avance » (Gandit & Giroud, 2009). Les deux propositions mettent aussi en avant la faisabilité de tels ateliers malgré les contraintes, en montrant que les SiRC sont réellement utilisées.

Dans la proposition de fiche, la démarche devient plus linéaire, au profit d'une transmission plus guidée de l'activité de l'enseignant. Cela a l'avantage de fournir une activité clé en main qui permet à l'enseignant de se lancer dans les SiRC. Cependant, dans un second temps une documentation plus détaillée sur la démarche de recherche ou un accompagnement sur une SiRC moins guidée serait à envisager.

À l'inverse, dans la proposition de Gandit et Giroud, on note une volonté forte de ne pas dénaturer l'activité de recherche. Les stagiaires seront plus préparés à la gestion de SiRC dans leur classe mais un gros travail de préparation de ces séances reste à faire pour le futur enseignant. Giroud et Gandit (2009) notent tout de même que « si cette formation n'aboutit pas à une pratique effective des SiRC en classe de la part des enseignants impliqués dans la formation, on peut tout de même s'attendre à des retombées bénéfiques pour la classe ».

## Conclusion

L'objectif de ce travail étant avant tout de soulever la question de la transmission des SiRC, nous conclurons sous forme de questions. Comment permettre aux futurs enseignants d'avoir l'expérience de recherche nécessaire à la gestion des SiRC ? Par quels moyens peut-on convaincre les enseignants que la mise en place de SiRC est possible et bénéfique ? Fiche d'atelier et formation pratique, sont complémentaires. Comment articuler ces approches pour concevoir une formation des enseignants à la gestion des SiRC ? Quels peuvent être les apports de ressources en ligne, permettant de produire des fiches moins linéaires et d'utiliser des supports vidéos ? Comment former les chercheurs aux SiRC pour qu'ils participent à leur transmission ?

La construction de ressources pour les enseignants ou les institutions, et le choix de la forme de ses ressources sont des questions fondamentales pour la diffusion des travaux sur les SiRC et il semble difficile de se passer d'une formation en pratique des enseignants pour une bonne dévolution de la démarche.

## Bibliographie

Cartier L. (2008), Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation, *Thèse de l'Université Joseph Fourier*, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00416598/fr/.

Cartier L., Godot K., Knoll E., Ouvrier-Buffet C. (2006) Les situations-recherche : Apprendre à chercher en mathématiques. *Colloques EMF et AMQ*, Université de Sherbrooke, Canada.

Gandit M., Giroud N. (2009) Un modèle de situations pour travailler la démarche scientifique en mathématiques : les Situations de Recherche en Classe. *Actes des Journées S-TEAM.*

Giroud N. (2008) Learning the experimental approach by a discrete mathematics problem. *ICME 11*, http://tsg.icme11.org/document/get/760.

Gravier S., Payan C., Colliard M.-N. (2008) Maths à Modeler : pavages par des dominos. *Grand N*, n° 82, 53-68.

Grenier D., Payan C. (2003) Situations de recherche en « classe » essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 92, http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2003/Cahier92/ResumCahier92.html.

Ouvrier-Buffet C. (2007) *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique.* Collection « Éducation et sciences », Éditions Fabert.

# La correspondance mathématique : une activité mathématique « créative », quels apprentissages ?

**Mireille GENIN*, Magali HERSANT****

** Institut Supérieur Ozanam et Lycée F. D'Ambroise, IREM de Nantes*
*mireille.genin@ec44.scolanet.org*

*** IUFM des Pays de la Loire, CREN, IREM de Nantes, Université de Nantes*
*4 chemin de Launay Violette*
*44300 NANTES*
*magali.hersant@univ-nantes.fr*

*RÉSUMÉ : Nous indiquons d'abord brièvement les caractéristiques de la correspondance mathématique telle que nous l'avons proposée. Puis, nous présentons son intérêt du point de vue des apprentissages mathématiques des élèves. Pour cela nous nous appuyons sur des productions d'élèves.*

*ABSTRACT: We point out at first briefly the characteristics of the mathematical correspondence such as we proposed it. Then, we present its interest from the point of view of the mathematical learnings of the pupils. For this we lean on pupils' productions.*

MOTS-CLÉS : *correspondance mathématique, activité mathématique « créative », résolution de problèmes*

*KEYWORDS: mathematical correspondence, creative activity, probleme solving*

Depuis plusieurs années, nous étudions la résolution de problèmes mathématiques dans le secondaire (ECCEmaths, 2009). Nos travaux nous ont conduits à imaginer le dispositif de « correspondance mathématique » qui permet une activité mathématique « créative » et problématisée (Hersant, 2011). Après la présentation de ses caractéristiques, nous indiquerons ici les apprentissages qu'il nous semble susceptible de générer d'après les différentes expérimentations effectuées. Sur cette base, nous émettrons aussi des suggestions pour son utilisation.

## 1. La correspondance mathématique comme dispositif pédagogique

En France, plusieurs dispositifs pédagogiques ont été développés pour permettre un engagement « plus authentique » des élèves dans une activité mathématique (Artigue & Houdement, 2007) en référence à un type de problème particulier, le « problème ouvert » (Arsac & Mante, 2007). La correspondance mathématique présente des spécificités par rapport à ces dispositifs. En particulier, c'est un échange épistolaire entre deux élèves presque pairs, mais non pairs (par exemple Terminale – étudiants de L1 ou L2 ; 3$^{e}$ – 2$^{de}$ ; 2$^{de}$-Terminale) à propos d'un problème que l'un peut résoudre avec une solution « experte » et l'autre non. Précisons ces caractéristiques et leur motivation.

### *1.1. Un échange entre élèves*[14]

La narration de recherche (Chevallier, 1992 ; Sauter, 2000) est un écrit individuel à propos de la résolution d'un problème-ouvert : l'élève retrace l'histoire de sa résolution, faisant part, entre autres, de ses impasses. La narration est réalisée le plus souvent en dehors de la classe et un travail collectif est ensuite organisé par l'enseignant. Dans ce dispositif, les caractéristiques du problème ouvert et la régularité de la pratique de narrations qui instaure un contrat didactique particulier permettent à l'élève de s'engager dans l'activité mathématique. La narration est adressée à l'enseignant et les élèves risquent de ne pas se livrer totalement. C'est pourquoi nous écartons l'enseignant en lui attribuant le simple rôle de « facteur ». Cependant, nous retenons l'idée de narration pour obtenir un écrit différent d'une solution.

La recherche collaborative (Sauter et *al*., 2008) permet une résolution collective d'un problème. Les problèmes choisis sont de « véritables problèmes de recherche » et nécessitent des échanges entre pairs. La collaboration est une richesse mais ne permet pas d'accéder, comme souhaité, à l'activité individuelle de résolution de problèmes. Nous retenons cependant de ce dispositif l'idée d'échanges qui permet une évolution de la recherche.

Ainsi, le dispositif de correspondance mathématique s'apparente par certains aspects à la narration de recherche et à la recherche collaborative, mais il en diffère aussi fondamentalement par le choix du destinataire de l'écrit : ce n'est pas le professeur. Nous pensons qu'ainsi l'élève livre sans censure son activité, cela permet une sincérité des correspondants dont témoignent les retours de certains élèves à la fin de la correspondance. Ainsi, un lycéen déclare : « Les rapports étaient plus proches que lorsqu'on fait un devoir pour notre prof, on était entre collègues ». Mais, comment alors motiver un échange épistolaire entre élèves si le but n'est pas la résolution collaborative d'un problème ?

### *1.2. Une dissymétrie de connaissances entre les correspondants*

Le dispositif repose sur une étude de l'activité du mathématicien et du rôle des

---

14 Par élèves nous entendons, à la fois écoliers, collégiens, lycéens, étudiants.

correspondances mathématiques dans l'histoire de la discipline. Elles rapportent les avancées, doutes, questions des mathématiciens à propos de la résolution d'un ou plusieurs problèmes (Peiffer, 1998).

Dans cette pratique, les deux correspondants ne travaillent pas forcément de concert à la résolution d'un même problème, il y a souvent une dissymétrie entre eux. De plus, le mathématicien raconte comment il travaille un problème de la manière qu'il a choisie, et de façon probablement très authentique, puisqu'une correspondance n'a pas pour vocation première d'être publiée.

La lecture de ces correspondances révèle l'importance du destinataire. Cela est frappant dans la correspondance de Sophie Germain que nous avons étudiée. Deux éléments importants concernant la variable destinataire de l'écrit ressortent. D'abord, si le destinataire de la lettre est un peu plus avancé en mathématiques, l'auteur livre plus facilement ses pistes de recherches, doutes, questions et impasses. Ensuite, lorsque le destinataire est plus avancé en mathématiques, il apporte un regard critique et constructif sur le travail de son collègue, sans toutefois lui donner la solution. Ainsi, la dissymétrie entre les correspondants sur l'objet de l'étude apparaît, historiquement, comme un des moteurs d'une correspondance mathématique, un autre est bien entendu la publicité des recherches. Cette caractéristique nous semble constituer une motivation pour une correspondance mathématique entre élèves, c'est pourquoi la correspondance est réalisée entre deux élèves qui ne se situent pas au même niveau de scolarité.

### *1.3. Une dissymétrie de buts entre les correspondants : une dynamique de recherche et d'aide*

Etant donnée la dissymétrie de connaissances entre les élèves et le projet de contribuer aux apprentissages mathématiques de chacun des élèves qui participe au dispositif, il convient de donner aux deux correspondants des consignes différentes. Pour l'élève moins avancé en mathématiques, il s'agit d'adresser en détails à son(sa) correspondant(e) les étapes de sa recherche, ses essais, réflexions, pistes de recherche, résultats, même s'ils sont intermédiaires ou partiels. Tandis que le rôle de l'élève plus avancé en mathématiques est d'aider son correspondant à progresser dans sa recherche en n'hésitant pas à demander des précisions, mais toutefois sans fournir la réponse.

Cette dissymétrie inscrit l'échange dans une relation recherche – aide qui génère un processus dynamique. Cela incite en particulier l'élève qui cherche le problème à formuler ses doutes et questions ce qui, d'une part, participe certainement à sa construction du problème et, d'autre part, apporte des informations intéressantes à l'enseignant.

### *1.4. Un problème qui ouvre des perspectives nouvelles en mathématiques*

Cette relation d'aide est une occasion intéressante de faire des mathématiques autrement pour l'élève le plus avancé à condition que le problème choisi puisse se résoudre, d'une part, avec une procédure « experte » qu'il maîtrise ou qui est en cours d'apprentissage et, d'autre part, avec des connaissances plus anciennes pour lui et qu'il ne mobilise plus aussi instantanément car il dispose d'outils plus puissants. En quelque sorte, la correspondance mathématique est intéressante pour l'élève le plus avancé en mathématiques si elle l'amène à revisiter des savoirs anciens. Nous pensons en effet que dans ce cas, c'est une occasion pour lui de construire ou redécouvrir des relations entre des connaissances relativement anciennes et des connaissances plus nouvelles. Evidemment, il faut que l'élève le moins avancé ait à sa disposition des connaissances qui lui permettent d'aboutir. Pour cet élève, la procédure « experte », sans être disponible, se situera alors dans la filiation de ses connaissances au moment de la correspondance. Cette condition permet de proposer des problèmes qui résistent et place l'élève le moins avancé dans un avenir mathématique qu'il est, le plus souvent, loin d'imaginer.

### *1.5. Un dispositif en deux temps : recherche et « restitution »*

Qui dit dispositif pédagogique dit objectif d'apprentissage. Au cours de la correspondance mathématique, les enseignants n'interviennent pas. Cependant, pour permettre aux élèves d'identifier les connaissances, parfois implicites, qu'ils construisent et les stabiliser il est nécessaire d'organiser un moment de « restitution » à l'issue de la correspondance. Il s'agira alors de désigner, commenter et situer ces connaissances dans le champ des mathématiques. Ce moment mathématique qui réunit pour la première fois physiquement les correspondants, peut prendre différentes formes.

Il peut s'agir d'un travail sur des extraits de correspondances choisis par les enseignants : les élèves analysent les différentes procédures de résolution proposées, commentent leur intérêt, leurs limites voire leur invalidité. Puis les enseignants pointent les savoirs notionnels nouveaux pour les élèves les moins avancés et connus pour les plus avancés mais aussi des savoirs relatifs à la résolution de problèmes en mathématiques. Par exemple, ils montrent l'intérêt au cours d'une recherche de s'arrêter pour faire un point sur les résultats obtenus et organiser la suite du travail. Il peut aussi s'agir d'un exposé plus magistral des enseignants avec les mêmes objectifs.

## 2. Quels apprentissages ce dispositif engendre t-il ?

Le contexte inhabituel permet à l'élève d'avoir une attitude différente devant la recherche d'un problème, susceptible d'enclencher des apprentissages spécifiques. Nous illustrons ici cet aspect à partir d'extraits de deux correspondances sur un même problème réalisées à l'articulation secondaire-supérieur. Le problème est la suivant :

*L'expression* $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ *admet-elle un maximum lorsque le point de coordonnées (x, y) décrit le premier quadrant* ($x \geq 0$ *et* $y \geq 0$) *? Si oui, le déterminer.*

Il s'inspire largement d'un problème de la brochure APMEP n°154 « Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée », tome 2. Aucune indication de méthode n'est proposée, néanmoins un élève de terminale ou de L1 doit pouvoir démarrer une réflexion, les termes de l'énoncé étant de ceux qu'il a l'habitude de rencontrer. Pour un élève de terminale la difficulté va venir de la présence de deux variables mais la symétrie de l'expression peut donner des idées.

Le texte du problème est identique pour l'élève de Terminale et pour l'étudiant mais les consignes l'accompagnant sont différentes. Le lycéen initie la correspondance à partir de la consigne suivante : « écrire en détails vos essais, tentatives, pistes de recherche et résultats (partiels ou intermédiaires) ». L'étudiant a pour tâche d'aider le lycéen, pour lui la consigne est : « aider le lycéen à avancer dans sa recherche, le but n'est pas de lui fournir une réponse, ne pas hésiter à lui demander des précisions ».

Pour plus de détails sur le problème et l'activité des élèves dans une correspondance mathématique nous renvoyons à (Aubry et *al*, à paraître ; Hersant, 2009 et 2011).

### *2.1. Structurer, faire le point*

L'éloignement avec le correspondant oblige le lycéen à faire périodiquement un point organisé et par écrit sur l'état de sa recherche. Il se rend alors compte que cette façon de procéder est très constructive lorsqu'on fait des mathématiques. Ainsi, il peut, par exemple, poser au correspondant, donc aussi à lui-même, la question du sens de ce qu'il vient de faire et de la validité des résultats trouvés. Par exemple une lycéenne écrit :

*Je suis bloquée ici. Je pense que j'ai dû faire une erreur mais je ne sais pas où. C'était ce qu'il fallait faire ou il faut passer par d'autres calculs ??*

Le dispositif s'avère particulièrement intéressant pour les élèves qui se fient beaucoup à leur intuition et ne prennent pas la peine d'écrire. Ainsi l'un d'eux aime chercher, y passe du temps, mais n'aime pas rédiger. Il manque parfois de recul et d'esprit critique d'après son enseignant, le dispositif l'y contraint et lui permet de distinguer ce qui relève de la conjecture. Voici ce qu'il écrit à différents moments de sa recherche :

*j'ai tout d'abord expérimenté sur Excel (…) Le cadrant étant le premier, je restais dans un cas particulier si je prenais les nombres de 0 à 100 pour x et y. J'ai donc choisi une valeur aléatoire comprise entre 0 et 10…*

*Les plus grandes valeurs sont atteintes lorsque x et y sont compris entre 0 et 1 et plus les valeurs prises pour x et y sont grandes, plus f(x,y) devient petit.*

*J'ai fait quelques tests [ndl : une centaine !] avec x et y compris entre certains nombres…*

A ce stade de sa recherche, il est convaincu de l'existence d'un maximum pour la fonction à deux variables, que ce maximum « se situe » pour $x$ et $y$ entre 0 et 1, et il sait que ce n'est qu'une conjecture.

### *2.2. Etudier et s'approprier le raisonnement d'un autre*

L'étude des écrits du correspondant est importante pour avancer dans la résolution du problème. Elle n'est cependant pas toujours aisée. On peut penser que ce travail développe l'autonomie par rapport à un texte mathématique.

### *2.3. Accepter de se tromper pour progresser*

Le fait que l'étudiant soit à la fois un interlocuteur proche, un peu plus avancé en mathématiques mais dont le rôle n'est pas de sanctionner, permet d'accepter que l'idée de se tromper est importante pour progresser.

*Merci beaucoup pour tes réponses et tes corrections. [...] Cette partie me paraissait valable puisqu'elle semble bien mener au maximum. Or, pour utiliser cette fonction, il fallait avant tout prouver rigoureusement que le maximum ne pouvait être atteint que pour x = y. Comme tu l'as démontré, mon argument à propos du plan de symétrie n'était en fait pas valable, à moins de prouver également l'unicité du maximum.*

### *2.4. Apprendre de façon autonome à mobiliser ses connaissances*

Par ailleurs, le dispositif oblige les élèves à mobiliser, seuls, les connaissances adaptées et leur permet ainsi de mieux cerner l'utilisation de certains outils.

*Il semble que nous ayons bien cerné le problème. Nous avons aussi les outils pour le résoudre. Je résume les différentes étapes.*

### *2.5. Se projeter dans un avenir mathématique*

Le lycéen va pouvoir se projeter dans un « avenir mathématique » en réalisant, grâce à cet échange, que cet avenir est à sa portée, comme en témoignent les remarques de lycéens (classe de Terminale) lors de la restitution :

*Les dérivées partielles, on commence à voir ce que c'est.*

*L'exercice de recherche avec la fac a permis de donner une autre dimension aux maths car cette fois, on n'a plus à suivre les idées des autres et à les réemployer, c'est nous qui construisons à partir de ce que l'on sait.*

## 3. Suggestions pour mettre en place une correspondance mathématique

Les correspondances réalisées nous permettent aussi de dégager des suggestions pour faire vivre une correspondance dans sa classe.

### *3.1. Choisir des problèmes qui répondent à certains critères*

Nous souhaitons que les élèves cherchent, émettent des conjectures, prouvent et échangent. Certaines formulations d'énoncés peuvent favoriser la recherche de conjectures, d'autres, la preuve. Pour préserver l'importance de l'échange nous conseillons de sélectionner des problèmes où les outils entre les différents niveaux ne sont pas trop éloignés. Nous voulons aussi que les élèves se rendent compte que les outils mathématiques évoluent ainsi que leur domaine de validité. Cela nous conduit aux critères suivants pour le choix d'un problème :

- le problème est abordable aux deux niveaux d'étude des correspondants avec des outils différents,
- il ouvre des perspectives de nouveaux apprentissages en mathématiques, au-delà du niveau scolaire des élèves les moins avancés,
- il y a plusieurs façons de résoudre le problème choisi,
- la solution ne va pas de soi et doit passer par la réappropriation du problème à l'aide de questions du style : « quand est-ce que ça marche ? », « quand est-ce que ça ne marche pas ? »,
- la recherche du problème doit conduire les élèves à produire des preuves.

### *3.2. Tenir compte de la période de l'année et des élèves concernés*

Pour permettre aux correspondants d'avoir un nombre satisfaisant d'échanges il est préférable de débuter la correspondance assez tôt dans l'année mais aussi assez tard pour que les connaissances nécessaires à la résolution du problème aient, à la fois été réactivées, si on le pense nécessaire, et aient eu le temps d'être un peu oubliées pour que le problème ne soit pas un problème de réinvestissement…

## Conclusion

Nous avons ici brièvement présenté le dispositif de correspondance mathématique qui permet aux élèves de « vivre » une expérience mathématique riche et ses intérêts pour les élèves et l'enseignant. Nous travaillons actuellement à étoffer le corpus des problèmes adaptés à une telle correspondance (voir Aubry et *al*, à paraître).

## Bibliographie


Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert* (Scéren.). Lyon: CRDP

Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM*, *39*(5), 365-382. doi:10.1007/s11858-007-0048-x

Aubry, S., Boyé A., Comairas, M.-C., Genin, M., Hersant, M., Moulin S. (à paraître) La correspondance mathématique : d'un dispositif de recherche à un dispositif pédagogique, *Repères IREM*

ECCEmaths. (2009). *Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée et au début du supérieur ?* Nantes : IREM de Nantes.

Brousseau, G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage

Chevalier, A. (1992). Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x*, *33*, 71-79.

Hersant, M. (2009). Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum. Dans *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 351-374). Paris: IREM Paris 7.

Hersant, M. (2011). Correspondance entre élèves : conditions d'une activité mathématique « créative » et problématisée à la fin du lycée. *Eductional Studies in Mathematics*.

Peiffer, J. (1998). Faire des mathématiques par lettres. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, *4*, 143-157.

Sauter, M. (2000). Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège. *Repères IREM*, *39*, 7-20.

Sauter, M., Combes, C., De Crozals, A., Droniou, J., Lacage, M., Saumade, H., & Theret, D. (2008). Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. *Repères IREM*, *72*, 25-45.

# La résolution collaborative de problèmes

## Rendre visibles les mathématiques où on ne les attend pas


**Benoît RAY *, Saïd AZZIZ **, Geneviève COUDERC*****

** Lycée Docteur Lacroix*
*Rue Gay-Lussac*
*11100 Narbonne*
*benoit.ray@ac-montpellier.fr*
*** Collège Pierre Mendès-France*
*Rue Henri Moynier*
*34 830 JACOU*
*said.azziz@ac-montpellier.fr*
**** Collège Joffre*
*Allée Henri II de Montmorency*
*34000 Montpellier*
*genevieve.couderc@ac-montpellier.fr*



*RÉSUMÉ : Le travail de notre groupe consiste à favoriser les changements de postures des enseignants et de leurs élèves par l'intermédiaire d'une pratique originale : la résolution collaborative d'un problème. Ce dispositif de résolution de problème permet de faire intervenir les mathématiques dans des situations a priori non mathématiques, de responsabiliser les élèves et de modifier leur perception des mathématiques. En nous basant sur plusieurs exemples de problèmes proposés ces dernières années, nous montrerons comment les élèves se questionnent et revisitent des concepts mathématiques et en quoi le dispositif de résolution collaborative favorise ces attitudes.*

*ABSTRACT: In our research group, we intend promoting changes in the postures of teachers and their students through an original practice : the collaborative resolution of a problem. This kind of problem-solving technique makes it possible to involve mathematics in a priori non-mathematical situations, to empower students and change their perception of mathematics. In this paper, we present examples of problems given in recent years, in order to show how students work out and revisit mathematical concepts and how this system of collaborative resolution promotes these attitudes.*



MOTS-CLÉS : *démarche d'investigation en mathématiques, résolution collaborative de problèmes, problèmes de recherche, communication mathématique, débat scientifique.*

*KEYWORDS: Inquiry based learning in mathematics, collaborative problem solving, research problems, mathematical communication, scientific debate.*

## Introduction

Les programmes officiels de l'école primaire, du collège et du lycée mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui a cependant du mal à trouver sa place dans les pratiques ordinaires. Au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier, nous avons choisi d'intégrer ces démarches ainsi que des démarches expérimentales dans un travail collaboratif, autour de problèmes mathématiques ancrés dans le réel. Nos recherches portent sur des problématiques diverses, comme le choix des problèmes mathématiques et des situations associées, les conditions de la recherche et l'organisation des échanges. Nous nous intéressons également aux changements de postures des élèves et des enseignants induits par ce dispositif, ainsi qu'aux apports potentiels de cette démarche collective pour les différents acteurs impliqués.

## 1. Motivation

L'idée selon laquelle « les mathématiques sont présentes partout dans la société » est très répandue dans le monde scientifique et elle apparaît également dans les instructions officielles des programmes de mathématiques de collège et de lycée. Cette idée ne remporte pas l'adhésion du plus grand nombre et les mathématiques restent invisibles pour la majorité des citoyens, *a fortiori* pour nos élèves. Une des motivations de notre travail est de donner plus de visibilité aux relations qu'entretiennent les mathématiques avec les autres domaines de la connaissance humaine.

Au-delà des objectifs classiques des dispositifs de résolution de problème de recherche (prise d'initiative, autonomie, responsabilisation des élèves, développement de compétences heuristiques), nous mettons en avant l'aspect expérimental des mathématiques, la démarche scientifique et le travail de mathématisation : l'objectif est de donner aux élèves une meilleure perception des mathématiques et de montrer leur lien avec la réalité. Nous nous appuyons pour cela sur une ingénierie de recherche collaborative de problèmes mise au point à l'IREM de Montpellier, qui induit une organisation sur plusieurs semaines, de tels objectifs ne pouvant être atteints dans le temps contraint d'une ou deux séances de classe. Ce dispositif est mis en place à l'occasion d'une formation continue sur la démarche d'investigation.

## 2. Le dispositif de résolution collaborative

La résolution collaborative de problèmes est une ingénierie didactique fondée sur des échanges entre des classes de la 6$^{e}$ à la Terminale, en groupes de trois classes de niveaux voisins, cherchant à résoudre un problème commun. Le choix de constituer des groupes de trois classes est lié à la gestion des échanges : techniquement, le temps manquerait s'il fallait échanger avec plus de trois classes. Par ailleurs, des groupes de deux classes seraient plus souples mais aussi plus fragiles : que faire en cas de désistement d'une classe du groupe ? Les classes d'un même groupe sont de niveaux voisins (pas plus de deux années d'écart), ce qui ne crée pas de trop grands écarts entre les connaissances mathématiques et évite de positionner certains élèves comme « experts » et d'autres comme « moins savants », ce qui pourrait décourager les élèves du niveau d'enseignement le plus bas et réduire la motivation des autres à communiquer.

Les échanges de textes, figures, schémas, s'effectuent sur une plateforme Internet et sont pris en charge par l'enseignant. Celui-ci n'intervient que comme facilitateur et reste très en retrait pendant les phases de recherche : il y a là une rupture du contrat didactique usuel qui nécessite un changement de posture de la part des élèves et du professeur. De plus le problème, posé dans un contexte non mathématique, très ouvert, requiert une mathématisation qui nécessite des choix pour s'engager dans une recherche.

Une communauté d'élèves est créée. Elle les place dans une position qui les rapproche de celle d'un chercheur (qui travaille souvent seul, mais échange avec les collègues de son laboratoire et avec d'autres laboratoires). Pendant 5 semaines, les élèves vont alors s'échanger des questions sur la situation, des réponses, des idées, des procédures et des conjectures. Les deux premières semaines sont consacrées à l'exploration du problème et aux premières pistes vers une mathématisation. Une relance engage ensuite les élèves vers la résolution d'un problème mathématique commun sur lequel ils vont travailler pendant les deux semaines suivantes. La session se termine par la rédaction d'un compte-rendu individuel de la recherche (rédigé hors classe) qui va alimenter le débat de clôture de la cinquième semaine. Un bilan des mathématiques travaillées est ensuite fait par l'enseignant et sa classe. Ce temps permet de montrer la richesse des domaines mathématiques rencontrés, et peut donner l'occasion d'institutionnaliser des méthodes.

## 3. Caractéristiques des problèmes

Les problèmes proposés pour une résolution collaborative ont des caractéristiques spécifiques, dont certaines sont communes à d'autres dispositifs de recherche (notamment aux problèmes ouverts au sens d'Arsac & Mante, 2007) :

- ils sont suffisamment riches et robustes pour être abordés à tous les niveaux, et présentent un véritable enjeu mathématique à chaque niveau,
- tous les élèves peuvent facilement s'engager dans des essais, émettre des conjectures,
- la dimension expérimentale est favorisée et enrichit la recherche,
- les solutions trouvées peuvent n'être que partielles (limitées à certains cas particuliers, ou aux choix de mathématisation), et des solutions de sous-problèmes peuvent émerger,
- le contexte est non mathématique *a priori*.

C'est cette dernière caractéristique que nous allons maintenant développer.

## 4. Contextualisation d'un problème

Nous précisons ici ce que nous entendons par « contextualisation » d'un problème, le sens n'étant pas le sens habituel. La plupart du temps, le problème choisi est à la base un problème posé dans le champ mathématique. Il est alors « contextualisé » dans le sens suivant :

- nous construisons un contexte de façon à proposer une situation fictive mais réaliste,
- la recherche demande une mathématisation, ce qui permet de montrer un usage particulier des mathématiques rarement travaillé en classe,
- la mathématisation peut renvoyer au problème mathématique initial, mais d'autres choix sont possibles, car la situation n'étant pas forcément balisée, des variantes du problème initial peuvent émerger,
- la relance prend en compte les questions et réponses des élèves et oriente la recherche vers le problème mathématique choisi initialement ou vers le problème issu des échanges des élèves.

Sur ces deux derniers points, les recherches menées en classe sur le « problème des monnaies » sont caractéristiques.

*Problème des monnaies : Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie où il n'existerait que des pièces de valeurs 9 et 11 ? (IREM de Montpellier, Groupe ResCo, 2003-2004, d'après les exercices d'évaluation PISA, 2003)*

Ce problème demande l'étude d'équations du type $ax + by = c$ dans , mais sous la forme du problème des monnaies, les élèves ayant décidé en très grande majorité qu'il devait être possible de rendre la monnaie, le problème s'est ramené à la résolution de l'équation de Bézout dans l'ensemble des entiers relatifs. La relance a alors orienté le travail en suivant les choix faits par les élèves, vers les équations du type $ax + by = c$ admettant ou non des solutions et en incitant les élèves à s'interroger sur la faisabilité de ces solutions (la possibilité de payer toute somme avec des pièces de valeurs premières entre elles est théorique : dans la réalité, il faut non seulement trouver une solution, mais s'assurer qu'elle est réalisable en minimisant le nombre de pièces échangées).

## 5. Pourquoi contextualiser un problème ?

Ce choix est lié à nos hypothèses d'enseignement :

– un problème posé dans le cadre d'une situation réaliste favorise sa dévolution ; cette hypothèse est étayée par l'observation du travail des élèves en classe et par la teneur des échanges entre les classes, qui montrent que les élèves s'approprient le problème,
– le travail de mathématisation permet l'émergence de questions sur les relations entre mathématiques et « réalité », qui sont peu traitées traditionnellement dans l'enseignement ; on assiste à des allers-retours permanents entre objets réels et objets mathématiques,
– de ce fait, le travail de mathématisation participe à un changement de perception des mathématiques.

Ce choix est aussi lié à une question de confidentialité : les solutions de nombreux problèmes ouverts classiques sont disponibles sur Internet avec des ressources complètes. Avec un sujet posé dans un contexte original, les recherches qui s'étalent sur 5 semaines ne devraient pas être parasitées par des solutions artificielles trouvées sur Internet.

## 6. Un exemple de contextualisation

Pour détailler le travail que permet la contextualisation, nous nous appuyons sur un exemple, qui a fait l'objet de deux sessions de résolution collaborative en 2009 et 2010 dans une cinquantaine de classes de la 6$^{e}$ à la Terminale.

*Le problème des régions dans un disque : On place n points sur un cercle. Combien de régions détermine-t-on à l'intérieur de ce cercle en joignant les points deux à deux ? (La feuille à problèmes, version électronique, IREM de Lyon, n°12)*

Après avoir envisagé plusieurs situations réalistes différentes, nous avons contextualisé ce problème de la manière suivante :

*Le problème de l'artiste : Un artiste contemporain veut réaliser une œuvre sur un support rond, en plantant des clous sur le pourtour et en tendant des fils entre les clous. Il se propose de peindre chaque zone d'une couleur différente. De combien de couleurs aura-t-il besoin ?(IREM de Montpellier, Groupe ResCo, 2009-2010)*

Ce problème présente les caractéristiques précitées : il est mathématiquement robuste à tous les niveaux de l'enseignement secondaire (voire à l'université), plusieurs méthodes de résolution sont envisageables, il contient des sous-problèmes intéressants, chaque élève peut s'engager dans la recherche, la démarche expérimentale est nécessaire à la recherche, les solutions trouvées sont souvent partielles. Par ailleurs, le contexte est non mathématique et la contextualisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les représentations des objets choisis, ce que l'on verra plus loin.

Le problème de l'artiste n'est pas immédiatement mathématisé, ni par les élèves du secondaire, ni par les enseignants, comme nous avons pu l'observer à plusieurs reprises en formation continue. Quel que soit le niveau, les mêmes questions sur les objets surgissent.

Voici par exemple des questions posées par les élèves de la 3e D du collège de Jacou :

- *Cette œuvre peut elle exister ?*
- *Quelle est la taille du support ? Quelle est la superficie du cercle ? Son diamètre ? Est-ce un disque ? En quelle matière est-il fait ?*
- *Quelle est la grosseur des clous ? Combien y a-t-il de clous ? Combien y a-t-il de place entre les clous ?*
- *Combien y a-t-il de fils ? Comment sont disposés les fils ? Est ce que les fils sont tendus ? Est-ce qu'il y a plusieurs fils qui partent d'un même clou ?*

Ces questions sont envoyées aux deux autres classes du groupe de recherche. La semaine suivante, chaque classe reçoit les questions des autres classes et tentent d'y apporter des réponses. Les élèves délaissent alors rapidement la situation concrète pour mathématiser les objets, commencer à construire un problème mathématique et entrer dans des processus de résolution. A propos de la taille du support, les élèves de la TS1 du lycée Stanislas (Montréal) répondent :

- *C'est une variable ; on souhaite étudier son influence sur le problème.*
- *Il n'est pas nécessaire de connaître les dimensions du support : en effet, nous cherchons à connaître le nombre de zones et non la superficie de chaque zone.*
- *En augmentant la superficie du support, on augmente la superficie des zones mais le nombre de zones reste inchangé. Dans ce problème, les dimensions du support n'ont pas d'influence sur la donnée recherchée*[15].

On assiste là à la création d'un problème mathématique à partir de la situation initiale proposée. A tous les niveaux, parfois à la suite de longs débats en début de recherche, les élèves se sont accordés sur la même mathématisation des objets (d'autres mathématisations sont possibles, voir 7., mais n'ont pas été retenues par les élèves). La relance a essentiellement consisté à valider ces choix et à statuer sur le fait qu'il fallait chercher le nombre maximal de couleurs (faute de quoi il n'y a pas de relation fonctionnelle entre le nombre de clous et le nombre de couleurs).

Dès que les élèves entrent dans la recherche du problème mathématique proprement dit, les objets concrets sont abandonnés ; malgré tout, dans les échanges les noms restent ceux des objets « réels ». Dans toutes les classes, les clous sont assimilés à des points, les fils tendus sont des segments de droite, le support est un disque, sa dimension n'est plus un paramètre, le dénombrement se fait sur les régions et il n'est plus question de couleurs.

[15] Noter à ce propos un travail autour de notions topologiques, domaine rarement rencontré dans les problèmes abordés classiquement.

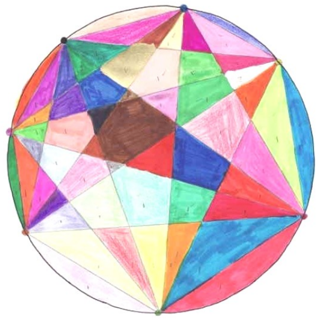


**Figure 1.** *Dessin réalisé par des élèves de 6^e^*

Ce dessin, réalisé par des élèves de 6e, montre certes plusieurs couleurs différentes, mais en moins grand nombre que les zones colorées : plusieurs zones sont de couleurs identiques. Ce n'est donc pas une question de couleurs, mais une question de nombre de zones.

Nous avons constaté à plusieurs reprises qu'une durée minimale doit être accordée au questionnement sur la mathématisation des objets et sur les choix à faire. C'est une condition nécessaire pour que ces questionnements ne viennent pas parasiter la suite de la recherche du problème mathématique.

## 7. Décontextualisation : vers un problème ou vers des problèmes ?

Selon les choix qui sont faits, la phase de mathématisation peut mener à des problèmes différents. Dans le cas du problème de l'artiste, selon que la position des clous est régulière ou non, que l'on néglige ou pas la taille des objets (clous, support, fils), le problème de l'artiste peut générer au moins 3 problèmes mathématiques différents (fig. 2). On voit là l'importance du questionnement initial des objets (faire des mathématiques, c'est aussi faire des choix) et la place cruciale de la relance.

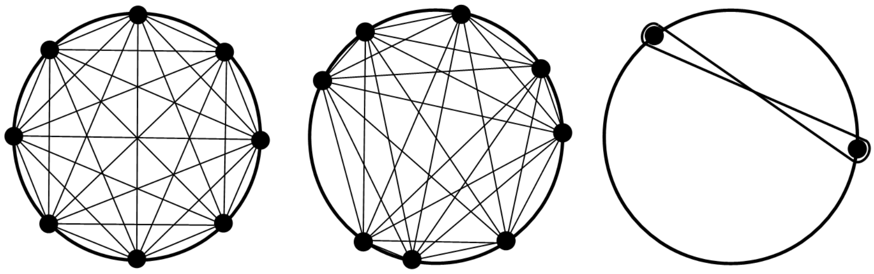


**Figure 2**. *Trois mathématisations du problème de l'artiste*

## 8. Contextualisation *versus* habillage

Les problèmes ouverts rencontrés dans certains manuels ou sur des forums Internet sont souvent habillés d'un accoutrement rendant parfois la situation totalement irréaliste, ce qui peut contribuer à renforcer l'idée que les mathématiques sont déconnectées de la réalité puisqu'elles s'intéressent à des problèmes irréels ! C'est le cas du problème suivant.

*Le problème des bananes : Un éléphant a pour mission d'amener le plus de bananes possibles de l'oasis A à l'oasis B. 1000 km séparent ces 2 oasis et il y a 3 000 bananes à l'oasis A. Le problème est qu'il ne peut pas en prendre plus de*

*1 000 à la fois et qu'à plein ou à vide, il doit absolument manger une banane par kilomètre parcouru pour survivre... Combien de bananes peut-il amener à l'oasis B ? (Pyramide 2^nde, Hachette, 2000)*[16]

C'est la raison pour laquelle nous préférons le terme de « contextualisation » à celui d'habillage. Concernant le problème ci-dessus, nous avons éprouvé beaucoup de difficultés à envisager un contexte réaliste. Nous avons finalement retenu la version suivante du même problème mathématique pour la session 2010-2011.

*Le problème de la banquise : En Antarctique, une base de scientifiques est en panne de carburant. La base la plus proche est située à 1 000 km et peut se permettre de leur céder 3 000 litres de carburant pour les dépanner. Dans cette deuxième base, ils disposent d'un véhicule pouvant transporter au maximum 1 000 litres. Du carburant peut être déposé en chemin. Ce véhicule consomme 1 litre par kilomètre parcouru sur la banquise. Quelle quantité de carburant ce véhicule pourra-t-il acheminer à la base scientifique ? (IREM de Montpellier, Groupe ResCo, 2010-2011)*

## Conclusion

Dans le cadre du dispositif de résolution collaborative, en partant d'une situation posée dans un contexte non mathématique, les échanges de questions-réponses permettent aux élèves de faire des choix et de créer des problèmes mathématiques. Ils sont amenés à résoudre des sous-problèmes. Les solutions trouvées sont liées aux choix initiaux ; elles peuvent être partielles ou incomplètes, mais valorisent leurs démarches. Les élèves sont les seuls responsables de ce qu'ils produisent, le professeur ayant la responsabilité de garantir (au final seulement) la validité des solutions proposées, ou de relancer la recherche si les élèves se sont mis d'accord sur des solutions incorrectes du point de vue mathématique.

Au cours de la recherche, des allers-retours entre objets réels et objets mathématiques sont l'occasion d'aborder un autre aspect de la discipline et de modifier sa représentation chez les élèves.

La recherche collaborative s'achève souvent sur les solutions du problème mathématique ; il serait intéressant de confronter ces solutions à la réalité (ce qui n'a pas été possible dans le temps imparti pour les problèmes de l'artiste ou de la banquise), mais cela engendrerait une complexification de l'organisation et contribuerait à le rendre plus chronophage. Cet aspect du travail est donc laissé à la discrétion du professeur. Une classe de Rouen ayant participé à la recherche en 2009-2010 a par exemple produit un « Cahier de l'artiste » (dont est extraite la figure 2).

Lors de la rencontre du 14 juin 2011, il a été dit que « le professeur doit réfléchir aux problèmes posés par la modélisation des situations ». Nous ajoutons qu'il doit également penser à mettre en place des dispositifs qui offrent des conditions favorables au travail de mathématisation.

### Éléments de bibliographie


Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : Scéren CRDP de Lyon

Ray, B. (2009). La résolution collaborative de problèmes au collège et au lycée, une initiation à la recherche dynamique, collective et originale. *Mathématice n° 14*. Disponible sur Internet : http://revue.sesamath.net/spip.php?article206 (consulté le 10 juin 2011).


16L'un des très rares manuels proposant de véritables problèmes ouverts

Sauter, M. (2008). Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. *REPERES IREM n° 72*. Disponible sur Internet : http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/72_article_487.pdf (consulté le 10 juin 2011).

CD-Rom *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM*. Disponible sur Internet : http://eductice.inrp.fr/EducTice/all-parutions/conception-collaborative-de-ressources-pour-lenseignement-des-mathematiques-lexperience-du-sfodem (consulté le 10 juin 2011).

*La feuille à problèmes,* IREM de Lyon http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/

Site de résolution collaborative : http://www.irem.univ-montp2.fr/SPIP/Resolution-collaborative-de,96

# *Communications*

## Thème 4 :
## Quels outils technologiques pour appuyer les processus d'enrichissement des ressources ?

# Le traitement des expressions mathématiques dans tous les contextes avec epsilonwriter

**Jean-François Nicaud, Christophe Viudez**

*ARISTOD*
*217 rue de Paris*
*91120 Palaiseau*
*jeanfrancois.nicaud@laposte.net*
*cviudez@free.fr*

*RÉSUMÉ : Nous présentons les principales fonctionnalités de l'application epsilonwriter qui est utilisable sur le portail [http://epsilonwriter.com](http://epsilonwriter.com). C'est un éditeur de texte et de formules qui a été développé en premier lieu pour faciliter la saisie et la modification des formules au sein d'un document. Il permet de rédiger des notes de cours, des fiches d'exercices, des pages web, des messages électroniques et des sujets de forums. epsilonwriter comporte aussi des fonctionnalités de questionnaires (mode auteur et mode élève) : des QCM avec de belles formules ; des questions à réponses mathématiques ouvertes évaluées par un mécanisme mathématique paramétré par l'auteur. Les questionnaires peuvent être produits pour l'autoformation ou pour la formation tutorée à distance.*

*ABSTRACT: We present the main functionalities of the epsilonwriter application which can be used on the portal [http://epsilonwriter.com](http://epsilonwriter.com). It is a text and formulae editor which has been firstly developed in order to facilitate the input and the modification of formulae inside a document. It allows writing class notes, exercise sheets, web pages, emails and forum subjects. epsilonwriter also contains questionnaire functionalities (author mode and student mode): multiple choices with pretty formulae and questions with open mathematical answers which are evaluated by a mathematical mechanism chosen by the author. Questionnaires can be produced for self-training or tutored and distance training.*

MOTS-CLÉS : *formule, équation, éditeur, questionnaire, email, forum, QCM, réponse mathématique ouverte.*

KEYWORDS: *formula, equation, editor, questionnaire, email, forum, multiple choices, open mathematical answer.*

## Introduction

Le traitement informatique des formules mathématiques est très en retard par rapport aux autres objets fondamentaux de l'informatique que sont le texte et les images. Contrairement à eux, en dehors des traitements de texte, la plupart des logiciels généraux (navigateurs, logiciels d'email, de forum, de chat) les affichent seulement après qu'elles aient été transformées en images. La qualité n'est pas très bonne et le résultat n'est plus éditable. Quelques navigateurs sont toutefois capables de les afficher à partir de représentations MathML, ce qui fournit une présentation de bonne qualité. Les logiciels de traitement de texte, quant à eux, les traitent, pour certains, de façon non WYSIWYG (What You See Is What You Get) et, pour les autres, de façon peu fluide. Dans [Nicaud 2007], le lecteur trouvera des principes pour une édition fluide dite « naturelle » des formules.

Le projet epsilonwriter de la société Aristod (start-up de l'Université Joseph-Fourier) a porté initialement sur un éditeur fluide de texte et de formules [Nicaud & Viudez 2009] pour différents contextes, dont le courrier électronique. Il s'est complété ensuite par le traitement de questionnaires en mode auteur et en mode élève : des QCM, comme on en rencontre beaucoup, mais avec une grande facilité pour y insérer des formules bien présentées ; des questions à réponses mathématiques ouvertes avec un contrôle mathématique, comme on en rencontre très peu.

Le logiciel epsilonwriter et le portail http://epsilonwriter.com, qui sont les mises en œuvre actuelles du projet, sont décrits brièvement ci-dessous. Les prochains développements du projet sont indiqués ensuite.

## 1. Un éditeur « math & formules » intuitif et souple

epsilonwriter permet de saisir et modifier de façon fluide le texte et les formules. La frappe de « 2/3 » produit directement une fraction par défaut, il n'y a pas besoin d'ouvrir une fenêtre auxiliaire pour saisir ou modifier une formule.

Les actions dans epsilonwriter (frappe d'une touche, clic sur un bouton, coller, etc.) conduisent souvent à des propositions multiples qui sont présentées dans un popup (menu surgissant).

Les opérateurs (racine carrée, vecteur, intégrale, etc.) peuvent être entrés de trois façons : (1) avec un bouton, (2) en frappant une suite de caractères qui les représente (par exemple : « vect » pour vecteur, « -> » pour une flèche, « ( » pour parenthèses, coefficient du binôme et matrice), (3) en frappant le début du nom Latex de l'opérateur, cf. figure 1.

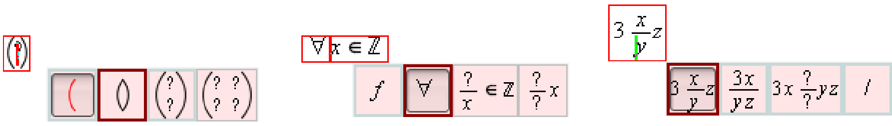


***Figure 1.*** *A gauche, les propositions après la frappe de « ( ». Au milieu, les propositions pour la frappe de \f devant x dans [illegible]début des commandes Latex \forall et de \f). A droite, les propositions pour la frappe de « / » après x dans 3xyz.*

La souplesse d'epsilonwriter se décline de plusieurs façons. C'est, par exemple, la possibilité de supprimer le dénominateur d'une fraction en conservant le numérateur, ou encore d'ajouter ou d'enlever une partie haute ou basse à $\int$ ou $\sum$, ce que les éditeurs d'équations ne permettent pas.

Coller ou déposer une formule dans une autre se fait avec un opérateur choisi par l'utilisateur dans un popup. Le glisser-déposer permet de faire des petits calculs. Ainsi, si dans 5x=2x-4 on fait un glisser-déposer de 2x vers la gauche de « = » et si l'on dépose avec « - » (choix dans le popup), on obtient 5x-2x=-4. Coller sur une sous-formule sélectionnée est réalisé comme une substitution mathématique. Dans un système d'équations contenant x=y-2z+5, on peut copier y-2z+5 puis sélectionner x dans les autres équations et « coller » pour faire les substitutions de x par y-2z+5 (des parenthèses apparaissent autour de y-2z+5 quand cela est nécessaire). Ces manipulations peuvent en particulier servir à rédiger des corrections.

## 2. Des remplacements mathématiques et des calculs

Chercher-remplacer dans epsilonwriter permet aussi de faire des substitutions mathématiques. Ainsi, la substitution x=y-2z+5 peut s'appliquer à un système (ou à toute autre formule) en entrant x dans la fenêtre « Rechercher », y-2z+5 dans la fenêtre « Remplacer par » et en utilisant les boutons « Chercher » et « Remplacer ». Chercher-remplacer fonctionne aussi « avec modèle » : des variables dites de modèle ou d'unification, représentées dans un cercle, permettent de demander une unification avec une sous-expression au lieu d'une correspondance directe, voir figure 2.

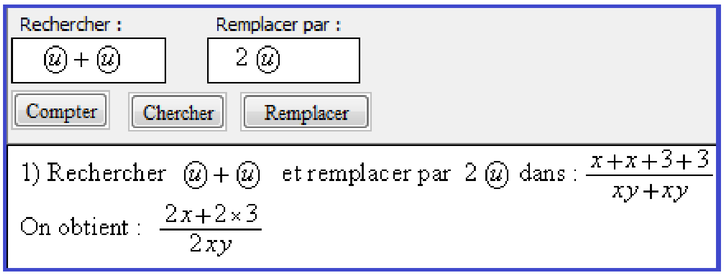



***Figure 2.*** *Trois remplacements de u+u par 2u, u étant une variable d'unification dans un chercher-remplacer aussi « avec modèle »*

Des fonctions de calcul numérique ont été implantées dans le logiciel. Elles permettent actuellement d'effectuer des calculs numériques exacts sur les entiers, les décimaux, ou les rationnels pour certains opérateurs et des calculs approchés, voir figure 3. Ces calculs seront étendus dans les prochaines versions.

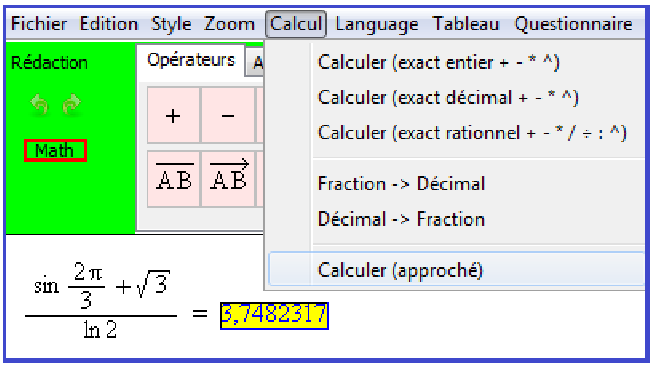



***Figure 3**. Exemple de calcul approché. La fraction a été sélectionnée puis le calcul approché a été demandé.*

### 3. Les questionnaires

Les questionnaires ont fait l'objet de soins particuliers dans epsilonwriter. L'objectif a été de mettre à la disposition des auteurs un outil simple pour rédiger aussi bien des QCM que des questions à réponses mathématiques ouvertes. Les figures 4 et 5 fournissent des exemples de ces deux types de questions en mode élève.

☒ $\forall x \in [-1\,;1]\ ,\ \sin(\arcsin x) = x$

☒ $\forall x \in [-1\,;1]\ ,\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

☐ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

☐ $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \arctan(\sin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

☒ $\forall x \in ]-1\,;1[\ ,\ \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

***Figure 4**. Exemple de QCM avec cases à cocher.*

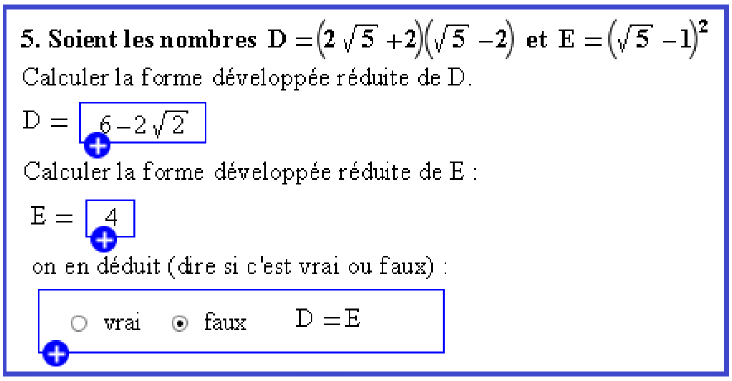



***Figure 5.*** *Exemple comportant deux réponses mathématiques ouvertes et un QCM avec boutons radio vrai-faux. L'élève est ici on mode auto-formation, les boutons « + » lui permettant de passer en évaluation de sa réponse pour voir si sa réponse est correcte et lire le corrigé si l'auteur en a rédigé un.*

Les questions à réponses mathématiques ouvertes sont des objets assez peu traités actuellement. Quand elles le sont, c'est souvent de façon trop syntaxique (seule la forme exacte de la réponse attendue est acceptée) ou à l'inverse trop sémantique (n'importe quelle expression équivalente à la réponse attendue est acceptée). Dans epsilonwriter, l'auteur fournit la réponse attendue et choisit un mode de comparaison entre la réponse de l'élève et la réponse attendue. Il y a actuellement 7 modes de comparaison qui permettent de mettre ou non en jeu l'associativité, la commutativité, les calculs sur les entiers, décimaux ou rationnels. Ces modes seront étendus dans les versions ultérieures. Epsilonwriter permet aussi de fournir plusieurs réponses attendues. Ainsi, on peut fournir la réponse *„-2.-2.* avec le score 2 et la réponse *,1-,-2..* avec le score 1,5.

Les questionnaires peuvent être conçu pour de l'autoformation ou de la formation tutorée. Dans le cas de l'autoformation, l'auteur rédige des éléments de correction qui apparaissent lorsque l'élève passe en évaluation de la question, voir figure 6. L'élève qui ne sait pas traiter la question peut ainsi s'efforcer de comprendre le corrigé. Il peut refaire le questionnaire ultérieurement pour vérifier qu'il a bien assimilé les connaissances ou savoir-faire concernés.

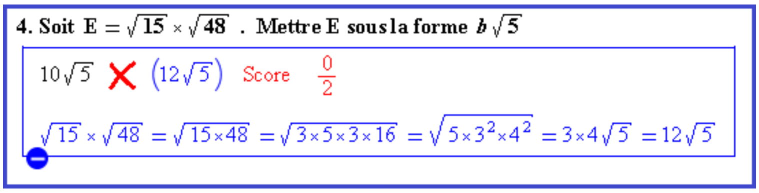



***Figure 6.*** *Après avoir répondu à la question, l'élève a cliqué sur le bouton « + ». Il voit alors sa réponse, son évaluation (symbole pour correct ou erreur), la réponse attendue et son score. Les éléments de correction sont affichés en dessous.*

Dans le cas de la formation tutorée, l'élève ne peut pas passer en correction. Après avoir rempli le questionnaire, il doit l'envoyer à son tuteur qui va mettre des annotations et éventuellement modifier les scores automatiques des questions à réponses mathématiques ouvertes.

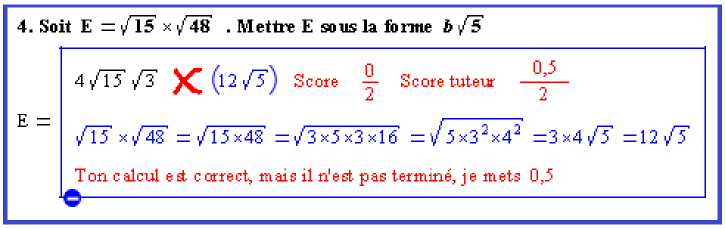



***Figure 7.*** *Le tuteur a reçu le questionnaire rempli par l'élève. Il a modifié le score de la question et a écrit un commentaire (en rouge). Il a renvoyé le questionnaire à l'élève qui est ici en train de le lire.*

C'est la même application qui permet aux auteurs de rédiger des questionnaires et aux élèves d'y répondre. Quand l'auteur a terminé la rédaction de son questionnaire, il l'enregistre en code source pour pouvoir le reprendre ultérieurement puis il l'enregistre en mode « question » pour l'autoformation ou en mode « test » avec mot de passe pour la formation tutorée.

## 4. Les contextes d'utilisation

Le portail http://epsilonwriter.com permet d'utiliser librement, pour usage non commercial, l'applet epsilonwriter dans différents contextes. Outre un manuel d'utilisation, il comporte des tutoriels interactifs permettant d'avoir un aperçu rapide « dans l'action » des principales fonctionnalités d'epsilonwriter.

Il est d'abord possible d'utiliser l'applet comme une application qui lit et enregistre des fichiers sur l'ordinateur. On peut rédiger des notes de cours, des fichiers d'exercices, des questionnaires. Ces fichiers peuvent être échangés comme tous les autres fichiers. Il est possible d'imprimer les documents et de les exporter en HTML avec des images remplaçant les formules ou en XHTML avec les formules représentées en MathML (les exports ne conviennent pas pour les questionnaires car les documents obtenus ne sont pas interactifs).

Le portail permet aussi de rédiger des emails. Depuis l'éditeur, il suffit de choisir le menu « Envoyer » et d'entrer ou de coller les adresses électroniques de destinataires pour leur envoyer un message qui est reçu dans une belle présentation, voir figure 8. Le portail permet aussi de discuter dans des forums.

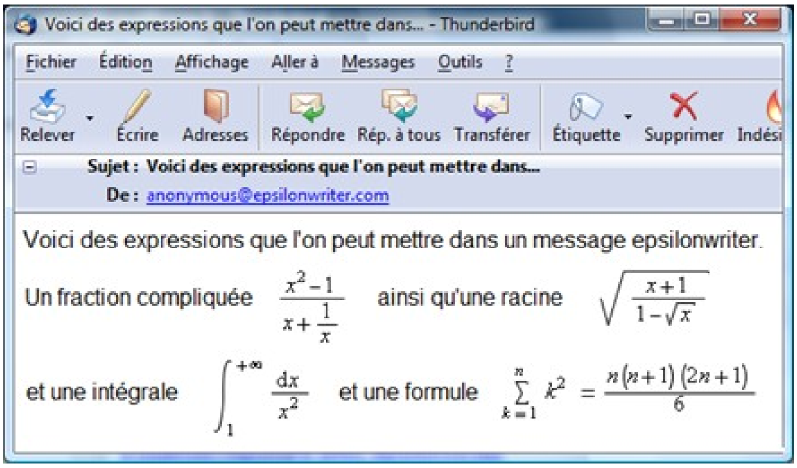



***Figure 8****. Message reçu dans un logiciel de courrier électronique.*

Le portail permet enfin de stocker des documents epsilonwriter et d'obtenir des liens à placer dans des documents, des pages web ou des emails.

## 5. Les prochains développements

De nombreux développements sont prévus pour enrichir l'outil epsilonwriter et ses usages.

Une application epsilonwriter sera disponible à l'été 2011. Elle aura les mêmes fonctionnalités que l'applet et l'avantage de fonctionner hors-ligne. Elle sera plus confortable, n'ayant pas une fenêtre dans une fenêtre. Cette application sera payante.

Un « chat » sera aussi disponible vers l'été 2011. Il sera gratuit.

Un site web pour permettre aux auteurs de déposer leur questionnaires, afin qu'ils soient accessibles gratuitement, sera mis en place vers la fin 2011.

Pour ce qui concerne les évolutions de l'éditeur :

- Des questions sans notation seront ajoutées pour les situations où il n'y a pas de réponse attendue
- Des arbres et des représentations graphiques de fonctions seront ajoutés
- Les calculs internes seront étendus : calculs polynomiaux, résolutions de certaines équations et de certains systèmes
- Une connexion à un calcul formel sera réalisée
- Il est prévu de mettre en œuvre la rédaction simultanée de documents par plusieurs utilisateurs.
- Enfin un fonctionnement par entrées vocales devrait être ajouté.

**Bibliographie**

Nicaud, J.F. (2007). Natural Editing of Algebraic Expressions. In proceedings of the MathUI workshop, Linz, Austria, 2007. http://www.activemath.org/workshops/MathUI/07/

Nicaud, J.F., Viudez, C. (2009). epsilonwriter: implementing new ideas for typing text and math. The MathUI workshop 2009. Grand Bend, Ontario, Canada. http://www.activemath.org/workshops/MathUI/09/proc/Nicaud-Vuidez-EpsilonWriter-MathUI09.pdf

# AlNuSet

## Un système pour l'approche de l'algèbre


**Pedemonte Bettina**

*DiDiMa srl – ITD (CNR)*
*6, Via De Marini*
*16149 Genova*
*pedemonte@itd.cnr.it*



*RÉSUMÉ : De nombreuses recherches montrent que la didactique actuelle de l'algèbre dans l'enseignement secondaire n'est pas complètement capable de développer les compétences nécessaires pour maitriser cette discipline. Les significations des concepts algébriques (variable, paramètre, expressions, etc.) ainsi que la signification des techniques utilisées dans la transformation algébrique restent souvent cachées aux élèves. Cet article présente un logiciel didactique, AlNuSet (Algebra of Numerical Sets), développé pour améliorer l'apprentissage de l'algèbre dans l'enseignement secondaire. AlNuSet peut être utilisé pour travailler des notions d'algèbre et plus spécifiquement des notions para-mathématiques et proto-mathématiques dans l'enseignement traditionnel de l'algèbre. Dans cet article, AlNuSet est analysé selon ce point de vue.*

*ABSTRACT: There are a meny researches studies showing that the current didactics of algebra in the secondary school is not able to develop the necessary skills to manage this discipline. The meanings of algebraic concepts (variable, parameter, expression, etc.) and of techniques used in the algebraic transformation are often hidden to students. This article presents an educational software, AlNuSet (Algebra of Numerical Sets), developed to improve the teaching and learning of Algebra at secondary school. AlNuSet can be used to perform a specific didactic based on mathematical notions but also on proto-mathematics and para-mathematics notions of Algebra. In this article AlNuSet is analyzed from this point of view.*



MOTS-CLÉS : *AlNuSet, algèbre, notions para-mathématiques et proto-mathématiques*

*KEYWORDS: AlNuSet, Algebra, proto-mathematics and para-mathematics notions*

## Introduction

Comme le montrent les erreurs commises par une majorité d'élèves, il est désormais bien établi que la didactique actuelle de l'algèbre dans l'enseignement secondaire n'est pas complètement capable de développer les compétences et les formes de contrôles nécessaires pour maitriser ce domaine mathématique.

L'algèbre n'est pas traitée dans la classe comme une théorie mathématique capable d'exprimer des relations complexes qui sont ensuite utilisées dans d'autres domaines mathématiques (Analytique, Trigonométrie, Analyse, etc.). L'algèbre est souvent considérée comme un corpus de règles et procédures pour manipuler des symboles. Elle est enseignée et apprise comme un langage en mettant en avant les aspects syntaxiques. La signification des objets algébriques (variable, paramètre...) reste cachée aux élèves ainsi que la connexion entre l'application d'une règle et sa signification dans une transformation algébrique. En général, les élèves sont capables de développer des expressions ou de résoudre des équations complexes, ainsi que d'effectuer des algorithmes pour le calcul avec les techniques de manipulation algébrique. Cependant, ils ne sont pas capables de justifier les techniques qu'ils utilisent dans la manipulation ou de comprendre ce qu'ils font quand ils traitent avec les symboles algébriques. Par exemple, il y a un grand nombre d'élèves qui ne savent pas que la valeur de x que l'on trouve en résolvant une équation rend vraie l'égalité de départ.

Dans cet article nous présentons un logiciel, AlNuSet, qui a été développé pour rénover la didactique de l'algèbre. AlNuSet permet de donner des significations aux symboles algébriques et aux techniques de manipulation algébriques. C'est un outil pour l'enseignant parce qu'il permet de proposer aux élèves des activités nouvelles et non répétitives où les notions algébriques sont abordées de façon complètement différente par rapport à la didactique usuelle. L'objectif de cet article est de montrer, à travers des exemples d'utilisation d'AlNuSet, une approche nouvelle de l'algèbre.

## 1. Une nouvelle approche de l'algèbre à travers l'enseignement des notions para-mathématiques et proto-mathématiques

Pour expliquer les difficultés auxquelles les élèves doivent faire face quand ils approchent l'algèbre dans la didactique usuelle, nous utilisons la terminologie de Chevallard (1985). Nous observons que seulement une partie des notions enseignées en algèbre sont des notions mathématiques. On peut effectuer des enseignements spécifiques sur ces notions parce qu'elles ont des définitions précises accessibles aux élèves, dont on peut démontrer les propriétés et préciser les modalités d'utilisation.

Cependant, dans l'enseignement de l'algèbre, on identifie également des notions para-mathématiques et proto-mathématiques. Les notions para-mathématiques ont des noms spécifiques que les élèves doivent apprendre pendant l'activité d'enseignement mais une didactique spécifique sur ces notions n'est pas effectuée (ex. variable, paramètre, inconnue, quantificateurs universel et existentiel, expression algébrique, valeur de vérité d'une proposition…). Les notions proto-mathématiques, par contre, n'ont pas un nom ou une définition ; elles vivent dans la pratique, et souvent ne sont même pas perçues pendant l'activité mathématique de l'élève (ex. comprendre ce qu'il faut faire et ce qu'il convient faire dans une manipulation…). Le développement des notions para-mathématiques et proto-mathématiques peut être très important pour pouvoir contrôler complètement l'activité algébrique car c'est peut-être à travers ces notions que les élèves peuvent construire des signifiés aux concepts et aux règles algébriques.

## 2. AlNuSet et ses environnements

Un grand nombre d'outils technologiques ont été proposés pour supporter une didactique de l'algèbre à l'école. Cependant, les outils actuellement commercialisés sont essentiellement des CAS ou des tutoriels, développés pour supporter des compétences formelles dans le domaine algébrique. Ils sont très utiles pour l'apprentissage des techniques de manipulation mais peu efficaces pour supporter une didactique orientée vers la compréhension des signifiés des symboles algébriques.

Le système AlNuSet, (www.alnuset.com) réalisé dans le cadre du projet européen ReMath (IST-4-26751), est un logiciel qui peut être utilisé pour effectuer une didactique directe et spécifique sur des notions qui vivent comme des notions para-mathématiques et proto-mathématiques dans l'enseignement traditionnel de l'algèbre. Pour cette raison AlNuSet peut rénover profondément la pratique didactique de l'algèbre.

Il est composé de trois environnements interdépendants: la *Droite Algébrique*, le *Manipulateur Algébrique*, les *Fonctions*. Dans la suite nous montrerons à travers des exemples certaines fonctionnalités didactiques de ces trois environnements pour montrer comment ils peuvent être exploités pour le développement de notions para-mathématiques et proto-mathématiques de l'algèbre.

### *2.1. La Droite Algébrique*

La Droite Algébrique d'AlNuSet permet d'opérer avec des expressions, polynômes et propositions algébriques à travers une approche dynamique. Dans cet environnement, une lettre, par exemple la lettre x, est un objet concret ; une fois qu'elle est éditée elle est associée à un point (une valeur) qui peut être déplacé sur la droite.

Toute expression algébrique éditée dans cet environnement (et définie dans l'ensemble numérique où l'on est en train de travailler) est associée automatiquement à un point sur la droite dont la position change par rapport à la position de la variable indépendante. Il est important de souligner que l'expression ne peut pas être déplacée directement sur la droite par la souris. Son déplacement est déterminé par celui de la variable indépendante. Cette caractéristique peut être facilement exploitée pour donner du sens à la notion para-mathématique de « variable ».

En déplaçant *x* sur la droite l'élève fait expérience de ce que signifie variable et expression algébrique car le mouvement de x détermine aussi le mouvement des expressions qui sont associés à *x*.


**Figure 1.** *L'expression 2x+1 dépend de la valeur de x. Le déplacement de x sur la droite détermine le déplacement de l'expression associée.*

Sur la Droite Algébrique, il est aussi possible de traiter les propositions algébriques et en particulier les notions d'identité et d'équation, à travers une didactique complètement nouvelle.

Sur la droite, deux expressions sont équivalentes si elles sont associées à un même point au cours du déplacement de la variable dont elles dépendent. Imaginons d'éditer sur la droite les expressions $2x+3x$, $5x$ et $2x+3$. En déplaçant la variable x sur la droite on peut observer que les expressions algébriques qui composent l'identité ($2x+3x=5x$) sont toujours associées à un même point pendant le déplacement de la variable *x* sur la droite. Au contraire, les expressions qui composent l'équation ($2x+3=5x$) sont associées à un même point sur la droite algébrique seulement pour certaines valeurs de la variable (les solutions de l'équation).

En outre, chaque égalité, dès qu'elle est éditée, est associée à une marque colorée correspondant à sa valeur de vérité. La couleur de cette marque met en évidence la vérité de l'identité pour toutes les valeurs de la variable pendant le déplacement ; elle met en évidence la vérité de l'équation seulement pour certaines valeurs de la variable.

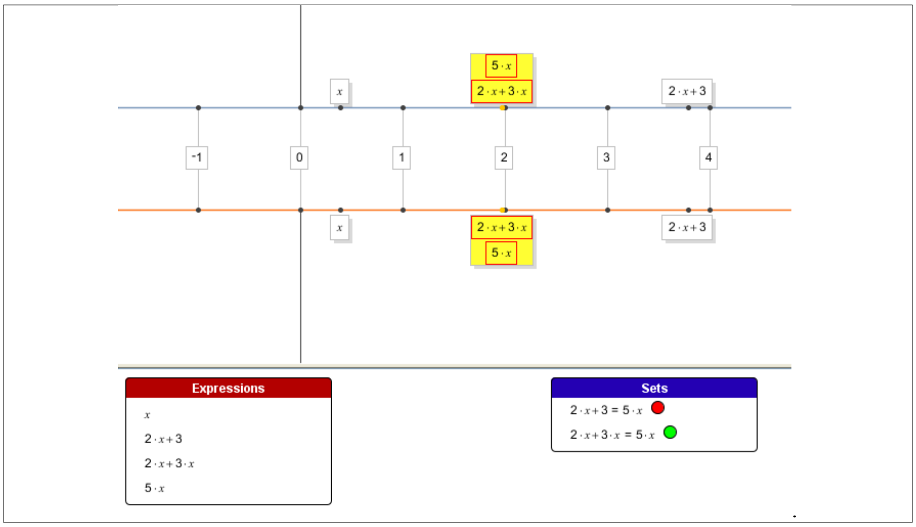



**Figure 2.** *Les expressions 2x+3x et 5x sont équivalents comme le montre par le post-it jaune et la couleur verte associée à l'identité 2x+3x=5x. Les expressions 2x+3x et 5x sont égales pour certaines valeurs de x. Seulement quand x est placé sur 1 la couleur associée à l'égalité 2x+3=5x devient verte.*

A travers la droite algébrique, il est donc possible d'effectuer une didactique sur des notions qui habituellement sont considérées comme para-mathématiques, (par exemple variable, expression, équation et identité).

### *2.2. Fonction*

Dans l'environnement Fonction d'AlNuSet, le lien fonctionnel à une dimension sur la droite algébrique entre variable et expression est mis en relation avec celui à deux dimensions dans le plan Cartésien. Ici, de façon automatique, le graphe de l'expression est représenté par rapport à la valeur de la variable. En déplaçant la variable sur la droite algébrique, on peut observer que l'expression associée est déplacée sur la droite et, en même temps, le point correspondant au graphe de l'expression dans le plan cartésien est déplacé sur la fonction associée.

Ces phénomènes peuvent être mis en relation entre eux et ils peuvent améliorer la lecture et l'interprétation des graphes dans le plan cartésien ainsi que développer de nombreuses notions concernant les fonctions algébriques.

Considérons par exemple l'expression $ax^2$. Si on construit la fonction ayant $x$ comme variable on obtient une parabole. En déplaçant $x$ sur la droite on observe que le point sur le graphe associé à la variable est déplacé sur la fonction de façon correspondante. Par contre, si on déplace la lettre $a$ sur la droite, on observe que la concavité de la parabole change. Cela permet de faire une expérience directe sur la différence entre variable et paramètre.

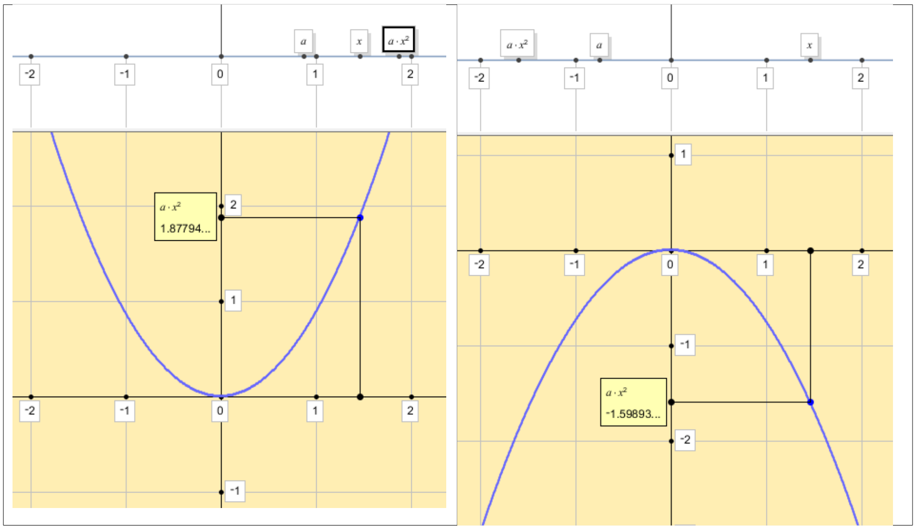



**Figure 3.** *La fonction $ax^2$ selon la valeur du paramètre a.*

Nous invitons le lecteur à imaginer de construire le graphe de l'expression $ax^2$ en considérant $a$ comme variable et $x$ comme paramètre. La notion para-mathématique « paramètre » si difficile à faire comprendre aux élèves peut être expérimentée par les élèves en rendant visible et palpable la différence entre variable et paramètre.

### *2.3. Le Manipulateur Algébrique*

Le Manipulateur Algébrique d'AlNuSet a été conçu pour aborder le traitement algébrique en suivant une prospective axiomatique et déductive. Le Manipulateur rend disponible, via l'interface, un ensemble de commandes qui correspondent aux propriétés de base des opérations, aux propriétés des égalités et inégalités entre expressions algébriques, et aux opérations logiques de base entre propositions et ensembles. Tant qu'aucune sous-expression n'est sélectionnée, les commandes pour le traitement ne sont pas actives.

Quand une sous-expression est sélectionnée pour effectuer une manipulation, les commandes de l'interface qui peuvent être appliquées à cette sous-expression sont activées automatiquement (en jaune).

Une fois qu'une commande active a été sélectionnée, le manipulateur transforme automatiquement l'expression en une autre équivalente.

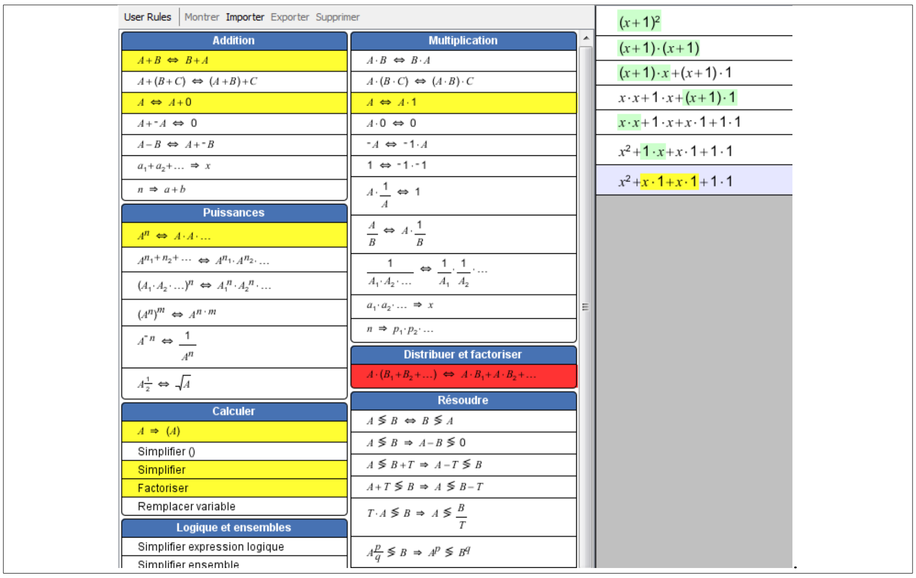



**Figure 4.** *L'expression $(x+1)^2$ doit être transformée en $x^2+2x+1$.*

Le logiciel permet aussi de créer de nouvelles règles, lorsqu'elles sont démontrées au moyen des commandes disponibles ; ces règles peuvent être enregistrées et inscrites comme commandes de l'interface et elles peuvent être utilisées dans les manipulations ultérieures.

Ces caractéristiques sont essentielles pour aborder une didactique des transformations algébriques selon l'approche axiomatico-déductive (Pedemonte, 2011). Cette approche est centrée sur l'usage de certains axiomes de base (propriétés des opérations) et la démonstration de règles de plus en plus complexes pour le calcul algébrique (théorèmes).

Cela permet de traiter des notions proto-mathématiques (comprendre ce qu'il faut faire et ce qu'il convient de faire dans une manipulation, ce qu'on peut considérer comme une démonstration algébrique) à travers une approche guidée où les règles et les axiomes qui sont utilisés apparaissent de façon explicite à l'utilisateur.

## Discussion

Considérons l'activité suivante qui a été proposée par l'enseignant à une classe de seconde pendant une expérimentation avec AlNuSet.

L'enseignant demande à un élève d'effectuer le calcul suivant: « *Pense à un nombre, double le, ajoute 6, divise le résultat par 2 et enlève le nombre que tu as pensé au début* ». L'enseignant dit : « *Le résultat est 3* ». L'enseignant propose l'exercice à deux autres élèves en changeant le nombre à rajouter. Elle devine les résultats. A la fin elle propose l'exercice suivant: « *Si x est le nombre initial, et a est le nombre à rajouter, écris une expression pour traduire le calcul. Représente l'expression sur la droite. Qu'observe-t-on si on déplace x? Qu'observe-t-on si on déplace a? Quelle est la valeur de l'expression?* ».

L'enseignant demande de construire l'expression : $\frac{2*x+a}{2}-x$

Evidemment l'enseignant est capable de deviner le résultat de l'expression car cette expression ne dépend pas de la variable $x$ (le nombre que l'élève pense) mais elle dépend simplement du paramètre $a$ (le nombre que l'enseignant demande de rajouter). Si on transforme l'expression, on observe que son résultat ($a/2$) est toujours la moitié de $a$. En effet, en éditant l'expression requise par l'enseignant sur la droite algébrique on observe que si on déplace $x$ l'expression ne bouge pas alors que si on déplace $a$ l'expression est toujours positionnée sur le point qui représente la moitié de $a$. Une fois que les élèves ont compris pourquoi l'enseignant peut deviner le résultat ils vont dans le manipulateur pour démontrer que l'expression est égale à $a/2$.

Cette activité est un exemple, qui montre comment AlNuSet permet aux enseignants de proposer des activités nouvelles et non répétitives qui peuvent donner du sens aux activités algébriques. Egalement, cette activité permet aux élèves d'accomplir des expériences concrètes à propos de notions algébriques qui, dans la pratique ordinaire, présentent une nature para-mathématique ou proto-mathématique.

### *Bibliographie*


Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique* (1991). Grenoble : La Pensée sauvage

Pedemonte B. (2011) Conjecturing and proving in AlNuSet *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 7,* Rzeszów, Poland.

# Introducción a profesores de matemáticas de niveles de secundaria y bachillerato a paradigmas pedagógicos digitales

## Introduction à des enseignants de mathématiques du second degré du Mexique à des paradigmes pédagogiques numériques

**Elisabet Rodríguez Vidal* Ana Isabel Sacristán****

*Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN*
*Av. Instituto Politécnico Nacional 2508,*
*07360 México, D.F., Mexique*
**lis.rodriguez.vidal@gmail.com **asacrist@cinvestav.mx*

*RÉSUMÉ : La recherche que je présente ici, a comme but connaître l'utilisation de ressources numériques par des professeurs de mathématiques d'une région du Mexique (Puebla), tant sur eux-mêmes, comme sur leur pratique d'enseignement, pour après avoir pu concevoir et mis en pratique une séquence d'ateliers pour les rapprocher aux technologies numériques. Puis nous regardons comment les professeurs transforment leur pratique pédagogique, de la planification de leurs leçons, jusqu'à la mise en pratique des ressources numériques.*

*RESUMEN :. La investigación aquí presentada tiene como finalidad conocer el uso de tecnologías digitales por profesores de matemáticas de la región de Puebla, México, tanto en ellos mismos, como en su práctica docente, para después acercar a los profesores a estas tecnologías digitales mediante una serie de talleres. También se considera en los profesores un cambio en su labor docente, en la planeación de las clases, y en el desarrollo de las mismas.*

MOTS-CLÉS : *Ressources numériques, enseignement des mathématiques, formation des enseignants.*

*PALABRAS CLAVE : Tecnologías digitales, enseñanza de las matemáticas, formación de profesores.*

## Introducción y objetivos

En este documento se presentan avances de una investigación que buscaba ayudar a profesores de Secundaria y Bachillerato de la región de Puebla, México, a incorporar significativamente las tecnologías a su práctica docente y clases de matemáticas. Para ello fue necesario identificar características de la situación actual respecto al uso de las tecnologías digitales en profesores de estos niveles, tanto para sus clases de matemáticas como en su vida personal.

Posteriormente, se llevó a cabo una intervención didáctica, y luego se estudiaron algunos efectos de esta instrucción (e.g. la manera de utilizar y llevar a cabo las actividades propuestas en sus aulas y en su práctica docente).

Los objetivos de esta investigación son primero, identificar el uso que los profesores de matemáticas de Puebla hacen de las tecnologías digitales en su práctica docente, tanto en la preparación de actividades, como en sus clases; después introducir a dichos profesores en el uso de tecnologías digitales en sus clases de matemáticas, mediante una serie de talleres en los que se les dan a conocer algunas herramientas y actividades que ejemplifican su uso.

## 1. Antecedentes

En el mundo actual, el uso de las tecnologías digitales ha crecido en la población, permeando casi todo aspecto de la vida cotidiana, sobre todo en la población joven. Resultaría por lo tanto de gran importancia que la introducción de tecnologías en las instituciones educativas tuviera la misma acogida que en la sociedad y se diera con la misma rapidez. De hecho, la Secretaría de Educación Pública (SEP), autoridad educativa en México, pide la integración de tecnologías digitales en las aulas.

### *1.1. Requisitos de SEP*

El Plan y Programa de Estudio de Educación Secundaria vigente que establece la SEP (Acuerdo 384, SEP, 2006) registra en una de sus características, el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en la enseñanza, para que los alumnos:

> desarrollen habilidades clave como el pensamiento lógico, la resolución de problemas y el análisis de datos al utilizar paquetes de graficación, hojas de cálculo y manipuladores simbólicos; manejen y analicen configuraciones geométricas a través de paquetes de geometría dinámica; exploren y analicen fenómenos del mundo físico y social, al representarlos y operar sus variables con paquetes de simulación, modelación, graficación y bases de datos (SEP, 2006, p. 33).

Asimismo, para los docentes que imparten educación media superior (Acuerdo 447.II.Art.4, SEP, 2008, p. 3) se señala entre los atributos de las competencias docentes, que el profesor debe ser alguien que:

- Utiliza la tecnología de la información y la comunicación con una aplicación didáctica y estratégica en distintos ambientes de aprendizaje.
- Propicia la utilización de la tecnología de la información y la comunicación por parte de los estudiantes para obtener, procesar e interpretar información, así como para expresar ideas.

Incluso desde antes de dichos acuerdos, la SEP ha realizado diversos intentos por impulsar en México programas de integración de las tecnologías en las aulas. Un ejemplo de ello es el caso del programa EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología) que inició en 1997 (y aún vigente en algunas regiones del país) y que intentó poner en práctica un modelo constructivista de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través del uso de las tecnologías digitales. Más adelante se describe dicho programa ya que parte de nuestro trabajo se basó en él.

Aunque SEP establece en sus programas de estudio la integración de tecnologías digitales en el aula, he observado que pocos profesores de matemáticas utilizan regularmente estas tecnologías en sus aulas, ni es utilizada por sus alumnos en clase. Esto me motivó a realizar una investigación-acción para ayudar a los profesores de mi zona, como se describe a continuación.

## 2. Diseño y descripción del trabajo y de algunos resultados

Por lo tanto, para ayudar a remediar un poco dicha situación, se quiso hacer una intervención didáctica (como se explicó en la introducción) y para ello, como ya se señaló, era necesario conocer la situación en la que se encuentran profesores de la zona respecto al uso de tecnologías. Para esta parte diagnóstica, se aplicaron encuestas a algunos profesores en servicio, para conocer la familiaridad que ellos tenían con las tecnologías digitales y con software específico para clases de matemáticas, y el uso que dan de estas tecnologías, tanto desde el punto de vista personal, como para la preparación de sus clases, o el uso directamente en sus aulas.

### *2.1. Las encuestas*

En un primer modelo de encuesta se solicitaron datos sobre la edad, y formación y experiencia profesional de los profesores, así como indagar sobre las herramientas tecnológicas que conocen, su apreciación de la utilidad de ellas, y el posible uso que les dan. Esta primera encuesta se aplicó a 62 profesores; en ella, los profesores sí dicen conocer algunos recursos como las hojas de cálculo (54 profesores) y la geometría dinámica (29 profesores). Sin embargo se muestra una utilización limitada de tecnologías digitales en el aula: sólo 23 profesores usan las hojas de cálculo y 11 profesores usan geometría dinámica en el aula; en la figura 1 se muestra una gráfica con los resultados de esta encuesta.

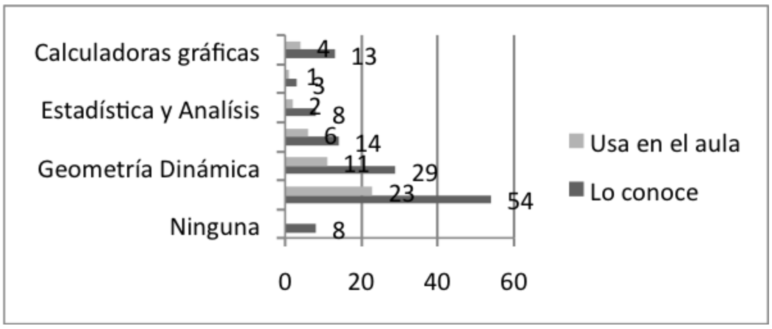



**Figura 1** *Resultados de la primera encuesta, aplicada a 62 profesores*

Los resultados arrojados por dicha encuesta, motivaron a rediseñarla y a aplicarla a un segundo grupo de profesores (algunos de los cuáles luego formarían parte del grupo con quien se realizó la intervención didáctica), profundizando en el tipo de recursos tecnológicos o software utilizados, así como solicitando ejemplos específicos de uso. Para ello se convocó a profesores de los niveles de Secundaria y Bachillerato a participar en esta segunda encuesta y en talleres posteriores para el uso de las tecnologías digitales en sus clases de matemáticas.

Los resultados de la encuesta ampliada (ver figura 2), aplicada a 51 profesores, mostraron que Internet y Excel son los recursos más populares para los profesores, pero sólo dicen ser utilizados por menos de la mitad de los profesores en sus clases de matemáticas en el aula, y muy pocos dicen dejar a los alumnos utilizarlas.

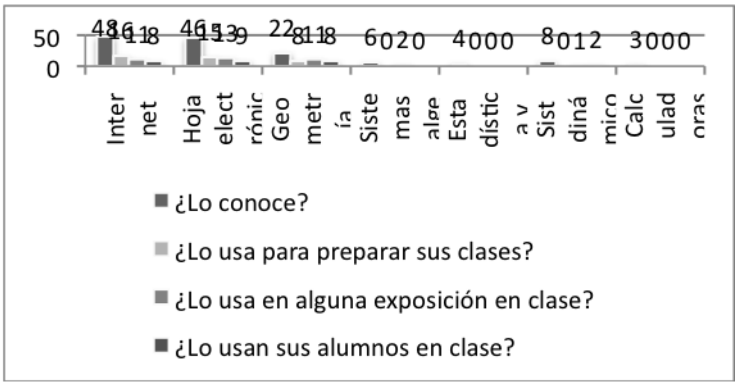



**Figura 2** *Resultados de la encuesta ampliada, aplicada a 51 profesores*

Con el fin de ampliar detalles sobre la utilización de tecnologías digitales en el aula con los alumnos, se realizaron entrevistas a los profesores (seis en total) que dieron ejemplos específicos de su uso en clase. De estas seis entrevistas, se obtuvo que las tecnologías digitales son utilizadas en el aula, sobre todo, para trazar gráficas y observar su comportamiento.

### *2.2. Una serie de talleres de formación para el uso de tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*

En base a los resultados de las encuestas y entrevistas, se planeó una serie de talleres para acercar a los profesores a estas tecnologías digitales y darles a conocer una forma de trabajo donde sus alumnos pudieran usar la tecnología para aprender conceptos matemáticos. La final de los talleres se realizaron entrevistas a los profesores participantes que aplicaron las actividades en sus aulas, así como videograbaciones de clases aplicando tecnologías digitales por alumnos. También se entrevistaron a algunos directivos de escuela; así como alumnos de un profesor que aplicó lo aprendido en los talleres con ellos.

Como metodología de trabajo durante los talleres, se quiso seguir un modelo de trabajo con tecnología que fuera constructivista y que fomentara la colaboración entre participantes (o alumnos). Por ello se eligió el modelo pedagógico EMAT que promueve actividades para descubrir e investigar conceptos matemáticos, así como una forma de trabajo en equipo, y que incluye hojas de trabajo con preguntas para reflexionar sobre los contenidos implícitos; además el modelo EMAT, a lo largo de una década ha mostrado resultados positivos (Sacristán & Rojano, 2009), tanto en profesores como en alumnos. A continuación se describe dicho modelo.

#### *Modelo pedagógico EMAT*

El modelo pedagógico EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología), según señala Ursini (2006, p.26),

> permite la creación de ambientes de aprendizaje que propician la expresión de ideas matemáticas, la formulación de hipótesis y el empleo de conceptos matemáticos para explorar situaciones, pretende enriquecer y facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

y tiene las siguientes características:

- Ambiente colaborativo de aprendizaje con los alumnos:

> A fin de fomentar el intercambio y la confrontación de ideas y así motivar al estudiante a organizar, reflexionar, defender y, cuando sea necesario, modificar sus ideas [...] lo que ayudaría al alumno a [...] escuchar y debatir los argumentos de los demás e ir reafirmando sus conocimientos matemáticos, así como ir adquiriendo conocimientos nuevos. (Ursini, 2006, p. 29, 30)

- El papel del profesor:

> Su función es observar con cuidado el trabajo de los equipos, contestar las preguntas o dudas que manifiestan los alumnos, hacer sugerencias y, cuando sea necesario, proponer posibles acercamientos que permitan resolver la tarea propuesta usando la tecnología. El profesor asume así el rol de mediador entre los alumnos y la herramienta computacional. (Ursini, 2006, p. 31)

- Hojas de trabajo; se utilizan para

> Presentar un problema de manera sucinta, recordar algún conocimiento previo que el alumno ya debía poseer, y formular preguntas, y a veces sugerencias, para que los alumnos empezaran a explorar el problema propuesto. Las preguntas guiarían al alumno a reflexionar acerca del problema planteado, a formular algunas hipótesis, a ponerlas a prueba usando la tecnología y explorar así posibles soluciones. (Ursini, 2006, p. 29)

Las principales herramientas utilizadas en el programa EMAT son la Hoja Electrónica de Cálculo (Excel), Geometría Dinámica con Cabri-Géomètre, Calculadoras Graficadoras (TI-92) y el lenguaje de programación Logo.

### *2.3. Organización de los talleres*

Usando EMAT se diseñó una serie de talleres. El software elegido para trabajar en los talleres fue parecido a las herramientas de EMAT: Hoja de Cálculo (Excel y Calc de OpenOffice), Geometría Dinámica (Geogebra) y Programación computacional (Lenguaje Logo) y la calculadora TI-Nspire. La elección de estos recursos se debió, por un lado a la facilidad de acceso e instalación de éstos, y por otro lado, a que estas tecnologías digitales permiten a los usuarios realizar construcciones, no sólo a seguir instrucciones.

Asimismo se usaron los materiales (actividades y ficheros) del Programa EMAT que utiliza esos recursos. La finalidad de utilizar tales materiales era que los profesores conocieran actividades concretas en los talleres, para trabajar posteriormente con sus alumnos en el aula usando tecnologías digitales. Los resultados encontrados hasta el momento, se describen en seguida.

### *2.4. Algunos resultados de los talleres*

Se realizaron videograbaciones de las sesiones de los talleres con los profesores, así como entrevistas con ellos en la parte final de estos talleres. Se recabaron algunos documentos de trabajo de profesores participantes, como planeaciones de clase. También se realizaron grabaciones de sesiones de clases de los profesores, después de los talleres, para observar algunas consecuencias en su labor docente.

Para realizar el análisis de los datos recabados se consideraron las categorías de análisis de cambios en aulas de matemáticas al utilizar tecnologías digitales definidas por Sacristán, Sandoval y Gil (2007):

La perspectiva del profesor y el uso didáctico de las tecnologías digitales
La perspectiva de las interacciones en la clase
El posible impacto en los estudiantes
La perspectiva técnica
El contexto social

A continuación se describen algunos cambios observados en la práctica docente de profesores participantes de los talleres, con respecto únicamente a las dos primeras categorías: Cambios en los profesores y su uso de las tecnologías, y cambios en las interacciones en clase.

*Cambios en la perspectiva del profesor y el uso didáctico de las tecnologías digitales*

Se llevó a cabo un análisis de algunos de los instrumentos de trabajo de un profesor, en particular de sus planeaciones de clase, que son documentos donde el profesor indica, para cada tema de clase, las actividades, contenidos, recursos que utilizará y la forma de evaluarlos, así como el tiempo programado para cada actividad. Estas planeaciones de clases fueron, por un lado, de ciclos escolares anteriores y, por otro, de clases posteriores a los talleres. En este análisis se pudo observar un cambio, ya que en las planeaciones posteriores al taller, existe una articulación de las actividades con geometría dinámica, hoja de cálculo y programación computacional, con los requisitos curriculares. Estas tecnologías digitales incluyeron también actividades con geometría dinámica no vistas durante los talleres, mostrando así, al parecer, que el profesor adquirió suficiente confianza en esta herramienta para atreverse a abordar otros temas.

Del análisis de videos de otros profesores también se observa que lograron cierta integración de las tecnologías digitales en sus clases a raíz de los talleres. Algunas de estas sesiones de clase, incluyendo tecnologías digitales con los alumnos, fueron video grabadas por los mismos profesores. En estas sesiones se observa que las tecnologías digitales también son utilizadas por los alumnos.

*Cambios en las interacciones en clase: trabajo colaborativo*

Desde la perspectiva de las interacciones en el aula, fue posible observar cómo se fue dando un trabajo más colaborativo entre los profesores, ya que en las primeras sesiones de los talleres, algunos profesores no manifestaban deseos de realizar las actividades en equipo. Pero conforme transcurrieron las sesiones, se observó mejor disposición, de los profesores participantes, a colaborar en equipos, aportando ideas, y atendiendo a los comentarios y observaciones del resto de los integrantes.

### *Algunos resultados generales*

Las encuestas revelaron que los profesores no utilizan de forma habitual las tecnologías digitales en las clases de matemáticas y aún menos sus alumnos. Una de las razones es que no existe un acercamiento natural a las tecnologías digitales; muchos de ellos ni siquiera saben la existencia de muchos software existentes ni de que existen versiones alternativas a los más conocidos; y pocos de ellos conocen las posibilidades educativas y didácticas de muchos recursos tecnológicos.

Por otro lado, el poco trabajo que realizan con tecnologías digitales, por lo general, se relaciona con la observación de gráficas de funciones. Además, el uso por sus alumnos para realizar construcciones es limitado; y si permiten a los alumnos realizar construcciones, muchas veces el objetivo es simplemente usar la computadora para crear una gráfica, y no la construcción de conceptos matemáticos.

### *Algunas ideas concretas para mejorar la aptitud de los profesores en las tecnologías digitales*

Aunque se tenía en cuenta que las sesiones de los talleres para cada recurso o software, no serían suficientes para que los profesores desarrollaran competencias sólidas para incorporar las tecnologías digitales en su actividad docente con los alumnos, aún así se observó que los profesores alcanzaron a apreciar ciertas potencialidades de las herramientas.

### *El estudio en curso*

La investigación aquí descrita aún continúa. A principios del próximo ciclo escolar observaremos si los profesores, cinco meses después de haber tomado los talleres, integran las herramientas digitales en su práctica docente, y cómo lo hace. Para una próxima investigación, quedaría por estudiar el efecto de la integración de las tecnologías digitales en las clases de matemáticas, sobre la apreciación que los alumnos tienen de esta asignatura, así como la influencia sobre su aprendizaje.

## Bibliografía


Sacristán, A.I. & Rojano, T. (2009). The Mexican National Programs on Teaching Mathematics and Science with Technology: The Legacy of a Decade of Experiences of Transformation of School Practices and Interactions. In A. Tatnall and A. Jones (Eds.). *Education and Technology for a Better World*, WCCE 2009, IFIP Advances in Information and Communication Technology - Boston: Springer. Pp. 207–215.

Sacristán, A.I., Sandoval, I. & Gil, N. (2007). Incorporating Digital Technologies to the Mathematics Classroom: In-Service Teachers Reflect on the Changes in their Practice. In Lamberg, T., & Wiest, L. R. (Eds.). *Proceedings of the 29$^{th}$ PME-NA - Exploring Mathematics Education in Context*. Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno. CD-ROM Pp. 137-144.

SEP (2006) Acuerdo número 384 por el que se establece el nuevo Plan y Programas de Educación Secundaria. *Diario Oficial* 26 Mai 2006. México.

SEP (2008) Acuerdo número 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada, *Diario Oficial* 29 Oct. 2008. México.

Ursini, S. (2006). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT). En Rojano, T. (ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula* (pp. 25-41) México: SEP.

# Niveaux d’intervention enseignante pour le développement d’un système tutoriel

## Une expérience didactique à l’école secondaire avec le système géogébraTUTOR

**Michèle Tessier-Baillargeon*, Nicolas Leduc**, Philippe R. Richard ***

** Université de Montréal*
*90, ave. Vincent-d'Indy*
*Montréal (Québec) H2V 2S9*
*{michele.tessier-baillargeon, philippe.r.richard}@umontreal.ca*

*** École Polytechnique de Montréal*
*2500, chemin de Polytechnique*
*Montréal (Québec) H3T 1J4*
*nicolas.leduc@polymtl.ca*

*RÉSUMÉ : Cette communication montre les niveaux d’intervention qui émergent d’une première analyse lorsque des enseignants soutiennent des élèves de l’école secondaire au cours de la résolution de problèmes de géométrie avec géogébraTUTOR (GGBT). Celui-ci est un système tutoriel qui se destine lui-même à soutenir l’élève «à la manière de l’enseignant», et dont le développement intègre des phases de validation expérimentales dans des classes déjà instrumentées par GGBT. Le texte commence par situer certaines caractéristiques de ce système tutoriel et il termine par l’établissement de types d’intervention enseignante. Puisque ces interventions agissent sur les interactions entre l’élève et le milieu, nous introduisons également quelques références théoriques issues de la didactique des mathématiques.*

MOTS-CLÉS : *Didactique des mathématiques, système tutoriel intelligent, interventions enseignantes, interactions cognitives sujet-milieu..*

*KEYWORDS: Didactics of mathematics, intelligent tutorial system, mathematical competencies, teaching interventions, student-milieu cognitive interactions*

## Introduction

Dans le monde l'éducation, on admet volontiers que la technologie informatique et la pratique mathématique se nourrissent mutuellement. C'est sans doute pourquoi on retrouve déjà cette association dans l'énoncé des programmes de formation de l'école québécoise (MÉLS, 2006 & 2007). Toutefois, ces mêmes programmes sont peu bavards sur les effets didactiques de la technologie, comme s'il s'agissait d'un moyen sans contraintes. À ce sujet, Rabardel (2000) rappelle que l'instrument n'est pas conceptuellement neutre, que ce soit avec l'usage d'outils issus des technologies contemporaines ou traditionnelles:

> Dans l'enseignement, les instruments sont très souvent considérés comme de simples auxiliaires, neutres, n'intervenant pas en tant que tel sur la construction des savoirs par les élèves et sur les conceptualisations qui en résultent. Luc Trouche à montré, par exemple, que la calculatrice graphique est un non-objet pour les enseignants, enseignants et élèves étant d'accord pour estimer que son utilisation ne nécessite aucun apprentissage.

Par ailleurs, si certains modèles de connaissances se fondent déjà sur l'interaction entre l'élève et l'outil informatique (ex. Balacheff & Margolinas, 2005), c'est justement pour poser la dépendance de l'outil dans la formation des conceptions.

L'outil qui nous intéresse ici est géogébraTUTOR (GGBT), un système tutoriel qui soutient l'élève lors de la résolution de problèmes de géométrie en assurant à la fois la gestion de messages discursifs et la gestion de problèmes (Richard et al., 2011). Bien qu'il ne vise pas à remplacer l'enseignant ordinaire, GGBT demeure un système suffisamment autonome pour appuyer l'élève en l'absence de l'enseignant. De sorte qu'au cours de phase de développement du système, nous avons pu proposer une expérience qui visait, en premier lieu, à valider l'usage d'un prototype avec des élèves réels, et en second lieu, à rentabiliser l'expérimentation pour connaître le type d'intervention qui émerge lorsque l'enseignant ordinaire appuie l'élève dans sa résolution instrumentée.

## 1. Quelques jeux et enjeux dans l'usage de géogébraTUTOR

### *1.1. Les interactions au sein du système didactique*

Ce qui caractérise GGBT relativement à un logiciel de géométrie dynamique est l'existence d'une relation didactique simulée dans laquelle un agent pédagogique virtuel joue un rôle tuteur. Dans l'esprit de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), parce que cet agent tuteur remplace momentanément l'enseignant dans son interaction principale avec le système «sujet-milieu», il modifie conséquemment les relations traditionnelles dans le jeu de l'enseignant en tant qu'organisateur du jeu de l'élève (figure 1). C'est-à-dire que les jeux principaux de l'enseignant (relation 1) et de l'élève (relation 2) se transposent au sein du système «sujet-milieu» (respectivement relations 6 et 7). La notion de milieu demande alors une nouvelle distinction : le «milieu didactique» comme système antagoniste du système enseigné (définition originale de l'auteur), mais au sein duquel l'agent tuteur apparaît en sous-système; et le «milieu virtuel», sous-système concurrent pour l'élève avec qui celui-ci négocie et qui fonde, conjointement, le jeu principal de l'agent tuteur (relation 6 sur 7).

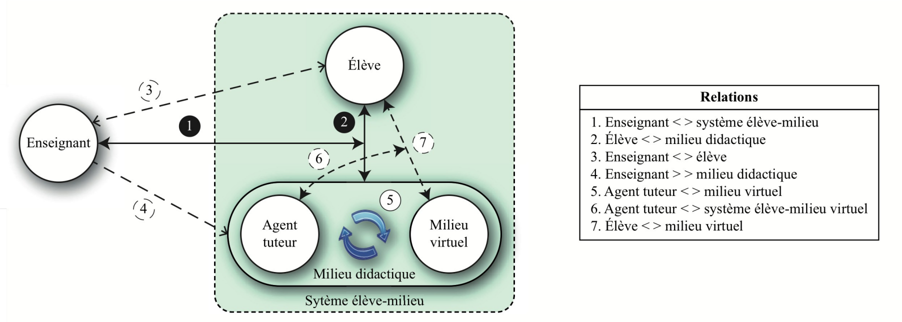



**Figure 1.** Les relations fondamentales avec GGBT (Richard et al., 2011)

### *1.2. Le fonctionnement du système tutoriel*

Du point de vue informatique, GGBT est une application Java autonome qui tourne sur un ordinateur domestique. L'interface du prototype que nous avons employé dans notre expérience montre essentiellement trois parties (voir illustration 2, fenêtre principale). Dans la partie supérieure, on aperçoit l'énoncé du problème (à gauche) et une image correspondante (à droite), qui sont des éléments invariables au cours de la résolution d'un même problème. Au milieu se trouve le gratuiciel libre de géométrie dynamique géogébra[1], sans changement et parfaitement intégré au système, mais qui peut contenir au besoin une figure déjà construite. Quand au tiers inférieur, sous le module géogébra, nous utilisons le paradigme de la fenêtre de clavardage pour simuler un dialogue entre l'élève et le système tutoriel. Celui-ci est susceptible de répondre aux actions de l'élève par un message qui apparaît dans le bas de la fenêtre. Ces actions peuvent être discursives (module du bas), graphiques ou symboliques (module GGB), tandis que les messages de l'agent tuteur peuvent être discursifs (proposition dans le module du bas) ou cognitifs (lien hypertexte qui s'ouvre vers un sous-problème, c'est-à-dire une nouvelle fenêtre GGBT).

Afin de valider le bien-fondé des solutions de référence et de faciliter l'interaction avec l'enseignant ordinaire, les messages du prototype employé pendant l'expérience se présentaient sous la forme d'une suite ordonnée d'entiers, dont chaque nombre représente respectivement le pourcentage de complétude par rapport aux solutions envisagées dans une logique inférentielle (Richard, 2004).

1 Voir <http://www.geogebra.org/>.

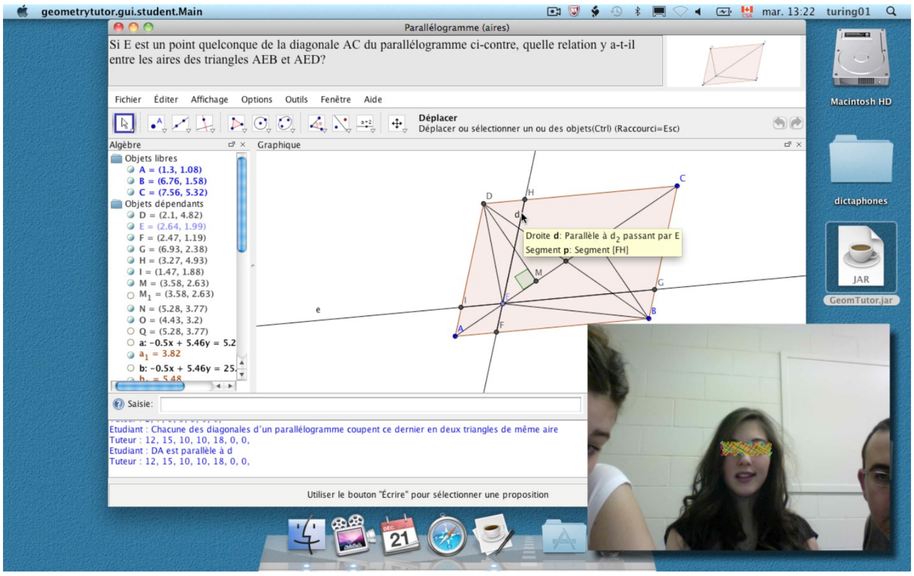



**Illustration 2.** Interactions à l'interface de GGBT et intervention de l'enseignant

## 2. Contexte de la recherche

### *2.1. Choix des groupes, des enseignants et des problèmes*

Pour la résolution de 5 problèmes de preuve en géométrie euclidienne, nous avons ciblé 4 groupes au deuxième cycle du secondaire (15-16 ans) avec leurs deux enseignants. Une première séance se destinait à la présentation du projet alors que les élèves étaient appelés à résoudre, par équipe de deux (binôme), trois problèmes préalables dans un environnement papier-crayon. Puisque les élèves n'ont pas reçu d'enseignement explicite sur le raisonnement déductif, nous avons profité des problèmes préalables pour introduire implicitement la logique inférentielle implantée dans le système tutoriel. D'abord, par la résolution d'un casse-tête de démonstration à la manière de Coutat et Richard (2011) (problèmes préalables 1 et 3), ensuite par l'ordonnancement de propositions données pêle-mêle et qui, par groupe de trois ou de quatre, forment les déductions d'une démonstration complète (problème préalable 2).

Afin d'initier la genèse instrumentale avec GGBT et de favoriser le transfert d'une activité déjà connue dans un environnement informatique, le premier problème de preuve parmi les cinq reprenait l'énoncé du premier problème préalable. Les problèmes suivants, de difficulté progressive allant du plus simple au plus complexe, proviennent de la littérature en didactique des mathématiques et en informatique, offrant ainsi un contexte de résultats de recherche pour étayer l'analyse a priori. Les trois premiers problèmes (problèmes de preuve 2, 3 et 4) avaient déjà été posés par Richard (2004) dans l'environnement papier-crayon, et leurs solutions formellement possibles ont été testées par Botana et Recio (2006) à l'aide d'un moteur déductif. Le dernier problème (problème de preuve 5) est issu d'une étude de Cobo et Fortuny (2000) sur l'effet des interactions sociales et cognitives – il s'agit du problème de l'illustration 2 –, dont l'espace des solutions programmables avaient déjà été expérimenté avec des élèves qui utilisaient un système tutoriel antérieur (Richard et Fortuny, 2007).

Du côté des enseignants, ceux-ci connaissaient déjà l'ensemble des solutions possibles pour chaque problème et ils on pu se familiariser à GGBT bien avant l'expérimentation. Ils n'ont pas reçu de consigne particulière quant au style de tutorat qu'ils pouvaient employer, mais nous avons insisté pour que leurs interventions s'effectuent dans le prolongement de leurs cours ordinaires.

### *2.2. Collecte et analyse des données*

L'expérimentation a eu lieu au laboratoire d'informatique habituel de l'école. Par classe, l'ensemble des élèves s'y trouvait en même temps. Bien que nous ayons prévu la conservation des fichiers journaux pour l'ensemble des solutions, nous avons aménagé l'arrière de la salle pour enregistrer conjointement les interactions d'un échantillon de quatre binômes à l'aide du logiciel ScreenFlow. Ce logiciel permet d'enregistrer, sous forme d'une vidéo, les interactions à l'interface du dispositif informatique. L'illustration 2 est en fait une capture d'écran lorsque nous observons un enregistrement. Dans celui-ci, le son et l'image des utilisateurs (premier plan) se constitue sur une trame distincte de l'action à l'écran de l'ordinateur (second plan). Au premier plan, on voit d'ailleurs les membres d'un binôme (à gauche et au centre) de même que leur enseignant (à droite). Puisque ce dernier continuait d'assurer un soutien à l'ensemble de ses élèves, il portait avec soi un dictaphone qui enregistrait la trame orale de ses interventions. L'enseignant a pu bénéficier d'un auxiliaire pour l'aider dans son soutien aux élèves, celui-ci portait aussi un dictaphone. Il s'agissait d'un membre de notre équipe de recherche.

Même si nous n'avons pas encore terminé la systématisation dans l'analyse des données, nous avons déjà procédé à une première étude des verbatims de l'intervention enseignante et des fichiers vidéos qui résument les interactions élève-milieu. L'étude des fichiers vidéos impliquait une analyse des stratégies déployées par les 16 binômes dans leurs processus de résolution, en commençant par relever les opérateurs (outils de résolution) qui s'appuient sur des systèmes de représentation (discursif, figural et gestuel) et des moyens de jugements et de décisions (structures de contrôle). Afin de pouvoir déterminer les indices d'apprentissage au sein de chaque binôme, nous avons considéré chaque membre des équipes à tour de rôle, l'intervention du coéquipier (ou de l'enseignant, le cas échéant) appartenant au milieu par rapport à l'équipier lorsque celle-ci répondait à une demande. Mais pour déterminer des niveaux d'intervention pour le développement du système tutoriel, c'est surtout l'étude des verbatims qui était au centre de notre démarche, par la catégorisation de régularités observées dans l'effet de l'intervention enseignante sur les systèmes élèves-milieu.

## 3. Premiers résultats : niveaux et types d'intervention

Les interventions de l'enseignant, en réaction aux questions et actions des élèves, s'échelonnent sur les trois niveaux que nous résumons à la figure 3. Nous les qualifions de «neutre», d'«incitatif» ou d'«actif-proactif» en suivant un ordre ascendant selon l'effet dans le processus de résolution instrumentée. Même si nous n'avions pas demandé aux enseignants de privilégier un niveau ou un autre, nous avons noté une disposition à fournir essentiellement des réponses au niveau «neutre», hésitant du coup à s'élever aux niveaux supérieurs. En revanche, un des deux enseignants intervenait davantage au niveau «actif-proactif», ce qui suggère déjà la différenciation de profils d'intervention de l'agent tuteur selon la fréquence d'usage des niveaux. De plus, chaque niveau se décline selon l'effet de l'intervention dans l'espace de travail de l'élève. Les types «communication», «mathématique» et «technique» ne sont pas sans rappeler recpectivement les composantes «espace réel et local», «référentiel» et «artefact» de la notion d'espace de travail géométrique de Kuzniak, ou l'adaptation de Coutat et Richard (2011) au regard du milieu épistémologique. Mais comme la nature de ces interventions émergent des données expérimentales, nous devrons poursuivre notre analyse pour approfondir les enjeux d'un tel rapprochement.

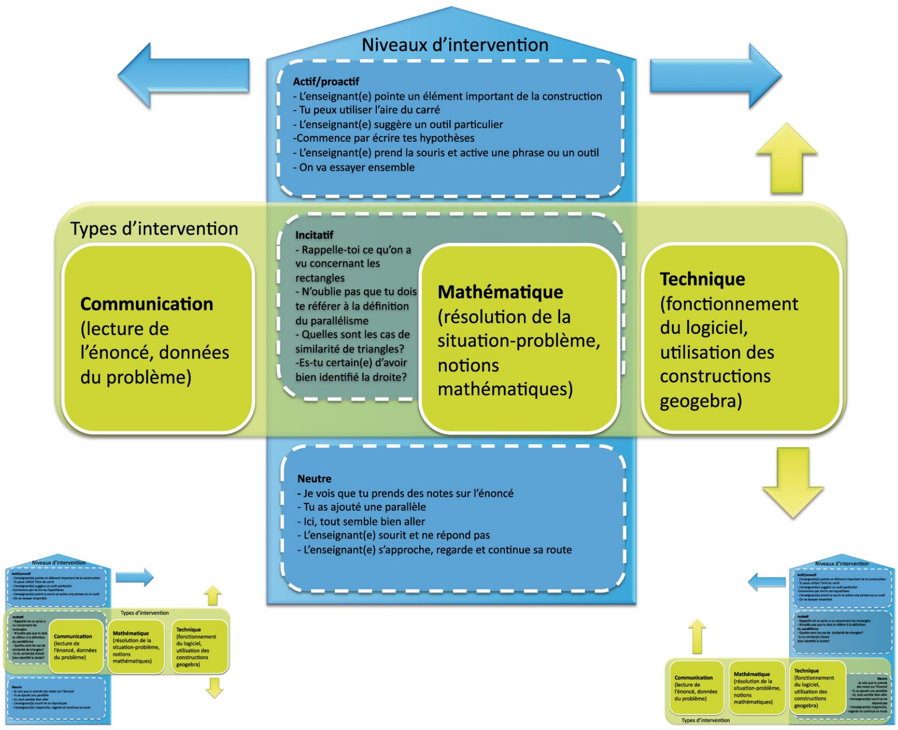



**Figure 3.** Niveaux et types d'intervention de l'enseignant

## Conclusion

Même si dans sa conception actuelle, notre système tutoriel termine son premier cycle de développement, GGBT se valide et se raffine par l'intégration de couches au cours d'expérimentations menées dans des situations d'enseignement-apprentissage réelles (figure 4). Au départ, si cette disposition visait à permettre une adaptation à la spécificité de contrats didactiques donnés, c'était aussi pour respecter l'apprentissage de la géométrie qui repose avant tout sur le sens des concepts et des processus mathématiques, et non pas sur toute syntaxe au regard de modèles de géométrie formelle. Par contre, comme nous avons pu le constater avec les interventions enseignantes, le modèle formel n'est peut-être pas un objectif d'apprentissage dans les situations proposées, mais il demeure un moyen avec lequel l'enseignant intervient sur le système sujet-milieu. Cette relativisation des connaissances mathématiques est tout à fait compatible avec une approche curriculaire par compétences, comme on la retrouve dans l'institution québécoise. Toutefois, il ne peut s'agit d'une relation de subordination parce que ce sont les connaissances mathématiques mêmes qui restent au cœur de l'apprentissage instrumenté avec notre système tutoriel.

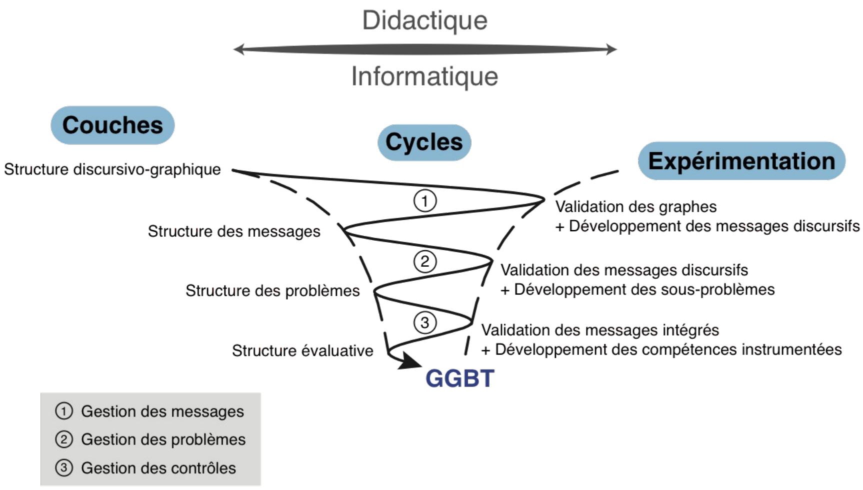



**Figure 4.** Cycles du développement expérimental de GGBT (Richard et al., 2011)

Dans une démarche ultérieure, il faudra reprendre l'exercice expérimental pour valider la nouvelle structure des messages et concevoir une structure de problèmes qui se destine à enrichir l'action tutorielle. Il s'agit ici d'identifier, dans la résolution d'un problème source, quelle est la nature des moments clefs où l'élève est susceptible de rester bloqué, afin de lui retourner un problème connexe qui devrait relancer la résolution initiale. Il est possible que ces moments clefs se rapprochent des indices d'apprentissage. Mais si nous n'en sommes pas sûr, nous savons en retour qu'il y a là un nouveau foyer de développement.

**Remerciements**

Le développement de cette recherche a été rendu possible grâce à une subvention du Conseil de recherches en sciences humaines (CRSH 410-2009-0179, Gouvernement du Canada). Nous tenons à remercier les élèves de quatrième et cinquième secondaire de l'École d'éducation internationale de Laval et leurs enseignants, Huguette et Stéphane, pour le dévouement et la perspicacité dont ils ont fait preuve tout au long de leur contribution.

**Bibliographie**

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). Ck¢, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Botana, F. & Recio, T. (2006). Towards Solving the Dynamic Geometry Bottleneck Via a Symbolic Approach. In H. Hong, & D. Wang, D (Eds.), *Automated Deduction in Geometr*y, pp. 92-110. Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin / Heidelberg.

Cobo, P. & Fortuny, J.M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-140.

Coutat, S. & Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 1-30.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. Dans Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier (Éds) *Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques*, 71-89.

MÉLS (2006 & 2007). *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire 1er cycle (2006) et enseignement secondaire 2e cycle (2007).* Publications du Gouvernement du Québec.

Rabardel, P. (2000). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Dans Bailleul (Ed.), *Les instruments dans la pratique et l'enseignement des mathématiques*, pp. 203-213.

Richard, P.R., Fortuny, J.M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E. & Tessier-Baillargeon, M. (2011). Theoretical Fundaments for an Intelligent Tutorial System Towards the Learning of Geometry at a High School Level. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 43*(4), 425-439.

Richard, P.R., & Fortuny, J. (2007). Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 12, pp 83-116.

Richard, P.R. (2004). Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques. Berne: Peter Lang.

# *Ateliers*

# Atelier 1

## Quelles interactions entre enseignants, mathématiciens et didacticiens ?

**Gilles Aldon et Luc Trouche**

*EducTice- S2HEP (IFE-ENSL)*
*19 allée de Fontenay*
*69347 Lyon*
*Gilles.Aldon@ens-lyon.fr, Luc.Trouche@ens-lyon.fr*

*RÉSUMÉ : La création de l'Institut français de l'Éducation, prolongement de l'INRP dans l'École normale supérieure de Lyon, peut favoriser les interactions entre les recherches sur l'enseignement des mathématiques et mes recherches mathématiques. Ces interactions existaient déjà, le plus souvent dans le cadre de partenariats entre l'INRP et les instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques. L'atelier 1 avait pour objectif de faire le point sur les travaux en cours à l'IFÉ sur cette thématique.*

*ABSTRACT: The creation of the French Institute of Education, which continues the INRP in the frame of the ENS of Lyon, may favour interactions between research on mathematics teaching and research on mathematics. These interactions were already active, often in the frame of collaboration between INRP and the Institutes of research on Mathematics Teaching. This workshop was dedicated to a cross report of the main current studies on this thematic in IFE.*

*MOTS-CLÉS : enseignement des mathématiques, didactique des mathématiques.*

*KEYWORDS: mathematics teaching, didactics of mathematics.*

## Introduction

L'atelier a organisé ses travaux autour de cinq contributions :

– trois contributions d'équipes de l'IFÉ, l'équipe ERMEL Équipe de recherche mathématiques à l'école élémentaire, l'équipe (CD)Ampères (Conception et diffusion d'apprentissages mathématiques et parcours d'étude et de recherche pour l'enseignement secondaire) et l'équipe MATINal (MAThématiques INstrumentées au lycée) ;

– deux contributions individuelles de chercheurs étrangers, Alexander Conde (Mexique) et Mouloud Abdelli (Algérie).

Étudier les rapports entre l'enseignement et la recherche, en mathématiques ou en didactique des mathématiques, ouvre un vaste champ de recherche. L'atelier l'a exploré en choisissant quelques entrées :

– les apports possibles des autres disciplines pour nourrir l'enseignement des mathématiques (l'apport de la musique, dans la contribution de A. Conde) ;

– les relations complexes entre la langue naturelle et le langage formel des mathématiques (contribution de M. Abdelli), d'autant plus complexes que la langue naturelle d'usage dans l'enseignement n'est pas toujours la langue maternelle ;

– les apports des mathématiques et de la didactique des mathématiques pour la conception des ressources des enseignants (équipes ERMEL et Ampères).

La nécessité de *motiver l'engagement des élèves* dans l'étude mathématique est apparue comme un ressort commun de ces différents travaux : cette motivation est recherchée à travers la promotion, dans la classe, de démarches d'investigation (équipe MATINal), ou à travers la conception de parcours d'étude et de recherche qui donnent une cohérence aux différentes activités mathématiques conduites dans la classe.

La présentation, dans les pages suivantes, de ces cinq contributions donne un aperçu de la richesse des échanges qui ont nourri cet atelier.

## 1. De la notion de droite à la production de ressources

*Equipe ERMEL : Henri-Claude Argaud, Magali Carcel-Nowak, Georges Combier, Jacques Douaire, Marie-Paule Dussuc, Gérard Gerdil-Margueron et Laetitia Rousson (jacques.douaire@wanadoo.fr)*

### *1.1 Introduction*

La production de dispositifs d'enseignement privilégiant une réelle activité mathématique des élèves et leur permettant l'acquisition d'un savoir suppose, dans leurs différentes phases d'adopter un point de vue centré successivement sur le savoir mathématique, sur l'analyse des compétences et potentialités des élèves, et enfin sur la construction et l'expérimentation de situations d'apprentissages. Ces dernières étapes sollicitent le recours à des concepts et méthodes de la didactique des mathématiques. L'étude de l'appropriation par les enseignants de ces problématiques d'apprentissages et de ces dispositifs est aussi un de nos objets de recherche. C'est en ce sens que nous pensons pouvoir apporter une contribution à la réflexion sur le thème de cet atelier. Nous nous appuierons sur les apprentissages liés à une relation géométrique, l'alignement, au cycle 2 pour illustrer ces questions.

### *1.2 Les programmes et le savoir*

Dans les programmes de l'école primaire, avant ceux de 2002, l'alignement n'est pas cité comme objet de savoir. Dans les programmes actuels, l'utilisation des instruments et des techniques est indiquée pour reproduire ou tracer des figures planes et l'alignement est cité pour le cycle 3. D'un point de vue théorique une droite peut être caractérisée de différentes façons : par l'effet (invariance) d'une transformation, par l'intersection de plans, comme solution d'un problème de distance, par un rayon de courbure infini, par sa direction (prolongement, etc.).

### *1.3 Les significations de l'alignement*

Au sein de l'atelier, la confrontation des réponses à la question « qu'est-ce qui vous semble important de travailler concernant « droite » et concernant « alignement » au primaire » a mis en évidence la diversité des approches. En effet, le concept de droite et les notions associées (alignement, etc.) peuvent être appréhendés par les élèves du cycle 2 à travers différentes significations liées à la perception ou l'expérience : un objet matériel (fil tendu, bord d'un objet rectiligne, pli d'une feuille, etc.), un objet du monde graphique (trait rectiligne, tracé sur un écran par l'outil « droite » dans Cabri), etc. Ces significations sont associées à des problèmes portant sur l'identification ou la production d'alignements ou de traits rectilignes ou sur la reconnaissance ou l'usage d'instruments utilisés dans ces buts.

### 1.4 Présentation d'expérimentations

Deux situations d'alignement ont été présentées dans le cadre de cet atelier. La première, qui se déroule dans la cour, propose aux élèves de déterminer un emplacement d'où un plot en cache un autre ; la seconde propose un problème voisin sur l'espace plus réduit d'une grande table (placer un objet pour qu'il soit caché par un autre lorsque l'on regardera dans le viseur d'un appareil photo). Dans les deux cas, la résolution du problème analogue dans le domaine spatiographique est ensuite proposée.

### 1.5 Résultats de recherche

Les résultats expérimentaux montrent les difficultés de transfert sur la feuille de papier des procédures développées dans le méso-espace, en particulier le tracé d'une ligne droite n'apparaît comme la procédure privilégiée par les élèves. Ils ont aussi mis en évidence la nécessité d'un travail spécifique permettant l'appréhension en acte des significations et de certaines propriétés de la droite dès le cycle 2. Ce travail sur la « rectitude », indépendant de la représentation d'alignement de points, fait l'objet d'une expérimentation actuelle.

### 1.5 Témoignage d'enseignantes

Magali Carcel-Nowak et Laetitia Rousson, de formation scientifique, enseignent depuis quelques années ; elles ont fait ou terminent un master « recherche » en didactique ; Magali a aussi été formatrice en mathématiques à l'IUFM de Grenoble (site de Valence). Utilisatrices des ressources produites par l'équipe à laquelle elles participent, elles ont souligné l'importance et la gestion délicate, pour des enseignants débutants, des phases de dévolution du problème pour garantir la qualité de la recherche des élèves, ainsi que celle des phases de validation où l'enseignant doit donner aux élèves la possibilité de déterminer le vrai et le faux.

### 1.6 Bibliographie


Argaud, H.-C., Douaire, J., & Dussuc, M.-P. (2010). Alternance et formation en mathématiques – Des exemples en PE2 et en T1. *Actes du colloque COPIRELEM* (Auch)

Douaire, J., Emprin, F., & Rajain, C. (2009). L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. *Repères IREM* n° 77.

Douaire, J. Argaud, H.-C., Dussuc, M.-P, & Hubert, C. (2003). Gestion des mises en commun par des enseignants débutants. In J. Colomb, J. Douaire et R. Noirfalise (coord.), *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes,* INRP.

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3.* INRP/Hatier.

## 2. Une approche méthodologique pour l’amélioration de l'apprentissage des fractions au travers des éléments musicaux

*Alexander Conde, Cinvestav, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco. México, 07360 DF — alconder23@hotmail.com*

### *2.1 Le lien entre les mathématiques et la musique*

Quand on parle des mathématiques et de la musique dans le contexte scolaire surgissent des questions telles que : est-ce qu’il y a des liens entre les mathématiques et la musique ? Si la réponse est affirmative, alors, quelles sont les relations ? La construction de la réponse à cette question a commencé beaucoup d'années avant. La figure 1 présente une frise chronologique des liens entre les mathématiques et la musique depuis différentes perspectives.

La théorie de la musique a ses origines dans la nature de sons musicaux. Pythagore (570-479 a.C.), qui au moyen des explorations, a trouvé des liens entre la fréquence et la longueur de chaque fraction de la corde vibrante. D’un côté, les différents mathématiciens, physiciens et scientifiques ont compté sur « l’héritage de Pythagore », pour contribuer au développement de la théorie musicale et de ses éléments, essentiellement l'harmonie, la mélodie, le timbre et le rythme. D'un autre côté, les musiciens célèbres ont utilisé des structures mathématiques dans leurs oeuvres, tels que Bach, Mozart, Bartók, entre autres.

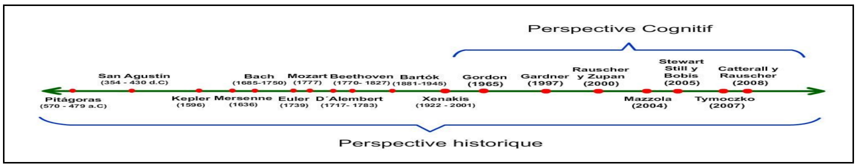



**Figure 1**. Liens entre les mathématiques et la musique au cours du temps.

### *2.2 Comment est-ce qu’on peut utiliser favorablement les liens entre les mathématiques et la musique pendant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans l'école ?*

Les liens peuvent être profités dans les activités interdisciplinaires autour de l'étude d'un contenu intégrateur avec la même signification. L’attention est attirée sur un Système de signes musicaux (SSM) composé des figures et des silences musicaux, puisqu’il possède une structure mathématique fractionnaire d’après la propriété suivante « chaque figure est la moitié de la précédente et le double de la suivante ». Dans le SSM converge les trois disciplines après mentionnées : le son et le temps (la physique), les fractions (les mathématiques) et les figures et les silences musicaux (la musique).

### 2.3. *Description des activités de l'atelier.*

L’approche consiste en la création d'une proposition didactique interdisciplinaire avec l’intervention des preuves virtuelles (simulation des objets) et preuves réelles (matériel concret). Les preuves donnent en même temps la notion du temps réel (physique) et le temps musical. Le rapprochement signale à une des plus grandes difficultés dans l'apprentissage des fractions : l'identification de l'unité pour faire l'équipartition. Grâce au SSM, la figure ronde « l’unité » peut être clairement identifiée et « l’unité » peut déduire la valeur des autres figures.

Les activités de l'atelier focalisent la construction de la notion de l’unité, l’équipartition, la fraction comme un nombre et l’équivalence. Un métronome mécanique virtuel sera utilisé. L'objectif principal de l'atelier est l'utilisation des fractions et de ses propriétés dans la construction des figures et des silences musicaux. La figure 2 fait preuve des activités proposées.

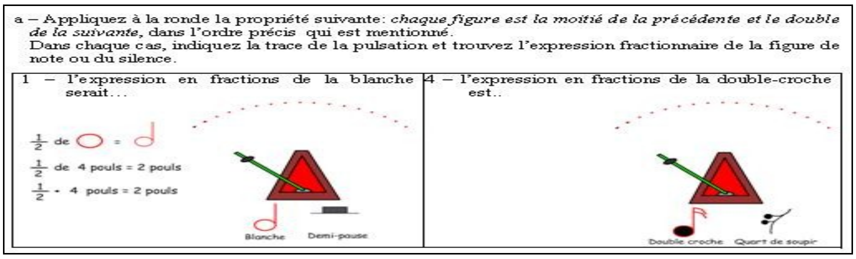


**Figure 2.** L’activité de l'atelier sur la valeur relative des figures et des silences musicaux.

### *2.4 Quelques réflexions.*

La représentation graphique et la perception sonore exposent le partage de l'unité de même que la division des partages et donnent la possibilité aux étudiants d’établir une relation de l'ordre entre les figures et d’exprimer une fraction en termes des autres. Dans ce cas n’existe pas seulement une relation symbolique (figure-fraction), mais aussi une signification de mesure associée au temps de la durée d'un son.

Ces divers rapprochements et représentations que l'étudiant a avec les objets mathématiques — musicaux caractérisent les processus de concrétisation (significatif) des mêmes objets. (Wilensky, 1991).

En conséquence, le professeur requiert aussi des propositions flexibles pour réaliser des ajustements et des adaptations par rapport au contexte scolaire et potentialiser les outils, ainsi que favoriser l'activité mathématique dans la classe.

### *2.5 Bibliographie*

Conde, A. (2009). Las fracciones al ritmo de la música. Thèse de Master, Cinvestav, México.

Wilensky, U. (1991). Abstract Meditations on the Concrete, and Concrete Implications for Mathematics Education, en Harel, I. & Papert, S. (éd.) *Constructionism*, p. 193-204 ; Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ.

## 3. La recherche (CD)Ampères : usages de la théorie anthropologique du didactique pour construire des AER (Activités d'étude et de recherche) et des PER (Parcours d'étude et de recherche)

*Dominique Gaud*, Robert Noirfalise***
** IREM de Poitiers, 40 avenue du recteur Pineau, Poitiers*
*** IREM de Clermont-Ferrand, Complexe des Cézeaux, 63170 Aubière*

### *3.1 Motivation de la recherche*

(CD)Ampères est un sigle pour « Conception et diffusion d'apprentissages mathématiques et parcours d'étude et de recherche pour l'enseignement secondaire ». Il désigne une recherche INRP/ADIREM initiée par la commission inter-IREM de didactique. Des équipes des IREM de Bordeaux, Clermont-Ferrand, Dijon, Marseille, Montpellier, Nice, Poitiers, de l'IUFM de Toulouse contribuent à son développement. Des liens sont établis avec d'autres équipes au sein d'IREM, mais aussi avec des groupes de recherche belges, espagnols et italiens car les problèmes abordés ne sont pas spécifiques de l'enseignement de notre discipline en France, mais se retrouvent également chez nos voisins européens.

Un des motifs essentiels qui a donné naissance à ce projet de recherche est le problème posé, au quotidien, par le manque d'engagement des élèves dans les études. Divers rapports et enquêtes nationales, internationales[1] soulignent ainsi l'urgence à redonner du sens aux mathématiques enseignées dans le secondaire. Retrouver le sens d'un enjeu, d'un problème non résolu à l'avance, bâtir un enseignement à partir de questions, développer des activités d'étude et de recherche (AER) ou plus encore, des parcours d'étude et de recherche (PER) pour élaborer des réponses à ces questions, c'est ce que nous essayons de faire tout en respectant les programmes officiels.

### *3.2 Du bon usage des théories didactiques*

Pour travailler, nous utilisons des outils venus des théories didactiques. Tout particulièrement, le modèle des quatre T (type de tâches, techniques, technologie, théorie) et les niveaux de détermination empruntés à la théorie anthropologique du didactique, conjugués avec une enquête à la fois historique et écologique sur les usages actuels des mathématiques nous conduisent à déterminer des questions à fort

[1] Rapports Rocard, du sénat, de l'IGEN, etc. Les textes sont nombreux pour souligner cette urgence pour nos sociétés modernes et le besoin de personnes ayant la possibilité d'accès aux sciences.

pouvoir générateur d'étude et de recherche. À titre d'exemples, citons pour le domaine de la géométrie les questions suivantes :

- Comment déterminer la distance entre deux points inaccessibles ?
- Comment déterminer une aire, un volume ?
- Comment représenter un solide ?
- Comment se repérer sur une droite, dans le plan, dans l'espace ?
- Comment construire une figure répondant à des spécifications ?

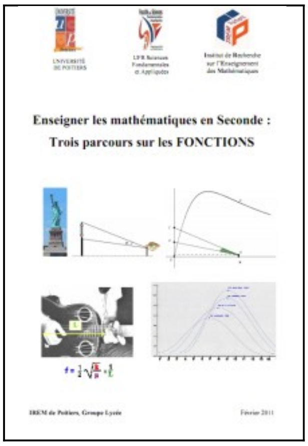
### *3.3 Des questions génératrices d'études*

Des réponses à de telles questions ne peuvent se traiter en quelques instants et bien au contraire peuvent s'élaborer sur plusieurs années scolaires. La détermination des distances inaccessibles peut débuter en cinquième avec des triangles superposables, et se terminer en 1re S avec la loi des sinus et le théorème d'Al-Kashi et former ainsi un parcours d'études et de recherches (PER). On s'autorise donc à poser des problèmes qui ne peuvent être résolus en quelques minutes contrairement à la plupart de ceux rencontrés dans les activités proposées à l'heure actuelle dans les manuels. L'équipe de L'IREM de Poitiers propose de parcourir la totalité d'un programme à partir de quelques grandes questions génératrices d'études[2].

### *3.4 Des ressources pour les enseignants*

Pour en savoir plus sur le travail de l'ensemble des équipes (CD) Ampères, un ensemble de documents est en ligne sur le site educmath :
<http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/>

Pour les travaux plus spécifiques de l'IREM de Poitiers, consulter le site de cet IREM : http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/




[2] Voir les publications de l'IREM de Poitiers

## 4. Ressources et démarches d'investigation

*Groupe MATINaL, IRES, Université d'Orléans, BP 6759 45067 Orléans cedex 2*
*manuel.pean@ac-orleans-tours.fr*

### *4.1 Introduction*

L'équipe MATINal (MAThématiques INstrumentées au Lycée) étudie l'acceptabilité de ressources à fort potentiel DIES (Démarches d'investigation pour l'enseignement des sciences) dans les pratiques de classes des enseignants et dans leur système documentaire. C'est dans ce cadre que sont présentées deux ressources : une activité liée à un prototype de plate-forme multi-agent autour de GeoGebra (<http://www.geogebra.org>) et la ressource « ligne de pixels » issue du site d'animations en ligne l'e-cureuil (<http://www.e-cureuil.fr>).

### *4.2 Historique du groupe MATINaL*

Cette équipe a créé le site e-cureuil afin de mettre en ligne des animations mathématiques pour la classe au lycée. Dans le cadre d'un partenariat avec l'INRP et sous l'acronyme CROME, il a étudié un réseau de calculatrices (TI-navigator). La genèse instrumentale, le travail collaboratif et le débat scientifique sont au cœur de ce travail. C'est cette étude qui a servi de support pour l'élaboration du prototype de plate-forme multi-agent autour de GeoGebra. C'est ensuite sous le nom GdoN, qu'il a analysé les clés USB destinées aux néo titulaires en s'intéressant notamment à la notion de genèse documentaire et de critère de qualité d'une ressource.

### *4.3 La plate forme multi-agent autour de GeoGebra*

Les participants à l'atelier ont testé la plate-forme multi-agent. Ils ont construit, dans une fenêtre GeoGebra spécifique, une figure géométrique sur le demi-plan des abscisses négatives et placé le point correspondant dont l'abscisse est l'aire de la figure et l'ordonnée le périmètre. Ce qui, une fois mutualisé, a donné le résultat ci-dessous :

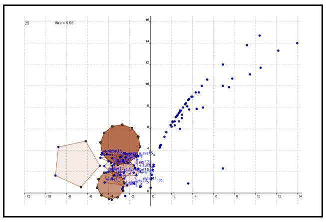


**Figure 1**. *Production mutualisée de l'atelier*

En extrapolant sur ce que pourrait produire un groupe d'une vingtaine d'élèves pendant le temps nécessaire, on aboutirait aux questions : À aire constante, le périmètre peut-il tendre vers l'infini ? Et à périmètre constant ? Quelle partie du quart de plan positif est couverte ? Le peu de temps disponible pour tester cette activité n'a pas permis d'observer des phénomènes d'instrumentalisation comme cela avait été le cas pour le TI-navigator. On remarquera néanmoins l'apparition de deux points aberrants (due à une inversion aire/périmètre), ce sont aussi ces points qui nourrissent le questionnement et le débat scientifiques dans la classe.

### 4.4 *La ressource « ligne de pixels »*

La ressource « ligne de pixels » a été présentée accompagnée de son scénario d'usage. L'objectif étant de produire un algorithme permettant de représenter une ligne droite entre deux points sur un écran pixelisé. Cette ressource a généré beaucoup de questions au sein de l'atelier.

### *4.5 Critère de potentialité DIES*

Les critères de potentialité DIES proposés sont : 1. La ressource est-elle basée sur une démarche inductive ? 2. La ressource mobilise-t-elle des savoirs et savoir-faire mathématiques (ou scientifique) ? 3. La ressource permet-elle de construire une réponse à une question vive ? 4. Le scénario ou la situation mathématique proposés par la ressource induisent-ils des débats ou des échanges scientifiques entre les élèves ? 5. La ressource prévoit-elle une instrumentation afin de rechercher, conjecturer ou d'éprouver les réponses ? Cette grille a ensuite été testée sur la ressource « ligne de pixels ». Cela n'a pas suscité autant d'engagements de la part des participants que la ressource elle-même. Quelques critiques et propositions ont cependant été formulées : à quel niveau peut se situer la vivacité de la question ? Que peut-on entendre par « démarche inductive » ? Ne vaut-il pas mieux demander de préciser quels sont les savoirs et savoir-faire qui peuvent être mobilisés ?

### 4.6 *Conclusion*

La plate forme multi-agent autour de GeoGebra mérite d'être développée. C'est dans ce but qu'est née une collaboration entre les enseignants chercheurs en informatique et le groupe MATINal au sein de l'IRES d'Orléans. Le cahier des charges a déjà été discuté lors de réunions permettant à chacun de conjuguer des points de vue « développement d'application » et des points de vue « activités des élèves ». Cela engage d'autres collaborations, par exemple autour de l'enseignement de l'informatique au lycée. Il faudra aussi produire des scénarios d'usage comme pour la ressource « ligne de pixels » afin que l'activité proposée lors de l'atelier ne reste pas au stade de germe. La grille d'analyse quant à elle devra être reprécisée en choisissant des cadres didactiques clairs et en croisant par exemple une échelle des questions vives avec les structures de contrôle.

## 5. Langue naturelle et raisonnement mathématique au lycée

Mouloud Abdelli, *Département de Mathématiques*, *Faculté des sciences exactes université Mentouri Constantine*, *mouloudabdelli@hotmail.fr*

### *5.1 Introduction*

Dans le cadre d'une étude sur les implications matérielle et formelle et qui consiste à étudier, entre autres, les équivalences de phrases langagières et des phrases symboliques, nous avons repris un problème, proposé par Denise Grenier – IREM de Grenoble. Nous avons quantifié ces équivalences auprès d'étudiants de 3e année de licence mathématique académique de l'Université de Constantine ayant suivi un enseignement en Français (langue non maternelle).

### *5.2 Problème 1 : reconnaissance de l'équivalence (ou non) avec une proposition donnée*

Soit la proposition : « $x^2$ se termine par 996 si le nombre x se termine par 114 » que l'on notera « A si B ». Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

Nous avons porté sur le tableau ci-dessous les réponses de 127 étudiants de 3e année de licence. Nous avons joint une (*) aux réponses correctes du point de vue de la logique formelle.

| | Oui | Non | Je ne sais pas | Équivalence % |
|---|---|---|---|---|
| Pour que A il faut que B | 45 | 81* (10) | 1 | 63 |
| Pour que B il faut que A | 84* (4) | 39 | 4 | 66 |
| Pour que A il suffit que B | 97* (16) | 28 | 2 | 76 |
| Pour que B il suffit que A | 23 | 99* (16) | 5 | 77 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Non A ou B | 19 (5) | 98* | 10 | 77 |
| A et non B | 13 | 107* (13) | 7 | 84 |
| (non B) ou A | 102* (5) | 24 | 1 | 80 |
| A => B | 16 | 98* (16) | 13 | 77 |
| non A => non B | 100* (13) | 27 | 0 | 78 |
| B seulement si A | 70* (4) | 47 | 10 | 55 |
| non B si A | 11 | 104* (18) | 12 | 81 |

Les réponses produites par les 127 étudiants montrent que la reconnaissance de l'équivalence d'une phrase avec la phrase « A si B » est de l'ordre de 2/3 pour les expressions de type « Pour que…il faut que… ». Elle est supérieure à 3/4 pour les expressions « Pour que…il suffit que… » et les phrases « en termes symboliques ». Pour la phrase « B seulement si A », l'équivalence avec la phrase « A si B » n'est reconnue qu'à hauteur de 55 %.

Dans le raisonnement déductif, on n'utilise jamais « P seulement si Q », puisque P est vérifiée d'abord, pour en déduire Q. D'où la question qui peut se poser : si P est avant Q, comment Q peut-elle être une condition nécessaire à P ? On peut faire l'hypothèse que l'enseignement usuel, qui privilégie très fortement le raisonnement déductif, crée une conception temporelle et causale de l'implication qui se résume ainsi : *« Examiner ou utiliser P=>Q n'a de sens que si P et Q ont un lien de cause à effet entre eux, et dans "P=>Q", P est avant Q ».* Cette conception fait obstacle à l'objet « implication », puisque, en logique formelle, on décide de la véracité d'une implication uniquement sur le critère de véracité de chacune des propositions.

Pour les 4 premières phrases, la réponse correcte est NOON. 76 étudiants sur 127 ont produit une réponse correcte conforme à B=>A. Or, on a enregistré aussi que 51 sur 127 ne peuvent reconnaître des phrases équivalentes (ou non) à la phrase « A si B » :

- 18 étudiants sur 51 ont produit la réponse « ONNO » qui est conforme à « A=>B ».
- 9 étudiants sur 51 ont produit des réponses partielles. Ce sont des productions qui comportent la réponse « je ne sais pas ».
- 24 étudiants sur 51 [ONON(13), NONO(5), ONNN(4), OONN(1), OOON(1)] ont produit des réponses incorrectes faisant ressortir essentiellement des contradictions : B<=>A et B<≠> A.

La grande diversité des réponses incorrectes pour ces quatre phrases révèle qu'il y a une réelle difficulté à distinguer condition nécessaire, condition suffisante et leurs rapports à l'implication ou à l'équivalence. C'est comme si l'utilisation quasi exclusive du raisonnement déductif dans l'enseignement, même à un niveau élevé, ne permet pas de construire une connaissance sur l'implication comme concept mathématique, car ce qui se construit semble rester très proche de la logique naturelle.

### *5.3 Problème 2 : Transcription en termes symboliques d'une phrase donnée*

Énoncé : on considère les assertions A et B suivantes : A : « *Une condition pour qu'un entier N différent de 2 soit premier est qu'il soit impair » ; B : « Une condition pour qu'un nombre soit divisible par 5 est que l'écriture en base 10 de ce nombre se termine par un zéro* ».

1. Écrire les assertions A et B dans le langage symbolique.
2. Indiquer, pour chaque cas, la condition nécessaire et la condition suffisante.
3. Y a-t-il dans A et B des conditions nécessaire et suffisante à la fois ? justifier votre réponse.

Soient $A_1$ : « N différent de 2 est premier » ; $A_2$ : « N est impair »

$B_1$ : « M est divisible par 5 » ; $B_2$ : « l'écriture de M en base 10 se termine par 0 »

Réponses à la question 1 : assertion A : réussite ($A_1 \Rightarrow A_2$) : 28 % ; assertion B : réussite ($B_1 \Rightarrow B_2$) : 4 %. Peut-on supposer que les très faibles réussites enregistrées, ici, sont dues à une mauvaise perception de l'implication proposée ? Les réponses fausses produites sont « $A_2 \Rightarrow A_1$ » et « $B_2 \Rightarrow B_1$ ». Pour l'assertion B, que peut-on dire pour le cas M = 0 ? Peut-on dire que M = 0 est divisible par 5 ?

Réponses à la question 2 : assertion A : réussite : 38 % ; assertion B : réussite : 19 %. Les résultats obtenus révèlent une certaine incapacité des auteurs à transcender le palier du calcul propositionnel. Ils sont loin du cadre du raisonnement déductif (pratique usuelle dans l'enseignement) qui met en jeu l'ostensif « Si…, alors… » Les relations causales dans chacune des assertions A et B ne sont pas repérées.

Réponses à la question 3 : seulement 54 étudiants sur 127 ont répondu correctement. 19 sur 127 considèrent qu'il y a dans A et B des conditions nécessaire et suffisante à la fois, mais aucune justification n'a été donnée.

### *5.4 Conclusion*

Le problème de compréhension des textes étant d'un point de vue didactique « comment développer la possibilité pour un élève d'acquérir des connaissances nouvelles par la lecture, c'est-à-dire comment développer sa capacité de comprendre des textes sur des thèmes et sur des sujets qui ne lui sont pas déjà familiers ? ». Ainsi, le processus de compréhension doit être analysé de façon spécifique dans chacune des situations de lecture possibles. La plupart des textes auxquels les étudiants sont confrontés et à propos desquels les enseignants constatent des difficultés de compréhension lors de la lecture relèvent de l'une de ces situations de lecture.

### *5.5 Références*

Abdelli, M. (2009). *La dimension linguistique dans l'enseignement des mathématiques.* Dakar : EMF.

Bebbouchi, R. (2009). *Le passage des mathématiques en arabe aux mathématiques en français en Algérie.* Dakar : EMF.

Grenier, D., Deloustal, V. (2001). L'implication dans le raisonnement mathématique : état des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants. *Conférence publiée dans Learning in mathematics and Science and Educational Technology*, A. Gagatsis Éd., Intercollege press Cyprus.

Grenier, D. (2005). *Eléments d'analyse des problèmes sur l'implication.*

Kazadi, C. (2009). *Quelques difficultés logico — linguistiques des élèves congolais du secondaire*. Dakar : EMF.

# Atelier 2

## Le travail collaboratif des enseignants : conception de ressources et formation

**Magali Hersant*, Sophie Soury-Lavergne****

** CREN, IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes*
*4 chemin de Launay Violette*
*44300 NANTES*
*magali.hersant@univ-nantes.fr*

*** S2HEP-IFE-ENSL*
*19, allée de Fontenay*
*69007 Lyon*
*sophie.soury-lavergne@inrp.fr*

*RÉSUMÉ : Actuellement, le numérique modifie considérablement les modes d'élaboration de ressources pour l'enseignement des mathématiques, le travail des enseignants et leur formation. Dans cet atelier, à partir de différentes recherches soutenues par l'IFÉ, nous avons exploré la question du travail collaboratif des enseignants de mathématiques du point de vue de la production de ressources et de la formation. Nous nous sommes particulièrement attachés aux ressources relatives à la démarche d'investigation.*

*ABSTRACT: Information Technology drastically changes the way mathematics education resources are produced, along with the training and daily work of teachers. Relying on research work supported by IFÉ, we have considered in this workshop the problem of the collaborative work of teachers of mathematics from the point of view of both resource production and training, focusing, in particular, on inquiry-based science teaching.*

*MOTS-CLÉS : travail collaboratif ; ressources ; formation ; démarche d'investigation ; collège ; lycée*

*KEYWORDS: collective work ; ressources ; training; INQUIRY BASED SCIENCE TEACHING ; SECONDARY SCHOOL*

## Introduction

Avec l'évolution numérique, mais aussi l'évolution de la formation, le travail collaboratif des enseignants et les « communautés » virtuelles se développent. La conception et l'échange de ressources pour la classe constituent un enjeu important, tant du point de vue technologique de la faisabilité que du point de vue didactique de la qualité des ressources proposées. Il est d'autant plus grand qu'il faut, à la fois, que les enseignants poursuivent l'intégration d'outils technologiques dans les enseignements et répondent à des injonctions nouvelles comme mettre en œuvre la démarche d'investigation (DI).

Dans cet atelier, les échanges ont concerné différents aspects de cet enjeu et en premier lieu la mise en œuvre de la démarche d'investigation et ce qui permet de favoriser la responsabilité des élèves dans le travail mathématique. Deux contributions ont proposé des problèmes mathématiques pouvant être des supports ou des points de départ pour l'élaboration de séances ou scénario pour la démarche d'investigation (M. Nowak pour e-CoLab et F. Loric et G. Gueudet dans Pairform@nce). L'équipe E-DHES (G. Gueudet et M. P. Lebaud) a présenté différents points de vue relatifs à la démarche d'investigation, et la contribution sur à LaboMep (de B. Clerc) a fait le tour de nouveaux outils pour la conception de scénario d'enseignement avec les TICE.

Par ailleurs, la question du collectif a été traitée par les quatre contributions, d'une part à travers l'idée de partage et de diffusion de ressources et d'autre part en questionnant la formation des enseignants. Pour LaboMep il s'agit de proposer des outils technologiques pour le partage de séances de classe au sein d'un établissement. Pour l'équipe e-CoLab qui élabore des ressources pour l'utilisation de la calculatrice TI-*n*spire, la question est d'identifier les présentations de ressources pertinentes pour favoriser leur utilisation par les enseignants, en examinant notamment la différence entre ressources « papier » et ressource « en ligne ». F. Loric et G. Gueudet de l'équipe Pairform@nce abordent la question du collectif et de la collaboration dans la formation des enseignants et examinent notamment les outils, en ligne ou pas, qui peuvent être proposés pour soutenir le travail collaboratif. Enfin, l'équipe E-DHES (G. Gueudet et M.P Lebaud) aborde explicitement le rôle des collectifs d'enseignants dans la formation et étudie leurs différentes configurations et objectifs.

## 1. LaboMep, pour scénariser la mise en œuvre de ressources

*Équipe LaboMep, IREM de Montpellier : B. Clerc, benjamin.clerc@sesamath.net*

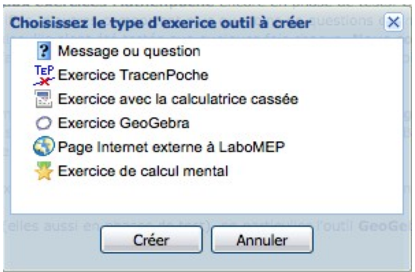
### *1.1. Présentation de LaboMep*

LaboMep est le descendant direct de Mathenpoche réseau, son nom initial est d'ailleurs Mathenpoche réseau v3 (Clerc, 2008). Il reprend les fonctionnalités de Mathenpoche, on y trouve donc la possibilité d'associer à des élèves des séances proposant : des exercices Mathenpoche, des exercices avec de la géométrie dynamique (Tracenpoche), des exercices avec de la géométrie aux instruments virtuels (Instrumenpoche), des exercices de calcul mental, des exercices avec tableur (Casenpoche).

Dans ces séances, il était possible, avec une certaine maîtrise du langage html, de proposer bien d'autres ressources (Clerc, 2008). Cela a été rendu possible, pour tous, pour de nombreux types de ressources dans Labomep. En plus des exercices Mathenpoche habituels, il est possible de proposer aux élèves de la même manière : les exercices en cours de développement (en langue étrangère ou les exercices du Mathenpoche initial repris au nouveau modèle) (Hache, 2010) ; les exercices issus de la recherche Lingot (Grugeon *et al*, 2011) ; les aides des exercices Mathenpoche ; les exercices de calcul mental de Calcul@tice (dans la bibliothèque) ; les QCM et « à toi de jouer » des manuels Sésamath, corrigés par animation ; les énoncés des exercices des ressources papier de Sésamath (manuels et cahiers d'exercices).

### *1.2. Le partage des ressources*

Des ressources partagées par des collègues (pour l'instant ceux de l'établissement du compte en cours d'utilisation) et les ressources créées par le détenteur du compte sont aussi disponibles via l'interface ci-dessous :




« Message ou question » permet de présenter à l'élève tout contenu insérable dans une page html : image, vidéo, texte, équations… accompagné éventuellement d'une zone de saisie pour récupérer du texte saisi par l'élève.

« Page internet externe à LaboMep » permet de construire une ressource à partir d'une URL externe (il faut s'assurer du droit de faire cela) accompagné éventuellement d'une consigne et/ou d'une zone de saisie pour récupérer du texte saisi par l'élève (Hache, 2011c).

« Exercice Tracenpoche » et « Exercice Geogebra » permettent de créer une ressource contenant une consigne, un logiciel de géométrie dynamique vide (éventuellement paramétré) ou avec une figure à manipuler et/ou à compléter, et éventuellement une zone de saisie pour récupérer du texte saisi par l'élève. Bien sûr, la figure réalisée par l'élève est ensuite consultable par son professeur (Hache, 2011b).

« Exercice avec la calculatrice cassée » permet de donner une consigne avec zone de saisie, par exemple, on « casse » la touche virgule et on demande d'afficher 0,75.

Pour « Exercice de calcul mental », voir (Hache, 2011a).

L'inscription à LaboMep se fait via Sésaprof, elle est gratuite et ouverte à toute personne pouvant prouver son appartenance au corps enseignant (une adresse mail professionnelle suffit).

### *1.3. Le travail en classe avec LaboMep*

Toutes ces ressources peuvent être proposées au sein d'une séance de travail affectée à un groupe d'élèves (cette séance est paramétrable : horaires, ordre imposé, priorité). Cette séance peut être composée des divers éléments listés ci-dessus[1].

Une fois la séance traitée par les élèves, l'enseignant a accès à son bilan qui propose une évaluation chiffrée de chacun des exercices Mathenpoche abordés, les figures de géométrie réalisées par l'élève et les textes qu'il a saisis.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Exercice 47 1) page 273 | | Pas de réponse donnée | Ven 25 Févr, 14h22 | 1 min 10 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Exercice 47 2) page 273 | | Pas de réponse donnée | Ven 25 Févr, 14h24 | 26 s |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Exercice 47 1) page 273 | | Pas de réponse donnée | Ven 25 Févr, 14h24 | 5 min 52 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Contrôle leçon milieu | | B | Ven 25 Févr, 14h30 | 41 s |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Contrôle leçon distance | | A | Ven 25 Févr, 14h31 | 32 s |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Calculs assistés | 5/5 | | Ven 25 Févr, 14h31 | 8 min 4 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Calculs de longueurs | 7/10 | | Ven 25 Févr, 14h40 | 9 min 24 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Calculs de longueurs | 10/10 | | Ven 25 Févr, 14h50 | 4 min 29 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Autour du segment | 3/10 | | Ven 25 Févr, 14h54 | 10 min 2 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Autour du segment | 9/10 | | Lun 7 Mars, 09h51 | 16 min 2 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Parallélogrammes par le milieu | 4/5 | | Lun 7 Mars, 10h08 | 28 min 2 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Détermination par le milieu, symétriques | 4/5 | | Lun 7 Mars, 10h36 | 4 min 57 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Distances et cercles | 5/5 | | Lun 7 Mars, 10h41 | 5 min |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Distances et triangles | 4/5 | | Lun 7 Mars, 10h47 | 13 min 2 |
| Sous-séance 1 | kalioudjoglou hugo | 210 | Distances et quadrilatères | 5/5 | | Lun 7 Mars, 11h00 | 8 min 31 |

Sur le bilan ci-dessus, les trois premières lignes concernent la correction d'un exercice donné à faire lors du cours précédent. L'élève en prend connaissance et prend note de la correction si nécessaire, les deux lignes suivantes correspondent à des QCM évalués grâce à la réponse saisie par l'élève (réponse B puis réponse A). À noter que le vendredi 25 février l'élève a répondu pendant une séance de classe, la

[1] Voir l'exemple d'une telle ressource dans le travail d'analyse d'une ressource pour l'enseignement des sciences de B. Clerc, accessible en ligne : <bnjclerc.perso.neuf.fr/IMG/pdf/analyse_ressource.pdf>.

séance était à terminer pour la rentrée des vacances d'hiver, il s'est connecté pendant les vacances le lundi 7 mars pour terminer son travail. Le contrôle de leçon a été évalué comme un travail fait en classe, le reste de la leçon a donné lieu à une note de devoir maison.

## 2. e-CoLab, des équipes hybrides pour des mathématiques dynamiques

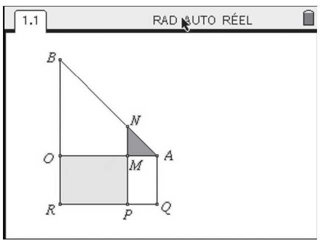
*Équipe e-CoLab, IFE, IREM de Lyon, de Paris et de Montpellier : M. Novak marie.nowak@univ-lyon1.fr*

L'équipe e-CoLab est l'auteur de ressources pour la classe issues d'un travail collaboratif et de l'expérimentation de la plate-forme TI-*n*spire, composées d'une calculatrice et d'un logiciel « jumeau » qui a débutée en 2006. Ces ressources sont publiées dans la collection « Mathématiques dynamiques » ($2^{de}$, $1r^{e}$, et $T^{ale}$). Les membres du groupe sont répartis dans trois villes éloignées (Montpellier, Lyon et Paris). La collaboration a lieu en présentiel en moyenne trois fois par an pour la totalité de l'équipe et selon les besoins dans chaque ville. Le reste du travail a lieu à distance.

S'agissant de la production d'ouvrage, après avoir fait le choix de germes de ressources, il a été très rapidement question de la forme à donner aux productions. Ce point apparaissant comme primordial dans tout travail collaboratif, nous avons proposé aux participants de l'atelier une réflexion autour de la forme à donner aux productions mises à disposition des enseignants.

### *2.1. Mise en activité des participants de l'atelier*

La question posée aux participants a été la suivante : quelles seraient vos exigences vis-à-vis d'une ressource à destination des enseignants ? Le support choisi est volontairement simple (connu et d'un accès facile au niveau mathématique).




Sur la figure : le triangle OAB est rectangle et isocèle en O avec OA = 4. Le quadrilatère OAQR est un rectangle avec OR = . Par un point M du segment [OA], on a tracé une parallèle à (OB) qui coupe [AB] en N et [RQ] en P.

Question : existe-t-il une position du point M telle que l'aire du rectangle OMPR et l'aire du triangle MNA soient égales ?

Les propositions des participants relatives à la forme à donner à une ressource qui en facilite l'appropriation par des enseignants pouvaient être contextualisées en s'appuyant sur l'énoncé proposé, ou décontextualisées. Dans les deux cas, il s'agissait d'identifier les informations à fournir et les informations à omettre pour ne pas décourager.

### *2.2. Quelques éléments du débat*

Lorsqu'on dispose d'un problème, il faut se donner un moyen de le transformer en situation. Diverses situations correspondent à un même problème, il faut donner des indications à ce sujet. Certaines sont incontournables : niveau, objectifs, prérequis, déroulement. D'autres apparaissent souhaitables : matériel ; résolutions attendues ; documentation des différents registres à utiliser ; variantes de la ressource, en donnant précisément les variables didactiques qui permettent aux enseignants de faire des choix en connaissance de cause. Se pose également la question de l'insertion de ce problème dans une progression, ce qui n'est pas précisé.

Des copies d'écran, de la TI-*n*spire ou d'un logiciel, marquant des étapes de la recherche du problème posé permettent de fournir beaucoup d'informations sous forme condensée, rapidement accessible.

Par ailleurs, il faut noter que les exigences de qualité et le potentiel d'une ressource ne sont pas nécessairement les mêmes pour des ressources en ligne ou des ressources papier. En ligne, une zone de retour sur expérimentation peut être prévue. La qualité des ressources déposées en ligne est plus ou moins contrôlée en fonction des sites. Par exemple, le contrôle pourra être plus affiné sur un site académique. En revanche, sur le site Intergeo, il n'y a pas de restriction au niveau des auteurs et la qualité est construite à partir des avis des utilisateurs. En version papier, une ressource dans un livre a un label. Par exemple, pour eCoLab, l'étiquette INRP, puis IFé et le nom de l'éditeur sont des indices de qualité pour les enseignants.

Devant le foisonnement des ressources, la question est posée du contrôle des productions et de la synthèse de ce qui est à disposition, au niveau national. L'exemple du Japon, montre un concours annuel qui permet une évaluation des productions et leur normalisation. Les IREM devraient-ils tenir ce rôle ? Publimath est-il un élément de réponse à ce contrôle de qualité ?

En guise de conclusion : tout groupe producteur de ressources devrait pouvoir bénéficier d'un regard extérieur critique.

## 3. Pairform@nce, un dispositif innovant de formation des enseignants

*Équipe Pairform@nce : Ghislaine Gueudet, CREAD, IUFM Bretagne et IREM Rennes ; François Loric, IREM Rennes, ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr*

### *3.1. Le programme Pairform@nce*

Le programme national Pairform@nce, et les travaux du projet de recherche associé, INRP-Pairform@nce, ont déjà été évoqués à plusieurs reprises dans les journées mathématiques de l'INRP (Soury-Lavergne *et al.* 2010). Nous en rappelons ainsi simplement ici les principes essentiels.

Il s'agit d'un programme de formation continue, visant l'intégration des TICE pour toutes les disciplines et à tous les niveaux scolaires. Ces formations sont hybrides, basées sur un principe de conception collaborative de séquences de classe par des équipes de stagiaires accompagnés par des formateurs. Une plate-forme nationale héberge des parcours de formation ; des formateurs intéressés par un parcours peuvent demander son transfert sur leur plate-forme académique, sur laquelle ils peuvent alors modifier ce parcours et l'utiliser pour une formation avec des stagiaires. Les parcours de formation sont très divers, ils contiennent de multiples ressources, pour les formateurs comme pour les stagiaires : calendrier de la formation, exemples de séquences, articles de recherche, guides de prise en main de logiciels, forums, espaces de dépôt pour les stagiaires etc. Cependant ils sont tous structurés selon sept étapes : introduction de la formation, sélection des contenus d'enseignement et constitution des équipes, co et autoformation, production collective d'une séquence pédagogique, mise en œuvre de la situation dans la classe, retour réflexif, évaluation de la formation.
Nous présentons ci-dessous, au-delà de ces caractéristiques communes, les principaux choix effectués pour le parcours que nous avons conçu à propos des démarches d'investigation en mathématiques au collège, avec différents types de logiciels.

### *3.2. Le parcours « démarches d'investigation », principaux choix*

Les choix de structure que nous avons faits pour le parcours « démarches d'investigation » sont issus d'expériences précédentes en tant que concepteurs de parcours, ou que formateurs dans des formations Pairform@nce. Les choix pour le contenu proviennent de notre expérience de formation à différents logiciels et de résultats établis par la recherche en didactique sur les démarches d'investigation. Ici encore, nous en faisons une présentation rapide ; d'autres aspects sont évoqués dans Gueudet *et al*. (2010).

*Déroulement de la formation*

La formation se déroule sur 13 semaines (hors vacances scolaires) et comporte trois journées présentielles. Elle débute par une prise de contact par mail, une semaine avant le premier présentiel. Celle-ci permet de collecter les attentes des stagiaires, et de s'informer sur le matériel dont ils disposent. Lors du premier présentiel, la formation est présentée, les équipes sont constituées, des exemples sont étudiés, un temps de prise en main de logiciels est aussi dégagé. Entre les deux présentiels, les équipes réalisent un TP. Deux énoncés mathématiques au choix sont présentés aux stagiaires afin que chacun puisse choisir un énoncé qui soit en relation avec les niveaux de classe auxquels il enseigne. L'objectif est alors d'amorcer un travail en équipe autour de l'énoncé choisi afin de concevoir une mise en œuvre possible dans une classe prenant en compte la dimension « démarche d'investigation ». Ces TP donnent lieu à des discussions lors du deuxième présentiel, au cours duquel les équipes commencent également à élaborer leurs séquences. Ces séquences sont testées en classe et observées ; leur description est déposée sur la plate-forme, éventuellement des modifications sont apportées pour une deuxième mise en œuvre en classe. Elles sont présentées et débattues lors du troisième présentiel.

*Organisation de la collaboration*

La présence de deux enseignants d'un même établissement au sein d'une même équipe favorise un travail collaboratif et des pratiques de mutualisation au-delà de la formation. La rencontre entre des enseignants d'établissements différents est souvent l'occasion de découvrir de nouvelles pratiques ; de plus, dans le cas d'une formation Pairform@nce, elle oblige au travail distant et incite à l'exploitation de la plate-forme, ce qui est un des objectifs de la formation.

Par conséquent, une équipe est idéalement composée d'enseignants d'un même collège et d'enseignants de collèges différents. Chaque équipe a à sa disposition un forum de discussion sur la plate-forme.

*Ressources pour la conception de séquences*

Afin de permettre la conception collaborative de séquences, à distance en particulier, et de favoriser les échanges entre les équipes et les mutualisations, les concepteurs ont fait le choix de proposer aux stagiaires l'utilisation de ressources spécifiques. Trois grilles ont été ainsi élaborées, chacune ayant sa spécificité : décrire le scénario d'une séquence, rendre compte des observations effectuées lors d'une séance, faire le bilan d'une séquence.

### *3.3. Exemple d'une ressource : le TP de début de formation*

Une fois les équipes formées, une première activité collective leur est proposée. Il s'agit de réaliser un scénario pour une séance en salle informatique (que nous nommons ici « un TP » - notons que cette activité des stagiaires est elle-même considérée comme un TP). Nous proposons aux stagiaires deux textes de problèmes ;

ils doivent en retenir un, et proposer un scénario pour sa mise en œuvre en classe avec un logiciel (voir sur la figure 1 ci-dessous un exemple de problème).

Situation 1 : trois pailles ...plus une !

**Énoncé :**

**Aurélien joue avec quatre pailles de même longueur.**
**Il commence par les utiliser pour construire un carré, puis décide de construire un triangle équilatéral.**

**Mais il lui reste une paille dont il ne sait que faire.**

**Il décide alors de faire la construction suivante :**

- **Choisir un point à l'intérieur du triangle.**
- **Couper le bout de paille nécessaire pour qu'il touche perpendiculairement l'un des côtés du triangle à partir du point choisi à l'intérieur du triangle.**
- **Couper le bout de paille nécessaire dans le morceau restant pour qu'il touche perpendiculairement un autre côté du triangle à partir du même point.**

**Le morceau restant sera-t-il suffisamment long pour terminer la construction ?**

**Figure 1**. *L'énoncé « trois pailles plus une », proposé comme support au TP de début de formation*

Les stagiaires utilisent ainsi une première fois la grille de description. Les scénarios sont déposés sur la plate-forme ; ils sont utilisés lors du deuxième présentiel pour discuter les caractéristiques d'une séance proposant une démarche d'investigation. Ce problème permet en particulier de poser la question du rôle du logiciel, selon l'objectif assigné à la situation ; de l'articulation entre investigation et initiation à la démonstration ; des savoirs qui peuvent être institutionnalisés après une séance d'investigation. Les points de vue au sein d'une équipe, et dans le groupe entier, peuvent être très divers ; ils donnent lieu à des débats, suite auxquels les formateurs projettent un diaporama relatif aux démarches d'investigation, et aux usages possibles de logiciels pour ces démarches.

## 4. Démarches d'investigation et collectifs dans la formation des enseignants

*Équipe e-DHES et IUFM de Bretagne : G. Gueudet, M.-P. Lebaud,*
ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr

Notre travail vise à contribuer à l'élaboration de formations aux démarches d'investigation (DI, dans ce qui suit) en classe de mathématiques. De nombreux travaux de recherche ont étudié l'impact de telles formations, selon les choix de dispositifs qui sont faits. Nous avons donc souhaité faire un bilan des résultats apportés par ces travaux, en nous intéressant particulièrement aux apports de collectifs de professeurs, pour appuyer la conception de formations futures.

Nous avons retenu environ cinquante articles, chapitres de livres et actes de conférences représentant une grande variété de contextes nationaux, et évoquant des formations visant des évolutions en classe ménageant de plus grandes responsabilités aux élèves. Nous avons examiné dans ces articles comment étaient caractérisées, explicitement ou non, les DI. Nous avons ensuite relevé la nature et le rôle des collectifs impliqués, ainsi que les impacts de la formation.

### *4.1. Différents points de vue sur les DI*

Les DI ont donné lieu à de nombreux travaux. Matheron (2010) présente une mise en perspective à laquelle nous nous référons ici. Il montre en particulier que selon les auteurs, les DI désignent un positionnement théorique, ou une forme de mise en œuvre en classe. Les DI peuvent aussi être vues comme objets d'enseignement (mais nous n'avons pas rencontré de travaux en mathématiques portant sur cette dimension).

En termes de positionnement théorique, deux dimensions principales des DI en mathématiques apparaissent : d'une part, questionner le réel et faire le lien entre le réel et les concepts scientifiques et, d'autre part, « mener une enquête » (NCTM, 2000). La technologie (calculatrices et ordinateurs) est également présentée comme essentielle à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, et susceptible de soutenir l'investigation. Du côté de la mise en œuvre en classe, de nombreux travaux se réfèrent aux « leçons japonaises » (Miyakawa & Winsløw, 2009). Une telle « leçon » se déroule en cinq phases : d'abord l'enseignant propose une question ouverte (hatsumon) ; les élèves travaillent sur ce problème (kikan-shido) ; puis certains – choisis par l'enseignant - font une présentation des résultats obtenus (takuto). Ces présentations sont ensuite discutées par tous les élèves (neriage) et l'enseignant conclut cette leçon en résumant le travail accompli (matome). Dans ce dispositif, les rôles de l'enseignant et des élèves sont parfaitement définis. En France, des dispositifs de mise en œuvre de DI sont apparus dans les programmes mis en place au collège (Bulletin officiel, 2007) : dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques, les DI sont mises en avant comme une des méthodes d'enseignement possibles, en fonction du sujet traité. Elles sont décrites sous la forme d'un « canevas » en sept points ; mais celui-ci ne précise pas les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves.

### *4.2. Dispositifs de formation et collectifs de professeurs*

Nous distinguons les collectifs de professeurs, encadrés par des formateurs dans le cadre d'une formation « officielle » ; et des groupes de type recherche-formation, associant des professeurs et des chercheurs.

Le dispositif emblématique du premier cas est la « lesson study » japonaise, qui vise la formation aux « leçons » évoquées ci-dessus. Elle comporte une préparation, une mise en œuvre observée par tous les membres du collectif de professeurs (encadré par un enseignant plus expérimenté), puis un retour amenant des modifications. Elle a été adaptée dans de nombreux pays, donnant lieu à des dispositifs de type « conception et étude collective de leçons », qui remplacent souvent l'observation directe par les vidéos de classe (Inoue, 2011).

Le deuxième cas se rapproche des groupes IREM, il a été particulièrement étudié dans le projet LCM (Jaworski *et al.* 2007). Dans ces groupes se développe un certain positionnement commun de recherche : on assiste à l'émergence d'une « communauté d'investigation ».

### *4.3. Impacts des formations et rôle des collectifs*

Le travail dans les collectifs amène des évolutions dans la préparation de la classe, comme dans la mise en œuvre, les deux étant étroitement articulés.

Pour la préparation, comme les DI amènent de l'incertitude dans la classe, le fait d'avoir plusieurs points de vue permet une anticipation plus complète des possibles. Par ailleurs la préparation collective donne lieu à des analyses a priori approfondies, qui contribuent au développement de l'attention aux savoirs en jeu.

Pour la mise en œuvre en classe, les professeurs développent une attention aux procédures des élèves. La confrontation de plusieurs points de vue dans le collectif montre que différentes interprétations de la même production d'élève peuvent être faites. Ceci, et la préparation approfondie évoquée plus haut amènent une plus grande attention aux raisonnements des élèves et à l'exploitation de leurs productions qui peut être faite en classe.

La dimension collective, en particulier lorsqu'il s'agit de professeurs du même établissement, est un facteur de durabilité pour les acquis de la formation. Cependant la question des moyens à mettre en œuvre pour de telles formations reste posée : en effet, les dispositifs évoqués sont généralement longs, en particulier les communautés semblent se développer particulièrement après deux années de travail.

## Discussion et conclusion

Les présentations de l'atelier ont donné un aperçu des modalités possibles de travail collaboratif des enseignants. D'autres modalités existent probablement ou sont encore à inventer. Ces présentations nous ont aussi questionnés quant aux hypothèses implicites qui président à la constitution de ces collectifs, au-delà du fait que le numérique, à la fois, permet ce travail et y incite. Si on peut raisonnablement penser qu'un collectif de praticiens a la capacité de produire du « nouveau », ce qui est particulièrement important, on peut aussi se demander dans quelles mesures ce qui est produit par ce collectif est adapté à d'autres praticiens. Se pose alors la question de la qualité des ressources au sens d'une qualité qui permettrait une appropriation large de ces ressources. Des travaux sont probablement nécessaires dans cette direction pour dégager des conditions de cette qualité.

Par ailleurs, et de façon dépendante, l'atelier a donné lieu à des débats concernant les ressources produites. Il n'est certainement pas anodin que le travail collaboratif se développe aujourd'hui en particulier à propos de la démarche d'investigation dans la mesure où les enseignants sont là confrontés à une injonction institutionnelle nouvelle. Mais cette nouveauté appelle d'autant plus d'exigences au niveau des ressources produites puisque les références partagées par les enseignants à ce sujet sont moindres. Or, nous avons à plusieurs reprises discuté au cours de l'atelier des objectifs d'apprentissage de ces situations : ils ne semblent pas suffisamment explicites. Peut-on les expliciter ? Là encore, des recherches sont à mener.

### *Bibliographie*


Clerc B. (2008) Intégration des outils Mathenpoche : Exercisation et convergence vers un laboratoire de mathématiques, *Colloque TICE*, Lille 2008.

Clerc B. (2009) Pour un usage optimal de Mathenpoche en classe, *MathémaTICE.*

Gueudet G., Lebaud M.-P., Loric F. & Sicard M. (2010) Démarches d'investigation en mathématiques : l'exemple d'un parcours Pairform@nce. In Gueudet, G., Aldon, G., Douaire, J. & Trgalova, J. (Eds.). *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? Actes des journées mathématiques de l'INRP 2010*. Lyon : INRP.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Delozanne E., Chenevotot F., Vincent C., Prévit D. & El Kechai N. (2011) PepiMep : différencier l'enseignement du calcul algébrique en s'appuyant sur des outils de diagnostic, *MathémaTICE*.

Hache S. (2010) les nouveaux exercices Mathenpoche dans Labomep, *MathémaTICE*.

Hache S. (2011a) Calcul mental dans Labomep, *MathémaTICE*.

Hache S. (2011b) Labomep : pour rendre accessible la géométrie dynamique (AC n° 3), *MathémaTICE*.

Hache S. (2011c) Tout le Web dans Labomep ? (AC n° 3), *MathémaTICE*.

Inoue N. (2011) Zen and the art of neriage: facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, online.

Jaworski B., Fuglestad A.B., Bjuland R., Breiteig T., Goodchild S. & Grevholm B. (éd.) (2007). *Learning communities in mathematics*. Bergen : Caspar.

Matheron Y. (2010) « Démarches d'investigation » et Parcours d'étude et de recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système. *Conférence invitée au colloque de la CORFEM*, juin 2010, Caen.

Miyakawa T. & Winsløw C. (2009) Étude collective d'une leçon : un dispositif japonais pour la recherche en didactique des mathématiques. In I. Bloch, F. Conne, F. (éd.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (CD-rom). Grenoble : La Pensée sauvage.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000) *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA .

Soury-Lavergne S., Trouche L & Gueudet G. (2010). *De la conception de parcours de formation à leur appropriation par des formateurs,* Rapport du projet INRP-Pairform@nce 2008-2009 INRP, 152 p.

*Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, hors-série n° 6, vol. 2 du 19 avril 2007, <http://www.education.gouv.fr/bo/2007/hs6/default.htm>.

# Atelier 3

## Comment rendre les élèves créateurs de mathématiques dans la salle de classe


### Yves Matheron

*UMR P3 ADEF, Aix-Marseille Université et IFÉ-ENSL*
*yves.matheron@ens-lyon.fr*
*IREM d'Aix-Marseille, Faculté des Sciences de Luminy, Case 901, 163, avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*



*RÉSUMÉ : L'origine du travail présenté dans cet atelier tient à la volonté de dépasser un enseignement des mathématiques découpé en divers chapitres d'où le sens global de l'étude échappe à un grand nombre d'élèves ; cette préoccupation est l'une de celles qui ont motivé la création du réseau (CD)AMPERES réunissant neuf équipes académiques en France. Il s'agit alors d'inscrire l'étude dans une dynamique de continuité de l'enseignement, à partir de la recherche d'une élaboration collective, par les élèves et sous la direction du professeur, d'éléments de réponse à une question d'assez grande ampleur. Cette démarche est présentée dans cet atelier à travers divers exemples : début de l'enseignement de l'algèbre, fractions, triangles, géométrie synthétique. Une réponse à la question de la créativité mathématique des élèves peut être trouvée dans le concept d'extension praxémique.*

*ABSTRACT: (CD)AMPERES brings together nine teams. They are federated by the common idea to exceed the ordinary mathematics teaching it can be observed in many classrooms. A characteristic of this kind of mathematics teaching is to divide the mathematics knowledge in different chapters. A consequence is that, generally, many pupils do not perceive the global sense of the studied mathematics. (CD)AMPERES suggests another way: it tries to remove the teaching of mathematics into a continuing process. A question is proposed to the pupils. , Directed by the teacher, they study the mathematical possibilities of answer. The question must be rather great to generate more little questions. The answers set up a part of the mathematical course that must be taught. We present examples: the beginning of algebraic teaching, fractions, triangles, synthetic Geometry. An answer to the question of the pupils' creativity may be found through the concept of praxemic extension.*



*MOTS-CLÉS : parcours d'étude et de recherche, calcul algébrique, fractions, triangles, géométrie synthétique, extension praxémique*

*KEYWORDS: study and research course, algebraic calculus, fractions, triangles, synthetic Geometry, praxemic extension.*

**Présentation**

L'origine du travail présenté dans cet atelier tient à la volonté de dépasser un enseignement des mathématiques découpé en divers chapitres, souvent perçus comme déconnectés les uns des autres, et d'où le sens global de l'étude échappe à un grand nombre d'élèves. Changer cet état de fait est l'une des préoccupations qui ont motivé la création du réseau (CD)AMPERES dont on trouvera la présentation et les productions en ligne sur le site Educmath.

Il s'agit d'inscrire l'étude dans une dynamique de continuité de l'enseignement, à partir de la recherche collective, par les élèves et sous la direction du professeur, d'éléments de réponse à une question d'assez grande ampleur : par exemple, « comment calculer la distance entre deux points inaccessibles ? » Cette question se décline en des questions de plus faible amplitude qui apparaissent au cours de la recherche d'éléments de réponses à la question première, génératrice de l'étude. Un tel processus d'étude d'un savoir a été théorisé par Yves Chevallard sous le nom de Parcours d'Étude et de Recherche (PER) ; des similitudes existent avec un enseignement par situations enchaînées tel qu'on peut le trouver dans les travaux de Guy Brousseau, notamment dans *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Quelques-uns des éléments de la définition des PER, ainsi que certaines des raisons qui poussent à abandonner la forme actuelle de l'enseignement des mathématiques au profit de PER, sont exposés dans Chevallard (2007).

Pour (CD)AMPERES, constitué de neuf équipes d'académie autour d'un projet conjoint ADIREM-IFÉ, il s'agit de concevoir et d'expérimenter dans les classes « ordinaires » des collèges et lycées la possibilité d'un tel type d'enseignement des mathématiques, tout en respectant les contenus des programmes courants de la 6e à la terminale. Faire vivre la construction collective de réponses à une ou des questions, de manière à ce qu'elles soient ensuite identifiées et reconnues en tant que savoir mathématique, peut être vu par les élèves comme une création de mathématiques dont ils sont en grande partie les auteurs. La question qui se pose est celle des conditions didactiques à mettre en place afin de favoriser cette « créativité » collective en classe, ayant été résolue la question de la formation des professeurs à la conduite de PER, ce qui n'est actuellement pas le cas pour la profession des professeurs de mathématiques.

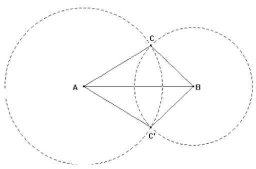
Chaque présentation ayant duré une heure, les extraits figurant dans ces actes sont constitués des descriptions succinctes de parties de PER de Collège conçus par trois des neuf équipes (CD)AMPERES travaillant en France. L'idée de concevoir et implanter un tel type d'enseignement au sein des classes rencontre les préoccupations de didacticiens d'autres pays d'Europe. Aussi trouvera-t-on, dans le compte rendu de cet atelier, une quatrième contribution : celle de collègues espagnols travaillant dans la même direction.

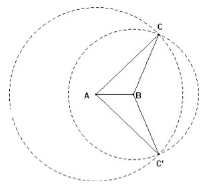
## 1. Organiser un parcours pour enseigner le triangle au collège

Catherine Desnavres & Équipe (CD)AMPERES de l’IREM d’Aquitaine

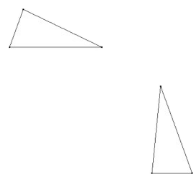
### *1.1. Le triangle en 6e (élèves de 11 à 12 ans)*

Dans ce PER, le triangle apparaît pour la première fois en 6e comme solution d’un problème : « soit un segment [*AB*] de 6 cm de longueur, placer tous les points situés à 5 cm de *a* et à 4 cm de *B* ». L’expérience est renouvelée avec des longueurs différentes. Les élèves voient deux triangles symétriques et disent qu’ils sont égaux.

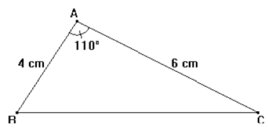



Le professeur demande ensuite de construire un triangle ayant trois mesures données comme longueurs de côtés (le triangle existe). Les élèves choisissent le côté par lequel ils commencent et la position dans laquelle ils vont dessiner le triangle. Des questions sont posées par les élèves eux-mêmes : « Dans une figure comme ci-dessous, les deux triangles sont-ils les mêmes ? Les triangles tracés par tous les élèves de la classe sont-ils les mêmes ? »



Pour reproduire un triangle dessiné avec un côté « horizontal » de longueur inconnue et connaissant les deux autres côtés et l’angle compris, les élèves veulent commencer par le côté « horizontal » sur lequel ils n’ont aucun renseignement. Ils sont bloqués ou obtiennent un triangle qui n’a pas de côté horizontal. Ils se demandent si leur triangle est bien le même que celui qu’ils devaient reproduire.




Commence ainsi à émerger « en acte », pour les élèves, la question de la construction de triangles vérifiant des conditions données sur côtés et angles.

### 1.2. En 5e (élèves de 12 à 13 ans), la question de la détermination des triangles

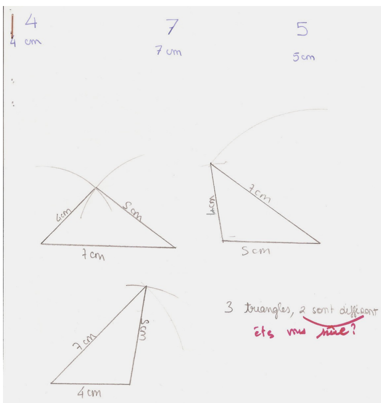
La question à travailler devient alors la suivante, même si elle n'est pas posée sous cette forme auprès des élèves : « Quelles données est-il nécessaire et suffisant de connaître sur les six éléments d'un triangle (angles et côtés) pour déterminer ce triangle à une isométrie près, à une similitude près ? »

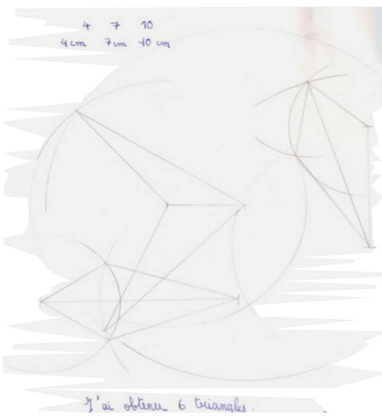
#### *1.2.1. Comment faire dévolution de la question aux élèves ?*

Placés dans une problématique pratique, les élèves peuvent réussir à reproduire un triangle dans le micro-espace de la feuille de papier. Mais s'ils peuvent effacer et ajuster à volonté sans perdre de vue le triangle à reproduire, ils n'éprouveront pas la nécessité d'une géométrie théorique pour résoudre le problème de la détermination d'un triangle ; ce qui est pourtant le but visé. Il est donc nécessaire de placer les élèves dans une problématique où la modélisation est nécessaire pour anticiper et diriger l'action et, de plus, concevoir une situation gérable en classe. Au niveau d'un espace plus grand (méso-espace), les constructions techniques impliquent la donnée de caractéristiques permettant de déterminer les objets choisis avant de les construire. La détermination des triangles prend alors du sens, car la problématique ne peut plus être pratique (par essais et erreurs). On transpose alors le problème du méso-espace à un autre, similaire, dans la feuille de papier.

#### *1.2.2. Triangle déterminé par la donnée de ses trois côtés*

La question à étudier est la suivante : « combien peut-on tracer de triangles ayant ces trois nombres comme longueurs de côtés ? », par exemple 4, 5 et 7 ou 4, 7 et 10. Les élèves proposent deux triangles symétriques, quatre triangles (en prenant les symétriques de chaque triangle par rapport au côté et par rapport à la médiatrice du côté), trois triangles (en commençant successivement par chacun des côtés), six triangles (avec les symétriques des trois triangles obtenus), ou encore douze triangles, en combinant toutes ces possibilités ; quelques productions ci-dessous :



*1.2.3. Comment convaincre les élèves qu'il n'y a qu'un seul triangle ?*

Mieux qu'une vérification approximative au calque, une preuve mathématique consiste à faire construire aux élèves les symétries qui font correspondre deux triangles superposables, à l'aide d'un logiciel de géométrie. On sait que trois symétries suffisent. Les élèves de ce niveau disposent de toutes les propriétés nécessaires pour justifier ensuite l'isométrie des triangles ainsi obtenus.

### *1.3. La poursuite par le travail sur l'inégalité triangulaire*

La question devient : « étant donnés trois nombres, peut-on toujours tracer au moins un triangle ayant ces trois nombres comme longueur de côtés ? »

De nombreux élèves ne prévoient pas l'alignement des points dans le cas de l'égalité. Ils ne sont pas convaincus de la non-existence d'un « vrai » triangle même s'ils voient les trois points alignés. Pour eux cela n'empêche pas l'existence d'un ou plusieurs « vrais » triangles non plats (Berté, 1995). Dans ce cas encore, la preuve mathématique s'impose. Le professeur note le point *C* sur le segment (*AB*), et les points *C*' et *C*'' symétriques hors de la droite dans la zone où les cercles semblent encore se toucher. Il y a deux cas de figure selon que *AB* est la plus grande des trois mesures (cercles tangents extérieurement) ou bien que c'est l'une des deux autres (cercles intérieurs). Il guide les élèves pour rédiger une preuve avec le théorème : si un triangle est isocèle, ses angles à la base sont égaux.

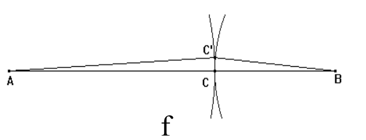



fig.3

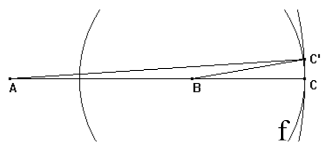



fig.4

La démonstration peut aussi reposer sur l'unicité d'un cercle passant par trois points ou sur la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment.

### *1.4. Conclusion*

Pour rendre les élèves capables de formuler consciemment des questions mathématiques, il est nécessaire que le professeur prépare leur travail par une sérieuse analyse mathématique et didactique *a priori*. En géométrie les situations proposées doivent conduire les élèves à se placer dans une problématique de modélisation. Par ailleurs, les questions posées doivent être suffisamment riches pour que les élèves trouvent de l'intérêt à leur étude. Elles sont donc à rechercher parmi celles qui engendrent les mathématiques de niveaux d'organisation élevés, de l'ordre du domaine ou du secteur mathématiques (la géométrie du triangle par exemple) et non aux seuls niveaux du sujet ou du chapitre, comme c'est trop souvent le cas des propositions trouvées dans les manuels ou sur l'Internet. Il reste ensuite à les transposer pour qu'elles soient adaptées à la recherche en classe, tout en veillant simultanément à exercer une vigilance épistémologique sur les questions choisies, tant du point de vue mathématique que didactique. La gestion de la classe favorise l'expression des élèves. L'analyse *a priori* a permis de déterminer par avance un grand nombre des questions et réactions d'élèves, ce qui, du point de vue du professeur, réduit leur caractère aléatoire et inattendu et favorise par anticipation leur traitement didactique.

## 2. Un PER sur les fractions. Comment les productions des élèves nourrissent nos PER ?

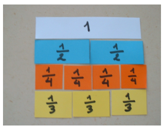
Ruben Rodriguez Herrera (IUFM & IREM de Basse-Normandie), Claudine Plourdeau (IREM de Basse-Normandie) & Équipe (CD)AMPERES de Caen

### *2.1. Introduction*

Au cours de cet atelier, nous avons tout d'abord présenté « l'Univers des bandes » : les élèves construisent des bandes de papier de 12 cm de longueur. Les actions de superposition pour comparer deux bandes et de juxtaposition pour les additionner construisent l'univers expérimentable dans lequel il est possible d'anticiper les actions réalisables. Nous avons ensuite présenté les premières séances du PER sur les fractions jusqu'à l'étape des calculs de sommes du type 1 / 3 + 1 / 3. Cet univers linéaire nous apparaît plus adapté pour débuter l'apprentissage des fractions. Ce n'est que plus tard que les élèves travailleront dans les univers de disques et secteurs, comme on les rencontre dans les propositions d'enseignement des fractions... L'univers des bandes et la formalisation associée permettent aussi d'aborder l'enseignement de la proportionnalité (Rodriguez, 2007). On trouvera ci-dessous la description factuelle de quelques moments de l'atelier.

### *2.2. Présentation générale : construire l'univers des bandes*

Les participants à l'atelier, tout comme les élèves, manipulent des bandes de papier de 12 cm de longueur. La première bande témoin est de couleur blanche. Puis ils construisent des bandes bleues, superposables entre elles ainsi qu'à une bande blanche si on juxtapose deux. La construction est réalisée par pliage ou par division : 12 cm ÷ 2 = 6 cm. On écrit sur chaque bande bleue 1 / 2 pour se rappeler qu'une bande blanche se superpose à deux bleues ; puis, à partir de bandes rouges de 12 cm, on construit quatre bandes rouges superposables entre elles et qui, mises bout à bout, sont superposables à une blanche. Une question apparaît qui a son importance pour la cohérence de la notation symbolique chiffrée : « Qu'écrire sur une bande rouge, 1 / 4 ou 4 / 1 ? » Dans la phase suivante, la consigne est posée à l'intérieur de l'univers formalisé symbolique : « fabriquer des bandes de couleur jaune sur lesquelles on pourrait écrire 1 / 3 ». Une grande importance est attachée à ce que les élèves expliquent ce qu'ils réalisent et à ce que l'enseignant évalue s'ils ont bien compris ce premier sens de l'écriture des fractions. Le calcul mathématique permet en effet d'anticiper le résultat et l'emporte sur des pliages difficiles à réaliser. Les participants à l'atelier ont pu constater que les élèves peuvent ainsi, à partir de l'univers des bandes, intégrer beaucoup de propriétés d'ordre, d'addition des fractions et, conjointement, les formaliser dans l'univers symbolique respectif. (fig1)



.

Fig. 1 : ***Cette structure construite dans l'univers expérimentable des bandes est signifiante de beaucoup de propriétés dans l'univers symbolique numérique des fractions.***

Nous avons présenté dans l'atelier un phénomène didactique à partir de l'exemple 1 / 3 + 1 / 3 = 2 / 3. Les élèves réalisent une bande de couleur violette par juxtaposition dans l'univers des actions expérimentables qui correspond morphiquement à la somme 1 / 3 + 1 / 3. Ils écrivent d'un côté de la bande violette 1 / 3 + 1 / 3, mais comment écrire symboliquement le résultat de cette somme ?

**L'effet « mousse »**

D'un univers…



à l'autre

Paul : dis et écris un mot qui soit sur l'image -Ruben : « Mousse » -Paul : Bravo ! tu as bien vu la mousse de la mer

Paul à Ruben : C'est toi qui as vu mousse sur le dessin, moi j'ai pensé à ma jeunesse, quand j'étais mousse sur un cargo transatlantique

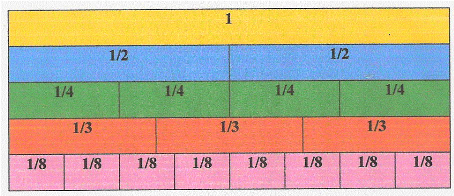
-Professeur : combien ça fait un tiers plus un tiers ? -Élèves : ça fait deux tiers -Professeur : Bravo !, *et il écrit au tableau* *1 / 3 + 1 / 3 = 2 / 3*

-Formateur : C'est le professeur qui a vu cette écriture, les élèves ne savent pas encore le sens de cette somme écrite symboliquement. Ils ont répondu, à la manière de « Une pomme plus une pomme c'est égal à deux pommes ! »

Le piège didactique dans lequel l'enseignant peut tomber consiste à écrire tout de suite au tableau la réponse 2 / 3 en attribuant indûment aux élèves une connaissance qui est en fait la sienne. La manipulation des bandes par les élèves, antérieure à l'écriture 1 / 3 + 1 / 3 = 2 / 3, évite cette erreur.

### *2.3. Comment les productions des élèves nourrissent nos PER ?*

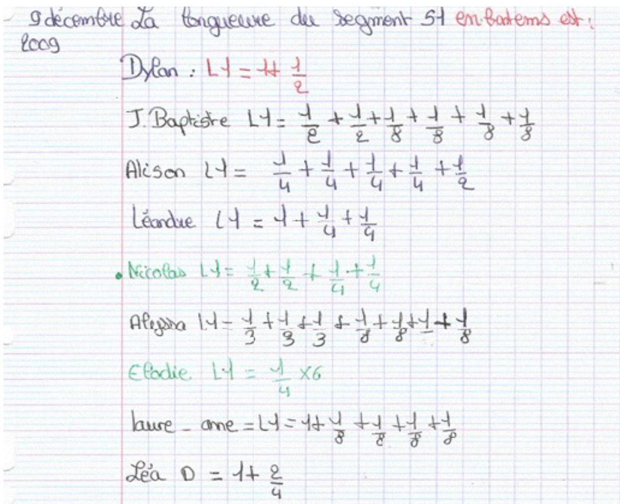
Au collège, la création des bandes de papier avec des élèves de 6e (élèves de 11 à 12 ans) permet de construire le sens et la symbolique de l'écriture *a / b* dans le palier 1 du parcours d'apprentissage mémorisé où cet assemblage devient un « schéma opérationnel » et construit « l'expérimentable » de la situation.




Ici la bande témoin est jaune

Pour parler des bandes témoin de Ruben, les élèves d'un de nos collègues du groupe de Caen les ont baptisées : « Kikoké » et depuis les Djojins, les Chtoungs, les Bantems, les Zúrons, les Segbans…

Dans un palier 2, les élèves utilisent le matériel construit dans une situation simple de mesurage de segments tracés, ce qui génère des productions riches à valider ou à réfuter dans un débat collectif, et suscite des questionnements. Dans un palier 3, l'analyse des productions des élèves permet à l'enseignant de décider des « activités de deuxième génération » déclenchées par le questionnement des élèves.




**etc.**

De cet échantillon ressortent deux problématiques :

Guillaume -On ne peut pas trouver 6 / 4, car on n'a pas de bande de 6 / 4 ! Et la classe propose d'en fabriquer des violettes sur lesquelles on pourrait écrire 6 / 4. La prof- Comment vérifier si elle est bonne ?

Bryan propose de superposer 6 bandes jaunes pour 4 bandes violettes

Pour valider la proposition d'Émilie : « est-ce que : 1 / 4 + 1 / 4 = 2 / 4 ? », la classe répond que ce doit être facile avec le schéma opérationnel.

| | |
|---|---|
| Mais Dylan s'écrit : « moi, je ne suis pas d'accord..1/4+ 1/4= 2/8 » <br> … Et Dylan les arrête très vite ! | **Et toute la classe s'engage à construire une bande sur laquelle chacun pourrait écrire 2 / 8…** |
| On « emblématise » la remarque de Dylan : <br> Si le prof dit: « **Plus jamais Dylan...** | *La classe en Choeur poursuit ...* <br> ***... ajoutera les dénominateurs.*** |

### *2.4. Remerciements*

Notre groupe, constitué de Cécile Bezard- Falgas, Loïc Coulombel, Jacques Duval, Claudine Plourdeau et Ruben Rodriguez Herrera, remercie l'ex-INRP, l'IFÉ et l'équipe (CD)AMPERES pour leur soutien et les enrichissements que nous ont apportés les notions d'AER et PER en navigant entre nos multiples « Univers » : ex-INRP, IFÉ et IREM, PER et Parcours d'apprentissage-enseignement articulés dans l'univers du « Spiralaire »

## 3. Un parcours d'étude et de recherche pour introduire la géométrie analytique

Bernat Ancochea (Institut de Premià de Mar, Rafael Casanovas s/n), Josep Gascón (Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona - Edifici C) & Marianna Bosch (FUNDEMI - Facultat d'Economia IQS, Universitat Ramon Llull)

### *3.1. Introduction*

Quelle géométrie devons-nous enseigner ? Nos élèves peuvent-ils étudier la géométrie analytique dans le deuxième cycle de l'enseignement secondaire et le baccalauréat sans des connaissances solides de géométrie synthétique ? Les réponses à ces questions cruciales sont gravement compromises par quelques-uns des constats que l'on peut dresser sur l'enseignement de ce domaine en Espagne : absence d'articulation entre la géométrie de l'ESO (Enseignement secondaire obligatoire) et celle du « bachillerato » (Gascón, 2002), absence des raisons d'être de la géométrie analytique, absence de travail de la relation entre modèles graphiques et analytiques, pas d'enseignement de « l'algébrisation » des techniques de la géométrie de la règle et du compas, absence de la mise en évidence de la puissance des techniques analytiques par rapport aux synthétiques.

### *3.2. Thèse de la continuité entre les deux géométries*

À partir d'un groupe de problèmes considérés comme représentants « authentiques » de la géométrie synthétique (Bosch & Gascón, 1994), on peut démontrer que les techniques analytiques, caractéristiques de la géométrie cartésienne, apparaissent comme un développement des techniques avec règle et compas (en parallèle avec l'accroissement progressif du champ de problèmes). Il s'agit d'articuler les deux géométries et non pas de subordonner l'une à l'autre (Gascón, 2003).

### *3.3. Les logiciels de géométrie*

On dispose aujourd'hui des instruments nécessaires pour que la formation de nos élèves soit beaucoup plus complète. Les logiciels de géométrie dynamique, depuis déjà quelques années, fournissent aux élèves des points de vue « dynamiques » sur les mathématiques. Sans se substituer aux démonstrations formelles, souvent inaccessibles à la plupart des élèves des collèges, ces logiciels montrent la généralisation des propriétés géométriques en ne se servant que du simple maniement de la souris de l'ordinateur. Avec Wiris et GeoGebra, il est possible de résoudre le problème de l'articulation des deux géométries en suivant le processus suivant :

1. On part d'un énoncé caractéristique d'un problème du premier cours du baccalauréat.

2. On le traduit en un énoncé de géométrie synthétique particulier que l'on résout à partir de la construction avec règle et compas.

3. Résolution analytique particulière avec un système d'équations.

4. Résolution analytique générale (avec des paramètres) en choisissant convenablement le système de référence.

5. On fait une étude de cas (interprétation géométrique).

## 4. Des élèves « auteurs » des mathématiques du programme

Yves Matheron, Marie-Christine de Redon, Christiane Mota, Karine Drousset & l'équipe (CD)AMPERES de l'IREM d'Aix-Marseille

### *4.1. Introduction*

Le groupe (CD)AMPERES d'Aix-Marseille travaille à la conception et à l'expérimentation, dans des classes de l'académie, de Parcours d'Étude et de Recherche (PER) relevant du domaine « nombres et calcul » du programme de Collège, et courant de la 5$^{e}$ à la 3$^{e}$ (élèves de 12 à 15 ans). Nous présentons ici certains des éléments de ce PER qui concernent les nombres relatifs en $5^{e}$ et l'entrée dans l'algèbre en $5^{e}$ et $4^{e}$.

Produire des éléments du savoir mathématique en tant que construction collective de réponses à une question, de manière à ce qu'elles soient identifiées et reconnues comme savoir mathématique, peut être vu par les élèves comme une création de mathématiques dont ils sont en grande partie les auteurs. Le professeur doit alors disposer *a priori* des conditions nécessaires à l'émergence des réponses, pour provoquer les tâtonnements et les débats que cette recherche suscite. Atteindre un tel objectif suppose la force d'un collectif disposant des outils venus de la théorie didactique, nécessaires à une telle élaboration et réalisation.

### *4.2. Les relatifs, une raison d'être interne aux mathématiques*

Afin d'éviter le recours aux métaphores (températures, altitudes) qui, tôt ou tard, se constituent en obstacle, la nécessité des nombres relatifs est motivée par des raisons internes à la pratique mathématique. Les élèves éprouvent en acte la simplification d'un calcul mental que fournit le calcul des deux derniers termes, alors qu'on leur a antérieurement enseigné qu'il s'effectue toujours de gauche à droite. Par exemple, calculer mentalement $435 + 61 - 62$. On convient qu'ajouter 61 puis soustraire 62 équivaut à soustraire 1 et peut être noté -1. Les élèves peuvent alors rapidement mener à bien des calculs comme : $+ 4 - 5$ ; $+ 768{,}3 - 769{,}5$ ; etc., en recourant au sens donné à ces notations : « ajouter 768,3 puis soustraire 769,5 revient à soustraire 1,2 qu'on note $-1{,}2$ ». Lorsqu'on a suffisamment éprouvé ce type de pratique, une nouvelle question émerge : « ces nouvelles notations ressemblent et sont manipulées comme des nombres, se pourrait-il qu'elles en soient ? » Les élèves répondent qu'il faudrait pour cela savoir si on peut faire des opérations sur ces notations, les comparer. On se lance alors dans la recherche et la construction de telles opérations. Le lecteur intéressé trouvera la description détaillée de ce PER sur la partie du site Educmath consacrée à AMPERES.

### *4.3 Un objet didactique unificateur de l'algèbre du Collège*

L'étude des relatifs a conduit à rencontrer un nouvel objet didactique : le programme de calcul. Les relatifs ont émergé de la simplification de programmes du type « à un nombre on ajoute un second puis on retranche un troisième ». Les programmes de calcul facilitent aussi la résolution de certains problèmes. C'est ce qu'éprouvent les élèves à travers la recherche du terme de rang $n$ de suites arithmétiques et géométriques présentées sous forme de figures à motifs répétés. Par exemple, comment calculer le nombre total d'allumettes pour la construction de la $23^{e}$ répétition du motif de maisonnettes  accolées les unes aux autres.

Si les élèves recourent à des tentatives de modélisation proportionnelle, ils les abandonnent rapidement pour trouver une relation donnée sous la forme d'une phrase désignant un programme de calcul. Par exemple « trois fois le nombre de maisons plus le nombre de maisons plus un ». La comparaison des diverses réponses obtenues dans la classe nécessite bientôt de recourir à l'usage de lettres. Par exemple : « $5 + (a - c) \times 4 = b$ avec $a$ nombre entier de maisons, $c$ nombre de maisons enlevées, $b$ le résultat ». Certains élèves utilisent des « patterns » tels que cercle ou rectangle pour désigner la régularité du calcul. Trouver une écriture commune nécessite de « développer, réduire et ordonner » les expressions polynômiales rencontrées ; d'où l'étude des techniques algébriques au programme.

On parvient alors à faire vivre une genèse artificielle cohérente du savoir mathématique – algébrique dans ces exemples – incombant en partie aux élèves sous la responsabilité et le contrôle du professeur, sans recourir à un découpage en chapitres ou à des activités dites « préparatoires » à partir desquelles le sens à donner à l'étude des mathématiques est peu visible des élèves.

### *4.5. L'extension praxémique comme moteur de la créativité des élèves*

Nulle part ne peut être décrétée la créativité mathématique, notamment en classe ; on ne peut guère que la favoriser. Un des moyens consiste à recourir à l'extension praxémique définie comme extension d'usage d'une pratique autre que l'originelle (Matheron, 2010). Par exemple, s'appuyer sur l'écriture $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ pour écrire $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$, la notion d'homorphisme n'étant plus étudiée, mais toujours rencontrée en acte dans le cursus secondaire. Des extensions erronées peuvent entrainer les élèves à déclarer que pour « résoudre l'équation $\ln x = \ln y$, on simplifie par ln » ! Mais favoriser la créativité mathématique des élèves repose entre autres, dans les deux propositions présentées, sur leurs connaissances antérieures afin qu'ils s'engagent dans des extensions praxémiques : notations d'opérateurs additifs dans le cas des relatifs, extension au calcul algébrique des écritures littérales jusqu'alors réservées aux formules (aires, volumes). L'usage didactique de ces extensions suppose au préalable une sérieuse analyse *a priori* outillée des concepts issus de la didactique des mathématiques, et des professeurs formés à cet enseignement.

## 5. Éléments bibliographiques

Berté, A. (1995). Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations dans les classes. *Petit x n° 40*, 41 - 63

Bosch, M. & Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias,* 12(3), 314-332

(CD)AMPERES (2010). http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir, *Bulletin de l'APMEP n° 471*, 439-461

Gascón, J. (2002) Geometria sintètica en l'ESO y analítica en el baxillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Revista Suma*, 39, 13-25

Gascón, J. (2003). Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Revista Suma*, 44, 25-34

GEOGEBRA (2011). http://www.geogebra.org

Matheron, Y. (2010). *Mémoire et étude des mathématiques, une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes

Rodriguez Herrera, R. (2007). *L’enseignement des fractions basé sur la loi de la correspondance morphique de deux systèmes dans la formation de connaissances*. Caen : IREM de Basse-Normandie. Disponible sur Internet : http://irembn.fr/spip.php?article23

WIRIS (2011). http://www.wiris.com

# Atelier 4

## Quels outils technologiques pour appuyer les processus d'enrichissement des ressources ?

**Hamid Chaachoua*, Giorgos Psycharis**, Jana Trgalová*****

** MeTAH-LIG, Université Joseph Fourier*
*961 rue de la Houille Blanche*
*BP 46*
*38402 Grenoble cedex*
*hamid.chaachoua@imag.fr*

***Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens,*
*15784 Zografou, Athens, Greece.*
*G.Psycharis@math.uoa.gr*

**** S2HEP-IFE-ENSL*
*15 parvis René-Descartes, BP 7000,*
*69342 Lyon cedex 07*
*Jana.trgalova@ens-lyon.fr*

*RÉSUMÉ : Ces journées d'étude mathématiques mettent le concept de qualité des ressources pour l'enseignement des mathématiques au centre des discussions. Elles choisissent une approche dynamique de ce concept, s'intéressant aux processus qui permettent de revisiter des problèmes, de réorganiser des ressources qui les mettent en scène, dans un mouvement où conception et mises en œuvre se nourrissent mutuellement. Cet atelier se propose de questionner les usages d'outils technologiques et les moyens dont dispose l'utilisateur pour modifier et enrichir les ressources disponibles afin de les adapter à ses propres besoins.*

*ABSTRACT: These "journées d'étude mathématiques" have the concept of quality of resources for mathematics teaching in focus. They choose a dynamic approach to this concept, concerned with processes allowing to revisit problems, reorganize resources enacting them, in a movement in which the design and the implementation nourish each other. This workshop intends to question usages of technological tools and the means users have at their disposal to modify and enrich available resources to fit their own needs.*

*MOTS-CLÉS : outil technologique, qualité de ressources, conception, usage.*

*KEYWORDS: technological tool, quality of resources, design, usage.*

## Introduction

Cet atelier s'inscrit dans la thématique de qualité des ressources produites ou s'appuyant sur des outils technologiques. Ce thème, déjà étudié lors des précédentes journées de l'INRP (Gueudet *et al.*, 2010), représente une des problématiques fondamentales relatives aux ressources. Une des conclusions de l'atelier portant sur les questions de qualité des ressources a été la proposition de trois niveaux de qualité de ressources (ibid., p. 145) :

- *qualité minimale* consistant en la validité mathématique et la conformité institutionnelle des contenus ;

- *qualité didactique et épistémologique* de la ressource, qui recouvre également son potentiel pour l'apprentissage ;

- *qualité pour les usagers* concernant notamment l'aspect ergonomique de la ressource, son potentiel d'appropriation et son adaptabilité.

Ainsi, un aspect de la qualité d'une ressource est la possibilité qu'elle offre à un utilisateur, en l'occurrence un enseignant, de l'enrichir et de l'adapter à ces propres besoins. L'objectif de l'atelier a été d'approfondir cet aspect de qualité en invitant les participants à travailler autour de deux questions :

- Quels sont les usages possibles ou effectifs des outils proposés ?
- De quels moyens l'utilisateur dispose-t-il pour construire ses propres ressources ? Pour modifier et enrichir les ressources disponibles afin de les adapter à ses propres besoins ?

Ont participé à cet atelier quatre équipes : Aplusix-epsilonwriter, Wiris, Intergeo et Casyopée, qui travaillent sur la conception et l'usage des ressources à l'aide des outils technologiques différents.

## 1. Conception et utilisation des ressources de la plateforme epsilonwriter

Équipe Aplusix epsilonwriter : Hamid Chachoua, Nataly Essonnier, Sébastien Jolivet, Saïd Mouffak, Jean-François Nicaud, Jana Trgalová et Christophe Viudez.

### *1.1. Epsilonwriter*

L'application Web « epsilonwriter » du portail « epsilonwriter.com » (Nicaud & Viudez, 2009) permet une rédaction très facile de documents contenant du texte, des formules mathématiques et des images. L'application offre également des outils permettant à l'enseignant de rédiger des questionnaires, avec des questions à choix multiple (QCM) contenant des formules mathématiques et avec des questions à réponses mathématiques ouvertes. En mode « questionnaire », l'élève répond aux questions une à une et passe en correction pour voir si sa réponse est juste et pour visualiser la réponse attendue et les explications rédigées par l'enseignant-auteur. En mode « test », l'élève répond à l'ensemble des questions puis passe en correction à la fin pour voir son score global, l'évaluation de ses réponses, les réponses attendues et les explications. Les questionnaires remplis par les élèves peuvent être envoyés par mail à l'enseignant qui peut mettre des annotations sur chaque réponse et modifier les scores calculés automatiquement par le logiciel. Le portail propose aussi un forum permettant les échanges entre élèves et enseignant. Le portail avec ses outils permet donc aux élèves de travailler en autonomie même en dehors de la classe et à l'enseignant de suivre à distance le travail des élèves.

Cette année nous avons lancé une étude du portail « epsilonwriter.com » comme un dispositif d'aide aux élèves et un outil permettant de prolonger le travail de classe. Les enseignants avaient la liberté sur le choix des outils de la plateforme et sur les usages de ces outils. Nous avons mis en place un journal de bord pour garder une trace de l'utilisation de cette plateforme et les ressources associées. Les enseignants doivent indiquer le choix de l'outil utilisé (application, forum, mail), le type d'usage (en classe, en dehors de la classe) et la finalité didactique. Nous rendons compte ci-dessous de trois utilisations différentes de la plateforme.

### *1.2. Conception et utilisation des QCM pour la remédiation*

Les QCM et l'application epsilonwriter ont été utilisés dans un dispositif de remédiation avec des élèves de BTS.

Nous constatons que les QCM ont joué un rôle important dans la déstabilisation de conceptions des élèves plutôt que dans leur remédiation. Nous avons également vu qu'ils ont un potentiel révélateur de conceptions. Ils apportent un aspect ludique. Ils permettent plus d'individualisation, les élèves n'hésitent pas à appeler l'enseignant pour une explication supplémentaire alors qu'il ne l'aurait pas fait en situation de classe classique, et plus d'autonomie grâce à la correction automatique, en classe. Notons qu'ils ont été bien accueillis par les élèves.

Notons cependant que la conception de QCM bien construits n'est pas tâche facile. Elle nécessite une connaissance préalable d'erreurs et de conceptions erronées possibles chez les élèves pour l'introduction de distracteurs pertinents. Cet aspect est plus coûteux en temps que la création des QCM avec epsilonwriter qui elle est relativement aisée.

### *1.3. Conception des textes par les élèves*

Un des enjeux liés à la généralisation de l'usage de l'informatique dans le cadre scolaire est de ne pas faire de cet usage l'exclusivité de l'enseignant. Un autre enjeu important de l'acte d'enseigner est la mise en activité des élèves. L'objectif de l'expérimentation avec epsilonwriter a donc été de combiner ces deux enjeux.

Pour cela il a été décidé d'utiliser dans un premier temps l'aspect « éditeur de texte mathématique » d'epsilonwriter. S'il existe en effet différents outils pour l'enseignant (LaTex, D-Math et OpenOffice par exemple), aucun n'est réellement adapté à un usage par les collégiens. Il a donc été demandé aux élèves de réaliser des fiches de révision en vue du brevet, le support numérique permettant par ailleurs l'évolutivité et la mutualisation des ressources produites.

Le prolongement de ce travail a consisté en l'utilisation de l'aspect « éditeur de QCM » d'epsilonwriter en demandant aux élèves d'associer à leur fiche de révision un QCM (élaboré par leur soin ou à partir d'extraits de QCM trouvé dans des annales de brevet) avec un travail important de commentaire des réponses erronées pour mettre en évidence les erreurs classiques liées aux notions travaillées.

### *1.4. Utilisation du Forum*

L'objectif de l'expérimentation est de prolonger le groupe classe à l'extérieur de l'établissement. Sortir l'élève qui travaille chez lui de son « isolement » pour le remettre dans « l'ambiance classe », pour qu'il puisse poser immédiatement, toute question relative à toute difficulté surgissant au moment de son travail à la maison. Les autres élèves sont invités à répondre et en dernier recours il y a intervention du professeur. Le logiciel epsilonwriter permet des échanges avec une écriture facile de symboles mathématiques. Il y a eu peu d'échanges alors que les élèves ont déjà l'habitude d'utiliser les forums dans différents domaines. On pouvait espérer une forte mobilisation mais cela n'a pas été le cas pour des raisons diverses :

- Manque de motivation dans le travail, ce qui a été confirmé lors d'une discussion bilan avec les élèves qui disent « nous n'avons jamais appris à travailler ».
- 4 élèves qui abusaient des jeux sur la toile ne pouvaient plus accéder à internet par décision parentale.

- Une dizaine d'élèves rencontraient des difficultés techniques : mots de passe oubliés ou perdus, version non adaptée de javas etc.

## 2. Base de données WIRIS quizzes : mathématiques « ready-made » pour Moodle Quiz

Equipe WIRIS : Carles Aguiló, Ramon Eixarch

### *2.1. Introduction*

WIRIS quizzes améliore la fonctionnalité de Moodle Quiz pour les questionnaires mathématiques. Il permet la création de questions aléatoires qui s'évaluent automatiquement par moyen d'un système de calcul formel. On a finement intégré WIRIS aux questionnaires Moodle en respectant les types de questions existants et en permettant rajouter des maths pour tous ces types, à savoir : vrai/faux, à choix multiple, appariement, réponse courte (ouverte), composition, question « close ».

Nous avons créé aussi WIRIS collection, une base de données avec des contenus pour faciliter l'intégration des TICE aux professeurs moins versés dans ce domaine. Il s'agit d'exercices élaborés et partagés par les professeurs, qui sont donc déjà testés en salle de classe ou comme devoirs.

### *2.2. WIRIS Collection*

WIRIS quizzes permet l'intégration de paramètres aléatoires (chiffres ; objets tels que matrices, polynômes etc. ; représentations graphiques) dans les questions Moodle. Cela permet à l'élève de pratiquer autant qu'il veut avec des exercices toujours différents et au professeur d'être rassuré que ses élèves ne peuvent pas tricher sur son examen, parce qu'ils ont chaque un une question différente.

La réponse de l'élève est automatiquement évaluée par le système de calcul formel, WIRIS cas, ce qui permet d'avoir non seulement des questions aux choix multiples, mais aussi des questions ouvertes (« Réponse courte ») qui s'évaluent automatiquement et qui donnent un retour (feedback) immédiat. Avec cela on évite tomber sur la situation frustrante pour l'élève d'avoir donné une réponse différente mais mathématiquement équivalente à l'attendue qui ne soit pas prise en compte comme correcte.

De l'autre côté, WIRIS offre un éditeur de formules visuel à l'élève (fig. 1) pour rentrer sa réponse de façon naturelle, qui exécute en plus un contrôle en temps réel de la syntaxe de cette réponse. L'éditeur visuel WIRIS et le contrôle de syntaxe minimisent la quantité d'erreurs des élèves aux strictement mathématiques. Il s'agit ici de ne pas rajouter complexité au sujet à l'heure d'introduire l'utilisation des TICE, mais d'en faciliter l'utilisation aux élèves.


**Figure 1.** *Éditeur visuel de WIRIS.*

Notre expérience montre qu'avoir à disposition des contenus déjà créés et prêts à être déployés est une composante essentielle pour faire déclencher l'utilisation des TICE chez les professeurs qui n'ont pas encore vu comment son travail pouvait bénéficier des nouvelles technologies. Nous nous proposons de surmonter cette première étape en fournissant des contenus triés par thème.

La base de données des contenus est hébergée sur http://collection.wiris.com et contient des questions WIRIS quizzes. Ces contenus sont élaborés par les utilisateurs mêmes et sont offerts en licence Creative Commons, c'est-à-dire, que tout le monde peut partager son travail avec les autres utilisateurs.

Pour rendre encore plus facile cet échange, WIRIS quizzes intègre un outil de traduction automatique qui permet de traduire toutes les commandes e instructions d'une langue à une autre avec un seul clic. On a créé aussi une interface avec Drupal qui facilite la recherche et localisation d'exercices par thèmes et auteurs.

## 3. Une démarche qualité pour améliorer les ressources du répertoire i2geo

Equipe Intergeo : Frédérique Bourgeat, Anne Calpe, Marina Digeon, Esmael Esfahani, Isabelle Leyraud, Sophie Soury-Lavergne, René Thomas, Olivier Touraille et Jana Trgalová

### *3.1. Plateforme i2geo et démarche qualité pour les ressources*

Pour les enseignants désireux d'intégrer les TICE à leur pratique sans avoir à tout créer, il existe diverses banques de données sur internet. I2geo.net est l'une de ces plateformes qui contiennent plus particulièrement des activités utilisant les logiciels de géométrie dynamique.

Initialement créé avec l'objectif de fédérer les productions autour d'un langage informatique commun au niveau européen, ce site regroupe près de 3 500 activités déposées par des enseignants contributeurs souhaitant partager leurs réalisations. Ces ressources sont le plus souvent composées d'une figure de géométrie dynamique téléchargeable ou accessible en ligne à partir d'une page de présentation contenant des rubriques permettant de cibler les objectifs, les prérequis, le niveau concerné, le type d'activités et les mots-clefs. Cet ensemble de méta-données permet à l'utilisateur une recherche d'activités autour d'un thème donné. Certaines ressources sont accompagnées de documents précisant les modalités d'utilisation pour le professeur et les élèves.

Ce site offre également la possibilité d'évaluer la qualité des ressources à l'aide d'un questionnaire (Trgalová *et al.*, 2011) qu'il est possible de remplir de manière plus ou moins fine et complète en déposant ou non des commentaires. La note qui résulte de cette revue permet de repérer des ressources qui semblent plus pertinentes que d'autres et les commentaires qui l'accompagnent sont autant d'indications pour que son auteur puisse apporter d'éventuelles modifications selon les avis déposés. L'élaboration de cette démarche qualité a été présentée lors des dernières journées mathématiques (Groupe Intergeo, 2010).

### *3.2. Analyse des revues de qualité disponibles*

Le travail de cette année du groupe IREM associé à l'IFÉ a été d'analyser des ressources disposant d'au moins deux revues afin de voir si les avis déposés convergeaient et de quelle manière. En effet, une note de « 3 sur 4 » peut être obtenue de différentes manières. Un peu plus de 10 % des ressources sont évaluées (contre 5 % il y a un an) mais par moins de deux utilisateurs en moyenne. Parmi celles-ci, certaines le sont de manière complète et détaillée, d'autres plus sommairement, alors que d'autres ne comportent que des commentaires.

Si l'objectif initial de ce site a été de permettre à chacun de faire évoluer ces ressources à partir des questionnaires, celui-ci sera atteint à condition que la revue soit « objective » et pertinente. C'est ce qui explique la présence du questionnaire abordant des aspects tant technique que pédagogique ou didactique. Cependant, l'avis d'un seul utilisateur aussi expert soit-il ne reflète pas nécessairement la qualité de la ressource. Une activité peut « fonctionner » avec des élèves et être bien évaluée a posteriori par un utilisateur alors que les élèves n'auront peut-être rien retenu à l'issue de celle-ci. De même, une activité riche sera peut-être boudée a priori par des enseignants la jugeant difficile à mettre en œuvre alors qu'elle peut provoquer de manière imprévisible un impact fort auprès des élèves.

Cependant, seule une analyse a posteriori sera plus objective (mais encore faut-il avoir le temps de la faire) et permettra de juger si des modifications sont nécessaires. Dans tous les cas, un seul avis, qu'il résulte d'une analyse a posteriori ou non, n'est pas suffisant : un ensemble de revues est nécessaire pour faire émerger la qualité d'une ressource et permettre à l'utilisateur de mieux se rendre compte des possibilités offertes par la ressource. Les convergences (et les divergences) entre les différentes revues seront d'autant plus significatives si le nombre de revues est important.

De plus, il faudrait que l'utilisateur de la plateforme consultant une ressource puisse connaître le degré d'expertise des évaluateurs pour avoir un regard critique sur les revues elles-mêmes et faire correctement la part des choses. Par exemple, un étudiant en master n'ayant jamais enseigné et un enseignant utilisant les TICE régulièrement n'auront pas la même vision de la qualité d'une ressource et pas forcément le même avis.

### *3.3. Conclusion*

Si la présence du questionnaire permet de balayer les différents aspects à évaluer, il faut que la personne qui le remplit saisisse bien le sens de tous les items et prenne le temps de tous les renseigner. Des divergences entre les revues peuvent en résulter. Quoi qu'il en soit, ce questionnaire peut être un outil de formation pour sensibiliser les enseignants aux différents aspects à prendre en compte lors de la création d'activité. Dans tous les cas et quelque soit la note de la revue, ce questionnaire participe à un regard critique sur la ressource lors de sa création, avant ou après son utilisation et est, dans ce sens, un outil nécessaire à l'enrichissement des ressources. Le fait qu'il ne soit pas suffisant laisse ainsi toute la liberté à chacun d'utiliser ou non telle ou telle ressource selon son public, sa sensibilité, sa manière d'enseigner, son objectif sans conditionner les créations dans un modèle-type exclusif.

## 4. Ressources pour la formation à l'enseignement des fonctions

Equipe Casyopée : Gilles Aldon, Roselyne Halbert, Jean Baptiste Lagrange, Christine Le Bihan, Bernard Le Feuvre, Marie Catherine Manens et Xavier Meyrier

Les fonctions occupent une place centrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée pour consolider les apprentissages algébriques du collège et préparer un enseignement de l'analyse. Notre groupe cherche à apporter des éléments de réponse à une demande de l'académie de Rennes sur l'élaboration de ressources pour la formation. Notre projet est de créer des ressources sur l'enseignement des fonctions au lycée en créant des ressources vidéos pour la formation à l'enseignement des fonctions, en enrichissant les publications réalisées dans le groupe Casyopée et en organisant, à plus long terme, les ressources en parcours de formation.

### *4.1. Objectifs du groupe*

*Développer une « didactique des fonctions » qui sous-tend les usages possibles des environnements algébriques et géométriques*

Les TICE peuvent soutenir l'activité de l'élève tant par les possibilités d'exploration offertes par les logiciels numériques (tableur, géométrie dynamique) que par l'aide aux calculs algébriques apportée par le calcul formel. Les activités sur les fonctions doivent contribuer de façon décisive à la formation des élèves à la démarche scientifique. Les situations proposées par le logiciel contribuent à élargir le choix des enseignants pour s'adapter aux exigences des programmes. Notre problématique est l'insertion de ressources relatives à Casyopée dans les parcours qu'ils se proposent de développer, de façon à leur permettre d'élargir leur choix de logiciel et d'évaluer l'effet de ce choix sur leur pratique.

*Donner des moyens à des professeurs de la mettre cette didactique en œuvre par les mini-sites et les vidéos*

Le rôle du professeur est essentiel. Il doit mettre en place des situations de résolution de problèmes adaptées, choisir un logiciel en considérant les fonctionnalités qu'il offre pour ces situations, en concevoir l'exploitation par les élèves et construire avec les élèves les techniques et notions mathématiques que l'activité fait émerger.

*Mettre en œuvre cette « didactique » à travers la formation*

Initiale (masters d'enseignement) ; continue (PAF) ; individuelle (en ligne).

### *4.2. Les ressources*

Elles sont au nombre de trois : le logiciel, les mini-sites décrivant les expérimentations réalisées par le groupe, les vidéos accompagnant les mini-sites.

*Les outils technologiques pour appuyer les processus de production et de diffusion des ressources :*

- Le travail du groupe s'est appuyé sur un outil de travail collaboratif mis à disposition du groupe par l'Académie de Rennes, dans le cadre du partenariat académique avec l'INRP, **la plateforme Nuxeo,** intégrée à l'Espace Numérique de Travail académique qui permet la publication et l'indexation de ressources pédagogiques produites par et en direction des enseignants de l'académie.
- Le **site Casyopée**, basé sur Guppy et ouvert à tout public, contient une présentation succincte en français et en anglais, la possibilité de télécharger les versions successives du logiciel et la documentation et des liens, notamment vers des mini-sites. L'accès aux vidéos est possible via une inscription validée par le webmestre. Les utilisateurs peuvent poster des commentaires. Une « newsletter » est prévue. L'objectif est de dépasser le cadre académique pour la diffusion et les échanges.
- Le service **Sialle** du ministère de l'Éducation nationale est une sélection de logiciels libres destinés à la communauté éducative. Cette sélection est opérée sur des critères stricts par le réseau académique et le SCEREN-CNDP. Il s'agit principalement de vérifications juridiques et techniques. Sialle offre des logiciels éducatifs destinés à un usage en classe. L'évaluation de qualité et de pertinence est réalisée par des enseignants inscrits au service selon onze critères concernant la rigueur scientifique, l'ergonomie, l'apport aux apprentissages et la documentation.
- Les **Edu'bases** donnent accès à des exemples d'usages et de pratiques publiés sur les sites académiques disciplinaires placés sous la responsabilité de groupes d'enseignants pilotés par des IA-IPR. Des usages de Casyopée y sont indexés.
- Notre réflexion porte cette année sur la réalisation et la diffusion de **vidéos** destinées à des formateurs ou à des enseignants qui cherchent une information sur le logiciel. À partir de vidéos réalisées soit en salle informatique soit en classe entière, nous construisons plusieurs types de vidéos : courtes, présentant une séance avec le logiciel ou les objectifs des séances et le cadre d'utilisation du logiciel (≈5 min), plus longues, utilisables par des formateurs (≈20 min). Ces vidéos seront particulièrement utiles en formation pour concrétiser les démarches proposées, en étudier les effets sur l'activité des élèves et plus largement pour développer une attitude réflexive vis-à-vis de l'intégration des TICE.

### *4.3. Conclusion*

Les participants à l'atelier ont considéré que les différentes formes de vidéos accompagnant les mini-sites peuvent aider l'enseignant désirant utiliser le logiciel ou un tableau interactif. Quant au logiciel ils ont estimé qu'il est « inclassable », car il utilise à la fois la géométrie dynamique et les possibilités du calcul formel. Le groupe Casyopée a comme projet de continuer la réalisation de vidéos accompagnants les mini-sites et de poursuivre sa réflexion sur l'enseignement des fonctions au lycée qui pourrait aboutir à un parcours de formation.

**Discussion et conclusion**

Les équipes ayant participé à cet atelier produisent diverses ressources dans le but d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : logiciels éducatifs, sites web ou plateforme avec des activités pour la classe, outils pour concevoir et utiliser des questionnaires.

Les équipes partagent l'avis que les utilisateurs - élèves, enseignants ou formateurs - ont besoin de pouvoir disposer de ressources toutes prêtes, comme la conception d'activités intéressantes et adaptées aux outils technologiques n'est pas tâche facile. Elles sont toutefois sensibles aux questions d'appropriation des ressources proposées, qui nécessite souvent leur adaptation à un contexte particulier, l'utilisateur doit ainsi pouvoir modifier et enrichir les ressources disponibles.

La qualité des ressources produites est au cœur des préoccupations des équipes, de manière explicite ou implicite. Divers moyens sont mis en place pour permettre d'évaluer la qualité des ressources ou simplement pour signifier à l'utilisateur que telle ou telle ressource semble avoir un réel potentiel d'apprentissage. Ainsi la plateforme i2geo invite ses utilisateurs à donner leurs avis sur les ressources par l'intermédiaire d'un questionnaire. Le groupe Casyopée met en ligne des vidéos annotées montrant l'utilisation du logiciel Casyopée en classe.

Il ressort des discussions que les enseignants souhaitant intégrer des outils technologiques dans leurs classes deviennent des concepteurs ou des co-concepteurs de ressources. Ils doivent pour cela développer de nouvelles compétences, telles qu'analyser les erreurs et difficultés des élèves pour proposer un choix de réponses pertinent lors de conception de QCM ou orchestrer les interactions des élèves avec des outils technologiques. De nouvelles questions se posent : quelle formation et quel accompagnement proposer aux enseignants ?

***Bibliographie***


Groupe Intergeo (2010). Qualité des ressources de géométrie dynamique dans le projet européen Intergeo. In G. Gueudet *et al*. (éd.), *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? Actes des journées mathématiques de l'INRP* (pp. 139-143), 9-10 juin 2010, Lyon.

Gueudet, G., Aldon, G., Douaire, J. & Trgalova, J. (éd.) (2010), *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ?* Actes des journées mathématiques de l'INRP, 9-10 juin 2010, Lyon : INRP.

Nicaud, J.-F. & Viudez, C. (2009), epsilonWriter : implementing new ideas for typing text and math. *The MathUI workshop*, Grand Bend, Ontario, Canada. <http://www.activemath.org/workshops/MathUI/09/proc/Nicaud-Vuidez-EpsilonWriter-MathUI09.pdf>.

Trgalova J., Soury-Lavergne S. & Jahn A. P. (2011, à paraître). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*.