conférence nationale
sur l'enseignement des mathématiques
à l'école primaire et au collège

Lyon, le 13 mars 2012

Actes des auditions du Comité Scientifique, édités par Alain Mercier et Rémy Jost

Table des matières

1 Eléments d'un état des lieux

1.1 Ce que nous apportent les évaluations standardisées sur les acquis des élèves à la fin de l'école primaire en mathématiques (Nombres et calcul)

Mots-clefs : évaluation, école primaire, nombres, calculs, mathématiques

Jean-François Chesné, Chef du bureau de l'évaluation des actions éducatives et des expérimentations, Sous direction des évaluations et de la performance scolaire, Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP)

Introduction

Le travail présenté a pour ambition de faire une sorte d'état des lieux sur les acquis des élèves à l'issue de l'école primaire, dans le domaine Nombres et calcul. Il s'appuie d'une part sur les évaluations, études et enquêtes menées par la DEPP jusqu'en 2008, c'est-à-dire jusqu'à l'entrée en vigueur des nouveaux programmes de l'école primaire, et d'autre part sur les évaluations nationales menées par la DGESCO en CM2, notamment celles de 2010 et 2011. Le choix du domaine Nombres et calcul – incluant la résolution de problèmes à support numérique – est en partie fondé sur le nombre d'items présents dans l'ensemble des évaluations dont nous disposons. Il prend également en compte l'importance réaffirmée du calcul dans l'activité mathématique et un questionnement toujours d'actualité sur l'enseignement du calcul.

Les évaluations nationales menées par la DEPP en mathématiques sont de plusieurs natures : elles peuvent être diagnostiques, comme les évaluations à l'entrée en sixième de 1989 à 2008, ou conçues pour fournir des indicateurs dans le cadre de la LOLF comme celles proposées en fin de CM2 entre 2007 et 2011, ou encore bilans avec un objectif de comparaison temporelle comme l'évaluation CEDRE fin d'école 2008 et l'étude « Lire, écrire, compter » menée en 2007 en fin de CM2. Toutes ces évaluations ont fait l'objet d'un traitement statistique à partir des résultats d'un échantillon représentatif variant entre 3 000 et 8 000 élèves par niveau de scolarité.

Un résumé de la situation en 2008

En 2008, selon l'évaluation CEDRE fin d'école, presque 40 % des élèves ne possédaient que des connaissances et des capacités très fragiles ou très locales, globalement insuffisantes « pour réussir de façon autonome au collège ». Parmi les points les moins bien acquis, citons : les grands nombres entiers, les nombres décimaux, le calcul mental, les opérations sur les décimaux et la résolution de problèmes de plus d'une étape. Ce constat confirme l'ensemble des observations réalisées lors d'autres études. En calcul mental, si les tables d'addition semblent acquises par les élèves, les tables de multiplication ne le sont pas (notamment celles de 7 et 8) ; si les additions sur des « petits » nombres entiers sont plutôt réussies, celles faisant intervenir des « grands » nombres (supérieurs à 100) ne le sont pas ; enfin, la commutativité de la multiplication n'est pas intégrée par ces élèves qui savent calculer 4 fois 15, mais échouent sur 15 fois 4. En calcul posé, on observe une nette baisse des acquis des élèves depuis 1987 avec un léger « tassement » depuis 2002, une stabilité très fragile de ces acquis (variabilité très sensible des résultats selon les nombres en jeu) et une faiblesse accentuée sur les décimaux. Enfin, concernant la résolution de problèmes, hormis pour ceux portant sur des situations de proportionnalité, les informations dont nous disposons sont paradoxalement peu nombreuses et relativement isolées (par exemple : problèmes particuliers de type additif ou problèmes de partage plutôt que de groupement).

Depuis 2008

Il est trop tôt pour dresser un bilan de l'impact des nouveaux programmes 2008 sur les acquis des élèves. Cependant, si les résultats fournis par les évaluations nationales de CM2 doivent être considérés avec beaucoup de prudence pour un certain nombre de raisons (définition des objectifs, contenus des tests, moment et modes de passation, modalités de correction), ils apportent des informations qu'il est important de prendre en compte et de tenter d'interpréter pour chercher à savoir, parmi les connaissances et les capacités attendues des élèves à l'école primaire, ce qui évolue et ce qui résiste. Après avoir analysé l'ensemble des items des évaluations 2010 et 2011 et les résultats à ces items, nous ne constatons pas d'évolution sensible. En effet, même si les tests CM2 ont été passés en janvier, deux tiers des items sont réussis par au plus deux tiers des élèves, et la moitié d'entre eux est réussie par un élève sur deux ou moins.

Parmi les points relevés comme des « non acquis » pour les élèves en 2008 – cette notion de « non acquis » étant très variable selon qu'il s'agit d'un apprentissage considéré comme un objectif en fin d'école primaire ou d'un apprentissage en cours–, citons :

– l'écriture des nombres décimaux : l'écriture sous dictée orale, le passage d'une écriture fractionnaire d'un nombre décimal à son écriture décimale, et inversement, la comparaison de deux nombres décimaux ou le produit mental d'un décimal par 5 figurent toujours parmi les items les moins réussis (environ un élève sur deux) ; l'écriture de comme 0,25 apparaît également toujours comme une vraie difficulté pour trois quarts des élèves ;

– les opérations posées : elles restent très dépendantes des nombres mis en jeu : on retrouve l'importance de la nature des nombres dans les additions et les soustractions, et celle de certaines tables dans les multiplications (un peu plus de 20 % des élèves font plus d'une erreur sur dix calculs « de tables » posés en 2 minutes) ;

– la résolution de problèmes : les compétences des élèves dans ce domaine sont toujours très variables à l'intérieur d'une même classe de problèmes, renvoyant là encore sans doute à une maîtrise fragile des structures à solliciter et à une forte dépendance des variables textuelles et numériques fournies. Par exemple, si plus d'un élève sur deux sait résoudre un problème de proportionnalité quand le passage par l'unité (stratégie non experte) renvoie à un nombre entier, moins d'un élève sur 3 sait le faire quand il faut passer par un nombre décimal (alors qu'une stratégie par linéarité est cette fois encore plus « économique »).

Conclusion

Si on fait l'hypothèse que les résultats des élèves aux évaluations renvoient effectivement à ce que les élèves savent ou savent faire, se posent alors trois questions : parmi les connaissances et capacités évaluées par des items dont les taux de réussite sont estimés insuffisants, lesquelles considère-t-on comme devant être acquises à l'issue de l'école primaire ? Pour lesquelles est-il raisonnable d'accepter qu'elles soient en cours d'acquisition ? Quelles sont celles qui devraient plutôt ne constituer qu'une première approche de ce qui relèvera réellement du collège ? Les réponses à ces trois questions doivent être claires et recevables pour les enseignants de l'école primaire comme pour ceux du collège afin de donner davantage de lisibilité à la mission et au travail quotidien des uns et des autres.

Le travail d'analyse mené suggère alors quelques pistes susceptibles d'améliorer les acquis des élèves, parmi lesquelles :

– accompagner les enseignants du premier degré :

– clarifier les contenus enseignés (exemple des écritures d'un nombre décimal) ;

– expliciter les enjeux et dégager des priorités (exemple des techniques opératoires) ;

– harmoniser les programmes de l'école et du collège :

– articuler les capacités exigibles (exemple de la notion de valeur approchée d'un nombre décimal) ;

– établir une progressivité des apprentissages (exemple de la proportionnalité – linéarité, règle de trois –, et de ses applications – pourcentages, échelle, vitesse moyenne –) ;

– favoriser l'exploitation au collège des résultats des élèves en fin de CM2.

Bibliographie

IGEN, L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire, 2006

Rocher T., Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007, NI 08.38, 2008

Brun A. et Pastor J.-M., Les compétences en mathématiques des élèves en fin d'école primaire, NI 10.17, 2010

Chesné J.-F., Les acquis des élèves en calcul à l'issue de l'école, Education & formations, N°79, 2010

Chesné J-F et Prost S., PACEM : une expérimentation sur l'utilisation d'évaluations standardisées des acquis des élèves par les enseignants, Education & formations, N°81, à paraître

1.2 Les résultats des élèves aux évaluations CEDRE 2008 et les besoins qu'ils révèlent

Mots-clefs : évaluation, mathématiques, échantillon national, PISA, école, collège

Thomas Huguet, Chargé d'études à la DEPP, Méthodologie et résultats du CEDRE 2008

Le CEDRE

Le Cycle des Evaluations Disciplinaires Réalisées sur Echantillon (CEDRE) fait partie des dispositifs conduits par la DEPP pour informer sur les acquis des élèves français dans une perspective de fin de scolarité primaire et obligatoire. Différent dans ses finalités du Programme International de Suivi des Acquis (PISA), il propose des résultats qui lui sont complémentaires.

A portée nationale, il s'intéresse à ce que les élèves ont assimilé tant sur un plan de connaissances que de compétences relativement aux programmes qui définissent le cadre des enseignements qu'ils ont reçus, ainsi qu'aux différentes modalités de conceptualisation chez l'élève telles qu'elles sont décrites dans les travaux de la recherche.

Les principes méthodologiques du CEDRE sont :

- évaluation de la population à partir d'un échantillon représentatif de plus de 4300 élèves répartis en trois strates (Public en éducation prioritaire, public hors éducation prioritaire, privé sous contrat)
- cycle d'évaluation de 6 ans
- traitement statistique conduisant à un modèle de réponse à l'item qui permet ensuite la description de la population par des « échelles de compétences ».
- utilisation de « cahiers tournants », qui augmente le nombre d'items, en ne confrontant pas chaque élève à l'ensemble des items, ce qui tend à limiter les effets de fatigue et d'entraînement.
- items cognitifs (172), affectifs et conatifs (90), qui nécessitent une réponse courte rédigée, qui sont dictés à partir d'un CD ou qui se présentent sous la forme d'un QCM.
- protocoles de passation standardisés.
- questionnaires à destination des enseignants de la discipline (526) et des chefs d'établissements (154).

Ces évaluations sont construites en articulant connaissances et compétences. Parfois vécu comme une nouveauté, le concept de compétence est pourtant relativement ancien, en tant qu'il constitue une tentative de réponse à des écueils souvent constatés :

- connaissances maîtrisées par les élèves en salle de classe, mais inopérantes en dehors de la salle de classe.
- fragmentation des apprentissages qui ne s'articulent pas dans une cohérence d'ensemble, à l'image du nécessaire découpage des enseignements en séances distinctes et organisées dans le temps.

- alors que les acquis des élèves se manifestent de manières variées et riches, informations sur l'état de ces acquis communiquées sous la forme, réduite et porteuse de nombreux implicites, de simples notes à des destinataires multiples et différents (Élèves, familles, enseignants, établissements scolaires, etc.).
- difficultés à mobiliser les connaissances lorsque la tâche présente une certaine nouveauté.

Beaucoup des manifestations de la compétence se trouvent dans la négative des propositions précédentes. Ainsi, forgée dans la rencontre à une diversité de situations, (non artificiellement) contextualisées ou intra-mathématiques, la compétence se distingue par la mobilisation d'un ensemble de ressources diversifiées (personnelles ou non) pour la résolution de problèmes qui présentent une certaine complexité (Ce terme étant utilisé ici dans une acception qui en écarte partiellement l'idée de difficulté.).

En situation d'évaluation, des écarts entre la compétence visée par les enseignements et celle effectivement mise en jeu dans le test, soumis à des contraintes de conception, peuvent être constatés. C'est la raison pour laquelle les modalités d'évaluation de la compétence méritent d'être explicitées dès sa définition, au même titre que les fondements épistémologiques sous-jacents.

Des informations plus complètes sur le concept de compétence peuvent être trouvées :

- dans le rapport « Les livrets de compétences : nouveaux outils pour l'évaluation des acquis - Rapport IGEN - Alain Houchot, Florence Robine - Juin 2007 ». http://www.education.gouv.fr/cid5579/les-livrets-de-competences-nouveaux-outilspour-l-evaluation-des-acquis.html
- dans l'article « Les compétences, Bravo! Mais encore? Réflexions critiques pour avancer – Gérard Vergnaud » http://www.pedagopsy.eu/competences_vergnaud.htm

Bien que très riche, l'éclairage apporté par le CEDRE n'en est pas pour autant exhaustif dans ce qu'il donne à voir. Ainsi il passe à côté de lieux fondamentaux où la compétence mérite pourtant d'être attestée :

- dans une prestation orale devant un groupe ou lors d'un échange avec un interlocuteur.
- dans une situation de travail en groupe.
- lors de la rédaction d'une narration de recherche (Affiche ou texte) ou d'un écrit de synthèse.
- dans des réussites répétées à des moments éloignés dans le temps.
- dans des situations où l'élève dispose de temps pour se poser et agir.

En outre, les contraintes de mise en œuvre de l'évaluation ne permettent pas de mettre les élèves en situation :

- de faire pleinement des recherches documentaires.
- d'utiliser de manière coordonnée plusieurs outils informatiques.

Après les passations dans les établissements et une fois les cahiers revenus, l'ensemble des réponses des élèves sont codées de manière binaire par des équipes d'experts qui décident au cas par cas de considérer s'il y a réussite ou échec.

Les données issues ce travail de codage sont ensuite traitées statistiquement pour donner un modèle de réponse à l'item, qui attribue sur une échelle numérique commune et simultanément :

- un niveau de compétence à chaque élève
- un degré de difficulté à chaque item.

Un découpage de l'échelle numérique en quelques grands intervalles de valeurs permet de définir plusieurs groupes d'élèves et d'associer des ensembles d'items à ces groupes. Certains items ne sont pas réussis par l'ensemble des élèves qui ont les plus élevés des niveaux de compétence, ils ne peuvent alors être associés à aucun groupe et sont qualifiés de « hors-échelle ». L'analyse des connaissances et compétences en jeu dans les ensembles d'items qui caractérisent chacun de ces groupes permet alors de rendre compte des acquis des élèves.

Deux questions clés portent cette analyse :

– quels sont les points communs entre les items qu'un groupe est le premier à réussir ?

– quelles sont les différences entre des items réussis différemment par deux groupes ?

Pour le collège, quelques-unes des questions fondamentales et générales posées dans le CEDRE étaient :

– les élèves sont-ils en mesure de résoudre un large répertoire de problèmes dans un grand nombre de contextes (Situations de la vie quotidienne, autre discipline que les mathématiques…) ? Restent-ils démunis dans une situation nouvelle ? Ont-ils développé des heuristiques ? Parviennent-ils à identifier les traits mathématiques qu'une situation peut comporter ? Peuvent-ils modéliser ?

– peuvent-ils se passent d'un professeur ? Peuvent-ils continuer d'apprendre par eux-mêmes ?

– alors que les apprentissages des élèves ne se font pas de manière linéaire, que parfois certaines connaissances anciennes peuvent faire obstacle à de nouvelles acquisitions ou que les connaissances des élèves peuvent être contradictoires selon le contexte dans lequel elles s'expriment, les élèves ont-ils dépassés toutes les difficultés qu'ils ont pu rencontrer ?

– pour l'ensemble des concepts rencontrés au collège, disposent-ils pleinement de tous les registres de représentations sémiotiques ? Alors que la différenciation entre représentant et représenté est constitutive de la connaissance en mathématiques, où en sont les élèves ? Pour un même concept, articulent-ils les différents registres concernés entre eux ?

– ont-ils développé leur capacité à raisonner ? Parviennent-ils à conduire tous les types de raisonnements que l'on peut rencontrer en mathématiques au collège ? S'appuient-ils sur des raisonnements de type hypothético-déductifs cadrés par une (pré)axiomatique ? Savent-ils démontrer ? Utilisent-ils des contre-exemples correctement et à bon escient ? Contrôlent-ils leurs résultats ? Ont-ils intégré les domaines de validité de leurs connaissances ?

– pour le champ « Nombres et calculs », comment se situent-ils dans leur conceptualisation des nombres et de leurs représentations ? Maîtrisent/articulent-ils efficacement calcul exact et calcul approché ? Sont-ils capable de calculer mentalement ? Par écrit ? Avec un instrument ? Avec intelligence ? Ont-ils acquis la méthode arithmétique ? Ont-ils acquis les bases de la méthode algébrique ? Le sens de chacune des opérations est-il acquis ? Les opérations sont-elles devenues des objets d'étude ?

– pour le champ « Organisation et gestion de données – Fonctions », traitent-ils intelligemment des données ? Maîtrisent-ils les fonctionnalités de base des tableurs ? Dominent-ils tous les outils de la proportionnalité ? Sont-ils sensibilisés au concept de fonction ? Qu'en est-il pour le cas particulier des fonctions linéaires et affines ?

– pour le champ « Grandeurs et mesures », ont-ils, pour chaque grandeur, des connaissances sur ses propriétés d'additivité, de multiplication par un scalaire ou de mise en rapport ? Ont-ils des acquis sur les grandeurs usuelles (Volume ? Durée ? Etc.) ? Choisissent-ils des unités de manière pertinente ? Ont-ils des acquis sur les instruments qui servent à la mesure ? Et sur l'imprécision de ces instruments ? Convertissent-ils entre unités d'une même grandeur ? Distinguent-ils les grandeurs qui concernent des objets communs (Aire et périmètre ? Aire et volume ?) ?

– pour le champ « Géométrie », ont-ils acquis une lecture géométrisante du monde ? Connaissent-ils les figures élémentaires ? Savent-ils construire des figures ? Maîtrisent-ils les instruments (Règles, équerre, compas, rapporteur) ? Connaissent-ils le large éventail de propriétés et de définitions du collège ? Sont-ils en situation de réussite aussi bien en géometrie plane qu'en géométrie de l'espace ? Utilisent-ils sans erreur un repère du plan ? Ont-ils délaissé les géométries perceptive et instrumentée pour une géométrie déductive ?

La première passation du CEDRE en mathématiques s'est déroulée en mai 2008. Les résultats sont présentés dans deux notes d'informations :

Note d'information – DEPP – n°10.17 – octobre 2010

http://www.education.gouv.fr/cid53629/les-competences-en-mathematiques-des-eleves-en-fin-d-ecole-primaire.html

Note d'information – DEPP – n°10.18 – octobre 2010

http://www.education.gouv.fr/cid53630/les-competences-des-eleves-en-mathematiques-en-fin-de-college.html

D'autres études produites par la DEPP apportent un éclairage complémentaire sur les acquis des élèves :

PISA

http://www.education.gouv.fr/cid54176/l-evolution-des-acquis-des-eleves-ans-culture-mathematique-culture-scientifique.html

Géographie de l'école – DEPP – Edition 2011

http://www.education.gouv.fr/cid56332/geographie-ecole.html

Filles et garçons sur le chemin de l'égalité – Edition 2010

http://eduscol.education.fr/cid47775/filles-garcons-sur-chemin-egalite.html

http://eduscol.education.fr/cid47784/le-cerveau-a-t-il-un-sexe%A0.html

Acquis des élèves au baccalauréat et au diplôme national du brevet – IGEN – 2008

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/textes_officiels/clg_2009/Acquis_eleves_2008.pdf

Les besoins mis en évidence par le CEDRE en ce qui concerne les élèves

Le premier besoin, en fin de collège, attesté par le CEDRE concerne les acquis des élèves des groupes 0 et 1 (15 % de la population en 2008), qui ne sont en situation de réussite que sur quelques items seulement, alors que l'évaluation comportaient une part importante d'items relevant des programmes du début du collège ou considérés comme faciles par le groupe des concepteurs de l'évaluation. On peut faire l'hypothèse que ces élèves auraient été d'avantage en situation de réussite sur des items relevant des programmes du primaire. Cela signifie-t-il pour autant qu'ils les auraient tous réussis ? Pour caractériser les acquis de l'ensemble des élèves en fin de collège, il apparaît comme nécessaire d'intégrer une quantité significative d'items du primaire dans les prochaines évaluations CEDRE Collège.

Les difficultés avec les mathématiques que rencontrent les élèves des groupes 0 et 1 peuvent avoir des conséquences sur leur insertion dans notre société, tant sur le plan de la vie quotidienne, que dans le cadre d'une activité professionnelle ou que dans la perspective d'une acuité et d'une participation citoyenne. Au regard de ces enjeux, quelle organisation des enseignements est la plus susceptible de favoriser la réussite des élèves des groupes 0 et 1 ? Quels sont les connaissances qui doivent être connues de tous à la fin de la scolarité obligatoire (La méthode arithmétique ? La méthode algébrique ? Le théorème de Pythagore ? Les triangles semblables ? Le théorème de Thalès ?) ?

Le socle commun de compétences et de connaissances, parce qu'il définit les objectifs de ce qui doit être acquis par tous les élèves, apparaît comme une piste de solution possible aux problèmes que rencontrent les élèves les plus en difficultés en mathématiques. Parfois vécu comme une baisse dans les exigences vis-à-vis des élèves, il n'en reste pas moins un projet ambitieux qui reste à atteindre, en mathématiques et destiné à rendre le système éducatif efficient.

Les résultats du CEDRE Collège 2008 confirment qu'une partie importante des élèves est en situation pour éprouver des difficultés à réinvestir en dehors de l'école, des connaissances pourtant attestées en salle de classe. Cela soulève la question de la place qu'occupe la mathématisation dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que celle de l'évaluation de sa bonne acquisition. Lors de sa mise en œuvre, le socle commun de compétences et de connaissances invite à articuler, d'une part, confrontation des élèves à des situations qui présentent une certaine authenticité donc, en particulier, une forme de complexité, et, d'autre part, évaluation des acquis des élèves tels qu'ils s'expriment dans de telles situations. Les résultats du CEDRE Collège 2014 montreront-ils une évolution des acquis des élèves dans le sens d'une meilleure aptitude à se saisir des mathématiques contenues dans une situation courante et afin de résoudre un problème rencontré ?

Afin de répondre au mieux aux dimensions nécessaires de variété des situations d'évaluations mises en jeux, d'une part, et de répétition dans le temps, d'autre part, les décisions d'attestation de la maîtrise par les élèves du socle commun de connaissances et de compétences sont logiquement conduites au sein des établissements. Une analyse comparative conduite en 2010 par la DEPP et appuyée sur un échantillon de 5662 élèves caractérise les variabilités des décisions d'attestation au regard de tests standardisés :

Revue Education et formations – numéro 79 – Daussin, Rocher et Trosseille – L'attestation de la maîtrise du socle commun est-elle soluble dans le jugement des enseignants ?

http://www.education.gouv.fr/pid25041/sommaire-numero.html

L'un des résultats de cette étude est que « certains groupes d'élèves se trouvent « pénalisés » par les attestations des enseignants, lorsqu'on tient compte de leurs résultats au test ainsi que d'autres caractéristiques sociodémographiques et scolaires. C'est notamment le cas des garçons qui ont moins de chances que les filles de recevoir une attestation, à score et caractéristiques fixés, que ce soit en français ou en mathématiques (tableau 13). La même situation défavorable est observée pour les élèves en retard et pour les élèves dont le responsable est ouvrier, retraité ou sans activité. En revanche, aucune différence significative n'est relevée concernant la langue parlée à la maison. Ces résultats correspondent à des constats faits antérieurement. Ils renvoient à la problématique de l'équité du jugement des élèves par les enseignants, jugement qui intègre des éléments extérieurs à la performance des élèves. ».

Quelles améliorations peuvent être apportées au socle commun de compétences et de connaissances pour garantir un traitement équitable de tous les élèves dans les décisions d'attestation de sa maîtrise ? En regroupant les Mathématiques, la Physique-Chimie, les Sciences de la Vie et de la Terre, ainsi que la Technologie en une seule « compétence », la « compétence 3 », le socle commun souligne les rapports privilégiés qu'entretiennent ces disciplines entre elles :

Grilles de références pour l'évaluation et la validation des compétences du socle commun – DGESCO – Janvier 2011

http://media.eduscol.education.fr/file/socle_commun/18/2/socle-Grilles-de-reference-palier3_169182.pdf

Ainsi, à la croisée des chemins de ces 4 disciplines, la complexité visée en situations d'enseignement et d'évaluation peut trouver une possibilité d'expression afin de contribuer au bon développement des compétences des élèves. Le socle contribue-t-il à un renforcement mutuel des différentes disciplines de la « compétence 3 » par une rencontre fertile ? Le socle participe-t-il à la conceptualisation des élèves, en contribuant à les écarter des conceptions erronées communément partagée et souvent rencontrées dans les différentes disciplines ? Les élèves qui dans une même journée vont pratiquer une démarche expérimentale en mathématiques et en sciences font-ils pleinement la différence entre les deux contextes, tout en en comprenant les conséquences ? Distinguent-ils l'hypothèse en mathématiques et l'hypothèse en sciences expérimentales ? Pour l'avoir pratiqué à l'école, les élèves sauront-ils distinguer les spécificités du savoir scientifique, des autres savoirs ? Sauront-ils développer des discours portés par des déductions successives ?

Dans le CEDRE Collège 2008, les résultats des groupes 0 et 1 attirent l'attention. Ils ne doivent pas pour autant faire oublier ceux des autres groupes, qui se démarquent, par bien des aspects, des objectifs fixés par les programmes :

– les groupes 0, 1 et 2 n'ont réussi aucun item relevant du champ « Grandeurs et mesures ».
– seuls les groupes 4 et 5 ont réussi à rédiger des démonstrations à plus de deux pas, sur des figures relativement complexes, dans des items qui n'étaient pas des QCM.
– une partie des élèves du groupe 5 confond symétrie axiale et symétrie centrale.
– les groupes 0, 1, 2 et 3 n'ont pas réussi certains items nécessitant de comparer des nombres décimaux relatifs.
– seuls les groupes 4 et 5 ont réussi, à des degrés de compétence différents, à algébriser une situation.
– seuls les groupes 4 et 5 ont réussi des items portant sur les concepts de fonctions linéaires et affines.
– seul le groupe 5 a réussi à résoudre une équation produit ou un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Les résultats du CEDRE Collège 2008 renvoient aux questionnements sur les parts respectives qu'occupent, dans l'enseignement, travail sur le sens et travail sur les techniques ? Quelle est la place de la démarche expérimentale ? Quelle est la place de la modélisation ? La question de la compétence ne concerne-t-elle que les connaissances du socle ?

Une étude complète sur le thème de la démarche expérimentale a été réalisée à l'IFÉ (ex INRP) :

Les dossiers de la veille – Avril 2007 – Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques – INRP http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/etudes/experimentation-math

Le PISA existe depuis plus de 10 ans. Bien que différentes dans leurs objectifs et certaines de leurs modalités, les évaluations de CEDRE et du PISA apportent pourtant des éléments de résultats convergents. L'éclairage international peut ainsi contribuer à éclairer les résultats nationaux. Pourtant la comparaison internationale s'exprime-t-elle dans ce qu'elle a de plus fertile ? Comment organiser la rencontre avec l'international pour en tirer bénéfice au mieux ? En particulier, quelle est la part de la formalisation dans les autres pays ? Quelle place y occupe la démonstration ?

Par ailleurs, quel est ce concept de numératie qui se développe si fortement à plusieurs endroits du monde ?

Deux riches études éclairent sur le thème de la numératie, pour l'une, et sur les renseignements que peuvent nous apporter une rencontre avec l'international :

Adult numeracy : review of research and related literature – Coben et al. – Novembre 2003

http://www.nrdc.org.uk/uploads/documents/doc_2802.pdf

Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base – UNESCO – 2011

http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf

Les questionnaires conatifs du CEDRE 2008 confirment le constat d'anxiété des élèves français dans leur rapport aux mathématiques déjà constaté dans le PISA.

Ainsi, dans les "Premiers résultats de PISA 2003", pages 148 et 157, on pouvait lire que :

- « Les élèves qui font état d'une forte anxiété vis-à-vis des mathématiques ont tendance à obtenir un score inférieur... »
- « Que les garçons soient moins anxieux vis-à-vis des mathématiques que les filles et que les élèves soient moins anxieux dans certains pays que dans d'autres donne à penser qu'il est possible de traiter ce problème. »

De quelle manière l'institution assure-t-elle un suivi du rapport qu'entretiennent les élèves avec les mathématiques au cours de leur scolarité ? Quel plaisir les élèves prennent-ils à faire des mathématiques ? Des actions spécifiques sur la motivation des élèves sont-elles susceptibles d'impacter sur leurs performances cognitives ?

Les besoins mis en évidence par le CEDRE en ce qui concerne les enseignants

Le second besoin attesté par le CEDRE se révèle au travers des questionnaires remplis par les enseignants de mathématiques. Ils devaient estimer la difficulté de 7 items sur une échelle allant de 1 (Facile) à 9 (Difficile). Les résultats sont proposés dans le tableau suivant. Dans l'ensemble, ils tendent à considérer les items comme faciles, leur estimation étant nuancée par le type d'établissement qu'ils fréquentent. Pourtant, si on se réfère à l'échelle CEDRE 2008, ces items ne sont pas si simples puisqu'ils sont associés aux groupes 3 et 4 ou même hors-échelle.

Tableau - Moyennes des estimations par les enseignants des difficultés de 7 items sur une échelle allant de 1 (Facile) à 9 (Difficile) – Exemple de lecture : la moyenne des estimations de la difficulté de l'item MC805 par les enseignants en établissement hors éducation prioritaire est de 2,1 ; ce même item est rattaché au groupe 3 dans l'échelle CEDRE

Item	MM704	MD411	MC124	MC805	MC109b	MG315a	MM712
Thèmes	Aire disque	Echelle	Écriture scientifique	Comparaison décimaux	Solution inéquation	Trigonométrie	Conversion unités aire
éduc. Prio.	3,8	3,9	3,3	2,3	3,5	4,7	3,7
hors éduc. Prio.	3,2	3,6	3	2,1	3,3	4,3	3,1

privé sous contrat	2,8	3,3	2,7	2,2	2,8	3,6	3
Groupe dans CEDRE	Hors-échelle	Hors-échelle	3	3	4	4	Hors-échelle

L'acquisition des contenus enseignés au collège est organisée sur un principe d'agrégation de connaissances, des plus « élémentaires » aux plus « élaborées », les premières étant nécessaires pour les suivantes. Les résultats du CEDRE 2008 étayent l'hypothèse d'un décalage entre, d'une part, l'estimation de la difficulté par les enseignants influencée par l'organisation des contenus d'enseignement sur l'ensemble du primaire et du secondaire (Un item apparaissant comme d'autant plus simple qu'il est enseigné plus tôt.) et, d'autre part, les résultats à certains items sur certains concepts « élémentaires », qui, bien que rencontrés parmi les premiers, continuent à résister à une partie importante des élèves en fin de scolarité.

Tous les contenus enseignés ont-ils le même degré de priorité ? Sinon, quels contenus méritent une attention particulière des enseignants avec leurs élèves ? Alors que sa diffusion semble rester confidentielle et du fait des éléments de réponses qu'il peut apporter à ces questions, le CEDRE 2008 ne mérite-t-il pas d'être plus connu des enseignants ? Des informations complémentaires sur le thème des facteurs de complexité d'une tâche proposée dans une évaluation standardisée peuvent être trouvées dans le document :

Enquête internationale sur l'alphabétisation des adultes – Mars 2005 – Mesurer la littératie et les compétences des adultes : Des nouveaux cadres d'évaluation – Murray, Clermont et Binkley

http://www.statcan.gc.ca/pub/89-552-m/89-552-m2005013-fra.pdf (Dont les pages 202 et suivante)

Les écarts entre les objectifs, tels que définis par les programmes, et les résultats, tels que constatés par les acquis des élèves dans le CEDRE Collège 2008 invitent à conduire un état des lieux sur le métier d'enseignant des mathématiques.

Comment ont évolué les effectifs d'étudiants en mathématiques dans les universités au cours de la première décennie du 21ième siècle ? Les profils requis pour réussir les concours de recrutement des enseignants sont-ils bien en adéquation avec le métier exercé ensuite ? Comment évolue le rapport entre le nombre de candidats aux concours de recrutement des enseignants et le nombre de places à ces mêmes concours ? Relativement à un marché du travail varié, quelle est l'attractivité du métier d'enseignant de mathématiques ? Dans quelles conditions les académies parviennent-elles à recruter des enseignants pour assurer des fonctions de remplacement ?

Généralement, quelle formation est la plus à même de préparer les enseignants à l'exercice du métier, éventuellement en établissement difficile ? Plus précisément, comment la formation initiale des enseignants se déroule-t-elle désormais ? Les nouveaux enseignants sont-ils bien formés à gérer l'hétérogénéité ? Ces mêmes enseignants pourront-ils accompagner utilement leurs élèves vers les TICE, alors que celles-ci occupent une place grandissante dans la société et que leurs usages s'inventent au quotidien ? Comment se déroule la formation continue dans les académies ? Où en est l'offre dans le domaine de la formation de formateurs ? Les modalités d'évaluation de la qualité du travail des enseignants, telles qu'elles sont conduites actuellement, sont-elles efficientes ? Sinon, peuvent-elles être améliorées, dans l'intérêt des élèves ? Quelles ressources le monde de l'édition papier et numérique propose-t-il ? Sont-elles adaptées ? Peuvent-elles être améliorées ?

Sur « le terrain », plusieurs réformes, qui se différencient fortement par leurs modalités et leurs finalités, sont conduites simultanément. A l'image de la multiplicité des problèmes qu'elles sont destinées à combattre, elles visent à la fois :

– à créer les conditions d'une rencontre fertile des disciplines
– à préparer à l'utilisation des TICE relativement à la place qu'elles occupent désormais au quotidien
– à sensibiliser à la question de la sécurité routière
– à développer l'autoévaluation
– à aider les élèves les plus en difficultés
– à développer la culture artistique, ainsi qu'à éclairer sur l'histoire de l'art

– à renforcer le travail en équipe chez les acteurs éducatifs

– à mieux articuler évaluation sommative et évaluation formative

Leur nombre, leur rythme rapproché, leur variété et leur simultanéité ne contribuent-ils pas à atténuer l'efficacité des réformes en cours ? Les thèmes de convergence, le B2I, le socle commun, l'histoire des arts, l'accompagnement éducatif et l'ASSR ont-ils un même degré de priorité dans leur mise en œuvre ? Sinon, en ce qui concerne l'application des réformes, quelle hiérarchisation conseiller aux établissements, de manière générale, et, aux enseignants de mathématiques, en particulier ?

Les besoins mis en évidence par le CEDRE en ce qui concerne l'institution

Un troisième besoin concerne le fonctionnement de l'institution dans son ensemble. Afin d'améliorer son efficacité, elle est désormais administrée sur la base d'indicateurs de performances.

Points forts et effets pervers possibles de cette approche sont décrits dans trois ressources :

La loi organique relative aux lois de finances (LOLF) : un texte, un esprit, une pratique – Jean-François Calmette – Revue française d'administration publique – 2006

www.cairn.info/load_pdf.php?ID_ARTICLE=RFAP_117_0043

Des indicateurs pour les Ministres au risque de l'illusion du contrôle – Anne Pezet et Samuel Sponem – la vie des idées.fr

http://www.laviedesidees.fr/Des-indicateurs-pour-les-Ministres.html

Incitations et désincitations : les effets pervers des indicateurs – Maya Bacache-Beauvallet – la vie des idées.fr

http://www.laviedesidees.fr/Incitations-et-desincitations-les.html

10 ans viennent de s'écouler depuis la promulgation de la LOLF, le 1er août 2001. Bien que passé depuis quelques mois, l'occasion de l'anniversaire est aussi celle des premiers bilans.

De quels indicateurs dispose-t-on désormais ? Quels sont les forces et les faiblesses de chacun d'entre eux ? Tous sont-ils utiles ? Sont-ils améliorables ? Une culture de l'indicateur et du tableau de bord s'est-elle bien développée à tous les échelons de l'institution ? L'institution réussit-elle à ne pas se laisser séduire par le travers de la méthode qui verrait, au mieux, l'action publique se réduire à la seule réussite aux indicateurs, ou, au pire, cette même action forcer artificiellement certains résultats ? Des regards croisés, véritables garde-fous indépendants, existent-ils pour contrôler le bon fonctionnement de l'institution ?

Des éléments de réponses se trouvent dans le rapport :

Les indicateurs relatifs aux acquis des élèves – Bilan des résultats de l'École – 2011 – HCE

http://www.hce.education.fr/gallery_files/site/21/114.pdf

Sur le thème de l'évaluation des acquis des questions complémentaires se posent. Comment répondre aux besoins des académies, des départements, des communes et des établissements scolaires d'indicateurs fiables et complémentaires des seuls résultats aux examens ? Comment mettre en œuvre de tels indicateurs sans placer ces échelons intermédiaires en situation de conflit d'intérêts caractérisée par une conduite simultanée de l'action et de l'évaluation, dans un contexte où une partie des moyens serait conditionnée à la réussite ? Comment se garder des dérives constatées dans des pays pionniers/laboratoires dans ce domaine ? Comment renforcer l'impulsion donnée par le pilotage afin de lui permettre d'aller au-delà de l'action sur le seul levier que constituent les contenus des examens terminaux ?

Des éléments complémentaires se trouvent aux adresses :

Les effets théoriques et réels de l'évaluation standardisée – EACEA – Nathalie Mons – Août 2009

http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/111FR.pdf

http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2009/09/RapportEuropeenNMons.aspx

Assessment and innovation in education – OECD Education Working Paper No. 24 – Janet Looney http://www.oecd.org/dataoecd/41/30/43414899.pdf

Éléments de conclusion

Toujours pionnière dans la recherche en mathématiques, ainsi que dans l'ensemble des sciences humaines qui en étudient son enseignement, la France dispose pourtant de véritables forces créatives, qui s'expriment au travers :

- d'une forte mutualisation par ses enseignants (Sésamath)
- des réflexions conduites dans les académiques et diffusées ensuite sur leurs sites de mathématiques
- des ressources produites par le Ministère de l'Éducation Nationale, dont les documents d'accompagnement aux programmes
- des productions du réseau des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM)
- des travaux conduits par l'Institut Français de l'Éducation (IFÉ)
- de la richesse mathématique portée par la Société Mathématique de France (SMF)
- de l'expérience de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)
- d'un riche tissu associatif (Animath, association France-IOI, Fédération française des jeux mathématiques, association Math en jeans, comité international des jeux mathématiques, association Kangourou, association Maths pour tous, la Cité des géométries…)
- d'un foisonnant monde de l'édition de ressources papiers et numériques

Quelles conditions doivent être réunies pour qu'émerge de toutes les forces d'innovation une synergie durable, si nécessaire pour une amélioration des acquis de la population d'élèves en fin de scolarité obligatoire ?

1.3 De la dyscalculie à l'innumérisme

Mots-clefs : psychologie, développement, dyscalculie, innumérisme

Jean-Paul Fischer, Professeur de psychologie du développement, Université Lorraine, Dyscalculie développementale

Dyscalculies

Depuis que Kosc (1974) a proposé une définition – et une méthode d'estimation de sa prévalence – de la dyscalculie développementale, les différentes estimations de cette prévalence divergent considérablement. Plusieurs recherches ont cependant convergé vers le pourcentage avancé par Kosc, à savoir 6,4%.

J'ai proposé des critères de détection d'une dyscalculie « potentielle »1 qui suivent le principe général de la méthodologie suggérée par Kosc, à savoir que pour être classé dyscalculique un sujet doit avoir des difficultés en calcul (critère d'inclusion) et ne pas avoir de difficultés, ou pas autant, dans d'autres domaines (critère d'exclusion). Mais l'opérationnalisation de mes critères présente certaines originalités liées à des choix, notamment statistiques. On peut trouver une présentation détaillée de ces critères et de leur opérationnalisation dans Fischer (2005), et des résumés dans Fischer et Charron (2009).

Ces critères ont été mis en œuvre sur les évaluations nationales CE2 et 6ème de 2001 à 2004. Les mathématiques, éventuellement restreintes aux items numériques, ont permis de vérifier le critère d'inclusion : dans un premier temps, un élève est inclus dans l'échantillon des élèves potentiellement dyscalculiques si son score est inférieur de plus 1,645 écart-type au score moyen de la population parente. La comparaison entre le score en mathématiques d'un élève et son score en français a ensuite permis de vérifier le critère de discrépance : l'élève sera exclu si son score en français n'est pas significativement supérieur à son score en mathématiques.

Le choix de 1,645 écart-type, qui correspond à un test unilatéral au seuil conventionnel de 0,05 (avec une distribution normale des scores), conduit à surestimer les pourcentages d'élèves qui vérifient le critère d'inclusion par rapport à un choix de 1,96 ou 2 écarts-types. Malgré donc ce critère, moins sévère que ce qu'il aurait pu être, j'ai obtenu un pourcentage de prévalence des élèves (potentiellement) dyscalculiques nettement inférieur aux 6% souvent obtenus à la suite de Kosc. Ce pourcentage est d'environ 1,5%, voire de seulement 1% si l'on considère que les élèves également en difficulté dans les maths sans calcul ne sont pas spécifiquement en difficulté en calcul (Fischer, 2007).

Ce pourcentage, de l'ordre du quart, voire du sixième, des 6% souvent avancés m'a incité à examiner de près les recherches ayant abouti à ces 6%. Ainsi, dans Fischer (2007), j'ai montré que la méthode de calcul de Ramaa et Gowramma (2002), qui a conduit à une prévalence de 5,98% à Mysore (Inde), est erronée, et qu'un calcul correct conduit en fait à une estimation de 1,1% ; de même, dans Fischer (2011), j'ai montré que les 6,59% (= 12/182) d'élèves (Allemands) présentant des performances significativement plus faibles en arithmétique qu'en orthographe (Hein et al., 2000) ne sont pas des élèves dyscalculiques, et que le pourcentage qui résulte de cette étude, circulaire par rapport au calcul de la prévalence, serait plutôt de 1,32%.

A noter quand même que je ne suis pas le seul à avoir proposé une estimation de l'ordre de 1% à 2%. Le DSM IV (version internationale), qui fait souvent référence dans le domaine clinique indiquait, en 1995, que l' « on estime que 1% des enfants d'âge scolaire ont un trouble du calcul » (APA, 1996, p. 59). Ensuite, l'une des études les mieux contrôlées sur plus d'un millier d'enfants anglais a identifié 1,3% d'élèves ayant des difficultés seulement en arithmétique (Lewis, Hitch & Walker, 1994). Enfin, récemment, Peard (2010), sur la base de cas particuliers et d'une réflexion pédagogique suggère lui aussi que le pourcentage de dyscalculies doit être inférieur à 2%.

Malgré ces observations suggérant que le pourcentage de 6% est irréaliste, on peut encore lire, aujourd'hui, dans la revue Science et sous la plume de Butterworth, Varma et Laurillard (2011), que le pourcentage de dyscalculies va de 5 à 7%. Je m'en offusque, et juge inacceptables les méthodes parfois utilisées pour arriver à de tels pourcentages. D'ailleurs, pour prolonger et renforcer mes critiques précédentes, je peux remarquer que le même Butterworth cosigne, à peu près la même année, un article dans lequel on rapporte une prévalence estimée de la dyscalculie développementale de 3,4% (Reigosa et al., 2011). Encore plus gênant, dans l'étude originelle, à Cuba, Reigosa et al. (2008) avaient obtenu une prévalence de 5,9% sur 11652 élèves2, de la 2ème à la 9ème année, à La Havane, dans une première étude, et 3,17% sur 16097 élèves, des 3ème et 6ème années, issus d'écoles urbaines et rurales, dans une seconde étude : dans l'article de Reigosa et al. (2011) la seconde étude, qui a conduit à une prévalence moindre, est passée sous silence.

Dyscalculie, acalculie ou innumérisme adulte

Les données sur l'arithmétique des adultes (non étudiants et non retraités) sont extrêmement rares. L'enquête IVQ (Informations sur la Vie Quotidienne) de l'Insee, qui porte sur plus de 10000 adultes de 18 à 65 ans, fait exception. Même si les données ne sont pas idéales pour une telle analyse – cette enquête concernait essentiellement le français, et n'incluait qu'un petit module numérique placé, pour l'essentiel, à la fin de l'enquête – elles ont permis la mise en œuvre des critères de dyscalculie développementale sur un important échantillon d'adultes (Fischer & Charron, 2009). Une telle mise en œuvre soulève cependant la question : la notion de dyscalculie (potentielle) à l'âge adulte est-elle comparable à celle chez les enfants d'âge scolaire ?

En réponse, on peut d'abord remarquer que, pour des adultes, il faut introduire la notion de dyscalculie acquise qui diffère fondamentalement de la dyscalculie développementale puisque qu'il s'agit ici de sujets ayant appris à calculer normalement, mais qui, à la suite d'une lésion cérébrale, ont perdu cette capacité. Cette notion de dyscalculie acquise est aussi connue sous le nom d'acalculie. Elle a été originellement observée sur les nombreux blessés par balle de la guerre 1914/18.

Ensuite, on peut remarquer que, faute de pratique et d'utilisation, il y a sûrement des adultes dont les connaissances arithmétiques scolaires ne sont plus guère disponibles. Si ces personnes adultes ont entretenu tant soit peu leurs connaissances en français, elles pourront présenter un pattern de dyscalculie, à savoir de très faibles performances en calcul et des performances significativement meilleures en français. Pour de telles personnes, le qualificatif d' « innumérique » conviendrait certainement mieux que le qualificatif de « dyscalculique ».

En résumé, pour les adultes (avant le vieillissement cognitif), nous avons trois concepts dont on aurait intérêt, dans un souci pédagogique, à séparer les appellations : l'acalculie, la dyscalculie, et l'innumérisme. Comme on peut penser que les adultes acalculiques (par suite de lésion cérébrale) n'étaient guère représentés dans l'échantillon de l'Insee, on voit que l'analyse des données IVQ conduit essentiellement à repérer deux types de personnes à difficultés en calcul : celles qui n'ont jamais vraiment appris à calculer (prolongement d'une dyscalculie développementale) et celles qui, faute de pratique, ont perdu les connaissances en calcul (probablement fragiles) qu'elles avaient acquises.

L'analyse de Fischer et Charron (2009) ne permet pas de séparer ces deux types d'incapacité à calculer d'origine théorique différente. Néanmoins, il est intéressant d'observer que nous avons obtenu, avec la même méthodologie (mais bien entendu pas avec les mêmes items arithmétiques), un pourcentage de prévalence (près de 3%) chez les adultes supérieur à celui chez les enfants : une telle supériorité est en effet compatible avec l'hypothèse d'une source supplémentaire de « dyscalculie » (par manque de pratique).

Faut-il préférer la notion d'innumérisme ?

Devant la faible prévalence de la dyscalculie, et pour des raisons économiques évidentes, le Ministre français de l'éducation s'est récemment rallié à la notion d'innumérisme (Chatel, 2011). Le Ministre attribue cette notion au « mathématicien » québécois Normand Baillargeon. En fait, elle a été introduite initialement par Douglas Hofstadter (1982), et popularisée ensuite par un livre de J.A. Paulos (1988) intitulé : Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences. En France, Michel Vigier (2010) a fondé récemment l'Association pour la prévention de l'innumérisme (voir http://www.innumerisme.com). Comme le suggère le titre du livre de Paulos, l'innumérisme est à la maîtrise des nombres ce qu'est l'illettrisme à la maîtrise de la langue.

Par rapport à la notion de dyscalculie, la notion d'innumérisme implique beaucoup moins l'idée de trouble ou de maladie, a fortiori de maladie d'origine génétique. Elle ne sous-entend pas, du moins beaucoup moins que la dyscalculie, que l'absence de culture serait spécifique au domaine numérique. En effet, comme les domaines de culture sont quasiment infinis – cultures informatique, cinématographique, musicale, etc. – , on ne peut guère exiger que l'absence de culture doit être spécifique au domaine numérique. Cette non-exigence de spécificité facilite alors considérablement le repérage des sujets « innumériques ». Il suffit en effet d'un seul critère, analogue au critère d'inclusion de la dyscalculie, pour décider si un sujet est « innumérique », par exemple en vérifiant si son score à un test numérique se situe dans les cinq premiers centiles. Nos observations sur les adultes montrent les lacunes que peuvent présenter de telles personnes « innumériques » : dans les données IVQ, nous avons ainsi relevé 23,5%3 de participants qui ont répondu 25 lorsqu'il s'agissait de dire la différence de température, dans le désert, entre la nuit (moins 10°) et le jour (plus 35°).

En regard de ces avantages, la notion d'innumérisme présente cependant l'inconvénient de concerner plutôt des sujets adultes ou adolescents que des enfants. J'en veux pour preuve que dans les premiers écrits sur l'innumérisme (innumeracy), Hofstadter discutait de grands nombres (e.g., les milliards) et Paulos traitait de problèmes de statistiques et de probabilités dépassant largement le niveau élémentaire. On peut également remarquer que les articles récents qui suggèrent l'importance d'une culture numérique traitent typiquement de problèmes adultes, comme la prise de décision ou la lecture d'une prescription médicales (Reyna et al., 2009 ; Wood et al., 2011). En outre, avant de constater le défaut de culture numérique, il faut laisser le temps aux sujets de l'acquérir.

En conclusion, le terme « innumérisme » serait certainement plus approprié que le terme « dyscalculie » pour des sujets adultes comme ceux de l'étude de Fischer et Charron (2009)4. Mais le développement des connaissances et compétences numériques ne semble pas bien saisi par la notion d'innumérisme, alors que, fondamentalement, la notion de dyscalculie s'intéresse à ce développement, à ses troubles et vicissitudes tout au moins. Je ne suis donc pas favorable à un abandon de la notion de dyscalculie, même si mes travaux et ma prudence me conduisent à suggérer une prévalence de 1,5 ± 1,5% (ce qui laisse ouvert la possibilité de son inexistence !) et à qualifier la dyscalculie de « potentielle » lorsqu'elle se base sur des critères de performance (à un moment donné).

Bibliographie

APA, 1996. DSM-IV : Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux, 4ème édition. Washington DC : American Psychiatric Association (traduction française par J.-D. Guelfi et al., Paris : Masson, 1996).

Butterworth B., Varma S. & Laurillard D., 2011. Dyscalculia: From brain to education. Science, 332, 1049-1053. DOI: 10.1126/science.1201536

Chatel L., 2011. Une nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'école. Dossier de presse disponible à l'adresse : http://www.education.gouv.fr/cid54824/le-plan-sciences.html

Fischer J.-P., 2005. Le diagnostic de dyscalculie à partir de l'évaluation en CE2 : vers une approche scientifique ? Nouvelle Revue de l'AIS, 32, 85-98.

Fischer J.-P., 2007. Combien y a-t-il d'élèves dyscalculiques ? A.N.A.E., 19 (3), 141-148.

Fischer J.-P., 2011. La cacophonie à propos (de la prévalence) de la dyscalculie incite-t-elle à lui préférer la notion d'innumérisme? In: Actes du symposium : Dyscalculie développementale et troubles d'apprentissage en mathématiques (pp. 13-18). Montréal : Cénop.

Fischer J.-P. & Charron C., 2009. Une étude de la dyscalculie à l'âge adulte. Économie et Statistique, N° 424-425, 87-101.

Fischer J.-P., Charron C. & Meljac C., 2008. Les différences entre sexes en arithmétique : des enfants aux adultes. Bulletin de psychologie, 61 (3), 227-235.

Hein J., Bzufka M.W. & Neumärker K.-J., 2000. The specific disorder of arithmetic skills. Prevalence studies in a rural and an urban population sample and their clinico-neuropsychological validation. European Child & Adolescent Psychiatry, 9 (Supplement 2), 87-101.

Hofstadter D.R., 1982. Number numbness, or why innumeracy may be just as dangerous as illiteracy. Scientific American, 246 (5), 20-34.

Kosc L., 1974. Developmental dyscalculia. Journal of Learning Disabilities, 7 (3), 164-177.

Lewis C., Hitch G.J. & Walker P., 1994. The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year-old boys and girls. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 35 (2), 283-292.

Paulos J.A., 1988. Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences. New York: Hill and Wang.

Peard R., 2010. Dyscalculia: What is its prevalence? Research evidence from case studies. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8, 2010, 106-113. International Conference on Mathematics Education Research (ICMER 2010). doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.015

Ramaa S. & Gowramma I.P., 2002. A systematic procedure for identifying and classifying children with dyscalculia among primary school children in India. Dyslexia, 8 (2), 67-85.

Reigosa V., Valdés Sosa M., Butterworth B., Torres P., Santos E., Suárez R., Lage A., Rodrı´guez M., Estévez N. & Hernández D., 2008. Large-scale prevalence studies of learning disabilities in Cuban school-children population. Clinical Neurophysiology, 119 (9), Page e111.

Reigosa-Crespo V., Valdés-Sosa M., Butterworth B., Estévez N., Rodríguez M., Santos E., Torres P., Suárez R. & Lage A., 2011. Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: The Havana survey. Developmental Psychology. Advance online publication (september 12). doi:10.1037/a0025356

Reyna V.F., Nelson W.L., Han P.K. & Dieckmann N.F., 2009. How numeracy influences risk comprehension and medical decision making. Psychological Bulletin, 135 (6), 943-973. doi:10.1037/a0017327

Vigier M., 2010. Dyscalculie ou innumérisme ? Approches de la résolution des problèmes arithmétiques par les abaques. Bulletin de l'APMEP, 488, 301-311 (+348).

Wood S., Hanoch Y., Barnes A., Liu P.-J., Cummings J., Bhattacharya C. & Rice T., 2011. Numeracy and Medicare Part D: The importance of choice and literacy for numbers in optimizing decision making for medicare's prescription drug program. Psychology and Aging, 26 (2), 295-307. doi:10.1037/a0022028

Notes :

1 Car uniquement basée sur des critères de performance à un moment donné.

2 L'étude qui a conduit Reigosa et al. à estimer la prévalence à 5,9% en 2008 est la même que celle qui les conduit à estimer la prévalence à 3,4% en 2011: la différence provient d'une analyse complexifiée en 2011, où sont notamment introduites des notions intermédiaires comme les déficits numériques basiques qui affecteraient 4,54% de la population scolaire, ou la dysfluence arithmétique dont la prévalence serait 9,35%.

3 Cf. Fischer, Charron & Meljac (2008), même si j'ai quelques scrupules à citer ce pourcentage car l'échantillon n'était pas tout à fait représentatif (et les problèmes arithmétiques étaient placés en fin de passation).

1.4 Quelques remarques sur les représentations mentales des élèves

Mots-clefs : collège, nombres

Pierre Arnoux Professeur des universités, mathématiques Université d'Aix-Marseille

Introduction

Conseil scientifique de la conférence sur les mathématiques dans le socle commun, le 25 novembre 2011

Bien qu'ayant accepté de faire partie du comité scientifique, je ne me sens aucune qualification particulière pour parler de l'enseignement du primaire ou du collège. La seule compétence que je peux apporter, c'est celle d'un enseignant du supérieur, et un certain regard sur ce que la formation mathématique de base amène à la suite des études, et à la vie professionnelle ou citoyenne.

Remarques sur les représentation mentales des élèves

J'aimerais dans ce cadre attirer l'attention sur un phénomène que tous les enseignants ont rencontré : il arrive très souvent que les étudiants possèdent des connaissances, mais ne soient pas capables de les mettre en œuvre, même dans des problèmes très simples. Il est clair que pour eux, ces connaissances ont toujours été formelles, et sans relation au monde ; on pourrait opposer ces connaissances *formelles* à des connaissances *abstraites*, le mot abstrait sous-entendant que ces connaissances ont été tirées de situations concrètes dont elle ne gardent que certains aspects. Les étudiants qui associent à ces connaissances une ou (encore mieux) plusieurs *représentations mentales* s'en tirent beaucoup mieux.

L'enseignement mathématique est souvent réduit à une liste de connaissances et de compétences (en particulier des algorithmes variés) ; la question que l'on pose est alors celle de l'utilité de ces connaissances, que ce soit pour les études ultérieures ou la vie courante.

Or il me semble qu'il y a plus que cela dans l'enseignement mathématique ; il fournit un répertoire de représentations mentales qui sont très utiles, et souvent nécessaires, pour penser le monde moderne. Les mathématiques sont d'abord un langage, qui permet, mieux que d'autres, de décrire une partie de l'univers. Ce langage doit avoir une sémantique : on ne peut parler une langue, si on n'a aucune idée du monde qu'elle veut décrire. Un enseignement formaliste, qui considère les mathématiques comme un jeu sans relations avec l'extérieur, est voué à l'échec pour la grande majorité des élèves.

On parle beaucoup de modélisation ces derniers temps, mais c'est un sujet un peu différent : dans une modélisation, on a tendance a utiliser les mathématiques comme un outil pré-existant ; pour que cela soit efficace, il faut déjà avoir une représentation mentale. Par exemple, si dans un modèle on a besoin d'étudier une variation, on fera probablement appel à une dérivée ; mais si on n'a pas déjà une représentation mentale de ce qu'est une dérivée, cette modélisation risque fort de rester formelle, donc incompréhensible et incritiquable (on le voit régulièrement dans les enseignements de modèles économiques ou financiers, quand les mathématiques se réduisent à des formules magiques). Cet exemple relève bien sûr du lycée, mais on pourrait en donner de semblables avec la proportionnalité.

L'une des représentations mentales essentielles est celle qui est reliée aux nombres ; d'abord les nombres entiers, avec leurs diverses propriétés additives et multiplicatives, et leurs représentations dans le système décimal, puis les fractions, les décimaux et les réels. J'ai rappelé dans mon intervention un mot de Daniel Duverney, qui disait à propos d'un étudiant que ses nombres étaient *morts*. C'est-à-dire qu'ils n'entraient pas en relation, et ne faisaient appel à aucune représentation mentale (voir en pièce jointe une digression sur ce que j'entends pas des nombres vivants). L'expérience que j'ai avec les étudiants montre que c'est une cause majeure d'échec dans les études scientifiques, car cela empêche de mener les calculs à bien.

Je ne sais pas quelle est la façon la plus efficace d'enseigner ces représentations mentales; mais je sais qu'elles doivent être enseignées, non pour leur utilité directe, mais parce qu'elles informent une vision du monde, et sont la base des connaissances ultérieures. Les professeurs des écoles et des collèges possèdent-ils ces représentations ? Sont-ils conscients de leur existence ? Il faut travailler sur ce sujet.

Conclusion

Je terminerai sur deux remarques :

Opposer une tête bien faite et une tête bien pleine est un lieu commun. C'est aussi, dans une large mesure, une erreur: les connaissances de base sont les outils qui permettent d'en concevoir d'autres. Une tête vide ne peut être bien faite. Mais bien sûr, il ne suffit pas d'apporter des connaissances : il faut aussi assurer les connections entre ces connaissances ; une tête pleine de faits épars n'est pas une tête bien faite.

Les controverses qui fleurissent en cette année électorale (dettes, quotient familial, retraites…) reposent, pour nombre d'entre elles, sur des mathématiques élémentaires. Je trouve frappant de voir à quel point le manque de maîtrise par les divers interlocuteurs de représentations mentales élémentaires (pourcentages, taux marginal, flux et stocks, ordres de grandeur…) interdit toute discussion sérieuse sur ces sujets.

1.5 Des nombres "vivants" ? Digression sur la vie des nombres.

Mots-clefs : nombres, problèmes, collège

Pierre Arnoux

J'ai dit que, pour beaucoup d'élèves, les nombres étaient "morts" et ne parlaient pas. Ce n'est pas tout à fait le bon mot: dire que les nombres sont morts semblent suggérer qu'ils ont été vivants, et qu'on les a tués; mais la réalité est que, pour ces élèves, les nombres n'ont jamais été vivants. Plus que de nombres morts, il faudrait parler de nombres inertes, qui n'entrent naturellement dans aucun processus, et qui s'opposent à des nombres vivants ou actifs, qui sont en relation avec d'autres nombres et d'autres concepts, et qui sont le point de départ spontané de divers processus mentaux.

Mais qu'est-ce qu'un nombre vivant? Un cas extrême est représenté par certains autistes, pour qui chaque nombre a une couleur et une personnalité particulière, et qui connaissent directement les nombres premiers jusqu'à un rang élevé. Comme cela est bien connu, cela leur permet une efficacité dans le calcul particulièrement remarquable. On peut rapprocher ce mode de fonctionnement du "palais de mémoire" de Matteo Ricci, qui savait développer sa mémoire en construisant dans son esprit un palais avec diverses pièces dans lesquelles il rangeait ses souvenirs d'une façon très organisée, rattachant chaque fait à mémoriser à des sentiments et des émotions qui lui permettait de s'en souvenir de façon particulièrement efficace. Dans les deux cas, au lieu d'avoir une simple collection d'objets inertes, on a de multiples relations par lesquelles chaque objet entre en contact avec de nombreux autres.

S'il n'est évidemment pas question de vouloir transformer tous les élèves en autistes savants, il serait utile de les aider à rendre les nombres actifs. Plutôt que de donner une définition abstraite, je préfère vous donner quelques exemples de nombres vivants.

Il y a des nombres tristes, avec lesquels on ne peut pas faire grand chose; par exemple, 47. Une fois qu'on a dit que ce nombre est premier, on ne peut plus en dire grand chose (ou plutôt, je ne sais pas en dire grand chose; d'autres sauraient peut-être…). 46 n'est pas beaucoup plus intéressant: il est évidemment pair, et, tous ses chiffres étants pairs, on voit immédiatement que 46=2x23. Et on s'arrête là (pour moi au moins!).

49

Mais pas très loin, il y a 49. C'est un nombre beaucoup plus intéressant : c'est un carré, qu'on peut visualiser assez bien par un carré de côté 7, carrelé par des petits carreaux unités. Il est aussi très proche de 50; or 50, à un détail près d'ordre de grandeur, c'est 1/2; donc racine de 50, c'est un peu plus de 7 (et racine de 1/2, c'est un peu plus de 0,7). Il s'en faut de 1 près. Comme 2x7x7 c'est 98, 2x7x0,07 c'est 0,98, c'est-à-dire à peu près 1. Donc si, à ce carré carrelé dont je parlais tout à l'heure, on rajoute une bordure de 0,7, on obtient pratiquement un carré de talle 50.

Plus exactement, on a le carré initial, de taille 49, les deux rectangles de bordure, de taille 7x0,07=0,49 chacun, donc de taille totale 0,98, et le petit carré de côté 0,07x0,07=0,0049. Ca fait 49,9849, un nombre tout rempli de 49, qui est vraiment proche de 50. Racine de 1/2, c'est donc 0,707. Nombre remarquable, le seul dont l'inverse soit le double: racine de 2, c'est donc 1,414.

Ca se voit bien aussi si on prend une feuille avec quadrillage à petit carreaux, et qu'on trace un cercle de rayon 10 carreaux, et le carré de côté 7 carreaux ayant un sommet au centre du cercle: on voit le cercle passer tout près du sommet opposé du carré. Un triangle de côté 7,7,10 est presque rectangle (son angle au sommet fait 90,73 degrés, c'est à peine visible que ce n'est pas droit). Ce cercle passe d'ailleurs par d'autres points intéressants; puisque 6^2+8^2=100, il passe exactement par le point de coordonnées (8,6), et puisque 9^2+4^2=97, il passe assez près du point (9,4), comme on le voit sur le dessin. Sur un quadrillage, les 7 points ainsi obtenus { (10,0), (9,4), (8,6),(7,7),(6,8),(4,9),(0,10)} permettent de tracer à main levée un cercle tout à fait acceptable.

De façon un peu plus délirante, 49 est le seul carré à deux chiffres qui soit formé en juxtaposant 2 carrés à un chiffre, 4 et 9. Il y a d'autres carrés qui sont formés en juxtaposant 2 carrés, par exemple 169 ou 361 (on ne compte pas ceux qui finissent par 00, c'est trop facile!), mais fort curieusement, le seul carré parfait de 4 chiffres que l'on peut former en juxtaposant deux carrés parfaits à deux chiffres, c'est le "carré fantaisie" de 49, 1681=41x41… Le dessin de 49 comme un carré se décompose comme un oignon, et nous montre le carré précédent 49=36+13, et de proche en proche 49=1+3+5+7+9+11+13, immédiatement visible sur le dessin :

48

Juste avant 49, il y a 48, qui est aussi intéressant. Si on reprend le carré de côté 7, et qu'on lui retire un carreau unité, il reste un rectangle 6x7 et un autre 6x1, qu'on peut réarranger en 6x8 :

Evidemment, c'est 49-1=7x7-1x1=(7-1)(7+1)=6x8. De la même façon, on a 45=49-4=5x9.

48, c'est bien sûr aussi 2 jours, c'est-à-dire 2x24, et 4x12. Après la suite des puissances de 2: 1,2,4,8,16,…. il y a la suite des doubles de 3 : 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, que l'on retrouve d'ailleurs dans la suite des puissances de 2, à partir de 256. On la retrouve aussi dans de nombreux calculs de durée, par exemple dans la service des enseignants chercheurs (service standard: 192, demi-service 96…); ce n'est pas pour rien: c'est supposé correspondre à 6h par semaine sur deux fois 16 semaines; en réalité, cela correspond plutôt aujourd'hui à 8h par semaine sur 2 fois 12 semaines, et ces propriétés arithmétiques expliquent probablement pourquoi les semestres universitaires tendent vers 12 semaines…

Pour continuer dans le temps, 48, c'est aussi 4/5 d'heure, c'est-à-dire 0,8x60 minutes, tandis que 45 c'est 3/4 d'heures.

On pourrait continuer comme cela indéfiniment; l'important, c'est que si les nombres que l'on connaît sont vivants, alors une fraction comme 45/60, par exemple, ne peut pas rester comme cela; elle fissionne spontanément de multiples façons: comme multiple de 5, en 9x5/12x5=9/12, ou en multiple de 3 en 15x3/20x3, ou directement en multiple de 15 : 3x15/4x15=3/4

Ces propriétés des nombres s'enrichissent progressivement, jusqu'à des choses nettement plus ésotériques; par exemple, il est peu connu que les groupes simples non commutatifs sont directement liés aux mesures du temps; le premier groupe simple, A5, est le groupe du dodécaèdre; il est d'ordre 60, (pour fixer une position du dodécaèdre, il faut d'abord dire où va la face de base --12 possibilités--, et ensuite voir comment on tourne ce pentagone --5 possibilités--, donc 5x12; ou encore, fixer l'un des 20 sommets, puis déterminer où va l'arête correspondante, donc 3x20). Ces 60 correspondent à la mesure de temps de base, 60 minutes dans une heure (ou 60 secondes dans une minute). Le deuxième groupe simple, PSL(2,F7) est d'ordre 168=7x24, qui est le nombre d'heures dans une semaine. Le troisième, A6, est d'ordre 360=30x12, qui est le nombre de jours dans une année...

On pourrait à partir de là concocter un délire numérologique; il est bien plus raisonnable de remarque que, d'un côté, les contraintes algébriques qui pèsent sur lui font qu'on groupe simple est, soit commutatif d'ordre premier, soit non commutatif et d'ordre fortement composite; de l'autre côté, les mesures de durées sont des nombres conventionnels : il n'y a aucune raison physique de décomposer une heure en 60 minutes ou de faire des semaines de 7 jours; si 'on choisit ces nombres, c'est justement parce qu'ils sont hautement composites, et se prêtent donc bien à toutes sortes de calcul. Et l'année fait à peu près 365 jours, pas 360: si ce dernier chiffre intervient dans de nombreux calendriers, c'est à cause de ses propriétés arithmétiques (12 mois de 30 jours). Il n'est donc pas surprenant que, dans deux contextes où l'on trouve des nombres hautement composites, on retrouve les trois mêmes nombres.

Il n'en reste pas moins que dans ces deux contextes, comme dans bien d'autres, la capacité à faire vivre les nombres est un préliminaire essentiel à toute compréhension.

1.6 Introduction to the problem of curricula all over the world

Mots-clefs : école, nombres, problèmes, didactique

Maria G. Bartolini Bussi, Full professor of mathematics education, Università di Modena e Reggio Emilia, Italie

Curricula

I have been asked to give a short introduction to the problem of curricula all over the world. It is really very difficult and I shall limit myself to some observations about the Italian one (my country) and the Chinese one (a country I have been studying for some years). In general, I could say that ICMI has recently launched a DATABASE PROJECT whose ultimate goal is to build and update a database of the mathematics curricula all over the world.

http://www1.mathunion.org/icmi/other-activities/database-project/introduction/

This database, with documents in local languages or English (most are in English), would allow comparative studies between different national standards. Both France and Italy are present (and US too, but not China yet). This is a first step to have collected in only one place relevant information. The documents are about “approved” standards. The study of curricula is really much more complex as it would require to refer not only to the standards but also to the variety of materials for teachers and for schools and similar.

Comparative analysis of standards (and of curricula even more) is not an easy matter at all, especially when very different cultural traditions are into play. But there is a much subtler reason. Usually a researcher who is embedded in one culture share a lot of implicit norms and systems of values, that make it difficult to understand the traces of them in the written documents from his/her own country. Everybody is strongly centered in his/her culture (up to the “naive” belief that it is the only GOOD model, that seems to be shared especially by teachers). A very interesting comparative book is:

Xie X, Caspecken P. F. (2008), *Philosophy, Learning and the Mathematics Curriculum: Dialectical materialism and pragmatism related to Chinese and US mathematics Curriculums*. Sensepublisher.

In the above book naïveté is avoided by having two authors, one from each culture. In that book, starting from the NCTM Standards (US) and from the Chinese governmental Standards, the analysis is made also on two very popular textbook series (one in US and one in China). The reader is accompanied to a trip that allows to recognize the traces of the background culture, philosophy, systems of values and so on in both the Standards and the exemplary textbooks. This model might be applied also to compare other pairs (Standard, curriculum) and to discover some differences between our own model and a model from a far culture.

Actually, another way of avoiding naiveté (I am choosing this one, as I shall argue below) is to try to detach myself from my Italian (and European) culture, taking a point of view from a complex and ancient culture that is as far as possible from mine, i. e. to look at Italy from a Chinese perspective. I started about 6 years ago to study Chinese curricula and textbooks to try to understand why *Chinese children are better in Mathematics* (e. g. arithmetics, problem solving) *than Italian children in Italian school* (in REGGIO EMILIA, the city of the Faculty of education where I train prospective pre-primary and primary school teachers, there is one of the largest Chinese community in Italy). This "impression" is confirmed by the international assessment like OECD PISA, where Shanghai was absolutely the best in 2009. As I discovered very soon, the answer was not easy and required to start a long trip inside Chinese culture and language. Some years later I found that my personal approach (realized with the help of family members and colleagues) was consistent with the approach of a French philosopher and sinologist (François Jullien) who studied Chinese culture to understand French (and European) culture. My first approach to Jullien was mediated by:

Chieng A. (2006), *La pratique de la Chine*, Editions Grasset & Fasquelle.

I studied carefully:

ICMI study n. 13: *Mathematics Education in Different Cultural Traditions- A Comparative Study of East Asia and the West*; and Chemla papers (and edition of the Nine Chapters) about the ancient Chinese mathematics.

I exploited some travels to Beijing and Taiwan, related to my activity as a member of the ICMI EC to have a first-hand contact with Chinese culture and school. Now I have a small group of students on this "Chinese" project that is, in Italy, quite original: educators are usually very interested in studying the ways of teaching as soon as possible Italian as a second language to students, whilst we are more interested in exploiting in teacher education students from abroad (especially from China, who is the farthest situation from a cultural perspective) as a challenge and a resource to become aware of some hidden choices of our mathematics curriculum and to prompt changes in the teacher system of beliefs and, later, in the classroom practice. I have already published something about this theme (in Italian) and I have made the first international presentation (in English) at SEMT 11 last August (see below). The focus in this case was "problems with variation", a typical traditional approach to problem solving in China (see below).

An example from the "Chinese" study: problems with variation

The Chinese standards are very interesting to be read, although it is not always easy to find traces of the traditional Chinese culture. A very useful book is the book by Xie & Carspecken quoted above.

It is known also in the West now that the way of approaching problem solving in the Chinese school is quite different from the western way. This was well explained in the Chinese national presentation in Monterrey (ICME 11, 2008). The Chinese method is known as "problems with variation". In short this means to be able to see, in the same situation (from everyday life or mathematics as well) different ways to pose and solve problems. I shall present now a small example taken from a first grade textbook (introducing the numbers 6 and 7) with a comment taken with small adaptation from Chinese curricula The problem mentioned in the Standards concerns 2 and 3 but the image is very ugly!).

Comment

One can see 6 + 1 = 7 in different ways (from different perspective, in a more flexible way):

6 children and 1 teacher;

6 persons in classroom and 1 just entering

6 persons cleaning the classroom and 1 cleaning (or writing on) the blackboard.

But also:

6 desks and 1 teacher's desk

6 chairs close to the desks and 1 still moving

What is also important is that in the same page the relationships are written in many ways:

6 + 1 = 7; 7 – 1 = 6; 7 - 6 = 1.

Whenever there is an addition there is a subtraction and viceversa. This links the inverse operation to each other in a very flexible way.

In the Chinese Standards, surprisingly, problems with variation are not mentioned explicitly, as if they were a stable part of the Chinese tradition. Chinese colleagues tell that in China there are thousands of journals for teachers where problems with variations are discussed. Below you find a beautiful example of a very complex set of problems with variations taken from a second grade textbook.

I have discussed this set of problems

Bartolini Bussi M. G., Canalini R. & Ferri F. (2011), Towards cultural analysis of content: problems with variation in primary school, Proc SEMT 11, Prague.1

In teaching experiments carried out in Italy, I have used this set of problems, with a very complex metacognitive task, to prompt a change in teachers' system of beliefs. We have used similar tasks also for multiplicative structures.

One might think that in this case there is nothing new (from the research perspective) with respect to Vergnaud's analysis of the conceptual field of additive structures (and multiplicative structure in the other case). This might be true, but the attitude is a different: rather than analyzing and classifying problems (a typical western attitude) the above Chinese problems are considered as a whole by the teachers and are discussed as a whole by 2nd graders. They appear in this way in a standard textbook.

I do not know how addition and subtraction are treated in problem solving in French textbooks. In Italy they are usually introduced separately (in spite of the indications of our curricula). There is a very famous series of teacher's guide where there is a volume on addition problems and a volume of subtraction problems, written by two different authors with no connection with each other.

An example from Italian Standards: relationships between didactical research and institutional choices

In the document (the most recent Standards for grades k-8):

http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/dir_310707.pdf

there is a clear reference to the curricula prepared for the Ministry of Education by the Italian Mathematical Union (and the Italian Commission for Mathematical Instruction, chaired at that time by ARZARELLO). 3 volumes have been produced by a large group of didacticians (including dozens of teacher-researchers). The volumes have been published by the Ministry of Education and are available at:

http://www.umi-ciim.it/in_italia--28.html with the names *Matematica 2001, Mathematica 2003, Matematica 2004.*

In those big volumes the most powerful methods and examples produced by the community of Italian didacticians have been exploited. They draw on international research but with a special perspective on the institutional feature (e.g. Italian teachers usually spend many years – 3/5 – with the same group of students, hence the importance of long term processes). For instance – without explicit quotation to any author - the idea of Laboratory of Mathematics (not so far from Inquiry Based Mathematics Education, but with a major focus on the historic-cultural roots of mathematics), the idea of Mathematical discussion orchestrated by the teacher as a major form of social interaction in the mathematics classroom, the research studies on mathematical instruments and ICTs and so on. These 3 volumes had a strong impact on all the subsequent official documents by the Ministry of Education (including the 2007 document for grades K-8 quoted above). I am not claiming that teachers are actually exploiting in a strong way the above ideas, but, nevertheless, some national big projects for in-service teacher education have been developed by the Ministry of Education itself, drawing on these curricula (e.g. M@tabel for secondary school teachers; PLS for high school teachers and similar). In a sense, for Italian researchers involved in teacher education, it is good to have extended document (implicitly quoted in the national standard) with a lot of methodological indications and examples about didactics of mathematics that exploit the most meaningful findings of Italian didactical research.

This experience suggests me some observations and questions about the French situation, although I have to confess that my knowledge of the French situation is quite limited. I have read the document "le B.O." (19 juin 2008). I was a bit surprised to have not found any mention to the famous tradition of didactical research in France. For instance I know (and use)

Vergnaud's studies about conceptual fields (and problem solving);

Brousseau's studies about the Theory of Didactical Situations

Chevallard studies about Anthropological theory

Artigue's studies about didactical engineering.

I have not found any trace of them in the standards. Surely curriculum is defined not only by standards but also by textbooks, journals for teachers, teacher's guides, training courses and so on. For instance I am familiar with a very good material for pre-primary school (DVD): Apprentissage Mathématiqué en maternelle (Hatier) by Briand, Loubet, Salin.

In this multimedia (that I have exploited also for my students) there is reference to Brousseau TDS. But I was not able to find any reference to this large body of research studies in the standards B. O.. Which are the relationships between didacticians and the institutions in charge for preparing standard or organizing teacher education?

An example of the links between fundamental research, classroom practice and teacher education in Italy

This example comes from my personal experience as a researcher, as a "theoretician" and as a teacher educator.

The theoretical framework of semiotic mediation after a Vygotskian approach

After some decades of teaching experiments in classrooms at all school levels (from primary to secondary), Bartolini Bussi & Mariotti have published a paper to illustrate the theoretical framework, named *Semiotic mediation after a Vygotskian approach*. Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008), *Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective*. In: L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh, B. Sriraman, D. Tirosh. *Handbook of International research in Mathematics education* (2nd edition). p. 746-783, New York: Routledge Taylor & Francis Group.2

(this document is available; Mariotti held a course in the last école d'été).

In short, the focus is on artifacts (and on semiotic activity), ranging from classical artifacts (e. g. abacus, compass, curve drawing devices, pantographs, and so on) to ICTs (dynamic geometry softwares, softwares for symbolic calculus and so on). In this framework the instrumental approach by Rabardel is exploited together with Vygotsky's semiotic approach (with the basic ideas of Zone of Proximal Development, genesis of higher psychological functions, genesis of consciousness and similar). The theoretical framework has been built in a dialectical and dialogical way together with teacher-researchers to interpret, design and analyze effective classroom practices where a major focus in on artifacts and on the teacher's role in acting as a cultural guide.

Exploiting the theoretical framework in a complex program for teacher education developed at the regional level.

This theoretical framework has been exploited in a very complex project for in-service teacher education (secondary school) in the region Emilia-Romagna. 5 laboratories of mathematical instruments – mostly related to geometry - have been opened (2008/10) in 5 different provinces and a regional network of 80 secondary school teachers has been created to cope with didactics of mathematics in the laboratory. 3 more laboratories are on the way in 2012 in 3 more provinces with a similar organization. A complete report of the first two-year period is available in Italian

http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto/libro-progetto-regionale.html (editor Martignone).

Other materials are available at:

http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna.html, Michela Maschietto presented the project in Lyon – 2010 –

http://ife.ens-lyon.fr/editions/editions-electroniques/apprendre-enseigner-se-former-en-mathematiques.

Short presentation in English are available (RF at PME 35 – 2011)). The theoretical framework has allowed to produce a standard script of mathematical exploration of a mathematical instrument for teachers that can be summarized as follows (in parenthesis one can see the main reference for this particular question): in this case we imagine to apply it to the study of a Scheiner pantograph, the famous instrument to enlarge/reduce drawings.

1) How is this instrument (better artefact) made? (Rabardel instrumentalization)

2) What does the instrument (better artefact) do? What can you do with the instrument (better artefact) to solve a particular problem? (Rabardel instrumentation)

3) Why can the instrument (better artefact) do that? (Vygotsky mediation) – up to the construction of proofs.

4) What could happen if .....? (problem solving) – e.g. if some of the geometric features of the artefacts are changed?

The third question is related to the link between the artefact and mathematics by means of semiotic mediation.

The transfer from tasks for teachers to tasks of teacher (i. e. from tasks in teacher education to tasks in mathematics classroom).

This script is used in teacher education and is exploited by teachers in the construction of classroom tasks (classroom tasks are different from teachers' tasks as they are to be modified by each teacher according to the classroom context).

This example from Italy is consistent with Italian curricula (see the above quoted Matematica 2001 / 2003 / 2004). It has been realized together with the stakeholders of the Region (regional and school authorities, pedagogists, policy makers and so on). All the involved teachers have made experiments in their classrooms (also from vocational schools, where the tasks were transformed in "physical" construction tasks to produce working copies of instruments [1]) and produced logbooks. Half of the teachers have produced scientific reports and an increasing number of teacher has produced paper for teacher journals. The activity is going on after one year of the "official" conclusion.

Transfer to other school levels

What is interesting in this approach is that we have applied it also to teacher education for pre-primary and primary school. For instance we have applied a similar script (with an additional "0-task", see below) to explore a big size Slavonic abacus for pre-primary school and to explore a "pascaline" for primary school. The 0-task is: « What is this? Can you imagine a story about it? » It opens a narrative space, quite useful for young students, and realize a context suitable to *devolution* (according to Brousseau theoretical construct). This 0-task might be not suitable for elder students, because they are not accustomed to be interviewed in a very open way on a task that is perceived as not-mathematical. However in some case we use it, maybe later, to introduce the history of the artefact (as our artefacts are all reconstruction of historical instruments).

Research perspective

National seminar 2012

Now in Italy we are moving, as a group [2], towards research on mathematics teacher education. In the last national seminar (January, 26-28, 2012) a group coordinated by Arzarello (http://www.seminariodidama.unito.it/) has chronicled the development of activity about mathematics teacher education in the last 20 years (quoting Dumas' *Vingt ans après*). They started from the so-called Research for Innovation. (ARZARELLO F., BARTOLINI BUSSI M.G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective,. In: KILPATRICK J., SIERPINSKA A.. Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity. vol. 2, p. 243-262, DORDRECHT: Kluwer). Then they used Chevallard's Anthropological theory to study the development of praxeologies in the field of mathematics teacher education in Italy in the collaboration between didacticians, institutions, stakeholders.

This is a national research project we are launching just now to be funded by the Ministry of Education. The strict links between didacticians and institutions (embodied by Arzarello, who is both an outstanding researcher and the president (for nine years up to 2005) of the Italian Commission for Mathematics Instruction) allowed to have an institutional acknowledgment which left traces in the governmental documents and in some very large project for in-service teacher education launched by the Ministry of education.

I am very interested in knowing whether such links are present in France too and how you foster and increase them. I mean the links between fundamental research in didactics of mathematics, institutional development of Standards and curricula and classroom practice.

Notes:

[1] It is worthwhile to recall that Emile Borel (1904, Lecture at the Pedagogical museum in Paris) immagine a laboratori of mathematics as a carpenter workshop (menuiserie).

[2] The National group of researchers in didactics of mathematics has recently formed a scientific association similar to ARDM. This Association has a yearly meeting in the National seminar named after Giovanni Prodi, that a couple of weeks ago held the 29° session.

1.7 Des programmes, oui. Mais pour quoi faire ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement

Mots clés : Collège, didactique, psychologie…

Yves Chevallard, Professeur, Aix-Marseille Université / ADEF

Quels programmes ?

Une liste d'œuvres à visiter

Les développements qui suivent se veulent une réponse à une demande qui m'a été adressée par les responsables du conseil scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques : celle d'expliciter le regard que je porte sur les actuels programmes du collège. J'honorerai cette invitation de façon à aller le plus directement possible au but qui est le mien ici. Je le ferai, bien entendu, en m'exprimant à partir de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Dans ce cadre, un programme scolaire d'aujourd'hui apparaît comme une liste de mots et d'expressions qui désignent des œuvres – des œuvres mathématiques, ou réputées telles, pour ce qui est des programmes de mathématiques.

Je prends un exemple. L'actuel programme de mathématiques de la classe de 4e comporte, dans le domaine d'études intitulé « Nombres et calculs », un secteur d'études nommé « Calcul numérique » comportant un thème d'études libellé ainsi : « Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire ». Ce thème, à son tour, se décline en différents sujets d'études, dont l'un au moins est explicité en termes de « capacités » : « Connaître et utiliser l'égalité : a/b=a x 1/b . » Dans le paradigme scolaire traditionnel, que je nomme paradigme de la visite des œuvres, un programme désigne moins un système de questions à étudier qu'un répertoire de « monuments » − de différentes tailles − à visiter sous la conduite du professeur.

Quelle utilité assigner à quel type de programme ?

Quand on s'interroge sur un programme d'enseignement, qu'il soit fait ou à faire, quand donc on veut l'évaluer, c'est-à-dire en estimer la valeur, on doit s'interroger sur les fonctions qu'il vise à servir : ce que vaut une chose ne se conçoit que par rapport au projet dans lequel cette chose est censée intervenir. En d'autres termes, un programme n'a pas de valeur en soi. J'indique tout de suite que l'examen de l'utilité des programmes me conduira à écarter les formulations traditionnelles (en termes d'œuvres à visiter) pour proposer un style programmatique bien différent, approprié à un tout autre type de paradigme d'étude scolaire.

Ce paradigme nouveau auquel je me référerai d'abord en filigrane, c'est le paradigme dit du questionnement du monde, où l'on s'instruit en étudiant des questions auxquelles on essaie par là d'apporter des réponses, rassemblant et étudiant pour cela des œuvres idoines, mathématiques et autres, en fonction des besoins. Les « programmes » doivent en conséquence se présenter comme des systèmes codisciplinaires de questions à étudier, qui renvoient secondairement et d'une façon ouverte, exploratoire, à des programmes-noyaux disciplinaires – je donnerai de cela un exemple plus loin.

Des motifs irrecevables

Conservatismes élitistes

Avant toute autre considération, je veux écarter deux « motifs » de valider le contenu d'un programme au sens traditionnel du terme, c'est-à-dire les œuvres dont il se compose. Pour introduire – afin de l'écarter – le premier motif, je note d'abord que souvent, dans les discussions autour des programmes d'enseignement, on voit apparaître des justifications opportunistes dont le but réel est de maintenir une tradition à laquelle quelques-uns sont plus ou moins mélancoliquement attachés. La première question à soulever quand on entend juger d'un programme de telle ou telle discipline est évidemment : pourquoi enseigner cette discipline ? Pourquoi lui donner – ou lui conserver – le statut de matière obligatoire et même centrale comme il en va avec la discipline mathématique encore aujourd'hui ? Bien entendu, il n'y a pas, à mes yeux, d'anti-privilège des mathématiques, si je puis dire. C'est bien toute discipline qui doit ainsi, périodiquement, être examinée sur sa pertinence pour la formation scolaire des futurs citoyens. Je ne fais donc que poser la question, comme il est normal de le faire. Vous verrez plus loin la façon dont on peut apporter réponse à cette question, non pas a priori, mais si je puis dire in vivo, dans le travail même des élèves, des classes, de l'École.

Le motif de valider un programme que je viens d'évoquer − pour l'écarter − peut encore se formuler ainsi : cette œuvre ou ce détail d'œuvre devrait continuer d'être enseigné parce qu'il est distinctif d'une élite et donc, à ce titre, précieux − il sera donc pieusement conservé ! Au xixe siècle, Marc Girardin dit Saint-Marc Girardin (1801-1873), professeur de poésie française au collège Louis-le-Grand et à la Sorbonne, homme politique, critique littéraire, membre de l'Académie française à partir de 1844, disait, non sans un réalisme cynique : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin ; il me suffit qu'il l'ait oublié » (Lelièvre 1990, p. 43).

Cet élitisme assumé n'est en rien « moderne ». Il surgit dès l'origine des systèmes d'enseignement. L'étude d'une matière donnée – le latin ou la dactylographie, par exemple – est socialement classante. C'est à certaines matières jadis étudiées que se reconnaissent les élites. Nous avons souvent une haute opinion de la paideia, l'éducation grecque. Un historien de l'Antiquité tardive (Matthews, 1989) note qu'« une des fonctions primordiales de cette culture était de distinguer une élite du flot ordinaire de l'humanité. » (p. 78). J'emprunte cette citation au livre de Peter Brown, Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive (1998, p. 62). Cet historien y précise ceci : « Seuls les fils de notables avaient les moyens et le temps de faire le long voyage qui les amènerait des contrées les plus lointaines de l'Orient grec pour suivre à loisir les cours d'un maître tel que Libanius à Antioche, ou Prohaeresius à Athènes. » (p. 62) L'éducation commune aux élites, la paideia, rassemblait alors les segments disparates d'une élite du pouvoir dispersée sur le très vaste territoire de l'empire et lui permettait de s'entre-reconnaître ; ce que Peter Brown illustre par cette anecdote où le dérisoire le dispute au mondain 1 :

« Rencontrant les conseillers juridiques d'un nouveau gouverneur (qui devait avoir grandi à Rome), Libanius posa la question cruciale : « Comment Ulysse gouvernait-il son royaume d'Ithaque ? » La réponse fusa : « En bon père de famille. » Cette citation classique donna le ton aux relations entre le gouverneur et le conseil municipal pour les mois à venir. (p. 64)

La paideia ainsi partagée comme un schibboleth, et si chèrement acquise, et tellement distinctive, « donnait un paysage imaginaire commun » à une mince élite qu'elle séparait du même mouvement du reste immense de la société. La formation scolaire que j'ai en vue ici est aux antipodes d'un tel enseignement clivant et classant : elle prétend s'adresser à tous les citoyens à travers leurs enfants. Il ne s'agit nullement, bien sûr, d'ignorer le fait de la spécificité de certains besoins de formation de certaines « élites » ayant une utilité sociale avérée. Mais je considère le problème de la « fabrication » de ces élites comme étant, depuis longtemps, relativement bien maîtrisé. J'examinerai donc ici le problème toujours ouvert, me semble-t-il, de la formation de la masse. Il est vrai que j'inclus dans « la masse », et l'auteur de ces lignes, et ses distingués lecteurs, et toutes sortes d'élites « formelles », y compris, vous le verrez, le ministre de l'Éducation nationale lui-même.

La prétendue « valeur formatrice »

Les mobiles ouvertement ou clandestinement élitistes doivent ainsi être sévèrement mis en question. Par contraste, j'avancerai que le premier critère auquel apprécier un programme ou un projet de programme est son adéquation, non sans doute à la demande, mais à des besoins vérifiables de la diversité citoyenne. Cela souligné, un second critère doit alors être mis en avant. S'il n'est pas donné à beaucoup de s'exprimer aujourd'hui avec la franchise de classe d'un Marc Girardin, le conservatisme en matière scolaire – qui n'est pas un critère plus recevable que l'élitisme cynique en la matière – conduit souvent à mobiliser un autre grand classique de la doxa scolaire : la supposée « valeur formatrice » de telle ou telle discipline ou de tel ou tel détail de telle discipline. L'entité ainsi « valorisée » contribuerait, avance-t-on quand on ne se contente pas de l'insinuer, à la « formation » des jeunes générations. Mais voilà : à la formation à quoi ? À la formation pour quoi, au service de quels projets majuscules ou minuscules ? Tout cela est ordinairement tu. Or il se trouve que tout ou presque est « formateur » au regard d'au moins un type d'activité qui existe ou a bien dû exister ou pourra exister demain.

C'est le sophisme de la « valeur formatrice » que rejetèrent avec courage les auteurs des instructions relatives aux langues vivantes étrangères lors de la grande réforme de 1902 à laquelle le nom de Georges Leygues (1857-1933) reste attaché. Mettant les points sur les i, ils écrivent en effet : « C'est à l'acquisition de la langue que tout doit être subordonné, c'est pour l'apprendre à l'élève qu'on développe son esprit, et non pour développer son esprit qu'on la lui apprend » (Isambert-Jamati, 1990, p. 56). Voilà donc un second critère : l'allégation nue de la valeur formatrice n'est pas recevable. Pour espérer convaincre, elle doit préciser l'objet auquel il y aurait formation, et l'utilité de cet objet.

Pourquoi et comment étudier une œuvre ?

Un choix cardinal : l'utilité de l'œuvre

La question « Des programmes, pour quoi faire ? » reste, à ce stade, entière, certes. Mais les réponses possibles ont été nettoyées de quelques grands classiques du genre – « Pour se distinguer, entre gens de bien », ou parce que « Ça peut servir. D'ailleurs c'était comme ça avant. Ça a toujours été comme ça. Non ? ». J'ajoute que je défendrai plus loin une problématique socio-épistémologique et didactique qui ne saurait se satisfaire seulement du courageux principe énoncé en 1902 avec tant de netteté. Mais celui-ci délivre une critique ravageuse des programmes que le temps a nécrosés.

J'ai tenté de montrer ailleurs que l'enseignement des mathématiques avait évolué depuis plusieurs décennies vers une monumentalisation du corpus mathématique enseigné. Qu'entendre par là ? Un programme est fait aujourd'hui, je l'ai rappelé, de l'indication d'œuvres à étudier. L'actuel programme de quatrième prescrit ainsi l'étude de l'œuvre qu'est « l'égalité : a/b=ax1/b ». Mais qu'est-ce qu'étudier une œuvre, et cette œuvre-là en particulier ? Quelle est la finalité de cette étude ? À quoi doit-elle être utile ? C'est là que j'introduirai une nouvelle ligne de démarcation par rapport aux vues les plus communes en la matière.

Il y a en effet une finalité traditionnellement poursuivie, de façon semi-consciente en général, qui est de faire connaître à de « bons sujets », supposés dociles, le patrimoine du Royaume, qu'ils pourront regarder, admirer et même, si peu que ce soit, « essayer ». Et puis il y a un ordre de finalités que j'appelle l'ordre citoyen, où l'étude vise à faire connaître certaines œuvres en tant qu'outils en certaines activités déterminées que certains ont ou auront à réaliser – pas tous, certes, car cela dépend de l'histoire de chacun. Deux remarques solidaires doivent être faites en ce point. Tout d'abord, l'ordre des finalités citoyennes de l'étude est fondé sur les notions jumelles de raisons d'être et d'utilité d'une œuvre donnée. L'idée était au cœur de la réforme de 1902. L'un de ses illustres acteurs, Gustave Lanson (1857-1934), qui dénonce dès 1888 l'enseignement d'avant la réforme − « excellent, dit-il, pour préparer des hommes du monde » et qui « fait des délicats, quand il réussit, des paresseux quand il échoue » (cité par Jey, 2005, para. 10) − met très clairement les points sur les i (cité par Jey, para. 13) :

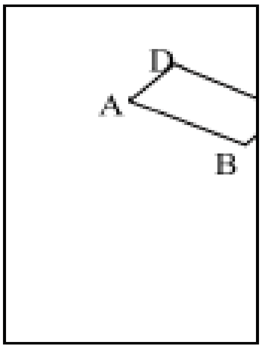
> *Je ne puis concevoir un enseignement qui ne soit pas nettement utilitaire, si l'on entend par là un utilitarisme intellectuel : l'éducation doit nous préparer à résoudre, dans la mesure qui sera donnée à chacun de nous, les grandes questions sociales et morales qui se posent aujourd'hui à l'humanité civilisée [...]. Nous autres professeurs, nous devons travailler à faire des hommes du temps présent, des hommes de demain même, et les meilleurs hommes que nous pourrons. Nous ne le pouvons sans leur faire connaître les idées directrices et vitales de la société contemporaine, dont nous vivons, dont ils vivront, en attendant qu'ils les détruisent en les transformant.*

La notion d'utilité doit évidemment être entendue en son sens plein, et fort, qui ne nous épargne rien, et ne pas être réduite à ce que d'aucuns font alors, avec quelle suffisance parfois, profession de mépriser ! Ainsi la connaissance du patrimoine a-t-elle son utilité propre, de même que la connaissance de la poésie chère à Marc Girardin et, plus généralement, que la connaissance de toute œuvre humaine possible, qu'on la juge « noble » ou « ignoble ». Étudier les sonnets de Shakespeare a son utilité. Mais on voit alors le problème : il ne suffit pas de dire qu'une utilité doit bien exister ! Il faut dire ce qu'elle est, et pour qui, et pour quoi.

Énoncer des raisons d'être et les vivre en situation

L'évolution historique du curriculum que j'ai décrite sous le nom de monumentalisation est contemporaine de l'effacement des raisons d'être, de l'oubli de l'utilité des œuvres mathématiques enseignées. Ces œuvres deviennent alors semblables à des monuments que l'on visite par contrainte, dont on ignore et dont on ignorera à quoi ils pouvaient bien servir autrefois, lorsqu'ils étaient « vivants », et à quoi ils pourraient bien servir aujourd'hui − si ce n'est à inspirer le respect des mondes morts aux êtres dociles ou à exciter les indociles à se rebeller vainement. Bien sûr ces cénotaphes n'en sont pas. Je prendrai ici, successivement, deux exemples.

À quoi sert cette œuvre mathématique qu’est « le parallélogramme » ? C’est une œuvre que l’on étudie, traditionnellement, en cinquième. C’est une œuvre dont, il y a longtemps, on explicitait les raisons d’être. Dans un Traité de géométrie élémentaire de la fin du xixe siècle (Poulain, 1885), au chapitre Des parallèles et des parallélogrammes, on trouve ainsi un bref développement intitulé Utilité des théorèmes concernant les parallélogrammes. Dans le langage du temps, l’auteur y précise que « ces théorèmes servent à en démontrer d’autres qui ont pour objet de prouver que deux droites sont égales, que deux angles sont égaux, que deux droites sont parallèles » (p. 39). Par exemple, si l’on veut construire la diagonale d’un parallélogramme ABCD dont le sommet C tombe hors de la feuille (voir ci-contre), on peut utiliser cette propriété (caractéristique) d’un parallélogramme de voir ses diagonales se couper en leur milieu commun − en fait, ce qu’il faut utiliser ici, c’est la propriété qu’a chaque diagonale de passer par le milieu de l’autre : la droite cherchée passe donc par A et par le milieu du segment [BD]. C’est là un cas particulier d’un cas généralissime qui est à l’origine de la géométrie : on veut réaliser des constructions (comme ici), et pour cela on a besoin de propriétés, souvent de beaucoup de propriétés, des propriétés qui engendrent d’autres propriétés, comme le note pertinemment Augustin Poulain dans son Traité de 1885.



Les exemples du type précédent pourraient être multipliés à l’infini. Pourquoi s’intéresse-t-on aux triangles ? Aux angles ? Aux angles saillants ? Aux droites parallèles ? Aux demi-droites ? Aux fractions ? À leur simplification ? Aux bases d’un espace vectoriel ? Aux espaces vectoriels eux-mêmes ? Chaque fois, en un curriculum qui traite ses « sujets » en citoyens ou en futurs citoyens, on doit pouvoir énoncer des réponses, c’est-à-dire des raisons d’être. Mais cela ne suffit pas : si l’on s’arrêtait là, l’élève resterait un spectateur, non un utilisateur de l’œuvre. Ces raisons d’être doivent donc s’incarner dans une situation dont l’élève soit le protagoniste – l’actant, comme dit Guy Brousseau.

Des AER aux PER

Dans le cas du parallélogramme, on peut proposer à des élèves de cinquième qui ne connaissent pas la propriété des diagonales de résoudre le problème du parallélogramme « tronqué » (tracer la diagonale passant par le sommet C « manquant »). On aboutit ainsi à la notion d’activité d’étude et de recherche (AER). Mais cela ne suffit pas. Car, idéalement, il faudrait ainsi inventer une AER pour chaque œuvre ou chaque détail d’œuvre, même si le pouvoir générateur d’une AER particulière donne vie, souvent, à une multitude de détails d’œuvres. Par exemple, il faudrait des AER particulières pour « introduire » les demi-droites, les angles saillants, l’orthocentre, etc. Tout cela fournit un nouveau critère de jugement d’un « programme », un critère à deux degrés : toute œuvre figurant dans un programme sera conservée si (et seulement si) l’on peut 1) en énoncer une raison d’être clé au niveau d’enseignement visé (qui ne se réduise pas, bien sûr, à prétendre que « C’est formateur » ou qu’« on l’a toujours fait ») ; 2) produire une AER – une situation – compatible avec les conditions d’enseignement, où cette œuvre apparaisse comme éminemment utile, sinon indispensable.

En dépit des travaux d’ingénierie didactique réalisés depuis plus de trente ans, ce critère ne pourrait être satisfait pour bon nombre d’items des programmes actuels, même quand il l’a un jour été ! Je m’arrête sur un exemple évoqué plus haut en passant. Dans le thème d’études du programme de quatrième intitulé « Division de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire » apparaît, je l’ai rappelé, le sujet d’études formulé ainsi : « Connaître et utiliser l’égalité : a/b= a x 1/b . » L’item fait l’objet de ce commentaire : « Un travail est mené sur la notion d’inverse d’un nombre non nul ; les notations 1/x et x–1 sont utilisées, ainsi que les touches correspondantes de la calculatrice. » Quel travail peut-on attendre d’une classe visitant cette œuvrette mathématique ? Un travail qui rende sensibles les raisons d’être – les raisons d’être là – de l’égalité à « connaître » et à « utiliser ». Une enquête historique montre ceci : longtemps, lorsque les calculs devaient être faits à la main et souvent de tête, sans support écrit, la division demeura une opération « difficile ». Comment alors calculer le quotient de a par b ? Eh bien, en remplaçant la division par une multiplication, grâce à l’égalité susdite. Voici un extrait d’un ouvrage qui s’inscrit encore dans la tradition d’avant la calculatrice, une Algèbre publiée en 1951 pour la « formation initiale, [la] formation continue, [les] concours administratifs » par R. Cluzel (professeur à l’ENNA de Paris) et H. Court (inspecteur général de l’Enseignement technique) :

> (p. 24) **2. Nombres inverses.** – L’inverse de 5 est 1/5 ; celui de − 3/7 est −7/3 .
>
> *Deux nombres sont dits inverses s’ils ont pour produit 1.*
>
> L’inverse de b est b’ tel que b’ = 1/b.
>
> Diviser par b revient à multiplier par son inverse 1/b.

a/b=ax1/b

Jusque-là, la différence n'est pas nette avec ce qui se fait aujourd'hui. Mais les auteurs précisent alors l'utilité de l'égalité qu'ils ont encadrée, et cela change tout :

> *Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication.*
>
> Exemple : signifie : égal approximativement à). (p. 25)

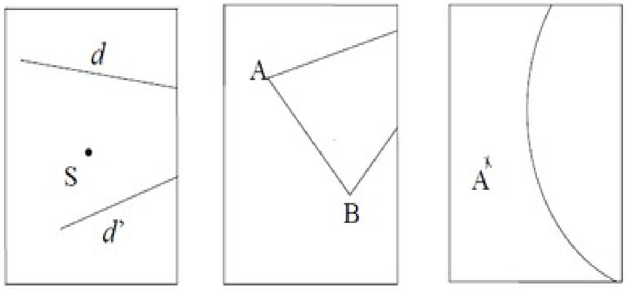
À la fin du chapitre − intitulé Quotient de deux nombres relatifs − sont proposés 13 exercices dont voici le 12e :

> 12. Calculer les inverses des nombres suivants : ;
>
> Application. Effectuer : (p. 26)

Rien n'a changé jusqu'à aujourd'hui, disions-nous, sauf un détail clé : on avait autrefois vitalement besoin de l'égalité a/b= a x 1/b pour faire des divisions. Il y avait dans les manuels des tables d'inverses et l'on savait par cœur, notamment, que Tout cela n'a plus de raison d'être aujourd'hui, sauf à mettre en scène un « Puy-du-Fou mathématique ».

Dans cet exemple comme dans celui du parallélogramme, on voit que les raisons d'être des œuvres mathématiques considérées sont « prosaïques » (et non pas « flamboyantes », « grandioses ») et qu'elles se rapportent à des emplois déterminés, parfois quasi uniques, et eux-mêmes fort « prosaïques ». Je veux tracer grossièrement un cercle de longueur 20 m dans un jardin pour y installer un nombre donné de chaises ; quel rayon dois-je utiliser pour tracer le cercle ? La longueur est donnée par la formule et le rayon en résulte : R = Calculons (de tête) : Voilà l'affaire. C'est cela qui m'a poussé à soutenir que « les mathématiques, c'est (comme) de la plomberie », ce qui veut dire que les outils employés et les gestes accomplis ne procèdent pas de motifs emphatiques et sentencieux mais d'humbles besoins qu'il convient de satisfaire de façon réglée.

Si l'on applique le critère indiqué plus haut dans l'état de choses actuel, ce sujet d'étude devrait être écarté du programme. Cela ne signifie pas que les élèves de quatrième ne sauront pas écrire par exemple que a/b = ac/bc pour établir (de tête) que l'on a et tant d'autres choses encore. Tel détail de telle œuvre mathématique peut tomber en désuétude mais retrouver plus tard, sous une autre forme, une nouvelle fonction. Il est certes des détails qui disparaissent sans laisser de souvenir dans les générations suivantes : il y a longtemps, ainsi, qu'on n'apprend plus par cœur au lycée que la droite coupant l'axe des x au point d'abscisse a et l'axe des y au point d'ordonnée b a pour équation , détail qui eut son rôle à jouer dans les études scientifiques autrefois – le lecteur verra par lui-même lequel.



D'une façon générale, des items auraient à être écartés et d'autres ajoutés. Mais je voudrais rester encore un peu sur le problème des raisons d'être et, plus précisément, de l'organisation de rencontres motivées et significatives avec les œuvres à étudier. Partant de la notion d'AER, j'ai introduit une généralisation désignée par le sigle PER – pour parcours d'étude et de recherche. L'idée d'une telle suite d'AER est illustrée par les figures ci-contre, où, de gauche à droite, il s'agit 1) de tracer la droite passant par le point S et le point d'intersection des droites d et d', 2) de tracer la hauteur relative au côté [AB], 3) de tracer la droite passant par A et le centre du cercle dont un arc est tracé sur la feuille.

Ce type de problèmes de construction conduit à rencontrer une bonne part des œuvres géométriques traditionnellement enseignées au collège. Deux ou trois PER – portant sur les distances inaccessibles ou sur le calcul graphique par exemple – permettent ainsi de couvrir le programme de géométrie ou ce qu'il en reste.

J'ajoute que la redécouverte de l'utilité des œuvres à enseigner est aujourd'hui largement obérée par une tendance qui s'est imposée en réaction aux audacieuses réformes « modernistes » des années 1960 : la pusillanimité curriculaire, qui fait du collège notamment, et pas seulement en mathématiques (je songe, ici, aux sciences physiques par exemple), un triangle des Bermudes de la connaissance. (Le principe de ces disparitions me semble être celui-ci : tout tend à apparaître comme « conceptuellement trop difficile » pour les élèves ; tout serait infiniment subtil et devrait en conséquence voir son introduction différée. Bien entendu, ce sont moins les élèves qui ont changé que le rapport des décideurs à la chose enseignée, envahi qu'il est par des afféteries « didactiques » stériles.) Par contraste, un curriculum « citoyen » se doit de proposer des œuvres mathématiques – des praxéologies mathématiques – qui honorent la raison au lieu de l'abaisser. Un programme acceptable doit se référer à des types de tâches nettement définis, des techniques efficaces et des technologies génératrices d'intelligibilité. Il doit promettre à l'élève un équipement praxéologique (mathématique) pertinent et de qualité.

« Un citoyen herbartien, procognitif, exotérique », dites-vous ?

Symptômes d'un effondrement historique

En 1753 paraît dans le troisième volume de l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (1751-1772) un article signé de d'Alembert, intitulé « Collège », qui jouera un grand rôle dans les changements éducatifs de la deuxième moitié du xviiie siècle (Granderoute, 1988). L'auteur y propose un constat que je résumerai ainsi : le paradigme de l'étude scolaire sur lequel l'époque vit encore est moribond et délétère. La philippique est connue : « … après avoir passé dans un collège dix années qu'on doit mettre au nombre des plus précieuses de sa vie, note d'Alembert, [un jeune homme] en sort, lorsqu'il a le mieux employé son temps, avec la connaissance très imparfaite d'une langue morte, avec des préceptes de rhétorique et des principes de philosophie qu'il doit tâcher d'oublier… » Je crains que ce tableau, dont je passe certains détails, ne soit aujourd'hui à nouveau d'actualité ; voyons cela.

On s'est beaucoup inquiété, dans les médias grand public et ailleurs, des résultats des jeunes Français aux tests du Programme for International Student Assessment (PISA). Ce qui m'inquiète le plus est ailleurs – chez les adultes, et pas seulement chez « les jeunes », qui ne font en cela qu'imiter leurs aînés. Une habitude s'est prise largement qui consiste à se délester automatiquement (quoique de façon sans doute différenciée) des connaissances scolairement apprises, selon un principe d'hygiène cognitive qu'une métaphore d'aujourd'hui résume à merveille : lorsque l'enseignement est terminé, lorsque l'examen est passé, faire « Corbeille » puis « Vider corbeille ». On s'inquiète de voir de jeunes élèves peiner à résoudre des problèmes sur lesquels, semble-t-on oublier, l'immense majorité des adultes « instruits » et « cultivés » serait « en échec ». Voilà ce qui m'inquiète ! Une étude du Credoc révèle que « seule une personne sur deux sait que 100 € placés à 2 % par an conduisent à un capital de 102 € » (Bigot, Croutte & Muller, 2011, p. 6). Et nous avons vu successivement l'ancien ministre Xavier Darcos (en 2008) et l'actuel ministre Luc Chatel (en 2010) sécher sur un problème simple de proportionnalité. Le premier, confronté à la question « Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos ? », s'est d'emblée récusé en s'exclamant : « Oh ! La règle de trois, je ne sais pas la faire ! » (Cet ex-ministre de l'Éducation nationale, notons-le, a tout de même reconnu un problème de règle de trois.) Le second devait répondre à une question extraite du cahier d'évaluation des élèves de CM2 : « Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ? » Une réponse est venue assez vite : 16,5 euros, soit la moitié du prix attendu, ce qui met 15 objets à un prix inférieur à celui de 10 de ces objets. Un journaliste de radio et de télévision, Jean-Jacques Bourdin, avait pris l'habitude – il a, depuis, cessé de le faire, l'ai-je entendu déclarer récemment − de poser à ses invités « politiques » des questions d'arithmétique simple. C'est ainsi que Didier Migaud, président de la Cour des comptes, lui a répondu avec une assurance feinte que 7 fois 9, c'est 76 (c'est-à-dire plus que 7 fois 10), tandis qu'Olivier Besancenot, rejoignant en cela Xavier Darcos, a refusé tout net de s'engager à donner la valeur du produit 8 x 9. Nous savons tous, en vérité, que ces personnes ont ainsi manifesté le comportement « modal » des adultes français. Auraient-ils répondu pertinemment qu'à bon droit nous pourrions les regarder comme des monstres – un individu normal n'agit pas autrement qu'ils ne l'ont fait, sauf à être un ancien professeur de mathématiques ou de sciences, ou, disons, un ancien élève de CPGE !

Enseigner les mathématiques se heurte ainsi, de nos jours, à une difficulté fondamentale : les adultes cultivés sont absolument, résolument étrangers aux mathématiques même les plus simples (et sans doute aux autres disciplines scolaires d'ailleurs), qui restent pour la plupart des souvenirs vagues et plutôt détestables. Tout se passe comme si les mathématiques n'existaient qu'à l'école, dont elles feraient partie au même titre que les notes et les punitions. En dépit des contorsions de certains pédagogues pour plaire, pour séduire, pour convaincre, la docilité aux mathématiques s'arrête au mieux, pour l'immense majorité des gens, lorsque s'arrêtent les études secondaires. Voilà le fait massif duquel, je pense, il nous faut partir.

Épistémologiquement et didactiquement, il faut refonder l'École

Pour illustrer un changement que je caractériserai par trois qualificatifs – « herbartien », « procognitif », « exotérique » −, je prends un exemple encore. Dans un ouvrage intitulé La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard et signé d'Alain Pavé (2011), l'auteur use d'un petit modèle mathématique pour expliquer comment, du fait des mécanismes de l'évolution darwinienne, il y a deux sexes et non pas trois, ou quatre, etc., et pourquoi les proportions p et q des individus de l'un et l'autre sexe sont approximativement égales. La chose est explicitée dans un encadré qui s'ouvre par ces mots : « Avertissement important : l'auteur souhaitant ne pas porter la responsabilité de troubles de santé, les lecteurs allergiques aux mathématiques, mêmes élémentaires, peuvent se reporter directement à la conclusion. » Nous sommes là encore dans l'ancien monde, qui n'en finit pas de mourir. Mais le simple fait d'étudier une question – « Pourquoi pas trois sexes ou plus ? » −, qui a elle-même ses raisons d'être, relève bien du paradigme cognitif nouveau, celui du questionnement du monde.

Tout d'abord, l'auteur est nécessairement, en tant que chercheur, herbartien 2 : il sait qu'on connaît le monde en le questionnant. Et il tend ainsi à faire de son lecteur lui-même un personnage herbartien. Qu'en est-il alors de la procognitivité ? Pour traiter de la question des proportions optimales d'individus lorsqu'il y a deux sexes seulement, il faut recourir à un rien de mathématiques : le modèle consiste simplement à représenter une rencontre « féconde » comme un ensemble de deux choix au hasard, indépendants, dans une urne composée de mâles en proportion p et de femelles en proportion q = 1 – p. L'auteur montre alors que la probabilité de choisir ainsi un mâle et une femelle (plutôt que deux mâles ou deux femelles) vaut 2pq et que cette probabilité est maximale lorsque p = q = 50 %. Pour cela, dit-il, il n'est besoin de rien que l'on n'ait pu apprendre en classe terminale (scientifique, s'entend). Or c'est là que le bât blesse.

L'auteur se montre ainsi, très classiquement, rétrocognitif : les outils (mathématiques, ou autres) à mettre en œuvre hic et nunc doivent avoir été maîtrisés antérieurement, à l'avance. S'il n'en est pas ainsi, tout se passe comme si l'auteur s'avouait impuissant à aider son lecteur, qu'apparemment il suppose rétrocognitif − ce qui est en effet, aujourd'hui, une hypothèse raisonnable. Par contraste, ce que le nouveau paradigme scolaire doit « fabriquer », ce sont des citoyens procognitifs, qui vont de l'avant au lieu de seulement regarder en arrière, étudiant et apprenant ainsi à tout âge et à tout instant les connaissances qui s'avèrent utiles, sans vivre leur passé comme un destin indépassable. Pour trois sexes supposés, en proportion p, q et r (avec p + q + r = 1), la probabilité d'une rencontre « productive » est 6pqr. Cette quantité est maximale en même temps que le produit pqr, dont la somme des facteurs est constante ; or un théorème aujourd'hui bien oublié (mais qui eut son heure de gloire scolaire au xixe siècle) indique qu'un produit de cette sorte est maximal quand ses facteurs sont égaux, soit ici lorsque p = q = r = 1/3. En ce cas, la probabilité de rencontre féconde, qui était de 50 % pour deux sexes, tombe à 22 % environ. Voilà pourquoi, Darwin aidant, deux amoureux sont toujours seuls au monde.

Il y avait, dans l'école de Pythagore, deux degrés d'élèves : les ésotériques et les exotériques. Les ésotériques savent ; les exotériques ont à apprendre. Très généralement, le citoyen doit se situer, de fait, comme un exotérique, et non se lamenter de n'être pas un ésotérique. « Je vais étudier telle question ; j'ai besoin pour cela de certaines connaissances dont j'ignore la nature et que j'ignore sans doute ; mais je vais les conquérir – ou les reconquérir − à partir de maintenant. » En vérité, chacun, y compris le spécialiste supposé, doit se penser constamment comme un exotérique, qui passe les acquis antérieurs supposés, souvent parcellaires, oubliés, fragilisés, partiellement adéquats, à l'étamine du présent. La figure de l'ésotérique est un trompe-l'œil, épistémologiquement et didactiquement perfide. L'élève de l'École à refonder doit ainsi se construire comme herbartien, procognitif, exotérique – ce qui est à peu près complètement le contraire du sujet idéal de l'École que nous aurons connue.

J'illustrerai cela, ici, en suggérant par un petit apologue ce que pourrait être demain le comportement, face à quelque Jean-Jacques Bourdin du futur, d'un Didier Migaud ou d'un Olivier Besancenot qui, sans prétendre le moins du monde être des ésotériques en mathématiques (ou ailleurs), auraient reçu une éducation authentiquement herbartienne, procognitive, exotérique. J'appelle l'intervieweur et _ l'interviewé ; voici leur dialogue imaginaire :

> β : 7 fois 9 ?
>
> ξ : 7 fois 9 ? Mince, ça je ne sais plus ! Eh bien 7 fois 10, c'est 70…
>
> β : Non, non ! Répondez tout de suite !
>
> ξ : Permettez… Donc 7 fois 9, cela fait 70 moins 7, soit 63.
>
> β : C'est ça !
>
> ξ : Ou encore c'est 7 fois 3 fois 3 (parce que 3 fois 3, 9), c'est-à-dire 21 fois 3, ce qui fait 63. Ou bien, puisque je crois me rappeler que 7 fois 8, c'est 56, 7 fois 9 c'est 56 plus 7, c'est-à-dire 56 plus 6, 62, plus un, 63. Ou aussi, c'est égal encore à (8 – 1)(8 + 1), soit 82 – 1 (vous vous souvenez, , « l'identité remarquable »…), ou 64 moins 1, donc 63. Ou… Bon. C'est aussi 9 fois 9, soit 81, moins deux fois 9, soit 18, c'est donc 81 moins 20 plus 2, soit 61 plus 2, donc 63. Oui, voilà ma réponse : 63. Enfin je crois !
>
> β : C'est bien ça !
>
> ξ : Mais vous, comment le savez-vous ?
>
> β : Je le sais ; 7 fois 9, 63.

β : En êtes-vous sûr ? Est-ce que vous ne confondez pas, comme l'ont fait certains de vos interlocuteurs ? Est-ce que nous ne sommes pas en train de nous tromper tous les jeux ? Quand j'étais enfant j'aimais bien compter en base 3.

ξ : ?

β : Voyons, recomptons en base 3, mon cher ξ ! En base 3, le nombre 7 s'écrit… 21 et 9 s'écrit… 100. Leur produit vaut donc 2100, c'est-à-dire 0 + 0 + 32 + 2 ⟵ 33, soit 9 plus deux fois 27, ou 9 plus 54, soit donc… 63. On n'en sort pas !

ξ : Dites donc, vous en mettez du temps !

β : C'est mieux que de se tromper, non ?

ξ : Ce n'est pas faux…

β : Les mathématiques, mon cher ξ, cela mérite un peu de respect ; et les gens, pareil.

ξ : Que voulez-vous dire ?

β : Eh bien, les gens, cela mérite un peu de respect. En particulier dans leurs rapports avec les mathématiques. Vous ne croyez pas ?

ξ : Peut-être…

Les répliques finales nous rappellent que notre rapport à la connaissance et à l'ignorance, qui est l'objet premier de l'École, est une composante de notre rapport au monde, et que celui-ci est donc aussi à travailler si nous voulons que celui-là change un jour.

Pour conclure

Ce qui me paraît sine qua non aujourd'hui, c'est d'introduire dans les classes une activité d'étude critique de textes visant à apporter réponse à des questions codisciplinaires, cette activité elle-même nourrissant de ses questions l'activité proprement mathématique (et, plus généralement, disciplinaire) de la classe, dans une perspective herbartienne, procognitive, exotérique. Bien entendu, des problèmes d'ingénierie didactique (et des problèmes fondamentaux de didactique des mathématiques qui leur sont corrélés) en dériveront à foison. À propos de questions choisies nationalement, qui formeront l'armature des « programmes », et qui seront étudiées dans les classes de façon codisciplinaire, il faudra notamment constituer une librairie de textes contenant ce que je nomme des traces de mathématiques (comme il en va dans le texte sur le nombre des sexes) et d'autres disciplines. Il faudra articuler la lecture critique de ces textes avec l'activité mathématique propre de la classe de façon à couvrir des programmes-noyaux qui laisseront une marge de manœuvre permettant précisément de voir se dégager un choix d'œuvres mathématiques utiles au futur citoyen – problème d'identification qui se résoudra alors du fait du fonctionnement même de l'École et non en amont de ce fonctionnement et en appui dogmatique sur une tradition partiellement périmée. Et, bien sûr, il faudra que se crée une pédagogie herbartienne, procognitive, exotérique qui, aujourd'hui, n'existe pratiquement pas. Pour être tout à fait clair, j'ajoute que, sans tout cela, une réforme des programmes me paraîtrait d'un très faible intérêt, parce qu'elle pourrait au mieux dissimuler encore un temps l'inadéquation croissante de nos mœurs didactiques scolaires ainsi que la marche vers l'effondrement qui en découle.

Bibliographie

[1] Bigot, R., Croutte, P. & Muller, J. (2011). La culture financière des Français. Paris : Crédoc. http://www.latribune.fr/static/pdf/La_culture_financiere_des_Francais_2011.pdf

[2] Brown, P. (1998). Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive. Paris : Seuil.

[3] Cluzel, R. & Court, H. (1951). Algèbre. Paris : Delagrave.

[4] Granderoute, R. (1988). La fortune de l'article Collège dans le discours pédagogique (1753-1789). Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie, 5(5), 55-71. http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rde_0769-0886_1988_num_5_1_980

[5] Isambert-Jamati, V. (1990). Les savoirs scolaires. Paris : Éditions Universitaires.

[6] Jey, M. (2005, 7 octobre). Gustave Lanson et la réforme de 1902. Fabula. La recherche en littérature [site Web]. http://www.fabula.org/atelier.php?Gustave_Lanson_et_la_r%26eacute%3Bforme_de_1902#_edn6

[7] Lelièvre, C. (1990). Histoire des institutions scolaires (1789-1989). Paris : Nathan.

[8] Matthews, J. (1989). The Roman Empire of Ammianus. Londres : Duckworth.

[9] Pavé, A. (2011). La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard. Paris : EDP Sciences.

[10] Poulain, A. (1885). Traité de géométrie élémentaire. Paris : Desclée, De Brouwer.

1.8 Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes

Mots-clefs : Problèmes, didactique, manuels

Denise Grenier, MCF, Université Joseph Fourier / Équipe Combinatoire et Didactique de l'Institut Fourier / Fédération de Recherche « Maths-à-modeler » et I.R.E.M. / Grenoble

Nous proposons au débat la question suivante : quelle place pour une activité scientifique dans les classes de mathématiques, permettant de développer chez les élèves des capacités à expérimenter, argumenter, conjecturer, modéliser, définir, prouver ? Et comment enseigner ces savoir-faire ? L'ERTé maths-à-modeler construit, expérimente et analyse depuis de nombreuses années des « Situations de Recherche pour la Classe » (SiRC). Nous donnons quelques exemples de situations construites sur le modèle SiRC, pour lesquelles nous disposons d'analyses a priori fiables, de propositions pour la formation d'enseignants et d'éléments pour leur gestion. Enfin, nous développerons des arguments didactiques pour défendre leur intérêt et leur viabilité en classe à côté des activités classiques d'enseignement. Collège, didactique, psychologie…

Constats, hypothèses et objectifs

L'activité d'un chercheur, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter, étudier de cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer de conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale ... Les savoir-faire associés, que nous qualifierons de transversaux (pour les distinguer des savoirs notionels), sont constitutifs de la démarche scientifique, ils sont nécessaires pour faire des mathématiques et ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes. Ils ne peuvent non plus être contraints par le temps (aucun chercheur n'est capable de dire comment et quand il aura résolu le problème sur lequel il travaille).

Il est largement admis dans notre communauté que l'enseignement en France ne prend pas réellement en charge ces savoir-faire. Depuis de nombreuses années, en tant qu'enseignante et didacticienne, j'ai pu vérifier que la plupart des étudiants en sciences (L1, L2, master2 de didactique) et beaucoup d'étudiants en mathématiques (L3, PLC, master1) ne possèdent pas ces savoirs et savoir-faire de base. Leur rapport aux mathématiques est très éloigné de celui du chercheur, comme l'atteste des expressions fréquentes à tous les niveaux d'étude, face à un problème qui leur semble « ouvert », telles cells-ci :

Je ne sais pas résoudre ce problème, je l'ai jamais rencontré

Je ne sais pas faire, je ne connais pas la technique

Le problème est mal posé, on n'a pas toutes les hypothèses

A quel chapitre il se rattache, ce problème ?

Les attitudes correspondantes vont de l'incapacité à initier la résolution ou tenter de se faire une idée du problème (par exemple, en expérimentant, ou étudiant des cas particuliers), jusqu'au refus de s'investir dans le problème (« si je n'y arrive pas en 5 minutes, je n'y arriverais jamais » déclare un enseignant de mathématique !).

On peut donner une explication plausible à ces affirmations et attitudes, qui interpelle le contrat didactique usuel dans tout l'enseignement : la quasi totalité des problèmes que les élèves et étudiants ont à résoudre en classe – et donc que les enseignants font résoudre à leurs élèves - sont rattachés à un chapitre, avec pour objectif essentiel l'application d'un théorème, d'un algorithme ou d'une technique. Et lorsqu'il est demandé de « démontrer que », toutes les hypothèses et seulement celles-ci sont données.

Ces constats nous conduisent à nous interroger sur la capacité des étudiants à résoudre un problème « nouveau », pour lequel on ne dispose pas d'une technique connue et immédiatement disponible et qu'on ne peut « rattacher» à aucun théorème ou cadre théorique connus : autrement dit, sur leur capacité à « faire vraiment des mathématiques ».

Les programmes scolaires en mathématiques à tous les niveaux insistent sur l'importance de l'expérimentation, la découverte et la qualité de l'activité scientifique en classe. Cet objectif des programmes est ambitieux, mais il nécessite à notre avis de mettre en place des organisations mathématiques et didactiques spécifiques.

Nos analyses des manuels scolaires et des pratiques de classe révèlent qu'en fait, les « problèmes pour chercher » sont peu présents. De plus, l'activité expérimentale est de plus en plus souvent confondue avec l'utilisation de tableurs, logiciels (de géométrie dynamique ou de calcul formel), ou l'utilisation de l'ordinateur.

Les réserves ou les craintes exprimées par les enseignants à propos de l'intégration des « problèmes de recherche » en classe sont de différents ordres.

– Les contraintes institutionnelles : il n'y a pas ni le temps ni la « place » pour laisser les élèves chercher vraiment. C'est bien la question d'une organisation mathématique et didactique spécifique qui se pose ici.

– La conviction que les problèmes de ce type ne sont pas accessibles aux élèves (quel que soit le niveau !), et ce serait donc du temps perdu pour l'apprentissage. Mais cela dépend de quels apprentissages il s'agit. Là, ce sont les conceptions des enseignants sur ce qu'il est prioritaire d'enseigner et sur les capacités des élèves qui sont en question.

– L'absence de formation à la gestion de ces situations. Comment contrôler, valider ou invalider, les stratégies et les conjectures différentes qui vont probablement émerger ? Comment aider l'élève pour faire avancer la résolution ? Quel est le critère de fin de la recherche ? Ici, c'est un changement de position de l'enseignant qu'il faut accepter.

Ces craintes s'appuient de plus sur des pratiques didactiques usuelles très éloignées de celles qui permettraient de faire vivre ces situations en classe, en voici deux exemples remarquables.

– L'interdiction, pour l'élève, de modifier une question, de changer les hypothèses, de choisir le cadre de résolution.

– La donnée, par certains manuels et enseignants, de « règles de contrat» censées aider l'élève à écrire et contrôler sa démonstration, telles que : « Pour démontrer, on utilisera seulement les données du problème et les propriétés du chapitre » ou « Quand vous faites une démonstration, vérifiez que vous utilisez toutes les hypothèses ».

Ces règles du contrat usuel ont bien sûr leur légitimité dans des moments spécifiques, en particulier celui de l'apprentissage ou du travail d'une technique, ou de l'utilisation spécifique d'un théorème. Cependant, elles vont à notre avis à l'encontre de l'apprentissage de la démarche scientifique et de ce qu'est l'activité mathématique.

Hypothèses et objectifs de nos travaux

Nos travaux dans l'équipe « maths à modeler », depuis de nombreuses années, nous ont permis de mettre au point – construire, expérimenter, analyser - des « situations de recherche pour la classe »1 (SiRC) - c'est-à-dire des problèmes et leur mise en scène - susceptibles de remplir ces objectifs, accessibles dans des contextes institutionnels variés et à différents niveaux scolaires. Certaines d’entre elles présentent la caractéristique originale de pouvoir être dévoluées à l'identique, à des niveaux différents de connaissance.

Caractérisation du modèle SiRC

Dans Grenier et Payan, 2003, nous donnions une caractérisation du modèle SiRC, pour les situer par rapport aux « situations-problèmes » et « problèmes ouverts » que l'on rencontre dans les travaux de didactique. Nous la reprenons ici en la commentant.

- Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique

Cette condition, assez contraignante, a pour but d'éviter que la question ou la réponse semblent évidentes ou familières. L'objectif est de donner une pertinence à l'activité de recherche à tous les niveaux. Cette condition peut être artificiellement recrée par la mise en scène du problème, dans le cas où la question posée est résolue dans le recherche.

- La question initiale est facile d’accès et pertinente à des niveaux différents

Notre intention est de rompre avec la pratique didactique usuelle qui tend à attribuer tout problème à un niveau scolaire précis. Pour remplir cette condition, les énoncés des SiRC sont forcément peu mathématisés, mais nous cherchons à éviter les « bruits » non mathématiques courants dans les problèmes dits de « modélisation », dans laquelle la modélisation n'est aps accessible, ce qui complexifie la tâche pour l'élève et l'empêche parfois de rentrer dans les mathématiques.

- Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question

En d'autres termes, il faut assurer la dévolution du problème, tout en laissant une incertitude qui engage dans l'activité de résolution, et ne peut être réduite par la seule application de techniques ou propriétés usuelles connues (c'est ainsi que Brousseau décrit, dans sa théorie, une « bonne » situation). Le cadre théorique de résolution n'est ni donné, ni évident, mais il est possible de s'emparer du problème sans cela.

- Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc.

Il s'agit de permettre la résolution de cas particuliers et de favoriser la construction par les élèves de conjectures — issues de l'exploration de la question — qui ne seront pas évidemment vraies, mais pourront être examinées au moyen d'exemples et de contre-exemples construits par les élèves eux-mêmes.

- On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème

La question initiale peut déboucher sur des questions annexes : fermeture du problème par choix de valeurs de certains paramètres, ou question nouvelle issue de l'activité de recherche.

On s'accordera aisément sur le fait que très peu de problèmes de la recherche mathématique peuvent être transposés ainsi. Le choix des « bonnes » questions de recherche et de leur transposition pertinente en SiRC est une tâche difficile. D'autre part, les savoir-faire transversaux mis en jeu diffèrent et ne sont pas tous présents dans chacune des situations : certaines mettent en jeu plutôt la modélisation, d'autres le processus conjecture-exemples-contre exemples-preuve, d'autres encore la définition d'objets mathématiques.

Analyse didactique d'une SiRC

Au cours des dix dernières années, notre équipe a construit, expérimenté, analysé et mis à l'épreuve un certain nombre de SiRC plus ou moins proches du modèle décrit ci-dessus, mais qui toutes apportent des apprentissages de ces savoir-faire, à des niveaux très variés. Certaines sont maintenant intégrées dans des cursus institutionnels (en seconde, L1-L2 sciences, L3 de maths, cours doctoral maths-info), ce qui nous a obligés à mettre en place une évaluation de ces apprentissages.

L'analyse a priori d'une « situation de recherche pour la classe » consiste, comme pour toute situation (didactique ou a-didactique), à décrire le milieu - ses objets, les actions possibles, les connaissances de base, celles qui sont en jeu, et des éléments de gestion. Dans nos SiRC, il s'agit de décrire les stratgies initiales, expérimentations et modélisations locales possibles, les conjectures qui en découlent (vraies ou fausses), les preuves susceptibles d'être produites.

Les spécificités de cette analyse tiennent d'une part au fait que ce sont les savoirs « transversaux qui sont enjeu d'apprentissage, et non un concept mathématiques strict - même si bien sûr il y en a forcément en jeu dans la situation – et, d'autre part, que la résolution complète du problème n'est pas toujours réalisable.

Une SiRC est caractérisée par des variables (didactiques ou adidactiques), et au moins une variable de recherche, paramètre du problème qui pourrait être une variable didactique (c'est-à-dire à la disposition de l'enseignant), mais qui est laissé à la disposition de l'élève. Les variables de recherche sont constitutives des SiRC, autrement dit une situation pour laquelle on ne peut mettre une variable à la disposition de l'élève n'est pas une SiRC. Cette variable de recherche détermine ce qui, dans la situation, conduit à une activité mathématique, parce que :

– il y a, à la charge de l'élève, une question et un enjeu de vérité, dont il peut s'emparer mais qui ne sont pas résolubles rapidement,
– il n'y a pas de « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) disponible de manière évidente pour la résolution.

Bien sûr, toute variable du problème ou de la situation ne peut être variable de recherche. Un des objectifs de nos expérimentations est de déterminer les paramètres qui peuvent être laissés à la charge de l'élève.

L'organisation didactique est constitutive d'une SiRC, dans le sens qu'elle jour un rôle primordial dans la réussite de la situation2. Cependant, elle est tout à fait réalisable. Le travail en petits groupes est un moyen d'assurer la dévolution du problème et de favoriser les échanges sur les stratégies et les solutions. Le temps est un élément important. La situation ne sera porteuse d'apprentissages que si elle peut se poursuivre sur plusieurs séances si cela s'avère nécessaire. Il est donc important que chaque groupe tienne un « cahier de recherche », pour faire mémoire de l'état de la résolution d'une séance à l'autre : cas étudiés, conclusions, questions non résolues, nouvelles questions, mais aussi difficultés, pistes abandonnées, etc. La mise en scène du problème (contexte de l'énoncé, matériel pour expérimenter, outils de résolution) est tout aussi importante. Certains de nos SiRC s'appuient entièrement sur des objets manipulables.

La gestion d'une SiRC doit comporter, outre une alternance de phases collectives de débat et de phases de travail en groupes, un moment d'institutionnalisation des connaissances en jeu. Cette organisation vaut aussi bien en formation d'enseignants qu'avec des élèves en classe.

Plus que l'organisation didactique, c'est plutôt les objets des phases collectives de débat et d'institutionnalisation qui peuvent être ressenties comme sources de difficultés pour l'enseignant, puisque ce sont avant tout les savoirs transversaux. Il s'agit donc de porter l'attention sur les reformulations des déclarations des élèves (hypothèses, propriétés, conjectures), sur les codages ou les modélisations utilisées, sur les exemples et contre-exemples et leur rôle, sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, sur la mise au point et l'écriture des preuves.

Des exemples pertinents du primaire à l'université

Pavages de polyminos

Les trois problèmes de la situation ci-dessous constituent une situation fondamentale pour le raisonnement et la preuve. Elle est mise à l'épreuve et utilisée dans différents cursus depuis une dizaine d'années. On en trouve des analyses détaillées dans Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006). Chacun des problèmes correspond à des choix de variables et contient un paramètre laissé à la charge de l'élève (variable de recherche).

Problème. Etant donné un carré de taille quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino. Voici le dessin pour le polymino de taille 7 et un cas particulier de la position du trou.

Ce problème ainsi que d'autres problèmes associés sont décrits et étudiés en détail dans Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006).

Déplacements sur la grille

Le problème général est l'exploration de déplacements dans le plan discret (ensemble des points du plan à coordonnées entières). Il peut se décomposer en les questions suivantes :

« Étant donné un point A sur le plan discret, et un ensemble de déplacements élémentaires (un déplacement élémentaire est un couple du type (1D, 2B), qui se lit « un à droite et deux en bas »)

- quels sont les points du plan que l'on peut atteindre par des combinaisons entières positives de ces déplacements élémentaires,

- l'un de ces déplacement est-il « redondant » (si on l'enlève de l'ensemble, on atteint les mêmes points)

- quel déplacement faudrait-il rajouter à l'ensemble pour aller partout dans le plan discret ?

La situation s'appuie sur un matériel simple : des feuilles de papier pointé (les points du plan discret sont donnés), on précise la leture du couple donnatn le déplacement élémentaire et ce qu'est leur combinaison (n'utilisant que des additions et multiplications dans N). Cette situation a été étudiée de manière approfondie par Cécile Ouvrier-Buffet dans sa thèse (Ouvrier Buffet 2003). Elle permet de rendre accessible dès le primaire les notions de vecteur, combinaison entière de vecteurs, ensemble générateur, ensemble minimal, vecteur redondant dans un ensemble, par des combinaison de déplacements élémentaires et des recherches de points dans le plan discret. Elle permet aussi de re-questionner, aux niveaux lycée et université, et en formation d'enseignants, les notions de base de l'algèbre linéaire, en relation avec les notions introduites dans le plan discret : dans le plan discret, les ensembles générateurs minimaux n'ont pas tous le même nombre d'éléments (il y a un très beau théorème à la clé), on peut distinguer les trois propriétés libre, générateur et minimal, pour un ensemble de vecteurs.

Cette situation permet également d'explorer le plan discret et le repérage dans un plan.

La chasse à la bête

Cette situation a été inventée et étudiée dans le cadre d'une thèse en mathématiques discrètes (Duchêne, 2006). Elle a été expérimentée cette année dans le cadre d'un mémoire de master 2 (Chassan, 2009), dans des classes de primaire (CE2, CM1 et CM2) et dans un groupe de PE2.

Le problème général est le suivant :

« On se donne un grille rectangulaire (un polymino) qui représente un champ, un ensemble de polyminos plus petits (dominos, ou triminos longs, ou triminos coudés) qui seront des types de bêtes et un ensemble d'uniminos qui seront des pièges. Les ensembles de bêtes et de pièges sont aussi grands que l'on veut. Sachant que les bêtes se posent le long des cases de la grille (et non en travers), pour chaque type de bêtes, quel est le plus petit nombre de pièges qui assure la protection du champ ? »

Le matériel fourni est le même que pour la situation des pavages, et le champ choisi dans cette situation est un carré 5x5.

L'objectif de la situation est d'introduire la notion d'optimisation dans le domaine des entiers, ce qui la sort des cadres habituels3 de l'enseignement et simplifie son approche. Les trois problèmes de la situation sont accessibles dès le primaire et reste pertinents jusqu'à la fin de l'université. La situation est intégrée avec un grand succès (aussi bien du point de vue de la dévolution que du travail mathématique qu'elle provoque) chaque année dans un module optionnel en L1-L2 sciences de l'UJF et dans un module optionnel d'un cours doctoral à l'UCBL. A tous les niveaux, la manipulation matérielle s'avère nécessaire pour faire des conjectures. L'optimum (minimum) cherché est un entier que l'on obtient par des encadrements successifs de plus en plus serrés. Comme on travaille dans les entiers, le nombre d'étapes est fini. G. Chassan a observé, enregistré et analysé la résolution du problème avec les trois types de bêtes, par des PE2. Il a noté en particulier les raisonnements faux débusqués lors des travaux de groupes, puis les apprentissages entre le début et la fin de la situation.

D'autres situations sont proposées et analysées dans des textes (voir références ci-après).

Constats ou résultats généraux sur nos SiRC

Dévolution

Dans nos SiRC, l'intérêt pour la question posée et sa dévolution sont en général immédiats, d'autant plus si les connaissances mathématiques de base sont accessibles à tous. Nous avons pu vérifier le rôle quasi incontournable du matériel et de la phase expérimentale pour la dévolution d'une activité mathématique. Celle-ci est issue de la dialectique entre la manipulation et une réflexion théorique rendue nécessaire du fait que aucune solution n'est évidente et que plusieurs solutions non compatibles peuvent être soutenues.

Gestion

La gestion d'une SiRC est spécifique, en ce sens que l'enseignant n'est pas toujours dans des positions ou des rôles usuels. Cependant, il convient de moduler cette affirmation et de la préciser.

Dans un premier temps, l'enseignant doit pour l'essentiel être observateur, position qui ne lui est pas étrangère dans sa pratique de classe, lors des moments de travail en groupes de type « adidactique » : il doit alors vérifier la dévolution du problème, repérer les stratégies initiales, essais, erreurs des élèves, leurs questions, les pistes abandonnées, les raisonnements divers, les résultats partiels obtenus, qu'ils soient reconnus ou non comme tels etc. Bref, il s'agit de relever les éléments essentiels du débat collectif. Durant cette phase, il doit s'autoriser à répondre à des questions de compréhension du problème, ou intervenir en cas de blocage.

L'alternance de moments d'intervention et de moments « a-didactiques » est sous sa responsabilité.

Les phases collectives doivent porter non seulement sur la résolution du problème mais aussi sur les conjectures, exemples, contre-exemples, démarches, raisonnements qui ont été produits par les élèves. Et mener la discussion jusqu'au bout, ce qui peut prendre un temps assez long. Le sentiment de certains enseignants de ne pouvoir assurer cela tient peut-être à un manque d'habitude.

L'institutionnalisation n'a pas pour objectif de donner les solutions du problème, si celles-ci n'ont pas été produites, mais de mettre au clair le statut des raisonnements qui ont été faits (vrai, faux, CN, CS, CNS, etc), de préciser le stratégies menées, de différencier ce qui a été prouvé de ce qui reste à prouver, de préciser les types de preuve utilisés (absurde, exemple, contre-exemple, exhaustivité des cas, partition, coloration, récurrence, etc..).

Évaluation des apprentissages

A notre avis, l'évaluation de l'apprentissage des savoirs transversaux n'est pas plus difficile que celle des notions mathématiques strictes. Mais il est peut-être moins aisé de se leurrer ! Il n'est pas toujours évident de repérer une erreur dans un raisonnement ou une preuve complexes.

Comme pour toutes les situations expérimentales, on ne peut raisonnablement évaluer les effets des SiRC que si celles-ci font partie d'une organisation didactique non ponctuelle. C'est le cas depuis des années de certaines d'entre elles, intégrées dans différents cursus universitaires dans lesquels nous enseignons : en particulier, une UE d'ouverture en L1-L2 sciences (sur deux niveaux et toutes filières scientifiques)4, une UE de didactique en L3 de mathématiques à l'UJF et un module optionnel d'un cours doctoral à l'UCBL5. L'évaluation en L1-L2 comprend l'écriture d'un rapport de recherche sur un problème de type SiRC, non traité en classe. Le contrat pour l'étudiant est celui qui donné en début de cet enseignement : c'est la qualité de l'activité mathématique qui est évaluée : statut clair des affirmations, exemples ou cas particuliers traités, conjectures différenciées des hypothèses ou des résultats prouvés, etc.

SiRC et concepts mathématiques

Nos situations ne sont pas conçues pour enseigner un concept mathématique précis, puisque leur objectif premier est l'apprentissage des savoirs constitutifs de l'activité mathématique , la tâche de l'élève étant de résoudre le problème posé.

Chacune de nos situations met en jeu et questionne des notions mathématiques. Mais il est important de ne jamais privilégier a priori un objectif notionnel, le risque étant de tuer l'activité de recherche. D'autre part, il nous semble que les notions ou concepts mathématiques en jeu ne doivent pas être complexes, en tout cas, ils doivent être stables pour les élèves.

En conséquence, nos situations de recherche ne peuvent remplacer une organisation mathématique notionnelle. Cependant, nous pensons que ces SiRC sont nécessaires pour l'apprentissage des savoirs transversaux, elles devraient être intégrées de manière rationnelle à l'enseignement usuel.

Bibliographie

Grenier, D. (2008), Expérimentation et preuves en mathématiques, in Didactique, épistémologie et histoire des Sciences, PUF, collection « Sciences, homme et société » (L. Viennot ed).

Grenier D. &Tanguay D. (2008), L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers, petit x n°78, ed IREM de Grenoble.

Grenier, D. (2006), Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec (AMQ), Sherbrooke, juin 2006.

Grenier, D. & Payan, Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002.

Grenier, D. & Payan, Ch. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. Recherches en didactiques des mathématiques, Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

Thèses de « maths-à-modeler » intégrant l'étude de SiRC (ordre chronologique)

Julien Rolland (1999), Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Cécile Ouvrier-Buffet (2003), Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Virginie Deloustal-Jorrand (2004), Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Karine Godot (2005), Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Caroline Poisard (2005), Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer, Thèse de l'université d'Aix-Marseille 1.

Léa Cartier (2008), Le graphe comme outil de preuve et de modélisation. Étude de l'introduction de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de Terminale ES (programmes 2003. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Michèle Gandit (2008), Étude épistémologique et didactique des relations entre argumentation et preuve en mathématiques. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Nicolas Giroud (2011, Le rôle de la démarche expérimentale dans les SiRC. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

2 A l'école primaire, cycles 1 et 2

2.1 Éléments d'observation et d'analyse sur l'enseignement à l'école maternelle

Mots-clefs : école, maternelle, formation, pratiques, situations

Fabien Emprin, Maître de conférences, Université Champagne Ardenne IUFM / CEREP

Positionnement

Les recherches académiques que nous menons portent sur l'analyse des pratiques de formation des enseignants avec les technologies en particulier en mathématique. Ce n'est donc pas essentiellement sur ces recherches que se basent les observations et les analyses suivantes même si la question des processus de professionnalisation des enseignants intervient bien ici. Cette réflexion utilise principalement deux expérimentations : l'une liée au travail de l'équipe ERMEL et l'autre liée à la construction d'un ouvrage avec l'AGEEM en relation avec le travail de l'IREM de Reims sur les rallyes mathématiques. Ces observations se sont déroulées sur un temps relativement long (respectivement six années complètes et quatre années) et à grande échelle (plus de dix classes chaque année).

Nous tirons de ces observations quatre niveaux de difficultés que nous présentons du plus général au plus spécifique. Les deux premiers apportent une réflexion sur le travail de l'enseignant, les deux suivants utilisent plus les résultats de la didactique des mathématiques.

Au niveau du rôle de l'école maternelle

Un des enjeux de l'école maternelle qui, à notre sens, est mal assumé par les enseignants est d'amener l'élève à comprendre l'enjeu de l'école et d'éviter le malentendu scolaire (Bauthier et Rayou, 2009). Ce malentendu peut être illustré par une vidéo1 que nous avons tournée lors de la mise en œuvre d'un rallye mathématique avec des élèves de moyenne, grande section et CP :

Quatre élèves ont chacun un sac contenant des jetons, chacun regarde le contenu de son sac. Puis le premier élève doit dire au second élève ce qu'il a dans son sac et le lui donner, le second dit alors au troisième ce qu'il a dans ses sacs et les lui donne, jusqu'au quatrième qui doit dire combien il y a de jetons dans les sacs. Lors de la première mise en œuvre, les élèves échouent, car ils ne donnent comme information que le contenu de leur sac. Les élèves se rendent compte du fait que le quatrième élève n'a pas assez d'informations lorsque l'enseignante leur demande s'ils auraient pu réussir à donner assez d'informations les élèves sont d'abord surpris ce qui laisse penser qu'ils ne se sont pas posé la question de la réussite de la tâche. Ensuite, ils répondent simplement « non ». Ainsi les élèves semblent penser que ce qui leur est demandé est de faire un message sans se rendre compte que c'est la nature de ce message qui est l'enjeu du travail.

Nous avons observé de nombreux cas d'élèves qui n'ont pas compris qu'ils n'avaient pas rempli le contrat de l'école quand ils avaient simplement effectué la tâche (coché, rempli, communiqué, dessiné…).

Or, comme nous l'avons mis en évidence dans une analyse des représentations des enseignants sur la mise en échec des élèves (Jourdain et Emprin, 2010), les enseignants ont assez peu conscience de cette problématique et ne la relie pas à la question de l'échec scolaire ce qui nous invite à penser qu'ils ont des difficultés à la prendre réellement en charge.

C'est donc pour nous un des enjeux spécifiques de l'école maternelle que d'amener les élèves à comprendre leur métier d'élève en général, mais également à donner, à l'activité mathématique, un sens positif. Ainsi les élèves qui travailleraient beaucoup sur fiches où il faut remplir des cases avec des nombres ne verraient dans les mathématiques qu'une discipline très formatée, très opposée à l'affirmation de Cantor « les mathématiques c'est la liberté ». Le risque est que cette représentation perdure et qu'elle soit plus difficile à modifier ensuite même en mettant en place des activités plus riches comme les problèmes ouverts, les rallyes…

Cette première constatation interroge donc les pratiques des enseignants dont nous analysons maintenant quelques aspects.

Au niveau des pratiques des enseignants et de leur formation

Notre premier constat est que les pratiques à l'école maternelle sont plus riches et plus diversifiées qu'à l'école élémentaire. Les dispositifs pédagogiques sont potentiellement plus intéressants : le travail par ateliers pourrait être lié à la définition de groupes de besoins et la gestion de l'autonomie des élèves, l'utilisation de matériels pédagogiques variés pourraient être également liées à un travail de différenciation, mais il nous semble que beaucoup de ces dispositifs sont attribuables à des habitudes et une représentation des usages. Pour illustrer ce constat, nous utiliserons une situation usuelle en maternelle : le « filet du pêcheur ». Dans cette situation, moitié de la classe fait une ronde et choisit un nombre en le cachant à l'autre moitié. La deuxième moitié traverse ensuite la ronde dans laquelle les élèves récitent en cœur la comptine numérique. Une fois arrivée au nombre déterminé en secret au début, la ronde s'abaisse et capture les élèves qui seraient alors à l'intérieur. Nous avons souvent montré2 cette situation en formation. Lorsque l'on demande aux enseignants s'ils connaissent et utilisent cette situation, la réponse est majoritairement oui pour les enseignants expérimentés, en revanche lorsque l'on demande pourquoi il est utile de travailler cette tâche les enseignants n'ont pas de réponse satisfaisante : ils répondent qu'il s'agit d'entraîner la comptine numérique ou d'apprendre à compter. En fait, il s'agit ici d'entraîner les élèves à s'arrêter à un nombre donné, cette capacité est nécessaire non pas quand il s'agit de dénombrer (il faut alors s'arrêter quand il n'y a plus d'objets à dénombrer), mais quand il faut constituer une collection d'un cardinal donné. Ainsi les enseignants mettent en place une situation sans conscience de l'enjeu précis de la tâche.

La mauvaise connaissance des enjeux mathématiques peut conduire l'enseignant à dévoyer la situation qu'il met en place. Dans la situation dite des pinceaux (Brousseau, 1998) l'élève a sur sa table des pots vides et dans une autre pièce un stock de pinceaux. La consigne est d'aller chercher « juste ce qu'il faut de pinceaux pour qu'il n'y ait pas de pot sans pinceau ni de pinceau sans pot, attention on a le droit qu'à un seul trajet ». Le but de la situation est que l'élève se rende compte que le nombre est l'outil adapté pour mémoriser une quantité, la collection à distance et la limitation à un unique trajet disqualifie toutes les autres stratégies comme la correspondance terme à terme par exemple. Nous avons filmé un enseignant qui donne la consigne suivante : « va chercher juste le nombre de pinceaux qu'il faut pour qu'il n'y ait… », cet enseignant donne donc la réponse avec la question en prononçant le mot nombre.

Cela nous renvoie au travail de Liping Ma (1999) qui fait une étude comparative de l'enseignement des mathématiques entre la Chine et les États-Unis. Elle arrive à la conclusion que la plus-value des enseignants chinois ne vient pas de connaissances mathématiques de haut niveau, mais d'un « profound understanding of fundamental mathematics ».

Ce type de connaissances est un des enjeux de la formation des maîtres qui intègre une analyse des concepts étudiés sous de multiples angles notamment épistémologique, didactique….

Ainsi nous avons le sentiment que les usages et l'absence de manuel en tant que tel (il existe des fichiers et des documents tout prêts sur internet) amènent les enseignants à des pratiques ayant un potentiel plus riche, mais que les enseignants manquent de connaissances fines des concepts manipulés pour les exploiter réellement.

Au niveau des types de situations d'apprentissage

Au cours de nos expérimentations nous avons identifié deux grandes classes de situations pour l'école maternelle : les situations problèmes au sens de Brousseau (1998) et les situations de construction d'expérience.

Dans le premier type de situations, nous utilisons principalement : les situations d'action dans lesquels l'échec de l'action force l'élève à modifier ses stratégies, à s'adapter et les situations de communication dans lesquels c'est l'échec de la communication avec un autre élève qui est le vecteur de l'apprentissage. La question du langage est centrale à l'école maternelle et nos observations nous montrent que les enseignants se contentent parfois, en mathématiques, d'accrocher un mot avec une « image ». Un enseignant montre un carré, dit « c'est un carré » et les élèves répètent, mais l'enseignant ne maîtrise pas toujours le concept attaché par l'élève au mot carré. Les élèves sauront reconnaître un carré mis en position prototypique (côtes horizontaux et verticaux), mais si l'enseignant incline le carré les élèves disent losange. Dans la situation de communication, les élèves doivent trouver le mot qui correspond au concept et qui soit compréhensible par tous donc appartenant à un vocabulaire partagé. Par exemple dans une situation un élève (le photographe) doit dire à un autre (le sujet) de se placer comme sur une photo modèle (de face, de dos, de profil gauche ou droit). Nous avons observé un élève qui dit à sa camarade « mets-toi en arrière » ce qu'elle ne comprend pas, elle recule, mais ne parvient pas à interpréter le message et la photo prise ne correspond pas au modèle qui était de dos. Lors de la mise en commun les élèves décrivent les messages qui réussissent et ceux qui échouent, ils déterminent trois catégories de messages : les messages agissant sur les autres « tourne, tourne, tourne… stop » ; les messages utilisant un repérage absolu : « regarde vers la porte, vers l'aquarium… », les messages utilisant un repérage plus relatif au sujet : « de face, de dos… ». L'élève qui avait échoué s'est d'abord rendu compte de l'insuffisance de son vocabulaire qui n'était pas compris par tous et a pu adopter le vocabulaire « de dos » pour le remplacer ou encore s'approprier d'autres stratégies. Il est important que les élèves aient à utiliser le vocabulaire comme moyen de communiquer différents aspects du concept, par exemple pour le mot carré : le carré comme faces du cube, le carré comme forme plane touchée en aveugle, le carré comme constitué de 4 côtés égaux quand il s'agit de commander des tiges pour le construire, le carré comme forme sur laquelle on peut placer l'angle droit de l'équerre… En contrôlant les différents aspects du concept fréquenté et attaché au mot carré, l'enseignant évite de l'associer uniquement à une figure prototypique (signifiant / signifié Duval)

En tant que chercheurs nous nous sommes beaucoup concentrés sur les situations problèmes, mais en expérimentant des ingénieries pédagogiques nous nous sommes rendu compte qu'un autre type de situations était également nécessaire à l'école maternelle : les situations de construction d'expérience. Par exemple des situations où un élève va toucher un solide dans un sac opaque pour le retrouver parmi un lot et se rendre compte de la nécessité de bien toucher avec les deux mains. En effet un élève touche un cube avec une seule main, saisit bien un des sommets et désigne un tétraèdre. D'autres situations où il faut emballer un solide et où les élèves se rendent compte qu'en appliquant une feuille sur un solide ce dernier laisse une empreinte dans la feuille : ses faces. La construction d'expérience n'est pas uniquement liée à l'espace sensible, il est important que l'élève effectue réellement des distributions : il faut distribuer 24 cartes à 6 élèves par exemple. Sans cette expérience de la distribution comment l'élève peut-il conceptualiser les situations de division et s'approprier les différents types de problème au sens de la structure de multiplication et de division de Vergnaud (1996).

Nous avons pu observer des exemples d'utilisation du TNI (Tableau Numérique Interactif) qui nous interpellent sur cette question de l'expérience. Les TNI sont de plus en plus présents dans les classes et un de leurs attraits est qu'ils permettent aux enseignants d'économiser sur la préparation matérielle. Néanmoins on peut s'interroger sur le fait que la manipulation d'objets virtuels construise une expérience comparable que celle d'objets réels, c'est particulièrement vrai pour les objets ou les transformations géométriques, mais aussi pour le numérique. Lors d'une observation nous avons vu un enseignant présenter des flascards au TNI. Il s'agit de montrer très rapidement une collection d'objets aux élèves et leur demander combien il y en a pour les forcer par exemple à faire du calcul et de la reconnaissance globale de collection. Les élèves se lèvent un par un ; l'enseignant fait afficher puis disparaître la collection et un élève doit dire combien il y en a. Il se rassoit ensuite. À un moment un élève se trompe, il dit 7, puis se rassoit, l'enseignant rappelle le même élève puis enfonce la touche retour-arrière, l'élève dit 8 et se rassoit. La question que nous nous posons est, comment est-ce que l'élève sait qu'il s'est trompé ? En effet, seul l'enseignant sait qu'il est revenu en arrière, l'élève peut avoir eu l'impression qu'on l'interrogeait deux fois de suite. Il est vrai qu'il est possible d'adapter le logiciel sur le TNI pour que l'élève se rende compte que l'on passe d'une carte à l'autre, mais ce que nous montre cette situation c'est qu'il faut que l'enseignant soit pleinement conscient que la transposition d'une situation dans un espace informatique entraîne la modélisation d'objet. Cette modélisation, qui peut nous sembler transparente peut être non accessible à un élève qui n'aurait pas acquis suffisamment d'expérience réelle.

Dans le choix des outils comme dans celui des situations, les enseignants manquent parfois d'une connaissance suffisante des fondements des démarches d'enseignement apprentissage qu'ils utilisent. Ils se centrent bien souvent sur l'action, la manipulation sans se rendre compte que ce n'est pas suffisant pour apprendre, qu'il faut que les élèves reviennent sur leur action lors d'une mise en commun, qu'ils mettent des mots sur leurs actions, que l'enseignant fasse émerger le savoir en jeu dans la situation et enfin qu'il l'institutionnalise c'est-à-dire que ce savoir soit reconnu par lui comme « à savoir ». Sans ces dernières phases les connaissances restent en suspend et risquent de se perdre en suivant l'idée de Meirieu3 qui dit « Quand on sait qu'on sait on peut utiliser le savoir sans attendre qu'on vous le demande.» ou l'idée de connaissances disponibles de Robert (1998)

Au niveau des contenus à enseigner

Pour ce qui est des contenus à enseigner dans le domaine numérique, la didactique des mathématiques a produit des connaissances suffisantes pour fournir aux enseignants des connaissances qui leur permettent de mettre en œuvre leur enseignement. Ces résultats (Briand, 1993) (Brousseau, 1998) font globalement consensus et font l'objet de travaux de vulgarisation (IREM de Grenoble revue grand N, notamment 1999) (Briand et al., 2004) et de transmission d'ingénierie pédagogique ERMEL(1995). Une controverse existe en ce qui concerne l'enseignement du comptage. Cette procédure qui consiste à dénombrer en numérotant les objets un à un : « un, deux, trois, quatre, il y en a quatre » est considérée par certain (Brissiaud4) comme néfaste et ne devant pas être enseignée à des jeunes enfants alors que d'autres considèrent qu'il faut d'abord l'enseigner pour que les élèves accèdent aux quantités et qu'ensuite il faut amener les élèves à l'abandonner au profit de procédure plus experte que sont le calcul et l'utilisation de la numération. Il y a donc consensus sur le fait que les procédures expertes de dénombrement qui sont visées sont l'utilisation de la numération et le calcul, mais certaines divergences existent sur les moyens d'y parvenir.

En revanche, en ce qui concerne la géométrie et les connaissances spatiales les travaux de didactique manquent et ne permettent pas de constituer une assise conceptuelle suffisante. Pour le cycle 3, ils sont déjà en nombre moindre que pour numériques et, à notre connaissance seulement quelques travaux existent dans le domaine de la psychologie comme Lurçat (1976) et sont, comme ceux de Piaget et Inhelder(1947), anciens. Nous pouvons citer Berthelot et Salin (1992) ou Houdement et Kuzniak (2006) qui donnent deux cadres de compréhension de la géométrie en général.

Pour conclure

Le travers d'un tel texte pourrait être de dresser un tableau très noir des mathématiques à l'école maternelle. Il nous semble au contraire qu'elle a des potentialités au niveau des dispositifs pédagogiques existants et des situations pédagogiques découlant de recherches bien stabilisées.

Sur ce terrain, qui apparaît favorable, se pose la question de la formation des enseignants et de la transmission des résultats de la recherche. Pour ce deuxième point, deux modèles sont possibles : la diffusion de chroniques qui décrivent explicitement toutes les actions, les paroles, les gestes pédagogiques ou la description argumentée des enjeux des situations, des variables didactiques et donc des choix que l'enseignant peut faire. Pour des enseignants débutants, les chroniques permettent une première expérience « réussie » de la situation sur laquelle ils vont pouvoir s'appuyer pour faire des adaptations, mais elles sont très coûteuses en temps de lecture. Cette démarche, généralisée sous-entendrait que tous les élèves apprennent de la même façon et que le travail de l'enseignant peut être facilement modélisé. En cas d'imprévu le risque est que les enseignants ne soient pas capables de se détacher du scénario et si tout se passe bien qu'ils ne soient jamais capables de prendre le recul nécessaire. En revanche les situations décrites par leurs enjeux et les variables sur lesquelles l'enseignant peut jouer peuvent laisser les novices face à des choix insurmontables alors que l'enseignant « expert » sera capable de les exploiter en fonction des élèves et ainsi de programmer l'apprentissage.

Annexe : Précision concernant les études sur lesquelles se basent ces observations

Le travail de l'équipe ERMEL est un travail de production d'ingénieries pédagogiques. L'équipe travail depuis 6 ans sur la géométrie de la grande section au CE1. Ce n'est pas un travail recherche académique et didactique au sens où il ne vise pas essentiellement à produire de nouvelles connaissances pour la science, mais à produire des dispositifs d'enseignement dans un processus circulaire décrit dans le figure 1 ci-dessous (Douaire et Emprin, soumis).

À partir d'une question de départ, l'équipe met en place des dispositifs expérimentaux permettant : -

– Une analyse du savoir géométrique (problèmes, propriétés, représentations…), ainsi que des connaissances spatiales développées par les élèves.

– L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques, sur les trois années du cycle.

– L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans des classes de plusieurs académies.

Ces trois composantes sont en interaction, l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées. Chacune de ces étapes associe l'ensemble des collègues de l'équipe, qu'ils soient formateurs en IUFM (PRAG ou enseignants chercheurs) ou maîtres-formateurs du premier degré. Les membres de l'équipe se réunissent pour analyser les expérimentations. Il découle de ces échanges une explicitation des potentialités des élèves, de leurs difficultés. Ce travail permet de définir les besoins relatifs à l'enseignement dans les différents domaines et débouche sur la production ou l'amélioration de dispositifs d'enseignement. Bien évidemment les disponibilités de chacun sont variables (les maîtres formateurs n'ont pas de décharge de service pour ces travaux). D'un point de vue pratique l'équipe est structurée en équipes locales pilotées par les formateurs IUFM qui se réunissent et travaillent ensemble. Les formateurs IUFM sont les intermédiaires entre les équipes locales et l'équipe nationale.

La rédaction d'un ouvrage à destination des formateurs et des enseignants du premier degré. Il comporte une première partie explicitant les enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine. La seconde partie présente les situations qui ont été retenues parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés.

Les résultats de la recherche feront l'objet d'une publication destinée aux enseignants et aux formateurs, comme pour nos précédentes recherches (cf. ERMEL Géométrie cycle 3 : « Apprentissages géométriques et la résolution de problème au cycle 3 » INRP/Hatier, 2006).

Les situations qui y sont proposées présentent une certaine « robustesse » : les résultats et procédures produits par les élèves sont présentés dans le descriptif des situations, ce qui permet au maître, en général non spécialiste des mathématiques, de pouvoir anticiper ses décisions. Cette fiabilité nous semble due d'une part à la cohérence entre les conceptions de l'apprentissage et les situations proposées et, d'autre part, à leur expérimentation dans de nombreuses classes durant plusieurs années.

Chaque année entre 10 et 30 classes expérimentent les dispositifs ce qui constitue un terrain d'observation privilégié.

Le second terrain d'observation provient du travail de l'IREM de Reims sur les rallyes mathématiques au collège (depuis plus de 20 ans) et à l'école (du CP au CM2 depuis plus de 10 ans) et d'un questionnement de l'AGEEM de la Marne. En effet l'AGEEM organise des rallyes lectures à l'école maternelle alors même que les élèves ne savent pas lire, l'association s'est donc tourné vers nous en nous posant la question suivante : « il existe des rallyes maths à l'école, des rallyes lecture en maternelle, est-ce qu'il serait possible de faire un rallye mathématique à l'école maternelle ? ». La réponse à cette question a donné lieu à 4 ans de production de situations et d'expérimentation sur lesquelles nous nous appuyons. Il a donné également lieu à la production d'un ouvrage (Charotte, Emprin, 2006)

Bibliographie

Bautier É. Rayou P. (2009). Les inégalités d'apprentissage. Programmes, pratiques et malentendus scolaires. Paris : PUF , 184 p..

Berthelot R. Salin M.-H. (1992). L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse de doctorat, Bordeaux.

Briand J. (1993). L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique, thèse de doctorat de l'Université Sciences et Technologies - Bordeaux I (1993-12-14), BROUSSEAU Guy (Dir.)

Briand J. Loubet M. Salin M-H. (2004). Apprentissages mathématiques en maternelle, Hatier (CD-Rom)

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Charotte F. Emprin F. (2006). Un rallye mathématique à l'école maternelle ? Oui, c'est possible. CRDP Champagne Ardenne

Houdement C. Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement des la géométrie, ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 175 – 193.

Emprin, F. Jourdain, C. (2010). Les représentations des enseignants sur l'échec scolaire : étude à partir d'une question contraposée, actes du colloque AREF 2010 : Actualité de la recherche en éducation et en formation, Genève, 13 au 16 septembre 2010 :

ERMEL (1995). Apprentissages numériques en Grande Section, Hatier

IREM de Grenoble (1999), Grand N. Spécial maternelle : T. 2. IREM de Grenoble, Grenoble, 1999

Liping Ma (1999), Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States: Teachers' Understanding ... Mathematical Thinking and Learning Series, Lawrence Eribaum Associates Inc, Publishers.

Lurçat, L. (1976). L'enfant et l'espace : le rôle du corps. Paris : PUF.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris : PUF

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage éditions Grenoble, Vol. 18. Num. 2. p. 139-190.

Vergnaud G. (1996) La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed). Didactique des Mathématiques. Delachaux et Niestlé. Lausanne.

Notes :

1 Vidéo disponible en ligne http://www.cndp.fr/crdp-reims/index.php?id=926

2 Une vidéo est disponible sur la cassette VHS du CDDP de Dijon : « J'apprends le nombre dès l'Ecole Maternelle » Bellisens G. Bouvier V. Grivot G.

3 http://www.ac-grenoble.fr/occe26/peda/meirieu.htm

4 http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2011/05/20_Brissiaud_comptage.aspx

2.2 Quelles pratiques pédagogiques faut-il éviter à l'école maternelle et au CP ? Les réponses d'une expérimentation menée à l'échelle de la nation

Mots-clefs : nombres, école maternelle, école primaire, psychologie, évaluation

Rémy Brissiaud, Maître de conférence de psychologie, Université Paris 8, Laboratoire Paragraphe

Les performances en calcul ont baissé dans la période 1987-1999 et aucune considération d'ordre économique ou sociologique ne l'explique

Des chercheurs de la DEPP (note 08.38 de décembre 2008) ont comparé les performances en 1987, 1999 et 2007 d'un échantillon représentatif des élèves de CM2, en s'appuyant sur les items communs aux différentes passations pour rendre la comparaison possible. Le résultat est très clair : on observe une dégradation des performances très significative entre 1987 et 1999. La moyenne baisse des 2/3 de l'écart-type initial, ce qui est considérable. En revanche, les performances se stabilisent à ce bas niveau entre 1999 et 2007.

Certaines causes peuvent être écartées a priori. Ainsi, les élèves calculent encore bien en 1987 alors qu'on est près de 20 ans après mai 68. Le prétendu laxisme ayant suivi ces évènements n'est pas la cause de la dégradation des performances. Celle-ci n'est pas non plus consécutive à la réforme des « maths modernes » (1970) : 17 ans plus tard, les élèves calculaient encore bien. Par ailleurs, la période pendant laquelle les performances se dégradent (87-99) n'est pas de celles qui voient les moyens accordés à l'école s'amenuiser : il n'y a pas de fermetures de classes, pas de diminution du nombre de jours de travail par semaine, etc. On pourrait penser à évoquer le phénomène de ghettoïsation des banlieues : la condition sociale de certains enfants se dégradant pendant cette période, leurs performances en calcul auraient fait de même. Mais la même étude montre que les performances en calcul des enfants de cadres se dégradent dans les mêmes proportions que celles des enfants d'ouvriers. On pourrait penser à évoquer des phénomènes sociaux tels que le temps passé devant la playstation. Mais la même étude montre que les performances en lecture et dictée ne se dégradent pas entre 1987 et 1997 et on comprendrait mal que le temps passé devant la playstation ait dégradé les performances en calcul et celles-là seulement. Osons poser la question : et si la cause était d'ordre pédagogique ? Cela conduit à comparer les pratiques pédagogiques de la période 1970-1987 avec celles de la période qui suit (1987-2007). En fait, pour une meilleure intelligibilité, nous comparerons les périodes 1970-1986 et 1986-2007 : c'est en effet en 1986 que paraît un texte officiel qui institutionnalise un basculement de la pédagogie du nombre à l'école maternelle.

Entre 1970 et 1986 : la période des activités pré-numériques

On doutait à l'époque que les enfants puissent profiter d'un enseignement des nombres avant 6-7 ans et, à l'école maternelle, l'accent était mis sur des activités qualifiées de « pré-numériques ». Les enseignants distribuaient par ex. à leurs élèves des blocs de plastique de formes, tailles, épaisseurs et couleurs différentes et les enfants devaient trouver tous les triangles rouges, puis les triangles rouges épais, etc. En 1977, le ministère publie une circulaire faisant le bilan de 10 ans environ d'expérimentation dans les classes de ce type d'activités[1]. Les mots « nombre », « comptage », « dénombrement », « calcul », etc. n'y figurent pas. Ceux qui, comme l'auteur de ces lignes, allaient alors dans des GS peuvent attester que l'on n'y comptait pas, qu'il n'y avait pas de file numérique d'affichée et que, plus généralement, il n'y avait aucune trace d'un quelconque apprentissage numérique.

Au CP, l'année commençait elle aussi par des activités pré-numériques. Un ouvrage paru en 1977 a beaucoup influencé la pédagogie de l'époque parce que les professeurs d'écoles normales en ont largement diffusé le contenu : il s'agit d'Ermel CP[2] édition 77 (il y aura une édition 91, radicalement différente). La progression concernant les nombres commence au mois de février (près de 5 mois après la rentrée des classes) par des activités conduisant les élèves à placer dans une même boîte des collections qui peuvent être mises en correspondance terme à terme (des collections de 7, par ex.) Pour désigner la propriété commune à ces collections (le nombre), dès que l'enfant ne connaît pas l'écriture de ce nombre, il adopte un symbole arbitraire : une spirale par ex. L'exemple donné dans Ermel CP 77 est celui du nombre onze. Inutile de dire qu'il n'y avait pas de file numérique dans la classe, qu'on n'y apprenait pas systématiquement à compter, ni à écrire les nombres à ce moment de l'année. Mais peu d'instituteurs utilisaient effectivement cet ouvrage, la plupart utilisaient des fichiers tels que Maths et Calcul chez Hachette (connu aussi sous le nom de son principal auteur : Eiller). Dans celui-ci (édition 77), représentatif des ouvrages de la période, la leçon sur les nombres 1, 2 et 3 se faisait en novembre et le nombre 10 était écrit pour la première fois en mathématiques au mois de février.

Quiconque prenant connaissance de ces informations concernant l'école en France entre 1970 et 1986, s'écrierait : « Avec un enseignement aussi tardif, les élèves ne devaient pas devenir très forts en calcul ! ». L'étude de la DEPP montre qu'au contraire, sur le long terme (en CM2), cette école formait des élèves bien plus performants que celle d'aujourd'hui. En se contentant d'activités pré-numériques à l'école maternelle, on faisait mieux qu'aujourd'hui.

Le basculement de 1986 : l'enseignement du comptage et du surcomptage

Dans une circulaire publiée en 1986 concernant l'école maternelle[3], on lit : « Progressivement, l'enfant découvre et construit le nombre. Il apprend et récite la comptine numérique ». Après plus de 15 ans de quasi-disparition de tout apprentissage numérique à l'école maternelle, le changement de point de vue est radical ! D'après R. Palanque (Prépa-Math[4], 1987, p. 65) c'est à la suite de la lecture d'un article d'une psychologue américaine, R. Gelman, qu'une nouvelle équipe Ermel s'est lancée dans une expérimentation sur ces bases radicalement différentes. Les ouvrage Ermel GS[5] 1990 puis Ermel CP[6] 1991, ont suivi. Dès lors, on se met à compter dans les écoles maternelles. Les documents d'accompagnement des programmes de 2002 précisent qu'en PS, les enfants apprennent à dénombrer une collection jusqu'à 5. Dans presque toutes les GS, une file numérique est affichée jusqu'à 30. On compte presque tous les jours les enfants présents, les étiquettes des absents. Quand un enfant ne sait pas écrire le chiffre 8, il compte jusqu'à ce nombre sur la file numérique afin d'en retrouver l'écriture chiffrée. Les programmes pour l'école maternelle de 2008 confortent ce point de vue puisque les enfants, en fin de GS, sont censés être capables de dénombrer une quantité jusqu'à 30 et de lire ces nombres écrits en chiffres. Il faut insister sur ce fait : les programmes de 2008, loin de s'inscrire en rupture avec ceux de 1986 et 2002 concernant la place du comptage dans les apprentissages numériques, confortent et renforcent cette place.

Dans les CP, vers 1990, les files numériques commencent à apparaître sur les murs des classes alors qu'elles étaient auparavant totalement absentes. Cet affichage devient rapidement quasi-généralisé. Et on voit apparaître dans les manuels et les fichiers des leçons où l'on enseigne le « surcomptage » (voir le fichier CP, Collection Pyramides chez Bordas, 1991, par ex). Pour trouver 9 + 5, l'élève apprend à « mettre 9 dans sa tête » et à sortir 5 doigts en égrenant : 10, 11, 12, 13, 14. Il apprend qu'il peut également poser le doigt sur la case 9 de la file numérique, compter 5 cases vers la droite et lire le numéro de la case d'arrivée : 14.

Ce type de séquence extrêmement fréquent aux USA, était totalement absent des manuels français de la période 1970-1986. Rapidement, après 1991, l'usage d'une file numérique pour trouver le résultat d'une addition devient quasi-généralisé parce qu'il est explicitement recommandé dans Ermel CP 1991. Alors qu'entre 1970 et 1986, les élèves n'avaient pas encore écrit le nombre 10 en décembre au CP, dans le fichier Pyramides (1991), au même moment de l'année scolaire, ils disposent d'un moyen pour trouver le résultat de toutes les additions jusqu'à 9 + 9.

Depuis 1986, avec des apprentissages numériques aussi précoces, les élèves devraient devenir bien meilleurs en calcul que leurs prédécesseurs ! L'étude de la DEPP montre que c'est le contraire qui est vrai. On se trouve donc face à un paradoxe : comment se fait-il qu'à une époque où l'école enseignait les nombres et le calcul beaucoup plus tardivement, elle formait des élèves plus performants qu'aujourd'hui ?

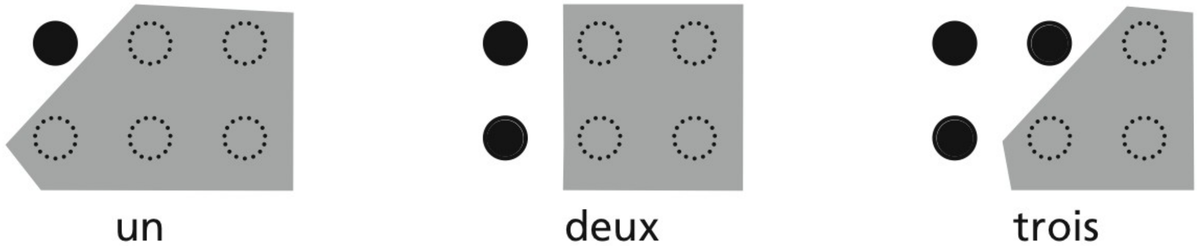
Pourquoi une telle dégradation : la notion de comptage-numérotage

Rappelons que les travaux de R. Gelman sont à l'origine du basculement de 1986. Vers 1980, elle défendait l'idée que les enfants comprennent de manière innée ce qu'elle appelait les « principes du comptage »[7]. En fait, ces « principes » ne sont rien d'autre que des règles du « comment compter » : il faut respecter l'ordre des noms de nombres (un, deux, trois, quatre…), il faut réaliser une correspondance terme à terme entre les noms de nombre et les éléments, il faut fournir comme réponse le dernier mot prononcé lors du comptage (si j'ai compté : « un, deux, trois, quatre, cinq », le nombre est « cinq »). En psychologie, la théorie de R. Gelman a d'emblée été très critiquée[8]. Aujourd'hui, la liste des faits expérimentaux qui l'invalident est impressionnante[9].

Mais le plus grave est que ces principes, à usage théorique, se soient transformés en principes pédagogiques. Considérons ainsi ce que recommandent les auteurs de l'évaluation GS (eduscol, 2010)[10] pour aider un élève qui échoue à dénombrer une collection en comptant ses éléments. Ils conseillent de lui rappeler les critères d'un « bon comptage ». Ils insistent notamment sur le fait que : « il importe que les élèves pratiquent rigoureusement la correspondance terme à terme entre un nombre dit et un élément ». Ce conseil semble de bon sens. Or, considéré d'un point de vue didactique, il conduit à enseigner une règle du « mal compter » plutôt qu'une règle du « bien compter ». Lorsqu'on enseigne le comptage ainsi, en insistant sur la correspondance 1 mot - 1 élément, on conduit l'enfant à concevoir les éléments successivement pointés comme « le un, le deux, le trois, le quatre… ». Les mots prononcés sont alors des sortes de numéros renvoyant chacun à un élément et un seul. Or, il faudrait que l'enfant comprenne que ces mêmes mots sont d'authentiques noms de nombres, c'est-à-dire des mots qui désignent des pluralités : « deux, c'est un et encore un » ; « trois, c'est un, un et encore un » ou bien : « trois, c'est deux et encore un ». Enseigner le comptage en insistant sur la règle de correspondance 1 mot - 1 élément, c'est enseigner ce que j'ai appelé un « comptage-numérotage »[11]. Cela éloigne les élèves les plus fragiles de la compréhension des nombres qui, fondamentalement, résulte de la compréhension de l'ajout itéré d'une unité.

C'est d'ailleurs ce qui avait conduit certains pédagogues « anciens »[12] (ceux intervenants avant la période 1970-2007 qui nous intéresse ici), à prôner une autre forme de comptage, en utilisant un cache, par ex., et en découvrant progressivement les unités :

En comptant ainsi, chacun des mots prononcés est associé à la pluralité correspondante. Dans ce cas, la correspondance terme à terme privilégiée n'est pas celle « entre un nombre dit et un élément » mais celle entre chaque nombre dit et la pluralité des unités déjà énumérées. On peut parler d'une tentative d'enseignement du comptage-dénombrement et non du comptage-numérotage. Le



pédagogue rend plus accessible la propriété fondamentale : lorsqu'on compte, on ne prononce le mot suivant qu'après avoir ajouté 1 et chaque mot prononcé exprime le résultat de cet ajout de 1 (en résumé : lorsqu'on compte, le suivant de N est N + 1). Adopter cette forme de comptage, c'est favoriser l'accès à une suite verbale arithmétisée

On s'accorde aujourd'hui pour considérer que l'arithmétisation de la suite des nombres se construit d'abord dans le domaine des 3 à 4 premiers nombres, grâce au subitizing[13]. Même S. Dehaene, qui a longtemps nié la spécificité du subitizing, adopte aujourd'hui ce point de vue théorique[14]. De plus, une recherche récente[15] a prouvé ce dont on avait de nombreux indices depuis longtemps : lorsqu'on enseigne le comptage-numérotage à des enfants qui n'ont pas encore compris de manière approfondie les 3 à 4 premiers nombres, ils apprennent ce qu'on peut appeler un « comptage mécanique », c'est-à-dire un comptage où l'enfant s'efforce de faire ce qu'on lui a dit de faire, sans comprendre qu'il est en train de mesurer la taille d'une collection. Face à une collection de 9 objets, si on lui en demande le nombre, il est capable de les compter et de répondre 9, mais il est incapable de donner 5 objets quand on les lui demande, par ex. L'enfant réussit la tâche « Combien… » parce qu'elle est surentraînée, mais il n'est capable d'aucune généralisation. Le cas de tels enfants est-il marginal ? Dans la même recherche, plus d'un tiers des enfants qui semblent de bons compteurs se révèlent en fait utiliser un comptage mécanique. Encore plus inquiétant : la langue française amplifie vraisemblablement le phénomène[16] (polysémie du mot « un »[17], pluriel mal marqué, etc.)

Le paradoxe de meilleures performances durant la période 1970-1986, alors qu'il n'y avait aucun apprentissage numérique à l'école maternelle, peut dès lors s'expliquer ainsi : l'enseignement des nombres était tardif, peu d'enfants à ce moment tardif n'avaient pas compris de manière approfondie les 4 premiers nombres et, par conséquent, l'école enseignait beaucoup moins un comptage mécanique qui, pour les élèves fragiles, est le début d'un parcours d'échec. Il est en effet très difficile de sortir ces élèves de l'usage d'un comptage mécanique ; mieux vaut qu'ils n'en usent jamais.

Pourquoi la dégradation : enseigner le surcomptage masque l'absence de compréhension

Remarquons d'abord que cet enseignement n'a aucune nécessité. En effet, l'élève qui sait que le suivant dans la suite numérique exprime le résultat de l'ajout de 1 (suite arithmétisée) découvre le surcomptage sans qu'on le lui enseigne[18]. De manière générale, mieux vaut éviter son enseignement parce que cela conduit l'enseignant à valoriser en classe cette procédure de surcomptage et n'incite pas les élèves à mémoriser les résultats[19]. Concernant les enfants fragiles, les conséquences sont pires. En effet, lorsqu'un élève ne dispose pas d'une suite numérique arithmétisée (lorsqu'il fait usage d'un comptage-numérotage), l'enseignement d'un « surcomptage-numérotage » lui permet de donner le résultat d'une addition sans progresser dans la compréhension[20]. Un tel élève donne seulement l'illusion du progrès et il n'est pas étonnant que toutes les études sur les élèves en difficulté grave et durable avec les nombres décrivent des enfants enfermés dans le comptage sur les doigts[21].

Durant la période 1970-1986, moins d'enfants rentraient à l'école élémentaire avec un comptage mécanique installé et les pédagogues ne masquaient pas ce défaut de compréhension de la suite numérique en leur enseignant le surcomptage. On comprend que les enfants en échec aient été moins nombreux. Le paradoxe d'échecs moins nombreux avec un enseignement plus tardif n'est décidément qu'apparent.

Et pourtant les pédagogues « anciens » nous avaient alertés

Rappelons qu'on qualifie ici d' « anciens » les pédagogues d'avant la période 1970-2007, celle qu'on a étudiée. Un couple d'instituteurs[22] qui travaillaient avec Me Herbinière-Lebert, une fameuse inspectrice générale des écoles maternelles, écrivaient en 1966 à propos du comptage : « … cette façon empirique (le comptage) fait acquérir à force de répétitions la liaison entre le nom des nombres, l'écriture du chiffre, la position de ce nombre dans la suite des autres, mais elle gêne la représentation du nombre, l'opération mentale, en un mot, elle empêche l'enfant de penser, de calculer. » Nul doute que ces pédagogues parlaient ainsi du comptage-numérotage. On imagine ce que serait la stupéfaction de Me Herbinière-Lebert si, lisant les conseils pédagogiques figurant dans l'évaluation GS mise en ligne sur le site eduscol, elle s'apercevait qu'on recommande aujourd'hui une pratique pédagogique qui, à son époque, était jugée comme un obstacle majeur à la compréhension des nombres.

Considérons de même ce qu'écrivait Henri Canac (1955), sous-directeur de l'ENS de Saint-Cloud, dans un ouvrage rédigé par une commission d'experts réunis autour de Gaston Mialaret dans le cadre de l'Unesco[23] : « Dans de nombreux CE ou même CM, on trouve souvent de grands benêts qui comptent sur leurs doigts ou qui, sommés de résoudre une simple opération, comme 8 + 5, se récitent intérieurement à eux-mêmes : 8, 9, 10, 11, 12, 13 en évoquant des doigts imaginaires. Au vrai, avec ces élèves « mal débutés », comme on dit, il n'est qu'un moyen d'en sortir qui est de leur faire apprendre par cœur les tables d'addition …/… Oui, mais ce sera passer d'une routine à une autre …/… Or, il y aurait eu beaucoup mieux à faire… » Nous reviendrons dans la conclusion de ce texte sur ce qu'il y aurait eu de mieux à faire. Mais imaginons pour l'instant ce que serait la stupéfaction de H. Canac si, lisant un fichier tel que Pyramides, il s'apercevait qu'on enseigne aujourd'hui ce qui, à son époque, était considéré comme la pire des façons de débuter un élève.

Une expérimentation scientifique menée à l'échelle de la nation

Toute expérimentation en sciences humaines commence par l'explicitation d'une hypothèse. Les travaux en psychologie expérimentale et l'histoire de la pédagogie suggèrent celle-ci : Un enseignement précoce du comptage-numérotage conduit à un comptage mécanique et, comme il est difficile de sortir certains élèves de ce comptage mécanique, un système scolaire qui fait le choix d'un tel enseignement produit de l'échec sur le long terme.

Pour monter une expérimentation, il convient ensuite de disposer de 2 échantillons représentatifs de la population générale, l'un qui a appris dans une condition (absence d'enseignement du comptage-numérotage) et l'autre dans l'autre condition (enseignement précoce du comptage-numérotage). Or, disposer de tels échantillons est a priori extrêmement difficile. En effet, enseigner le comptage-numérotage correspond à ce qu'on peut appeler la « pédagogie de sens commun » des nombres. Trouver un échantillon représentatif des élèves français dont on est sûr que leurs enseignants de maternelle ne leur ont pas enseigné les nombres en utilisant la « pédagogie de sens commun » n'a rien d'évident. Or, la réforme des mathématiques modernes et les décisions radicales qui l'ont accompagnée (apprentissages numériques extrêmement tardifs) a fourni un tel échantillon : c'est celui des élèves qui, en 1987, ont participé à l'étude de la DEPP. De même, trouver un échantillon représentatif des élèves français dont on est sûr que leurs enseignants de maternelle leur ont effectivement enseigné précocement le comptage-numérotage n'a rien d'évident : lorsqu'on a fait l'hypothèse que cela se traduira par une dégradation des performances, y procéder pose des problèmes de déontologie ! Or, le basculement de 1986 et le changement de culture pédagogique qui l'a accompagné (importation de la culture pédagogique des pays de langue anglaise) a fourni un tel échantillon : c'est celui des élèves qui, en 1999 et en 2007, ont participé à l'étude de la DEPP. Tout s'est passé comme si, par deux fois, la nation avait décidé des changements culturels rendant possible une telle expérimentation ! On n'est pas prêt de revivre de telles circonstances historiques !

De plus, la comparaison conduit à des résultats extrêmement clairs (une dégradation manifeste) avec un grand nombre de contrôles possibles permettant de s'assurer que la cause des performances moindres en 1999 est bien d'ordre pédagogique. D'un point de vue méthodologique, donc, c'est inespéré ; tout chercheur en rêve ! Le phénomène révélé, lui, conduit évidemment à beaucoup d'inquiétude.

Et maintenant ?

Le défi de faire mieux qu'à une époque où l'on ne faisait rien parce qu'on le faisait plus tardivement et, donc, différemment, ne sera pas facile à relever. De manière évidente, il faut commencer par faire baisser la pression en maternelle : les objectifs actuels ne peuvent que conduire à un enseignement précoce du comptage-numérotage[24]. Il faut également revoir le statut de la file numérique affichée en classe, y compris au début du CP. En effet, lorsqu'un élève l'utilise pour retrouver la lecture ou l'écriture d'un nombre, c'est la logique du comptage-numérotage qui prévaut (on remarquera que cette dernière recommandation comporte une part d'autocritique). Enfin, comme le recommandait H. Canac, il faut plus de progressivité dans l'étude des premiers nombres au CP, afin que les élèves s'approprient leurs décompositions (6 = 2 + 4 par ex.) C'est un impératif si l'on veut que, plus tard dans l'année, ils sachent calculer 8 + 6 sous la forme 8 + 2 + 4, stratégie de calcul qui, lorsqu'elle est utilisée, conduit rapidement à la mémorisation[25].

Bibliographie

Ministère de l'éducation (1977) L'école maternelle – Collection horaires, objectifs, programmes, instructions. CNDP

Ermel (1977) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire – Cycle préparatoire. Paris : Sermap OCDL

Ministère de l'éducation nationale (1986). L'école maternelle, son rôle, ses missions. CNDP

Palanque R., Cambrouse E. & Loubet E. (1987) Prépa-math – Maternelle/grande section – Dossier pédagogique. Paris : Hachette.

Ermel (1990) Apprentissages numériques, cycle des apprentissage, Grande Section de maternelle. Paris : Hatier.

Ermel (1991) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire. Paris : Hatier

Gelman R. & Gallistel C.R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge : Harvard University Press.

Briars D. & Siegler R.S. (1984) A featural analysis of preschooler's counting knowledge. Developmental Psychology, 20, 607-618.

Le Corre, M. & Carey, S. (2008). Why the verbal countingg principles are constructed out of representations of small sets of individuals: A reply to Gallistel. Cognition, 107(2), 650-662

MEN/DGESCO (2010) Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle – Découvrir le monde – Ressources pour faire la classe à l'école. Document mis en ligne sur le site eduscol.

Brissiaud R. (1989) Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles. Paris : Retz.

Bandet, J. (1962) Les débuts du calcul. Paris : Bourrelier.

Fayol, M. (2012) L'acquisition du nombre. Collection : Que sais-je ? Paris : Puf.

Dehaene, S. (1997-2010) La bosse des maths – 15 ans après. Paris, Odile Jacob.

Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. Cognition, 108(3), 662-674.

Brissiaud, R. (2007) Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle. Paris : Retz.

Hodent, C., Bryant, P., & Houdé, O. (2005) Language-specific effects on number computation in toddlers. Developmental Science 8 (5), 420–423.

Siegler, R. & Jenkins, E. (1989) How Children discover new strategies. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fischer, J.P. (1992) Les apprentissages numériques. Nancy, Presses Universitaires de Nancy.

Brissiaud R. (1989-2003) Comment les enfants apprennent à calculer – Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres. Paris : Retz.

Fayol, M. (2012) L'acquisition du nombre. Collection : Que sais-je ? Paris : Puf.

Fischer, J. P. (2010) La dyscalculie développementale : réalité et utilité de la notion pour l'enseignement ? Bulletin de l'APMEP, 488, 293-300.

Fareng R. & Fareng, M. (1966) Comment faire ? L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7 ans. Paris, Fernand Nathan.

Mialaret, G. (1955) Pédagogie des débuts du calcul. Fernand Nathan, Paris (avec la collaboration de l'Unesco)

Brachet, Canac & Delaunay(1955) L'enfant et le nombre. Didier, Paris.

Brissiaud, R. (2007) Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle. Paris : Retz.

Geary D.C., Fan L. & Bow-Thomas C.C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. Psychological Science, 3,180-185.

2.3 Quel type de mathématiques pratiquer en début d'école primaire ?

Mots-clefs : école, nombres, modélisation, algorithmes, formation, didactique

Gérard Sensevy, Professeur des universités, Université de Bretagne Occidentale IUFM

Un exemple du travail didactique

L'introduction de cette intervention consiste dans un extrait du projet ACE (Arithmétique et compréhension à l'école primaire) : « Un exemple concret d'une séquence d'apprentissage conçue par la recherche et mise en œuvre en cycle 2 : la recherche du terme inconnu d'une somme (Brousseau 1, 1998) »

Depuis le début des années 1970 jusqu'à la fin des années 1990, Guy Brousseau et son équipe ont fait vivre le COREM (Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). Il s'agissait alors de construire des ingénieries didactiques qui concernaient l'ensemble des mathématiques enseignées à l'école primaire, et de les mettre en œuvre dans des classes, dans une école primaire particulière (l'école Michelet de Talence), au sein de laquelle les professeurs étaient associés au projet. L'implémentation de ces séquences d'enseignement était produite sous le « contrôle » scientifique de Brousseau et son équipe, ce qui signifie que très régulièrement (une fois par semaine), des séances étaient filmées, puis visionnées et commentées par l'équipe des chercheurs et les professeurs de l'école. Cette analyse continue, à la fois conceptuelle et pratique, des ingénieries élaborées, a permis leur raffinement, dans une démarche à la fois théorique (une vingtaine de thèses soutenues2) et pragmatique, au sens où certaines formes d'enseignement pertinentes et efficaces ont pu être stabilisées pour de nombreux domaines des mathématiques élémentaires. L'ensemble de ce matériau (films et documents papier associés) est aujourd'hui conservé au sein de la base de données ViSA (Vidéos de Situations d'enseignement-Apprentissage).

Les dispositifs conçus et mis en œuvre au COREM ne sauraient être simplement transposés à la pratique « ordinaire » : d'une part, ils étaient appropriés et mis en œuvre par des professeurs continument formés, sur plusieurs années, par l'équipe des chercheurs ; d'autre part certains aspects des recherches récentes, présentés ci-dessus, n'avaient pu être pris en compte dans l'élaboration des ingénieries. Toutefois, il semble possible de s'inspirer avec profit de certaines des ingénieries mises au point au COREM pour élaborer les séquences d'enseignement qui constituent l'objectif premier de ce projet.

Une situation et ses déclinaisons

Pour préciser cela, on peut considérer rapidement l'ingénierie de recherche du terme inconnu d'une somme. Ce dispositif fait l'objet d'une analyse théorique (Brousseau, 1998, pp. 304-305, Brousseau & Warfield, 1999) au sein de laquelle l'activité mathématique du professeur et des élèves est présentée de la manière suivante : « Habituellement les enseignants présentent les savoirs qu'ils veulent enseigner comme des réponses à des questions, peut-être pour éviter le dogmatisme. Mais ils se focalisent habituellement sur l'enseignement de réponses, les questions n'étant là que pour les introduire et les justifier. De plus, ces réponses sont rarement des relations ou des assertions, qui pourraient garder un sens même en étant isolées, ce sont essentiellement des procédures dont les questions introductives sont étroitement assujetties à accompagner l'acquisition progressive. Détachés de leur contexte, les algorithmes deviennent des réponses acquises pour des questions à venir sur lesquelles on ne sait pas grand chose ». Brousseau précise ensuite que l'enseignement fondé sur la situation de recherche du terme inconnu d'une somme a pour but « de faire passer les questions du domaine de l'enseignant à celui de l'élève, d'enseigner les questions autant que les réponses, et autant que possible d'enseigner les connaissances avec leur sens ».

L'apprentissage est ainsi organisé autour d'une même situation de base, qui va se répéter un grand nombre de séances, tout en évoluant. Il s'agit du « jeu de la boîte ». Le professeur dispose d'une boîte cubique en plastique opaque, relativement grande. Cette boîte contient des pièces de type « Bloc Logiques » (entre une dizaine et une centaine). Le « jeu » consiste toujours à dire combien la boîte contient de pièces d'un type donné. Par moments ce nombre ne peut être connu sans un comptage effectif, à d'autres moments il est possible de le prévoir par un calcul sur les renseignements connus. Dans cette perspective, le signe d'une certaine connaissance de la soustraction sera justement de savoir finalement quand et comment il est possible de déterminer ce nombre. Cette détermination sera liée au repérage des situations que le jeu de la boîte peut modéliser.

Cette situation a donné lieu à une séquence d'enseignement de dix-huit séances, au CE1, mise en œuvre plusieurs années d'affilée au COREM. Cette séquence a été récemment reprise par une équipe de didactique des mathématiques (Serge Quilio et Alain Mercier, de l'UMR ADEF), au sein d'une école de ZEP marseillaise. Cette dernière recherche a permis une première problématisation des contraintes pesant sur la transposition d'un dispositif étroitement contrôlé par les chercheurs travaillant en étroite coopération avec les professeurs (COREM), vers une implémentation dans des classes « ordinaires », par des enseignants travaillant en ZEP. Elle a en particulier fait prendre conscience du type d'accompagnement des professeurs que requiert ce type de dispositif, et du type de formation qu'il est nécessaire de penser pour que les caractéristiques conceptuelles de la séquence soient conservées.

Telle qu'elle a pu être mise en œuvre concrètement, la séquence nous paraît prendre en compte les éléments nécessaires à la conceptualisation mathématique que nous appelons de nos vœux :

– elle permet de systématiquement travailler l'approximation (les élèves prennent par exemple conscience que si l'on a 25 objets dans la boîte et qu'on veut la remplir pour qu'elle en contienne 42, on devra ajouter certainement plus de 5 (10) objets, mais moins de 40 (30) objets. Les représentations de type analogiques approximatives peuvent être ainsi méthodiquement travaillées, pour, en particulier, une meilleure appropriation du système de numération ;

– elle favorise la découverte progressive de propriétés sémantiques (par exemple celle de distance) qui peuvent unifier des questions tout à fait différentes du point de vue de l'élève (j'ai 25 objets dans la boîte, combien faut-il que j'en ajoute pour obtenir 42 ? ; j'ai 42 objets dans la boîte, j'en enlève 25, combien en ai-je maintenant ? Etc.) ;

– elle place au centre de l'activité mathématique de l'élève et de ses conceptualisations une relation forte à la référence, la soustraction apparaissant comme le moyen unique de modéliser des actions pourtant tout à fait différentes phénoménalement. Dans une perspective d'élémentation, il s'agit là d'une conception des mathématiques appropriée pour les apprentissages futurs, non seulement en mathématiques, mais encore en sciences ;

– enfin, la séquence ainsi conçue peut reposer sur des systèmes de représentation divers, pré-algébriques, dont le travail peut ensuite permettre le recodage systématique et le contrôle sémantique des algorithmes produits.

Il est à noter que la séquence évoquée ici est plutôt adaptée au CE1, mais les principes généraux qui la fondent laissent penser que sa réorganisation conceptuelle et pratique en direction du CP, dans la perspective dégagée au sein de l'ensemble des points qui précèdent, pourrait être particulièrement fructueuse.

La définition d'une progression

Sur la base de cette petite analyse, on peut produire quelques catégories normatives qui peuvent aider à élaborer des progressions.

Construction du nombre

– a) Composition / décomposition (3 + 4 = 3 + 3 + 1 ; 8 + 5 = 8 + 2 + 3)

– b) Numération décimale (24 = 20 + 4 = 10 + 10 + 4)

– c) Approche topologique des nombres, approximation (il y a plus de 3 à 50 que de 17 à 25 ; 53 est plus proche de 50 que de 60).

Les mathématiques comme modélisation

– a) Les mathématiques fournissent des modèles pour penser le réel (par exemple, je peux désigner un nombre par une écriture additive (une somme) et le comparer à d'autres).

– b) Les modèles permettent de considérer comme équivalentes (différentes) des situations spontanément considérées comme différentes (équivalentes). Ils introduisent ainsi une « sémantique propre » dans la réalité.

– c) Le rapport à la référence (si un modèle mathématise la réalité, celle-ci peut / doit toujours faire référence) doit sémantiser la syntaxe du modèle.

Les mathématiques dans les systèmes de représentation

  - a) Faire des mathématiques, c'est produire des systèmes des représentations (des formes symboliques).
  - b) Ces systèmes de représentation peuvent / doivent toujours être ramenés à ce qu'ils dénotent.
- Faire des mathématiques, c'est écrire des mathématiques.

La question des algorithmes

  - a) Je pose l'hypothèse que le travail des algorithmes doit constituer une manière spécifique de travailler le numérique. L'idée pourrait consister à faire vivre les opérations mathématiques au moyen de techniques de composition/décomposition, et de bâtir des rapports systématiques entre « exécution d'algorithmes » et des compositions / décompositions afférentes. Par exemple, mettre en rapport l'addition en colonne de 24 et 38 avec l'écriture 24 + 38 = 20 + 30 + 8 + 4 = 50 + 12 = 62.
  - b) L'idée consiste à rendre les élèves toujours capables de dénoter les signes qu'ils écrivent.
  - c) Les algorithmes sont précieux dans leur efficacité et dans leur faculté à cristalliser des mathématiques, mais ils peuvent être foncièrement contre-productifs s'ils oblitèrent le rapport à la référence.

La question générale de la didactification de telles situations.

Le travail fondamental de Brousseau met en évidence les risques majeurs liés à l'institutionnalisation prématurée des moyens de résolution des problèmes. Chez beaucoup de professeurs, la « détection » d'une proto-technique de résolution d'un problème peut amener à précipiter la réification de cette proto-technique, au détriment de l'appropriation des mathématiques auxquelles ce moyen de résolution peut ouvrir (cf. exemples dans le cas de Gaël).

L'importance cruciale de la formation

L'analyse de le complexité épistémique (mathématique) et didactique de l'enseignement et de l'apprentissage des premiers éléments de l'arithmétique fait accorder une importance fondamentale à la formation des professeurs et aux ressources à partir desquelles on peut organiser cette formation.

Il s'agit bien de rendre les professeurs capables d'un rapport de première main profond et subtil aux savoirs, et d'une concrétisation de ce rapport au sein de dispositifs didactiques.

Il faut radicalement révoquer en doute l'idée de « progressions clés en mains » que tout professeur pourrait mettre en œuvre, pour lui substituer celle de progressions dont l'efficacité repose sur la qualité de l'étude que le professeur pourra en produire, au sein de collectifs appropriés de chercheurs et de professeurs, sur le fond de systèmes de ressources organiquement pensés à cet effet.

Notes :

1 Pour plus d'informations sur la recherche de G. Brousseau :

http://pagesperso-orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm

2 Pour la plupart sous la direction de Guy Brousseau

2.4 Un point de vue à propos du manuel scolaire de mathématiques à l'école primaire

Mots-clefs : école, ouvrages, ressources, formation, didactique

Joel Briand, Maître de conférence, Université Bordeaux IV IUFM

Introduction

Le manuel scolaire de l'école élémentaire est porteur d'un discours : en ce qui concerne l'équipe à laquelle j'appartiens, les objectifs principaux que nous nous sommes fixés pour la construction des progressions, le choix des situations et la rédaction du manuel de l'élève et du guide pour le professeur sont les suivants :

– mettre en évidence différentes facettes des mathématiques (outil pour la vie quotidienne, pour d'autres disciplines, objet d'étude qui peut être fascinant, ludique) ainsi que la variété des champs étudiés (géométrie, nombres, mesure) ;

– maintenir une problématisation des savoirs, éviter autant que faire se peut l'ostension1 (ou l'ostension1 déguisée), et si l'on ne peut l'éviter, du moins trouver des moyens pour qu'elle ne fasse pas obstacle au travail de recherche et d'appropriation personnelle des questions ;

– ponctuer la vie scolaire mathématique en organisant dans une planification annuelle les situations et activités de découverte, les consolidations, les phases d'institutionnalisation, les entraînements, les évaluations ;

– permettre à l'enseignant de pouvoir effectuer un pas de côté pour réfléchir sur sa pratique. En cela, le livre du professeur peut aller au-delà du simple « cahier des réponses » et être un vecteur de réflexion didactique.

Rédiger un manuel scolaire c'est effectuer un travail pratique de transposition. Mais de nombreux écueils attendent les auteurs :

Les situations, lorsqu'elles sont évoquées dans le manuel de l'élève ont dû être construites par le professeur, invité qu'il est en cela par le livre du professeur. La question décisive, à cet égard, est celle de la problématicité des savoirs. Reprenons ce que déclare Yves Chevallard : « tout savoir n'est d'abord qu'une hypostase, une entité supposée, une idée de substance, dont nous faisons l'hypothèse en certains contextes institutionnels, en supposant que tel ou tel agit comme si ses gestes procédaient d'un certain corps de connaissances, que nous croyons deviner à travers son faire. Il faut ici, avec le didacticien, passer de l'autre côté du miroir : ce savoir réputé sûr parce qu'il est censé assurer nos gestes n'est en fait lui-même jamais assuré. »… « Toujours le savoir fait problème. Au-delà d'un faire observable, un savoir supposé renvoie, plus globalement, à ce que je nomme une organisation praxéologique, ou praxéologie. À l'origine d'une praxéologie se trouvent une ou plusieurs questions qui, génétiquement, apparaissent comme les raisons d'être de l'organisation praxéologique, parce que celle-ci est censée leur apporter réponse. » (Chevallard, 1994). Comment concilier alors une organisation linéaire d'un manuel scolaire, liée au rythme de la classe et au programme, et une approche qui concilie fréquentation de situations a-didactiques et une organisation praxéologique acceptable ?

Le manuel scolaire, en scénarisant des situations, ne fait que les évoquer. Or rien ne garantit les auteurs d'une utilisation a minima de leur manuel. Dans ce cas, même si les auteurs s'en défendent, l'élève peut être amené à faire des mathématiques comme le téléspectateur fait du football. Les réponses des élèves sont évaluées et non pas validées ou invalidées (au sens de la théorie des situations).

Pour montrer que les auteurs ont bien prévu certains comportements, une tendance consiste à demander aux élèves, dans le fichier, leur avis sur des travaux d'élèves fictifs ayant produit des erreurs typiques. Cette tendance est dangereuse si l'activité n'est pas précédée d'une réelle activité mathématique sur le thème donné. On n'apprend pas en visitant toutes les erreurs qui peuvent surgir lors d'un apprentissage.

D'un point de vue déontologique : peut-on affirmer que l'on « s'appuie sur les résultats récents de la recherche » ? G. Brousseau mettait, il y a déjà longtemps, en garde les formateurs sur ce qu'il nommait la « perméabilité didactique » : cette vocation du formateur à montrer des séquences « laboratoire » (sans doute pour justifier sa raison d'être) sans se préoccuper des inévitables questions de transposition non évoquées qui allaient être immanquablement à la charge du futur enseignant formé. Utiliser alors comme argument de diffusion, de façon ostentatoire, les recherches sur la psychologie de l'élève, la didactique des mathématiques, etc..., c'est, d'une certaine façon, nier ce qui est un objet d'étude en didactique des mathématiques : la question de la transposition des savoirs.

Les contraintes de l’édition

Pour les éditeurs, le manuel est un produit à diffuser. Les auteurs doivent donc comprendre cette logique tout en ne renonçant pas à leurs projets didactiques.

Ils peuvent être amenés à construire, dans le cadre des programmes qui sont rédigés par cycle, des progressions conformes à l’organisation didactique des savoirs, même si cela nécessite quelques « entorses » aux repères proposés dans le texte officiel par niveau de classe. Faire accepter ce point de vue par l’éditeur n’est pas toujours facile puisque l’éditeur doit se porter garant de la conformité aux programmes : il est donc très vigilant sur ce point.

La tendance actuelle des éditeurs est de vouloir qu’un manuel scolaire en mathématiques se rapproche d’un cahier de vacances : « un peu de tout chaque jour », pour ne pas paraître trop austère et parce que le choix du manuel par les enseignants s’effectue souvent en feuilletant quelques pages. Considérer par exemple comme « vieux jeu » de faire une semaine plutôt dédiée au démarrage de la construction de l’algorithme de la division est très tendance. Cette attitude conduit à renoncer à l’idée d’ouvrir des « chantiers ». La conséquence se mesure dans les classes : c’est le papillonnage.

Le manuel scolaire est contraint par les programmes mais il ne doit pas céder à la doxa du moment. Il faut éviter les effets d’annonce, bien souvent sans fondement théorique, plutôt destinés à « fidéliser » un « client », et qui déstabilisent un peu plus les enseignants. Par contre, il serait regrettable de renoncer à certains choix au prétexte de ne pas froisser les habitudes. Ces choix doivent alors être longuement justifiés.

Enfin, comment comprendre qu’une collection complète du cours préparatoire au cours moyen deuxième année soit présentée 3 mois après que des programmes sont publiés lorsque l’on sait que la rédaction d’un manuel nécessite au moins 6 mois de travail ?

Pour conclure

Le manuel scolaire et l’évaluation

Le manuel scolaire ne peut pas prendre en compte complètement l’évaluation. Celle-ci ne peut être raisonnablement bien pensée que pour des élèves réels après un enseignement effectif. Le rôle d’un manuel ne peut être finalement que de donner des pistes pour que les professeurs puissent mettre en lien des compétences à tester chez les élèves et des exercices. Les propositions d’évaluation que nous (auteurs) faisons se fondent donc sur des hypothèses de travail dont nous ne sommes pas certains et sur une activité potentielle que nous n’avons pas maîtrisée. Elles ne peuvent pas tenir compte de la spécificité d’un élève, d’une classe, d’un professeur. Ce sont des évaluations de produits finis écrits, ce qui limite leur potentiel d’analyse. Elles sont présentes dans le livre de l’élève (ce que je dois savoir faire seul) et dans le livre du professeur (banques d’exercices, fiches autocorrectives). Enfin, certaines évaluations ne peuvent se réaliser qu’au travers d’observations de situations d’actions, ce que le manuel du professeur ne peut que suggérer.

Le manuel scolaire : outil de formation

Actuellement, c’est le manuel, souvent accompagné du livre du professeur qui est la ressource journalière que l’enseignant consulte pour se mettre au clair avec les savoirs. C’est dire si l’enjeu est de taille pour les auteurs2. Les manuels permettent de structurer des périodes de classe, de bien différencier les situations de première rencontre avec une notion, les situations de consolidation, d’entraînement, d’évaluation. Mais on assiste actuellement à un nivellement « par le bas » : remplissage de fiches, abandon de mise en scène de situations d’apprentissage. La formation est là encore à réinterroger. Notre point de vue d’auteurs est qu’il serait nécessaire de mieux lier manuel scolaire et outil de formation. Dans notre démarche nous avons décidé de proposer, en première partie du manuel pour le professeur, des moments de mise à distance qui constituent une mini-formation en didactique. Mais on peut aller plus loin : il est techniquement aisé d’associer au manuel numérique des extraits vidéo permettant de montrer un déroulement attendu de classe (voir, pour l’exemple, le CD-ROM « activités mathématiques en maternelle »). Voici les instructions de présentation pour la rédaction d'un article pour conférence mathématiques du 13 mars 2012. Les contributions ne contiennent pas de résumé.

Notes :

1 L'ostension comme pratique pédagogique tente de baser le développement des connaissances sur l’observation et suppose les élèves capables d'en étendre l'emploi à d'autres situations. La présentation ostensive dite « ostension assumée » consiste en « la

donnée par l'enseignant de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée » (Ratsimba-Rajohn, 1977). Dans sa forme appelée « ostension déguisée » (Berthelot et Salin 1992) l'enseignant cherche à s'appuyer sur l'observation « active » d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations pour amener les élèves à y découvrir le savoir visé.

2 « Le manuel scolaire carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques » J.Briand ML Peltier 2009.

2.5 Sur les publications ERMEL

Mots-clefs : ressources, didactique, problèmes

Jacques Douaire, MCF, Université de Cergy Pontoise IUFM / Laboratoire André Revuz, Equipe ERMEL, IFE ENS-Lyon

L'origine des publications ERMEL

Les recherches menées par l'équipe ERMEL [1] au sein de l'INRP, puis de l'Ifé (EducMath) sur les apprentissages mathématiques à l'école primaire, ont aboutit à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs, constituées principalement les six ouvrages « Apprentissages numériques et résolution de problèmes » publiés de 1990 (GS) à 1999 (CM2) ainsi que « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 » (2006) [2]. Chaque publication expose les fondements théoriques et les choix didactiques et décrit des progressions et des situations d'apprentissage [3].

De la recherche à la production de ressources

Notre recherche actuelle porte sur les apprentissages géométriques au cycle 2 ; elle a notamment pour origine le constat que l'enseignement de la géométrie dans les classes du primaire ne prend pas suffisamment en compte les connaissances que peuvent développer les élèves lors de la résolution de problèmes ; son objet est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves au cycle 2 peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements. Comme pour les recherches précédentes, ses résultats seront d'une part des connaissances sur les conditions d'un apprentissage et d'autre part ces publications.

Notre méthode comporte, en fonction de la problématique, plusieurs types de tâches :

– Une analyse du savoir (problèmes, propriétés,), ainsi que des connaissances spatiales ou géométriques que les élèves ont pu développer.

– L'organisation de l'étude des différentes notions spatiales et géométriques sur les trois années du cycle.

– L'élaboration de situations didactiques et leur expérimentation dans des classes de plusieurs académies durant plusieurs années ; en fonction des résultats, des situations sont abandonnées ou modifiées, voire l'approche même d'une notion est repensée.

Ces trois composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.

– La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré.

Chaque séquence présente l'objectif de l'apprentissage, le problème proposé, les procédures et des connaissances qui sont mobilisables par les élèves ainsi que des difficultés qu'ils l'élève peuvent rencontrer. La description des différentes phases de la séquence (appropriation, recherche, mise en commun, synthèse et institutionnalisation) précise ce qui relève du travail du maître ainsi que des pistes de différenciation et des propositions de reprise ou d'entraînement.

Les effets sur les apprentissages des élèves

Les situations que nous avons élaborées présentent une certaine « robustesse » : les procédures et résultats produits par les élèves dans une classe particulière font bien partie de celles décrites dans l'analyse de la situation, ce qui permet au maître de pouvoir anticiper ses décisions. Cette fiabilité nous semble liée à deux caractéristiques :

– une cohérence dans la conception des apprentissages et de l'enseignement (situations privilégiant l'activité mathématique de l'élève : tant dans la production de solution, la mobilisation de connaissances que dans la validation de ses résultats et des méthodes [4])

– l'expérimentation des situations durant plusieurs années, dans de nombreuses classes, avec des résultats concordants pour celles, parmi ces situations qui ont été retenues.

Les apprentissages des élèves correspondent donc en général à ceux attendus.

L'appropriation des ressources par les enseignants et les besoins d'accompagnement

Pour que les maîtres puissent mettre en œuvre les situations, il est important qu'ils en perçoivent les enjeux et les choix, que ceux-ci soient généraux et relèvent par exemple de la conception des apprentissages et de l'enseignement (rôle de la résolution de problèmes, prise en compte des connaissances et des procédures des élèves, dévolution aux élèves de la validation,…), ou plus spécifiques à un champ concerné (organisation des progressions …).

L'appropriation de ces ressources se fait en partie par la formation

Si le choix de ces ressources peut être individuel ou effectué par des équipes d'école, il est fréquemment en relation avec un travail mené dans le cadre de la formation initiale ou continue permettant, par exemple, de :

– mieux percevoir les relations entre les connaissances spatiales que peuvent développer les élèves et les connaissances géométriques ;

– prendre conscience de l'ensemble des significations d'une notion, comme celle d'alignement au cycle 2, ou celle de parallélisme au cycle 3 ainsi que des problèmes et des propriétés qui leurs sont associés ;

– identifier les caractéristiques essentielles des situations didactiques dans ce domaine.

Les chapitres « théoriques » de nos ouvrages (enjeux de l'enseignement, évolution des programmes, analyse des compétences des élèves, étude des composantes du savoir), constituent aussi des ressources pour les formateurs. Indépendamment de ces apports, les formateurs peuvent prendre position sur les propositions de progressions et plus largement sur nos choix didactiques.

L'étude, en formation, de ces situations didactiques, sous des modalités de travail diverses (par exemple en ne donnant que le problème et en demandant aux participants de produire l'analyse a priori, ou en proposant de développer des possibilités de différenciation à partir d'un résumé de scénario), constitue à la fois un support pour une appropriation de ces situations mais aussi pour l'acquisition d'éléments méthodologiques nécessaire à la mise en œuvre d'une séquence privilégiant l'activité mathématique de l'élève.

Dans le cadre de formation continue (formation des débutants, stages de formation continue, animations en circonscription), la mise en œuvre de situations par ces enseignants suivie d'une analyse des productions des élèves, des choix effectués, ainsi que des difficultés rencontrées constitue un dispositif de formation assez favorable.

Pour des enseignants, à l'origine non spécialistes en mathématiques, les éclairages tant mathématiques qu'historiques qu'ils trouvent dans ces ouvrages leur permettent d'accéder à un savoir mathématique modifiant leur rapport à cette discipline et leur permettant de maîtriser des contenus ou des choix d'enseignement.

Les besoins d'accompagnement pour cette appropriation

Ces besoins sont en partie différents selon le type de classe (classe à plusieurs niveaux, milieu social…), mais aussi suivant la pratique professionnelle selon que le public soit constitué par :

- des enseignants expérimentés, qui souhaitent par exemple enrichir ou renouveler leur enseignement de la géométrie ;
- des néo titulaires, qui peuvent souhaiter proposer des situations intéressantes, mais qui rencontrent des difficultés dans leur mise en œuvre pédagogique ;
- des stagiaires en formation initiale ces dernières années, ou actuellement des étudiants de M2 lors du stage en responsabilité.

Une étude sur les enseignants ayant quelques années d'expérience

Toutefois l'activité mathématique réelle des élèves et l'acquisition des savoirs qui sont visés dans les situations sont parfois réduites par des choix effectués lors de leur mise en œuvre ou des difficultés rencontrées dans la gestion de la classe. Nous avions notamment essayé de comprendre quelles étaient les difficultés que pouvaient rencontrer des enseignants, ayant quelques années d'exercice, dans la conduite de mises en commun que nous proposions dans certaines situations [5]. Nous avions alors constaté que si l'analyse des procédures des élèves, ou la gestion des débats s'effectuait avec aisance, ces enseignants procédaient de façons très divergentes pour la validation des productions : certains favorisaient la formulation de critiques argumentées par les élèves alors que d'autres induisaient les jugements sur ces productions. De plus, ces façons différentes de conduire les mises en commun relevaient plus de coutumes pédagogiques que de choix conscients.

Le travail d'accompagnement, pour ce public, porterait plus sur une sensibilisation au rôle de la validation dans les apprentissages et sur une explicitation des choix du maître compatibles avec la variété de styles pédagogiques et de contextes de classes.

Des constats relatifs aux enseignants débutants

Plus récemment, travaillant avec des enseignants sortant de l'IUFM ou sollicités par eux pour les aider à mettre en place de situations de recherche, nous avons pu comparer avec eux les choix qu'ils effectuaient dans une même situation de géométrie avec ceux d'un enseignant expérimenté [6]. Si la volonté de développer l'activité mathématique de élèves est explicite, ce sont des compétences pédagogiques plus générales qui leur font encore défaut.

Ces enseignants débutants sont soumis à différentes tensions qu'ils expriment entre les contraintes institutionnelles, les demandes du terrain, la pratique de la classe, les caractéristiques des ressources que nous proposons et qu'ils ont pu analyser ou non en formation initiale selon que la formation leur permettait ou non d'appréhender le rôle de la résolution de problème aux apprentissages. Mais dans les différents cas leur volonté de trouver des ressources leur apportant une plus grande satisfaction personnelle dans le métier ; elle est liée parfois à une insatisfaction à trouver dans les manuels employés, les outils de mise en œuvre situation privilégiant la résolution de problème par les élèves.

Mais les tensions citées peuvent aussi entraîner un découragement devant des difficultés d'élèves ou des conditions de travail (remplacements).

Dans un sens la rédaction de nos situations, qui semble jugée assez développée par des enseignants expérimentés, peut être complétée pour ces maîtres débutants. L'accompagnement peut viser, par la production de préparations plus précises et détaillées, le développement de ces compétences : percevoir la posture à adopter, la place à occuper, revenir sur l'ordre des actions (matériel, informations, consignes à donner), retoucher la tournure de phrases pour les consignes, sentir les passages clé, où le maître a peu de marge, disposer d'exemples de réponses à donner, savoir éventuellement comment encourager les élèves …)

Quelques réponses à des questions souvent posées

ERMEL n'est-il pas destiné à un certains type d'enseignants ?

La mise en œuvre de nos propositions suppose certaines conditions :

- Il est nécessaire que l'enseignant souahaite privilégier l'activité mathématique de l'élève, et ne limite pas son enseignement à des leçons centrées principalement sur le discours du maître.

– Celui-ci peut aussi être dérouté par un descriptif détaillé du déroulement de la séquence, parfois assez éloigné des dispositifs qu'il utilisait. Mais si cela peut lui paraître plus compliqué, le retour que nous avons des enseignants qui ont pris le temps d'essayer certaines situations, puis, progressivement, souvent dans le cadre de la formation, de réflechir aux possibilités qu'elles offraient, est qu'en général ces descriptifs sont fiables et suffisants.

– Toutefois des difficultés spécifiques, d'ordre pédagogique, peuvent concerner des enseignants débutants, soit liées à la charge de travail des premières années d'exercices, soit à une organisation pédaggogique, à une gestion de la classe comportant encore des incertitudes. Comme nous l'avons vu, cela peut supposer un accompagnement.

Nous pensons donc que l'utilisation d'ERMEL comme support de son enseignement (et non l'utilisation occasionnelle d'une situation) n'est pas destinée, à ces remarques précédentes près, à un type d'enseignant particulier. La diversité des motivations qui ont pu inciter des collègues à essayer ces dispositifs en témoigne. En particulier de nombreux enseignants qui ne sont pas matheux à l'origine y trouvent des outils d'analyse des relations entre les savoirs, leurs pratiques, leur connaissance des élèves qui rendent à leurs yeux leur enseignement des mathématiques intellectuellement plus intéressant et plus efficace. Il nous semble que ce résultat est plutôt l'effet de leur démarche professionnelle, qu'ERMEL a pu accompagner, à laquelle d'autres outils, voire dans d'autres disciplines, ont pu contribuer qu'une condition préalable à son appropriation.

Serait-il possible de produire un ouvrage plus simple, donc destiné à un plus grand nombre ?

Certaines situations peuvent apparaître trop complexes, en particulier pour un enseignant qui les essaye une première année en « entrant » quelquefois dans l'ouvrage par les situations sans exploiter les apports des parties plus théoriques. Par ailleurs certaines situations intéressantes ne sont pas indispensables. Bien entendu, il est toujours possible d'apporter des améliorations dans la forme de l'ouvrage, en particulier en rendant plus évident les situations indispensables et comme nous l'avons vu en apportant dans la description de quelques séquences des suggestions pédagogiques, qui relèvent en général des choix d'un maître, destinées aux enseignants débutants.

Peut-on réduire de façon importante le nombre de situations de recherche sans limiter les significations d'une notion, par exemple le parallélisme ou la soustraction, nécessaires à sa compréhension par l'élève ou sans modifier l'équilibre entre activités de recherche et activités d'entraînement ?

Peut-on réduire la description des différentes phases d'une situation (en particulier la recherche, mise en commun) sans réduire l'activité mathématique de l'élève ? SI des productions non prévues apparaissent n'existerait-il pas une incertitude sur des choix de leur traitement par le maître ?

Quels seraient les effets de ces éventuelles modifications sur l'évolution des pratiques professionnelles, pour laquelle les ouvrages actuels constituent souvent des supports à la formation ?

La réponse à ces questions me semble conditionner la possibilité d'un ouvrage « plus simple ». Mais ce sujet, ainsi que la production en conséquence d'autres ingénieries didactiques, et l'étude des conditions d'appropriation de ces ingénieries me semblent des champs de recherche incontournables.

Remarques complémentaires sur les manuels

Les remarques ci-dessous sont très empiriques, compte tenu de notre implication dans recherches qui visent aussi à répondre à des besoins professionnels non sans rapport avec des usages fréquents de manuels. Comme formateurs nous constatons que souvent :

Des livres du maitre essaient de proposer des situations d'apprentissages mais parmi celles-ci toutes ne sont pas de véritables situations-problèmes dans la mesure où, par exemple, si les élèves commencent à chercher, le validation de leurs résultats où la critique de leurs méthodes ne fait pas l'objet d'une réflexion mathématique de leur part.

En plus, il faut bien reconnaitre que souvent les livres du maître ne sont pas utilisés, les fichiers ou manuels sont alors des recueils d'exercices d'application. Il est donc encore plus difficile de savoir si les manuels sont de bons moyens pour acquérir des compétences en mathématiques car ils sont souvent utilisés comme de bons moyens pour entrainer des compétences techniques, pour fournir à l'élève des problèmes simples...Ils ne nous semblent pas toujours des moyens appropriés pour les conduire à être autonomes dans la recherche d'un problème, dans l'apprentissage du raisonnement, de la démarche scientifique...

Pour des maîtres polyvalents, le manuel va représenter une aide importante dans le quotidien... (cf. les classes à plusieurs niveaux ou les débutants). Mais aussi des manuels sont prisés par les maîtres parce que beaucoup ne sont pas à l'aise avec l'enseignement des mathématiques : c'est un moyen de se décharger de l'organisation des apprentissages sur un auteur.

Or, nous pensons que pour permettre le développement de l'activité mathématique de l'élève, condition d'un apprentissage, il est nécessaire de contribuer à rendre les enseignants du premier degré plus autonomes dans leurs choix. C'est pour cette raison, que dans nos ouvrages, et aussi lors de leur utilisation en formation, il nous paraît essentiel de distinguer d'une part les apports mathématiques, historiques, épistémologiques, ou portant sur les apprentissages (issus de travaux de psychologie ou de didactique), et d'autre part des choix sur tel ou tel enseignement qui sont des propositions cohérentes et expérimentés sans prétendre être des paradigmes scientifiques…

Bibliographie

[1] ERMEL Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Six ouvrages de la Grande Section au CM2 (Hatier de 1990 à 1999, rééditions récentes)

[2] ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 (Hatier)

[3] Des articles relatifs aux dispositifs proposés et à la formation

[4] Argaud H.-C., Douaire J., Dussuc M.-P. (2010) Alternance et formation en mathématiques - Des exemples en PE2 et en T1. Actes du XXXVIe colloque COPIRELEM (Auch)

[5] Douaire J. , Emprin F. (à paraître 2012) Apprentissages géométriques au cycle 2 et formation des enseignants Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM Dijon

[6] Douaire J., Emprin F., Rajain C., (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. Repères IREM n° spécial Géométrie.

[7] Douaire J . Elalouf M.-L. Pommier P. (2005) Savoirs professionnels et spécificités disciplinaires : analyse de mises en commun en mathématiques, en sciences et en observation réfléchie de la langue au cycle 3, Grand N n° 75, pp 45-57

[8] Douaire J., Argaud H.-C..,Dussuc M.-P, Hubert C, (2003) Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in «Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes » (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

[9] Douaire J. Hubert C. (2002) Mises en commun et argumentation en mathématiques Grand N n°68

3 A l'école primaire, cycles 2 et 3

3.1 Quelques constats et éléments d'analyse concernant l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Mots-clés : école, problème

Marie Mégard, Inspectrice générale, Groupe de l'enseignement primaire

Les résultats des élèves

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire doit d'abord être jaugé à partir des résultats qu'il produit. Ils nous sont connus par l'exploitation des différentes évaluations nationales menées dans notre pays depuis maintenant 25 ans, mais aussi par les observations, dans les classes, des productions des élèves. Ces résultats, s'ils montrent des forces et des faiblesses, témoignent d'une dégradation depuis vingt ans des acquis dans le domaine des savoir et savoir faire opérationnels numériques, qui n'est pas compensée pas une évolution positive des compétences en résolution de problèmes. Dans ce domaine, il semble que peu à peu l'injonction faite au maîtres de ne pas imposer de méthode a priori mais au contraire de laisser les élèves chercher librement et utiliser longtemps des procédures non expertes, a produit un résultat contraire à celui attendu : la plupart des élèves, livrés à eux-mêmes ne développent pas de stratégie intéressante, et leurs performances en résolution de problème ne progressent pas. La France ne participe à aucun programme international d'évaluation en mathématiques à l'école primaire et nous ne disposons pas d'éléments de comparaison à ce niveau, mais chacun sait, après la forte médiatisation des résultats des enquêtes PISA, que les performances des élèves français de 15 ans en mathématiques ont reculé entre 2003 et 2009, avec une diminution du taux d'élèves très performants et une augmentation du taux d'élèves peu performant. Dans un domaine où l'amélioration des compétences des élèves est jugée essentielle pour la formation des générations futures de citoyens, cette situation inquiète. L'exploitation du PISA 2012, dans lequel les mathématiques sont à nouveau et comme en 2003 une majeure, permettra d'affiner l'analyse des évolutions sur 9 ans.

Compétences des écoliers entre 1997 et 2007

Les résultats d'évaluations sur échantillon faites par la DEPP en 1987, 1999 et 2007 ont fait l'objet de plusieurs communications. On peut en retenir :

Concernant les techniques opératoires :

- pour l'addition, qui est l'opération la plus facile et la mieux réussie il y a une stabilité des résultats pour les situations très simples (addition sans retenue de deux entiers de deux ou trois chiffres) mais une baisse de 5 à 10 points dès lors que la situation se complique : retenue, plusieurs, nombres, grands nombres, nombres décimaux.
- Pour la soustraction, la multiplication et la division, la baisse est systématique, et va de quelques points à plus de vingt points. C'est lorsqu'il y a présence de décimaux, et/ou nécessité de gérer des retenues, que la baisse est plus forte (ex : 4700 - 2789,7) . Les changements de programme, qui ont reculé certains apprentissages, peuvent expliquer en partie ces très fortes baisses ; le défaut de maîtrise des tables aussi ; mais disons que dans l'ensemble c'est la familiarité avec les nombres et les opérations sur les nombres qui fait plus défaut aujourd'hui qu'il y a vingt ans : ainsi le problème : complète en remplaçant les points par les chiffres qui conviennent l'opération suivante : 68▪8+1▪7▪.=. ▪▪613 , qui porte sur des opérations du cycle 2, fait partie des exercices qui voient la plus forte baisse des résultats.

Concernant la résolution de problèmes

Les résultats dont on dispose concernent la résolution de petits problèmes relevant de l'une des quatre opérations ou de la proportionnalité. A partir des résultats dont on dispose, même s'ils sont partiels, on peut dire qu'il n'y a pas d'évolution perceptible entre 1987 et 2007.

On ne dispose pas, aujourd'hui, d'évaluations sur échantillon standardisées permettant des comparaisons dans le temps tout à fait fiables au-delà de 2007. Mais les évaluations d'entrées en 6e 2007 et 2008, ainsi que les évaluations bilan CE1 et CM2 qui ont lieu chaque année depuis 2008, nous donnent des indications. Il semble que la connaissance des tables s'améliore, ainsi que la réussite des opérations posées. Pour la résolution de problème…on ne constate toujours pas de remontée significative. A titre d'exemple, le problème :

10 objets identiques coûtent 22 €, combien coûtent 15 de ces objets ?

A été réussi par 30,7% des élèves aux évaluations 6e 2007, et par 30,9% des élèves aux évaluations CM2 2001.

La question majeure qui se pose à tous aujourd'hui est : que faire pour que les élèves progressent en résolution de problème ?

L'activité mathématique en question

« Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes ». La plupart des personnes impliquées dans l'enseignement des mathématiques à un titre ou à un autre peuvent être d'accord avec cette assertion. Il n'est pas certain en revanche que chacun lui donne toujours exactement le même sens.

Envisageons quelques questions autour des mathématiques et des problèmes :

– Q1 : Est-ce que acquérir des connaissances sur les nombres c'est faire des mathématiques ?

– Q2 : Chercher dans sa tête un résultat des tables de multiplication, est-ce que c'est résoudre un problème ? Plus généralement, calculer, est-ce que c'est résoudre un problème ? Toujours ? Jamais ? la réponse est-elle la même selon qu'il s'agit par exemple, en CM2, d'effectuer le calcul en ligne 10 : 2 ou bien le calcul 20,4 : 4 ?

– Q3 : à propos du terme « résoudre » : résoudre un problème additif en dessinant un à un les éléments de chacun des ensembles puis en comptant le nombre d'éléments de la réunion, c'est faire des mathématiques ? La réponse est-elle la même selon que cette résolution est observée de la part d'un élève de CP, d'un élève de CM2 ou d'un élève de 5e ?

– Q4 : Ne doit-on qualifier de « problème », en mathématiques, que ceux qui sont ouverts, ou jamais encore rencontrés, pour lesquels l'élève ne dispose pas d'une procédure routinisée ? ou bien, dit autrement : si l'élève dispose d'automatismes efficaces pour la résolution d'un problème, est-ce encore un problème ?

On voit bien que les réponses à ces questions ne sont pas immédiates, et pas toujours uniques. Selon le niveau de classe, les élèves, ou les données même de l'exercice, l'appréciation peut varier.

Mais on perçoit bien aussi l'idée de progression : à un moment donné de la scolarité de l'élève, le calcul de 6x8 peut être un problème ; à un autre moment, le calcul de 10 : 2 doit être si immédiat, si « automatique » qu'il ne doit plus, justement, être un « problème ».

On pourrait avoir un point de vue comparable sur les problèmes standards associés à une des quatre opérations : véritables problèmes ouverts à un moment donné pour l'élève ils doivent progressivement devenir tellement faciles à résoudre qu'ils ne nécessiteront même plus d'être distingués de simples données : par exemple la phrase « j'achète un pain à 2 euros et un pain à 3 euros» peut faire partie des premières données d'un énoncé en CM2 alors qu'elle constituera à elle seule l'énoncé d'un problème ouvert en moyenne section de maternelle…

En fait, dans l'assertion « faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes » il y a un implicite très fort : on suppose que « résoudre des problèmes » a un sens absolu, et aussi qu'une question mathématique donnée est universellement « un problème » ou pas. Evidemment, cet implicite ne résiste pas l'étude.

Plutôt que de chercher à définir ce que c'est que faire des mathématiques, ou, ce qui revient au même, qu'est-ce qu'un problème et qu'est-ce que résoudre un problème, on pourrait plutôt chercher à préciser ce que c'est qu'enseigner les mathématiques : par exemple : accompagner les élèves dans l'appropriation des objets, savoirs et savoir faire mathématiques, guider le cheminement intellectuel vers la modélisation progressivement plus épurée des situations et la résolution de problèmes de plus en plus complexes. Du comptage au calcul, du dessin au schéma puis du schéma à l'opération, du problème de calcul à la mémorisation d'un résultat courant ; etc.

Avec une telle définition, qui reste certainement à améliorer, les questions posées ci-dessus s'appréhendent en termes de repérage d'une position de l'élève et de la tâche qui lui est proposée sur un chemin vers la maîtrise de savoirs mathématiques. La relativité est mise en évidence : une même tâche a un statut différent et doit être traitée de façon différente selon le niveau de classe.

Aujourd'hui la notion de problème est en quelque-sorte sacralisée.

Elle semble s'opposer à celle de savoirs et en particulier de savoirs numériques (connaissance des nombres, sur les nombres, et opérations), qui sont pourtant nécessaires pour résoudre des problèmes et peuvent en certaines circonstances faire eux-mêmes l'objet de problème.

Parmi les conséquences de cette mauvaise compréhension des enjeux de la résolution de problèmes pour la construction de savoirs mathématiques, on peut en citer une en particulier : comme il s'agit avant tout de « chercher » des problèmes, toutes les méthodes sont bonnes, sans hiérarchisation et quel que soit le niveau : résoudre un problème additif en dessinant et en comptant est « aussi bien », et ne témoigne pas de compétences de niveau différent, que de le résoudre en modélisant et en écrivant l'opération. La première méthode n'est pas vue comme une étape – nécessaire mais que l'on doit amener tous les élèves à dépasser- vers la seconde. Plus généralement le dessin et le schéma, qui sont des moyens de représenter une situation, sont trop souvent considérés comme des procédures parmi d'autres et ne sont pas assez utilisés comme des clés pour l'entrée dans le monde mathématique des nombres et des opérations. Au bout du compte le sens des opérations ne se construit pas assez sûrement chez tous les élèves. Ce qui les empêche de se lancer avec confiance dans des recherches de problèmes plus complexes, et constitue un handicap difficilement surmontable au collège.

Comme deuxième conséquence de cette sacralisation du problème, il y a eu pendant de nombreuses années une dévalorisation des connaissances sur les nombres et des pratiques de calcul. Or non seulement ces connaissances et ces pratiques sont nécessaires pour résoudre les problèmes car comme maintenant presque tout le monde en convient disposer d'automatismes permet de concentrer l'attention sur l'élaboration de raisonnements et de stratégies globales, et de faire les bons choix, mais elles sont aussi utiles, bien souvent, pour entrer dans le problème : parce qu'à la lecture d'un énoncé dont les termes nous sont familiers, dont les données nous parlent, sont « vivantes », il est plus facile de visualiser la situation, de commencer à traiter certaines données ou parties du problème. Ainsi, si je lis qu'il y a 150 élèves dans une école et vingt-cinq élèves dans chaque classe, j'aurais bien plus confiance en moi pour me lancer dans le calcul si je sais d'avance que 150 a des chances d'être un multiple de 25….même si je ne connais pas par cœur la table de 25 ! En revanche, si l'existence d'une relation simple possible entre 25 et 150 ne m'apparaît pas, me lancer dans une division dont j'ignore complètement le résultat sera plus lourd. Pour nous en convaincre, imaginons un deuxième énoncé dans lequel il y aurait 168 élèves et 24 élèves dans chaque classe….c'est plus difficile pour tout le monde!

Pour conclure sur la question de l'activité mathématique dans les classes primaires, on peut dire que si l'on souhaite que nos élèves apprennent mieux à résoudre des problèmes, il devient urgent de clarifier pour tous les enseignants ce que l'on entend par « enseigner les mathématiques » et en particulier par « enseigner la résolution de problèmes ».

Le contexte, les ressources

Comment expliquer les faiblesses de certains résultats et de certains enseignements ? Que peut-on faire ? A grands traits, voyons quelques éléments de contexte, et les ressources de l'école primaire aujourd'hui.

Les programmes

Depuis les années 80, les programmes de mathématiques de l'école primaire ont, en fait, peu changé : place importante du problème ; maîtrise des opérations, approche des décimaux et des fractions simples, proportionnalité, représentations graphiques, éléments simples de géométrie plane et dans l'espace, mesures de grandeurs usuelles.

Le rythme d'apprentissage des quatre opérations a un peu varié, l'écriture des programmes par cycles a aussi durant quelques années induit un certain retard dans l'enseignement de ces opérations ou celui des nombres décimaux, du fait de l'insuffisance des programmations au sein des écoles : ce sont des éléments qui ont eu leur importance, mais aujourd'hui les enseignants disposent d'indications claires qui doivent lever ces ambiguïtés.

Les horaires

L'horaire hebdomadaire d'enseignement des mathématiques est passé de 6h en 1980 à 5h en 2008. Mais dans le même temps l'horaire hebdomadaire global a été réduit à 24 heures, et d'autre part deux heures d'aide personnalisées ont été introduites, qui sont presque exclusivement dédiée au français et aux mathématiques. Du fait de la semaine de quatre jours, les élèves ont aujourd'hui quatre séances de mathématiques dans la semaine.

Les maîtres

Les professeurs des écoles ne sont pas spécialisés. Aujourd'hui les intervenants extérieurs ne sont pas nombreux, et assurent essentiellement un appui pour l'EPS. Même si ça et là on observe des échanges de service, c'est le plus souvent pour l'enseignement de la langue vivante, et ne concerne de toutes manières jamais les mathématiques. Tous les professeurs des écoles enseignent donc les mathématiques, alors même que les statistiques nous indiquent qu'ils sont moins de 20% à avoir suivi un cursus universitaire scientifique, et moins de 5% un cursus universitaire en mathématiques.

Dans ces conditions, la question des outils est particulièrement importante. Or l'arrivée massive des fichiers, qui ont entièrement remplacé les livres au CP et au CE1, sont majoritaires au CE2 et commencent même à gagner du terrain au cours moyen, a des conséquences très fâcheuses. Car les fichiers favorisent une mise en activité de type occupationnelle, et masque la faiblesse de l'activité mathématique réelle.

Les IEN

Les inspecteurs sont majoritairement, et de plus en plus, issus du corps des professeurs des écoles. Le raccourcissement de leur période de formation, et le peu de d'adaptation de cette formation à leurs besoins individuels, rend en effet de plus en plus compliqué le recrutement de professeurs du second degré dans le corps des IEN premier degré.

Les inspecteurs du premier degré sont conscients du manque d'efficacité de l'enseignement des mathématiques dans les écoles. Mais il n'est pas simple pour eux de trouver des réponses aux besoins qu'ils constatent car eux-mêmes sont trop souvent démunis en mathématiques, n'ayant qu'une formation rudimentaire dans ce domaine.

Depuis 2010, dans chaque département a été désigné un inspecteur chargé de la « mission mathématiques ». Les inspecteurs chargés de cette mission ont été réunis deux fois en séminaire de trois jours durant l'année scolaire 2010-2011 avec des IA-IPR de mathématiques. Organisés par l'ESEN, la DGESCO et l'IGEN, ces séminaires co-animés par des universitaires, des inspecteurs et des inspecteurs généraux ont jeté les bases d'un travail collaboratif aux niveaux académiques et national, et fourni des possibilités de formation en mathématiques et de formation de formateurs pour ces IEN chargés de relayer auprès de leurs collègues en département.

La formation

La formation initiale des professeurs des écoles évolue au fil des réformes. Celle dite de la masterisation impacte à deux nivaux : au niveau de la formation initiale, puisque le concours comporte aujourd'hui une épreuve écrite strictement académique et une épreuve orale « de leçon » à caractère pédagogique, les deux volets – académique et pédagogique- sont chacun valorisés, et non compensables : il faut en effet, pour réussir le concours, avoir franchi le seuil de l'admissibilité et donc avoir démontré des compétences en mathématiques, puis franchir le seuil de l'oral et donc attester d'un niveau suffisant de réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

La formation complémentaire proposée lors de l'année de stage s'organise différemment selon les académies. Elle est globalement progressivement de plus en plus assurée au niveau des circonscriptions, par des maîtres formateurs ou des conseillers pédagogiques. La qualité de l'apport en mathématique sera donc liée à la capacité qu'auront ces formateurs à faire partager, sur la didactique des mathématiques, un discours adéquat.

La formation continue des enseignants du premier degré est de deux sortes. La formation départementale, qui aujourd'hui est plutôt réservée aux formations statutaires des directeurs par exemple, et la formation en circonscription. Celle-ci, d'une durée annuelle de 18 heures, soit 6 demi-journées pour tous les enseignants, offre de réelles possibilités et constitue un véritable enjeu pour les années à venir : si les inspecteurs et leur équipe de circonscription disposent des compétences et des aides nécessaires, ils pourront faire de ces 18heures annuelles (soit pas loin d'une année sur l'ensemble de la carrière) des temps de formation riches. C'est pourquoi les DGESCO, l'ESEN et l'IGEN développent, au niveau national, un système de ressources en direction des formateurs, IEN, conseillers pédagogiques ou maîtres formateurs :

– documents d'accompagnement : parution en 2010 du document « le nombre au cycle 2 », parution à venir très prochainement du document « apprentissages numériques au cycle 3 », projet d'un document sur la géométrie et les grandeurs ;
– mise à disposition de supports de formation sur le site EDUSCOL ;

– animation d'un site collaboratif national pour les IEN, sous la direction de l'ESEN ;

– formation continue des IEN chargés de la mission mathématiques : séminaires déjà tenus en 2010 et 2011, un troisième étant prévu en octobre 2012.

Conclusion

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire n'a pas aujourd'hui l'efficacité qu'il mérite au regard des enjeux de la formation des futurs collégiens, lycées, étudiants et citoyens français. Tous les constats convergent, qu'il s'agisse des résultats aux évaluations nationales et internationales, ou des observations dans les classes.

Mais il y a une réelle prise de conscience des besoins et des enjeux, ainsi qu'une mobilisation des acteurs de terrain, de l'institution et d'universitaires.

Queques évolutions commencent à être perceptibles dans les pratiques, des progrès sont possibles, nous en sommes convaincus : en travaillant ensemble, dans la confiance et en synergie, il nous faut relever le défi !

3.2 Enseignants / Enseignement / Apprentissage des « maths » à l'école primaire

Mots-clefs : enseignants, enseignement, école primaire

Jean-Jacques Calmelet, IEN, Académie de Lille

Enseignement du premier degré

Polyvalence

L'enseignement à l'école primaire repose sur une unité : un seul enseignant pour une classe, pour tout le programme. Cette structure est plus nuancée lorsque des échanges de services (chorale, langue vivante…) exploitent quelques spécificités dans une équipe, lorsque des intervenants (EPS, musique…) sont associés à l'enseignant (en ville surtout ?). Très généralement cependant, le même enseignant assure l'enseignement des mathématiques et du français.

La polyvalence reste relativement indéfinie, non enseignée, voire ignorée de l'université où elle semble ne pas avoir de statut ! Au mieux, on la considère comme l'addition de connaissances (expertes, bien entendu). Pour tout « savant » parlant d'école primaire, l'entrée disciplinaire est une évidence, y compris lorsque la discipline de l'école n'a pas d'existence ailleurs (la « découverte du monde » n'est un domaine qu'en maternelle et CP/CE1 et sans aucun relais universitaire).

Enseignants du premier degré

Chaque enseignant du primaire a un parcours (second degré puis université) fait d'orientations induisant des choix disciplinaires, par abandons successifs ou priorités de plus en plus réduites : lorsqu'il accède au statut de « professeur d'école » on observe que ceux qui ont suivi un parcours scientifique sont très minoritaires et rares sont ceux qui ont un diplôme de mathématiques. Les formateurs (conseillers pédagogiques) ont tous cette origine, les IEN majoritairement : la culture de « professeur d'école » est la base de tous ces acteurs.

Deux conséquences sont sensibles :

- peu d'enseignants estiment problématique l'enseignement des mathématiques dans leur classe (quelques indicateurs relatifs aux apprentissages des élèves interrogent pourtant les pratiques d'enseignement) ;
- les propositions de formation (principalement, sous la responsabilité des IEN aujourd'hui) sont rarement à la hauteur de la place de cet enseignement dans les horaires, de l'analyse des résultats des élèves… Le parcours des formateurs peut expliquer une part d'évitement de la formation continue en math et le creuset des formateurs plus spécialistes est restreint.

Les priorités institutionnelles du travail relatif à la maîtrise de la langue pendant de nombreuses années ont entraîné, pour tout l'encadrement, un renforcement de ce champ dans les engagements et la culture professionnels. L'efficacité de toute action entreprise ne peut ignorer cet état : c'est la culture des « cibles » de la « conférence nationale sur l'enseignement des maths »… et l'enseignement reviendra, finalement, aux enseignants eux-mêmes : que l'on s'adresse à des enseignants, à leur encadrement, à leurs formateurs, éluder la réalité de la culture actuelle de l'ensemble des acteurs du 1er degré condamnerait par avance toute diffusion, tout écho de la réflexion engagée.

Les programmes

Quelques remarques sur l'état des pratiques et la mise en œuvre des programmes 2008.

Élémentaire (horaires) : Proportionnellement, il y a plus de maths depuis le passage à la semaine de 24h (on est passé de 5h sur 27h de travail hebdomadaire à 5h sur 24…). Pour autant, on peut observer que dans beaucoup de classes, c'est la tradition d'une séance par jour qui l'emporte (un jour de moins = une séance en moins : à la fin de l'année, cela fait 20 à 30 séances en moins) !

Maternelle : Le mot « mathématique » a disparu (depuis les programmes 2002). Cette disparition n'a pas été accompagnée suffisamment pour permettre aux enseignants d'appréhender ce changement radical. Au-delà de l'abandon du mot, c'est un radical changement de perspectives, de conception, d'enseignement qu'appelait le passage au domaine de la « découverte du monde ». La dialectique outil / objet présente dans cette évolution (on utilise les connaissances en maternelle – quelques formalisations limitées : l'écriture des premiers nombres / ils deviennent des objets d'apprentissage à partir du CP) impactait et impacte sensiblement le rapport aux activités et les apprentissages attendus (les programmes 2008 sont dans la continuité), entretenant une très grande variabilité des connaissances et capacités des élèves à la fin de l'école maternelle.

Ainsi, considérer qu'une même formation peut indifféremment être destinée à un enseignant en maternelle ou en élémentaire semble en décalage avec les attentes institutionnelles des programmes. Le passage maternelle / élémentaire (avec une véritable entrée disciplinaire au CP) n'est pas anodin : l'histoire de l'école maternelle n'est pas la même, le temps de la maternelle (temps de l'élève, de la classe, de l'enseignant… des temps plus longs) n'est pas celui de l'élémentaire (des échelles de temps plus – trop – courts : la séance, la séquence…). L'ignorer conduit à des méprises dont les conséquences sont sensibles au niveau des élèves (la quantité de fiches, d'activités papier-crayon dès la maternelle, de fichiers à compléter au cycle 2, par exemple, se substituent au travail mathématique attendu).

Les programmes 2008 et les formateurs…

Les programmes 2008 ont retenti davantage des critiques que des accompagnements nécessaires pour en comprendre leur conception et particulièrement l'articulation sens et technique. Ce qui n'a pas été compris, ce qui résiste encore, relève d'un renversement de tendance : la référence durable, inspiration des formateurs en math, n'a pas trouvé une nouvelle voix.

L'équipe reconnue (ERMEL) et très écoutée (référence de nombreux formateurs) qui a accompagné la révolution culturelle depuis les années 70/80 a construit des pratiques permettant de passer de la solide tradition des techniques à la priorité du sens. C'est cette logique qui garde une considération relevant de l'excellence (en inspection, en formation, c'est la « résolution de problèmes » qui est montrée, travaillée, sans que soient bien identifiées les connaissances visées effectivement (Rapport IGEN 2006 : « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire »).

L'accompagnement des programmes 2008 peine à promouvoir l'étroite dépendance du sens et des techniques. Faisant consensus au niveau de la recherche, cette articulation n'est pas lue dans les programmes. La disparition du champ « résolution de problèmes » est interprétée comme un abandon du sens alors qu'il n'y a pas de dévalorisation de l'enseignement des problèmes. C'est bien au contraire une clarification, dont l'idée de catégorisation peut structurer un parcours d'enseignement progressif (« modéliser » est inscrit dans les capacités attendues en matière scientifique - « socle commun »).

En maternelle, une dialectique sensible doit également appeler une réflexion profonde à propos des pratiques habituelles : lorsque l'élève est en activité, est-il en apprentissage ? Apprentissages, dont la clarification est un enjeu majeur avant l'entrée dans les pratiques disciplinaires du CP.

Pour les formateurs, une action spécifique autour des ruptures et des continuités dans le passage d'un texte à l'autre nécessaire à la mise en œuvre des programmes 2008 a tardé, manqué de ressources. Le délai d'actualisation des documents d'accompagnement a été trop long (« Le nombre au cycle 2 » en 2010 – « Le nombre au cycle 3 » est à venir… Quid de la maternelle, de la géométrie ?) est, reste un obstacle sensible et durable pour les formateurs et pour les enseignants.

Apprentissages des élèves du premier degré

Connaissances

Deux types d'exercices sont réussis par environ 70% des élèves :

Les techniques opératoires : elles restent l'image forte du travail de l'école (réelle attente des familles qui renforce le travail des enseignants ; un temps important leur est consacré).

Les « tables de multiplication» (évaluations nationales CM2 –2010 et 2011) : plus de 75% des élèves ont mémorisé au moins 9 résultats sur 10.

Remarque : Dans les deux cas, la présence de décimaux réduit le taux de réussite.

Cela relève des « connaissances ».

Capacités

Du point de vue des « capacités », les performances des élèves dans l'usage des connaissances en calcul mental et en problèmes (y compris dans le domaine des mesures) sont très préoccupantes et montrent que les savoirs ne sont pas disponibles dans les situations où l'élève doit prendre l'initiative de les activer.

– Calcul mental : 8,3 x 5 (2011 – 55%) et 246 + 34 + _ _ _ = 500 (2011 – 52%)

– Problèmes simples (une seule opération) : (2011 – 48% en moyenne). Mais : J'ai 24 tickets d'entrée à un parc de loisir. Le prix total est de 300€. Quel est le prix d'un ticket? (2011 - 26%)

– Proportionnalité : (2011 – 41% en moyenne). Mais : 10 objets identiques coûtent 22€. Combien coûtent 15 de ces objets? (2011 - 31%)

– Mesure : en moyenne, la réussite de ce champ atteint à peine un élève sur deux (CM2 2010 et 2011)

Les résultats montrent que les apprentissages techniques (opérations, tables) conservent leur place (emblématique) dans les pratiques du 1er degré. Cependant, ces apprentissages résistent mal à l'entrée des décimaux au cycle 3. Il y a par contre un très grand malentendu sur l'utilisation de ces connaissances en situation : le recours à une opération adaptée dans le cas d'un problème simple (problème à une seule opération – cas simples de proportionnalité) n'est pas majoritairement réussi. Dans tous les cas, la logique d'un enseignement nombre / calcul / problème n'est pas suffisamment intégrée par les enseignants (et la majorité des manuels à leur disposition ne construit pas suffisamment cette étroite interdépendance).

La question du sens interroge le rapport entre les pratiques sociales actuelles et les savoirs scolaires. Les conceptions de chacun, les nôtres comme celles des élèves, s'élaborent dans le contexte social, dans l'usage des nombres, des calculs, des mesures, dans les problèmes qu'ils ont à résoudre.

De ce point de vue, on doit regarder le champ des mesures avec inquiétude. La société a révolutionné ses rapports aux mesures : les mesures étaient un champ où le nombre et le calcul s'engageaient au quotidien de la vie sociale courante et nourrissaient les conceptions en construction (bien au-delà des enseignements). On constate que ces pratiques sont de plus en plus éloignées des opérations de l'école : le mesurage (quelle que soit la grandeur) n'utilise plus les instruments (la pesée, le métrage, les paiements ont tous des instruments qui donnent les valeurs – la balance Roberval n'a d'existence qu'à l'école…) ni les petits calculs (le calcul, en caisse, est le plus souvent automatisé… et la carte bleue se substitue à l'échange de monnaie).

– L'écart croissant entre le niveau des élèves et le niveau attendu a un retentissement important sur l'ensemble du domaine mathématique.

– L'enseignement des mesures devrait faire référence aux problèmes de la vie courante.

– La réflexion sur la construction du sens, c'est-à-dire, le terrain des usages du savoir scolaire, mérite d'être actualisée. L'approche des connaissances à construire autant que leur construction est un objet sensible qui doit conduire à des pratiques où les « conversions » ne constituent pas l'essentiel des activités de l'école (le travail sur les « grandeurs » – mot peu intégré – sur l'ordre de grandeur).

Un phénomène inquiétant relatif à la réussite des élèves

Évaluations nationales 2011 (étude comparée CE1 / CM2…)

Chaque année, on observe une tendance similaire, une importante érosion du taux d'élèves ayant les meilleures réussites et une augmentation très sensible des élèves dont les scores sont fragiles (ce constat était identique entre CE2 et 6ème - suivi d'une même cohorte, ce n'est pas le cas ici – cette étude pourra reprendre en 2012 entre CE1 et CM2).

Deux hypothèses (non exclusives l'une de l'autre…) :

– L'enseignement des mathématiques au cycle 3 repose sur quelques insuffisances ou tout au moins des malentendus (décimaux, mesures, proportionnalité) : le fondement théorique relève d'un niveau mathématique qui repose sur des notions et des connaissances didactiques qui vont au-delà du « bon sens ». une synthèse de ce qui est connu et peut (à son avis) aider un professeur à améliorer son enseignement ? Comme à Brousseau, et aux américains dont je ne désespère pas avoir une réponse favorable, on lui demande d'un côté des points précis et relativement faciles à faire et des questions plus délicates dont la réponse suppose des travaux spécifiques à développer ?

– Les bases du cycle 2 sont insuffisamment ancrées, maîtrisées, pas suffisantes pour que les élèves puissent bénéficier des apprentissages nouveaux du cycle 3. Les mathématiques sont une discipline cumulative : les bases doivent être solides pour y fonder les situations plus complexes.

3.3 Conclusion :

Qui seront, que seront les professeurs de l'école de demain ?

Les enseignants de l'école maternelle pourront-ils être les mêmes que ceux du cycle 3 ?

Ceux du début du collège seront-ils aussi différents de ceux du cycle 3 ?

Des enseignants de « l'école du socle commun » justifieront-ils d'un parcours harmonisé :

École du socle / Enseignants du socle ?

Aujourd'hui, il est essentiel d'accompagner des maîtres qu'on ne parvient pas à former suffisamment…

Dans la conjoncture actuelle, il semble nécessaire de prendre en compte la spécificité des enseignants du premier degré : leur polyvalence. Les ajustements passent par une acculturation dans les domaines où ils n'ont pas les bases notionnelles adaptées et supposent un fort processus de différenciation. Ce n'est pas dans notre culture universitaire : la formation initiale doit intégrer des ajustements de fond (qui ne se limitent pas aux seules mathématiques). La formation continue gagnerait à investir davantage la logique des équipes d'école pour baliser, étayer et consolider la cohérence et la continuité des apprentissages dans un projet d'établissement partagé dans la perspective de la scolarité (niveau maternelle – niveau élémentaire) tout en poursuivant le travail de liaison maternelle / élémentaire et élémentaire / collège.

Ces perspectives ne peuvent ignorer les modifications sensibles que les évolutions technologiques engagent dans le rapport au savoir, y compris le savoir-faire pédagogique. Les TNI, les ordinateurs individuels, les « tablettes » numériques et leurs corollaires, ont des incidences importantes sur les pratiques enseignantes et sur les savoirs enseignés (et pas uniquement en mathématiques !). La formation et l'accompagnement de ces évolutions technologiques peuvent-il être laissés aux seuls curieux ?

Les modifications et évolutions des programmes successifs nécessitent en mathématiques, un accompagnement appuyé, passant par des réseaux à constituer ou à entretenir (cet accompagnement demande une meilleure synchronisation entre l'évolution des textes et les outils qui permettent de les mettre en œuvre, raisonnablement). Les conceptions qui justifient les évolutions méritent un effort de vulgarisation afin de mettre à portée des acteurs les fondements qui leur donnent sens.

Les transitions maternelle / élémentaire et élémentaire / collège restent des points de passages fragiles dont il faut travailler les continuités en partageant davantage la progressivité et les ruptures qui doivent être préparées, donc, connues (le passage du dénombrement au calcul, le passage de la preuve à la démonstration, le passage à l'algèbre…).

Les indicateurs des résultats des élèves en mathématiques ne doivent pas aggraver le caractère anxiogène de cet enseignement ; ils ne doivent pas participer à déconsidérer les qualités et l'investissement importants de tous les enseignants du premier degré.

Les outils à mettre à leur disposition sont un enjeu essentiel du travail de l'institution, de ses cadres, de ses formateurs.

La « conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques » peut contribuer à ressourcer et à mobiliser l'encadrement et les formateurs afin qu'ils accompagnent davantage les enseignants pour leur permettre d'entraîner tous leurs élèves un peu plus loin.

3.4 Ce que les travaux sur la cognition nous disent

Mots-clefs : nombres, cognition, calcul

Stanislas Dehaene, Directeur de recherches, Académie des Sciences.

Michel Fayol, Professeur des universités.

Nous n'avons pas de texte de ces auteurs, dont seul le premier a été entendu par le comité Scientifique de la conférence, Michel Fayol étant indisponible aux dates de nos auditions.

Mais à sa demande, nous renvoyons au dernier chapitre de l'ouvrage de Stanislas Dehaene *« La bosse des maths ».* Nous renvoyons aussi au Que sais-je ? sur *« l'acquisition du nombre »*, l'ouvrage tout récent de Michel Fayol, pour deux synthèses des travaux conduits dans leurs lignes de recherche respectives, la psychologie de la cognition et la cognitique, et au montage de l'audition de Stanislas Dehaene, disponible en ligne sur le site <http://educmaths.ens-lyon.fr>.

3.5 Remarques sur l'enseignement du calcul

Mots-clefs : collège, école, nombres, calcul, didactique

Michèle Artigue, Professeur émérite Université Paris Diderot, LDAR et IREM

Introduction

Les remarques qui suivent s'appuient pour beaucoup sur le travail réalisé sur ce thème par la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques), travail que j'ai piloté au sein de la commission. Certes, c'est un travail qui date maintenant de plus de dix ans puisque les différents rapports élaborés ont été publiés dans (Kahane, 2001) mais les réflexions qui y ont été développées n'ont pas pour autant perdu de leur pertinence et elles nous fournissent aussi une grille d'analyse utile pour examiner les évolutions récentes des prescriptions curriculaires dans ce domaine. Par ailleurs, les responsabilités que j'ai assurées depuis 1998 au sein de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM ou ICMI) m'ont bien montré que les préoccupations concernant l'enseignement du calcul et ses effets sont des préoccupations qui traversent les frontières, qu'elles sont un point de cristallisation des débats autour de l'enseignement des mathématiques, et que les difficultés ressenties à définir des politiques éducatives appropriées se traduisent souvent par des mouvements de balancier particulièrement nocifs pour les systèmes éducatifs concernés.

Très tôt, la CREM a décidé de travailler sur le calcul. Ce choix a été motivé par plusieurs raisons et notamment les suivantes : l'importance du calcul dans les pratiques mathématiques et dans le développement de cette science et l'importance donc que l'enseignement se doit de lui attacher, la vision réductrice du calcul renvoyée par l'enseignement comme par la culture, la nécessité de dépasser les oppositions et dichotomies trompeuses qui imprègnent ces visions et les discours associés. Ceci nous a conduits à mettre notamment l'accent sur :

- la subtile alchimie que le calcul met en jeu entre *automatisation et raisonnement*, une alchimie souvent invisible dans les traces du calcul ;

– la double *valeur pragmatique et épistémique* du calcul, un point particulièrement important pour penser l'enseignement du calcul et le rapport aux outils susceptibles de l'instrumenter ;

– la diversité des formes de calcul et leur complémentarité ;

– les reconstructions nécessaires du rapport au calcul au fur et à mesure que ce dernier investit des champs nouveaux.

Le calcul entre automatisation et raisonnement

Un enfant qui, ayant à calculer, 9+7, commence par ajouter 1 pour arriver à 10 puis ajoute 6 pour obtenir le résultat 16 recherché, raisonne, comme raisonne celui qui, cherchant la valeur de 7x8, se rappelle que 8x8=64 et enlève 8 à ce nombre. Ils mettent en jeu dans leur raisonnement des faits numériques déjà connus et, même si c'est de façon implicite, des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication. Lorsqu'ils auront mémorisé que 9+7=16, que 7x8=56, de tels raisonnements deviendront inutiles, mais le raisonnement continuera à être nécessaire pour mener à bien des calculs plus complexes et pour mettre le calcul au service de la réalisation d'autres tâches, mathématiques ou non mathématiques. De plus, ces raisonnements ou d'autres similaires pourront redevenir nécessaires si les faits numériques concernés sont insuffisamment mobilisés à l'école ou dans la vie sociale. Un élève qui a appris la technique opératoire de l'addition sait qu'il peut l'utiliser pour calculer 998+1205. S'il utilise cette technique, son calcul sera automatisé mais, considérant les nombres en jeu, il peut trouver plus rapide de raisonner ce calcul et se dire que, vu que 998=1000-2, il lui suffit d'ajouter 1000 et enlever 2 au second nombre, pour obtenir le résultat 2203. Je pourrais multiplier les exemples. Le répertoire de faits dont nous disposons, les algorithmes que nous maîtrisons, permettent l'automatisation du calcul. Ils font sa force et son efficacité. Mais le calcul, dès qu'il sort de la routine, engage du raisonnement, contrairement à l'image mécanique que l'on en donne souvent, y compris dans l'enseignement. Il nous a semblé important, dans le rapport, de la CREM, d'insister sur ce point et sur la nécessité de cultiver cette alchimie dès les premiers apprentissages du calcul. En particulier, il est important que la mémorisation nécessaire des faits numériques soit l'occasion d'exercer le raisonnement et de travailler les propriétés des nombres et des opérations qui le fondent. Il me semble également important d'insister que le répertoire ne saurait se limiter à un répertoire de composition, comme on comprend malheureusement souvent l'apprentissage des tables. Les quelques exemples donnés ci-dessus le montrent bien. Il y intervient autant de résultats de décompositions de nombres que de compositions et si l'égalité 9+7=16 n'est pas associée à 16=7+9, à 16-7=9 et 16-9=7, elle sera d'une utilité limitée pour le calcul.

La double valence épistémique et pragmatique des techniques de calcul

On engage un calcul pour obtenir des résultats et on juge une technique de calcul à la mesure de son efficacité, avec les différents critères qu'une évaluation de cette efficacité peut faire intervenir. Ceci représente la valence pragmatique de la technique. Mais l'apport d'une technique de calcul ne se réduit pas à cela. Sa mise au point et souvent même le fil de son exécution sont source de connaissance sur les objets qu'elle engage et leurs propriétés. C'est la valence épistémique de la technique. La prise en compte de ces deux valences peut éclairer les débats autour de l'apprentissage des techniques opératoires à l'école élémentaire. Une maîtrise solide des techniques opératoires pour les quatre opérations a été pendant longtemps une condition sine qua non de l'efficacité pragmatique du calcul. Elle l'est de moins en moins aujourd'hui du fait des avancées technologiques et de l'évolution associée des pratiques de calcul, tant scientifiques que sociales. C'est vrai en particulier pour la technique opératoire de la division autour de l'apprentissage de laquelle se cristallisent souvent les débats sur ce thème. Mais la raison d'être de l'apprentissage scolaire d'une technique opératoire ne se limite pas à sa valence pragmatique, elle tient aussi à sa valence épistémique. La mise en place des techniques opératoires usuelles d'addition et de soustraction soutient ainsi l'apprentissage essentiel de la numération, celle de la multiplication, qu'il s'agisse de la technique usuelle ou de la technique per gelosia, fait travailler numération et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et celle de la division mobilise un ensemble complexe de propriétés. Au-delà de l'usage, cette valence épistémique contribue à légitimer leur enseignement. Se pose cependant la question du degré souhaitable aujourd'hui « d'achèvement » et de routinisation de ces techniques, de la taille des nombres concernés, surtout quand ceci, comme c'est le cas notamment pour la technique complexe de la division, s'avère coûteux, consommateur d'un temps important d'enseignement, un temps qui est compté et qu'il faut savoir utiliser le plus efficacement possible. Dans les choix à effectuer, on ne peut alors faire abstraction de l'évolution des pratiques sociales de calcul. Dans les débats concernant l'enseignement des techniques opératoires, une des difficultés rencontrées est que les problèmes sont très souvent mal posés, les oppositions exacerbées, alors que la question est une question d'équilibre à trouver pour exploiter au mieux la valence épistémique de ces techniques tout en soutenant le développement des pratiques de calcul qui répondent aux besoins actuels du calcul et dont l'utilité ne soit pas limitée à la seule institution scolaire.

Par ailleurs, comme je l'ai développé dans (Artigue, 2002), cette distinction entre valence épistémique et pragmatique, est aussi utile pour penser l'utilisation des outils technologiques de calcul. Trop souvent, les potentialités épistémiques de ces outils sont peu exploitées dans l'enseignement, conduisant à des déséquilibres entre valences pragmatiques et épistémiques, peu productifs en termes d'apprentissage et conduisant à questionner leur légitimité didactique. Différentes recherches ont mis en évidence ce potentiel épistémique mais elles montrent aussi qu'il ne peut être réalisé par simple adaptation à l'univers technologique des tâches usuelles de l'enseignement papier-crayon.

La diversité des formes de calcul et leur complémentarité :

Dans le rapport de la CREM, nous avons insisté aussi sur la diversité des formes de calcul et sur leur complémentarité, ainsi que sur l'importance du travail sur les ordres de grandeur, déclinant ses formes et apports possibles au fil de la scolarité. Dans ces remarques qui visent d'abord l'enseignement élémentaire, je voudrais insister sur l'importance du calcul mental. Cette importance est d'abord épistémique car le calcul mental est un moyen privilégié de lier calcul et apprentissages numériques, en mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations (cf. par exemple : [3] Butlen, 2007), en mettant en évidence la diversité des façons possibles d'aborder généralement un calcul, en invitant à comparer leurs coûts, les connaissances qui les fondent. Bien sûr, il s'agit là d'un calcul mental qui ne se borne pas à reproduire mentalement l'exécution des techniques de calcul posé. Mais cette importance est aussi pratique. Des outils de calcul sont aujourd'hui à la portée de tous dans la vie quotidienne, grâce aux calculatrices, téléphones portables et autres technologies. Mais pour être non complètement dépendants de ces outils, pour contrôler la plausibilité de ce qu'ils produisent, le calcul mental nous est particulièrement utile (car il est le seul immédiatement disponible sans recours à un quelconque artefact), un calcul mental exact ou approché. Car très souvent, dans la vie quotidienne, ce qui est réellement important, c'est d'être capable d'évaluer mentalement l'ordre de grandeur du résultat du calcul. L'enseignement, traditionnellement, privilégie le calcul exact, faisant du calcul approché une chose à laquelle on se résout quand le calcul exact est inaccessible ou vraiment trop coûteux. Ceci ne reflète pas le rôle que joue le calcul approché en mathématiques ou dans la vie sociale. Il est important, me semble-t-il, de penser de façon plus équilibrée le rôle des différentes formes de calcul, en liaison avec l'usage des outils technologiques.

Les reconstructions nécessaires du rapport au calcul au fur et à mesure que ce dernier investit des champs nouveaux :

Nous avons aussi souligné dans le rapport de la CREM que le calcul se différencie non seulement en calcul mental, exact, approché, il se différencie aussi suivant les domaines sur lesquels il porte. Chaque extension du calcul à un nouveau domaine nous demande de reconstruire partiellement notre rapport au calcul. A l'école élémentaire et au collège, les élèves sont déjà confrontés à deux de ces extensions : le passage d'un calcul sur les entiers à un calcul englobant les décimaux, le passage ensuite du calcul numérique au calcul algébrique. Je me limiterai ici au premier, abordant le second dans une contribution plus générale sur l'enseignement de l'algèbre. Comme souligné dans le rapport : « Longtemps, l'enseignement a été peu sensible aux difficultés posées par la première extension en mettant l'accent sur la continuité du calcul : ainsi l'élève apprenait que, sachant déjà calculer avec des nombres entiers, il n'avait que peu à apprendre pour calculer avec des nombres décimaux, il lui suffisait d'apprendre où placer la virgule ! Divers travaux de recherche ont bien montré les difficultés résistantes de calcul que de telles stratégies d'enseignement favorisaient, contrairement à ce qui était attendu. Les élèves notamment avaient tendance à considérer un décimal comme deux entiers séparés par une virgule et à investir cette conception dans leurs calculs (ex : 3,12=9,1 ou 3,10>3,2). ». Ces effets sont aujourd'hui bien connus mais, comme le souligne aussi le rapport : « Quelles que soient les stratégies d'enseignement choisies, on ne peut s'attendre à ce que le passage d'un calcul sur les entiers à un calcul sur les décimaux et rationnels se fasse sans difficulté. Ces difficultés sont en partie liées au fait que les élèves se construisent, à travers leur pratique du calcul sur les entiers, un certain nombre de connaissances implicites, de théorèmes en acte, selon la terminologie introduite par G. Vergnaud, sur les nombres et les opérations, qu'ils généralisent tout naturellement aux nouveaux objets qu'ils intègrent au champ des nombres. Ces connaissances servent en particulier pour piloter un calcul, anticiper des résultats possibles, contrôler ce qui est obtenu. Ainsi n'y-a-t-il rien d'étonnant à ce qu'un élève pense s'être trompé si, multipliant un nombre par un nombre plus petit que 1, il trouve un nombre plus petit, ou si faisant une division, il obtient un nombre plus grand que le nombre de départ. L'enseignement se doit d'être sensible aux difficultés inhérentes aux reconstructions nécessaires et à la résistance normale de conceptions et connaissances locales qui, pendant des années, ont été pertinentes et utiles. »

Dans la culture, le calcul en mathématiques est souvent vu comme une activité purement mécanique, on oppose calcul et raisonnement. J'ai insisté plus haut sur l'alchimie que met en œuvre entre automatisation et raisonnement tout calcul qui n'est pas simple routine. Dans le rapport de la CREM, nous avons ainsi insisté sur l'intelligence du calcul. Cette intelligence est à l'œuvre dans le choix d'un type de calcul en fonction du problème à résoudre, dans les choix de représentation pour les objets qu'il met en jeu, dans son organisation, dans les processus d'anticipation et de contrôle qui en permettent le pilotage efficace. Elle peut s'exercer, sous des formes adaptées, dès les premiers contacts avec le monde du calcul, les travaux de recherche didactique, ceux de la COPIRELEM en fournissent de multiples exemples. Mais cette intelligence, pour pouvoir se développer, nécessite que se construise progressivement un répertoire de résultats, de formes, de techniques, de situations, en exploitant les potentialités offertes par le calcul mental ou réfléchi, par les calculs d'estimation, par la mise en place des algorithmes de calcul, leur raffinement, leur adaptation, par la planification requise par des calculs plus complexes. Elle nécessite aussi que s'établissent des équilibres satisfaisants entre automatisation et flexibilité du calcul. L'article joint élaboré pour une université d'été de formation de formateurs de Saint Flour développe ces idées en les illustrant par des exemples à différents niveaux de scolarité.

Les nombreux travaux cités dans le rapport de la CREM montrent que nous disposions déjà au début des années 2000 de ressources substantielles pour penser l'enseignement du calcul. Ces ressources se sont enrichies au cours de la dernière décennie, en France comme au niveau international (cf. par exemple : [5] Lester, 2007, pour une vision synthétique). Mais si les ressources existent, il est illusoire de penser que leur mise à la disposition des enseignants suffira à améliorer substantiellement et durablement l'enseignement du calcul. Pour obtenir de tels changements, il faut une formation solide des enseignants dans ce domaine. S'agissant de l'école élémentaire en particulier dont les enseignants ne sont que très minoritairement de formation scientifique, il faut une formation qui assure aux enseignants eux-mêmes un rapport approprié au calcul et une compréhension des jeux qui s'y nouent entre automatisation et raisonnement, pour qu'ils puissent soutenir et guider les apprentissages de leurs élèves. Il semble que nous en soyons loin aujourd'hui.

Bibliographie

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, n°7,245-274.

Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, n° 54, 23-39.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté.

Kahane, J.P. (coord.) (2001). *L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Editions Odile Jacob.

Lester, F. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM. Information Age Publishing.

3.6 Les mathématiques à l'école élémentaire, état des lieux

Mots-clefs : didactique, école

Denis Butlen et Pascale Masselot, IUFM de Creteil

Nous développons dans les pages qui suivent quelques points qui nous semblent particulièrement importants et qu'il conviendrait d'aborder lors de cette conférence nationale. Nous attirons l'attention du conseil scientifique sur la question cruciale de l'enseignement des mathématiques en ZEP. A ce jour, cet enseignement reste un des enjeux majeurs pour notre système éducatif. Ces points ont notamment trait à l'enseignement des mathématiques en ZEP. Les deux premiers sont relatifs au traitement des difficultés des élèves en mathématiques à l'école primaire et au début du collège. Le point suivant concerne les pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP. Enfin nous conclurons en inférant de nos résultats de recherche quelques pistes pour la formation en mathématiques des professeurs des écoles.

La question du traitement des difficultés des élèves en mathématiques

Les recherches que nous avons menées, souvent basées sur l'évaluation des effets de dispositifs d'enseignement sur les apprentissages des élèves, débouchent sur deux constats qu'il nous semble important de signaler ici.

Le premier porte sur la stratégie de remédiation qui consiste à combler chez les élèves des manques diagnostiqués. Aussi bien construits soient-ils, des dispositifs se limitant à combler des manques ne s'avèrent pas aussi efficaces pour les élèves en difficulté importante que pour les autres et sont parfois loin d'apporter des changements qualitatifs.

Le second constat est nettement plus optimiste. Nos recherches ont mis en évidence des cheminements cognitifs spécifiques chez les élèves de ZEP, cheminements susceptibles de favoriser les apprentissages, y compris pour certains élèves en grande difficulté, à condition de travailler sur un temps long (souvent plusieurs années). Ces cheminements cognitifs se caractérisent et se manifestent par des étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation (recours au générique, construction d'outils heuristiques intermédiaires). En ZEP, la mise en œuvre de scénarios ménageant pour les élèves en difficulté des situations favorisant ces cheminements spécifiques combinées avec des interventions ciblant plus particulièrement des manques (des pré requis absents) nous semble indispensable si on vise l'acquisition d'un socle commun de connaissances.

Les pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques

Les recherches menées par notre équipe relatives aux pratiques des professeurs des écoles (novices et confirmés) enseignant les mathématiques en ZEP font apparaître trois grandes questions de la profession. Ces questions nous semblent incontournables et doivent être abordées en formation tant initiale que continue ou lors d'un accompagnement à l'entrée dans le métier. La présentation et l'analyse de différentes alternatives constituant des réponses « réalistes » à ces questions permettent également de ne pas faire l'impasse sur la prise en compte du contexte d'enseignement.

En effet, nous avons mis en évidence que les modes de réponses apportées par les professeurs des écoles à ces grandes questions constituent des dimensions organisatrices de leurs pratiques. Ces modes de réponses sont souvent en étroite connexion et participent à la construction de la cohérence et de la stabilité des pratiques d'un enseignant.

L'installation de la paix scolaire (constitué du couple paix sociale - adhésion des élèves au projet d'enseignement du professeur) constitue l'une de ces questions. En effet, elle est une condition nécessaire à un enseignement et son mode d'installation est pour une part déterminé et détermine les mathématiques proposées à la fréquentation des élèves. La seconde question est celle de l'exercice d'une certaine vigilance didactique. Nos recherches montrent que pour exercer cette vigilance didactique, certes la maîtrise des contenus mathématiques enseignés est nécessaire, mais aussi et surtout que la maîtrise de concepts relatifs à l'enseignement de ces contenus est indispensable. Cette dernière implique notamment des connaissances didactiques sur les cheminements cognitifs des élèves, sur les situations qui les accompagnent, sur des résultats de recherches (ayant acquis le statut de faits didactiques, voire de petits théorèmes de didactique), sur les grands types d'erreurs susceptibles d'apparaître lors de l'apprentissage d'une notion donnée, sur les critères permettant d'établir des hiérarchies de procédures susceptibles d'être mobilisées par les élèves, mais aussi sur les outils nécessaires à la mise en œuvre (ou à la lecture) d'une analyse a priori des situations proposées par les ressources accessibles aux enseignants, leur permettant de se les approprier (reconnaissance des enjeux des situations, des intentions des auteurs…) et de les adapter (en évitant en particulier la « négociation à la baisse », l'individualisation non contrôlée), nécessaires aussi à la lecture dans l'action des productions des élèves préparant une synthèse et une institutionnalisation adaptée, etc. La troisième question de la profession est celle de la gestion des processus de dévolution et d'institutionnalisation. Notre dernière recherche montre que si un accompagnement des professeurs des écoles, lors des deux premières années d'exercice, se traduit notamment par un enrichissement des pratiques et plus particulièrement par une capacité plus grande à faire des choix conscients et à dévoluer (qui se traduit par des choix de situations plus consistantes, des temps de recherche individuelle et collective plus importants, des mises en commun s'appuyant sur l'explicitation des procédures) qui révèle d'une certaine manière le fait de « faire confiance aux situations » mais aussi de « faire confiance aux élèves » ; en revanche, les effets sur le processus d'institutionnalisation sont plus faibles, voire réduits. Tout se passe comme si les professeurs des écoles manifestaient une résistance à l'institutionnalisation. On peut notamment expliquer cette résistance par la difficulté à penser l'institutionnalisation comme un processus comportant des institutionnalisations locales progressives et articulées qui, pour être efficaces, nécessitent de s'appuyer sur les productions des élèves et de s'inscrire dans leurs ZPD1, des réinvestissements permettant la construction progressive de types de problèmes mais aussi de schémas de problèmes, voire aussi la difficulté de percevoir la nécessité d'accélérer ce processus à des moments « bien choisis ». On peut expliquer cette résistance par un changement de posture (au sens premier du terme) chez le professeur. La posture de dévolution est très différente de celle de l'institutionnalisation. Ainsi par exemple, la première vise à plutôt « laisser la main » aux élèves et donc s'accompagne d'un retrait, au moins apparent, du professeur alors que la seconde nécessite de sa part « de reprendre la main » et le devant de la « scène ». Ce changement de posture peut s'avérer délicat à négocier pour le professeur et reste encore un sujet de recherche assez peu exploré.

Nos recherches ont montré que les modes de réponses apportées à ces trois grandes questions contribuent à la constitution de pratiques très différentes. Le mode de réponse le plus fréquent en ZEP se caractérise notamment par un abaissement des exigences, des scénarios organisés autour de tâches parcellisées et algorithmisées, par une individualisation non contrôlée de l'enseignement et du traitement des comportements et par un défaut d'institutionnalisation. Ces pratiques différentes débouchent sur des mathématiques différentes proposées à la fréquentation des élèves et donc sur des apprentissages potentiellement différents. Persuadés que certains modes de réponses à ces questions ne peuvent émerger du genre et que des apports extérieurs sont indispensables, nous pensons que les dérives que nous venons d'évoquer doivent non seulement faire l'objet d'une explicitation en formation mais surtout déboucher sur la présentation d'alternatives.

Des pistes pour la formation en mathématiques des professeurs des écoles

Ces alternatives pour être crédibles, acceptables et sources d'interrogation pouvant déboucher sur un enrichissement et un développement des pratiques peuvent avec profit s'inscrire dans un dispositif de formation qui se donne les moyens d'entrer en résonance avec le questionnement mais aussi avec les représentations des enseignants sur les mathématiques, sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et sur les élèves. Nous avons vu lors de notre dernière recherche qu'un de ces moyens est de travailler non seulement au niveau global, c'est-à-dire au niveau des grands choix des enseignants mais aussi et surtout à un niveau local que nous avons identifié sous le terme de « routines », c'est-à-dire un ensemble de gestes professionnels concourant tous à la réalisation d'une tâche « assez grosse » comme par exemple la gestion des phases de synthèse ou d'institutionnalisation. Le changement de posture évoqué ci-dessus constitue encore actuellement un des points aveugles de la formation ce qui peut s'expliquer par le fait que, pour être investi avec profit, il soit nécessaire de confronter les (futurs) professeurs des écoles à des situations de classe effectives en « milieu protégé »

3.7 Suggestions d'un didacticien au CS de la conférence

Mots-clefs : numération orale, calcul, opérations, algorithmes, didactique, école, société

Guy Brousseau, Prix Félix Klein pour ses travaux en didactique

Présentation

Dans les conditions que je connais aujourd'hui assez mal, je crois que vous ne pouvez guère proposer que de modifier les instructions, et seulement de façon à ce que les réformes prescrites ne requièrent aucun engagement financier, ni dans l'équipement, ni dans le recrutement ou dans la formation du personnel, ni, encore moins, dans la recherche, qu'elle soit fondamentale, appliquée ou de développement.

Le personnel est harassé par des exigences contradictoires, violenté par une gestion « carotte-bâton » totalement inappropriée et harcelé par un public qui prend l'école comme tête de turc. Ce personnel ne vous offre que peu de ressources nouvelles. - déshabillés de leur mandat d'instituteurs, - dédiés en tant que professeurs à une discipline qui ignore ou même méprise la compétence spécifique nécessaire à leur travail, - sollicités d'acquérir des grades universitaires élevés mais que l'entrée dans la carrière d'enseignant dévalue soudain et qui fait sonner cette entrée comme un échec personnel, - envoyés, sans préparation véritable, effectuer sans soutien des missions contradictoires dans un milieu maintenu hostile, - harcelés au nom d'objectifs flous évalués sans précautions, interprétés sans connaissances spécifiques propres et exploités de façon déloyale… les enseignants ne peuvent offrir qu'une très petite part des ressources que nous voudrions obtenir d'eux.

Les recherches fondamentales sur les conditions de la diffusion de la culture et des savoirs mathématiques dans une société entière progressent lentement, mais ces progrès sont difficiles à diffuser. Les recherches expérimentales peuvent proposer déjà des alternatives éprouvées et démonstratives, mais, sans le support d'une institution scientifique respectée, toute démonstration publique provoque aussitôt la mise en œuvre de développements fantaisistes ou prématurés à cause de l'insuffisance d'information du public et surtout de la noosphère. La compréhension et l'utilisation des « résultats » de l'enseignement de cette discipline se heurtent à une conjonction très variée d'obstacles considérables1.

La solution qui reste est celle de s'adresser aux citoyens, et de leur demander de participer, directement, à un effort à la fois utile et symbolique, pour soulager l'effort qui est demandé à leurs enfants et à leurs enseignants. Ce projet les placera cette fois du côté de leurs enfants et de leurs enseignants pour vaincre une difficulté d'enseignement objective dont l'effet sera directement mesurable. La difficulté qu'ils rencontreront à mettre en œuvre une amélioration mineure mais évidente et prouvée peut les rendre plus attentifs dans le choix des défis et des solutions proposées à l'enseignement.

Je crois qu'un projet modeste pourrait annoncer que les réformes de l'enseignement même les plus apparemment anodines ne s'improvisent pas, que leur préparation prend du temps et demande les efforts permanents de recherches vivantes, d'études, de débats, une préparation par la formation et par une mise en œuvre programmée, décidée mais attentive, souple et en sympathie avec la culture de la société qui doit elle aussi être éclairée.

Mes suggestions se répartissent en trois volets

Demander un effort aux citoyens : la réforme d'une pratique linguistique détestable

Il s'agit de remplacer soixante dix, quatre vingt, quatre vingt dix, par des dénominations régulières se terminant en « ante » : septante, octante, nonante (octante est irrégulier, nonante est tangent huitante, et neuvante seraient meilleurs mais s'aligner sur les voisins francophones serait plus sympathique). Les arguments (simplifier l'apprentissage et l'usage, pour les enfants et pour les étrangers) sont connus et les preuves aussi. Cette suggestion est appuyée actuellement par l'observation de l'apprentissage par les élèves, mais sa réussite dépend essentiellement de facteurs macro-didactiques et médiatiques peu explorés. Je ne recommande pas d'étendre l'effort à la résorption des deux régularités des nombres entre onze et seize puis entre dix sept et vingt. Ni le remplacement de vingt par « duante ».

Officialiser un aménagement des pratiques du calcul numérique écrit

Cet aménagement est connu sous le nom de calcul ergonomique et déjà assez répandu, et un aménagement corrélatif de l'apprentissage des résultats des tables (et non des tables elles mêmes) et du calcul mental. Ce dernier doit être développé, étendu au calcul des encadrements et s'étendre à des calculs sur des mesures familières dans le système métrique et sur les ordres de grandeurs (adaptation aux usages actuels et futurs, palliation à la disparition de la topologie numérique qui résulte de l'utilisation des appareils à affichage électronique).

Informer le public sur la nécessité de projets et d'actions sur le long terme

Ces actions doivent être précises, concertées, financées, et débattues comme on le fait pour l'aménagement du territoire.

Préparer les aménagements et les réformes à l'avance en s'appuyant dans la mesure du possible sur des travaux scientifiques et sur des stratégies de développement concertées. Et ici comme là, tenter de mettre un sérieux frein au culte officiel et immodéré de « l'innovation »

Préparer le public à la lecture des rapports et des textes en matière scolaire : par exemple, les abus de l'interprétation et de l'utilisation des « évaluations » causent depuis vingt ans des dommages très importants.

Inverser la tendance qui défère à l'Ecole et aux élèves des missions irréfléchies excessives et surtout contradictoires. Cette tendance fait de l'école une cible et un enjeu commercial et politique et finalement la dénonce comme une ennemie de la société. Dans cet esprit, on pourrait envisager de mettre à l'étude, à la lumière des travaux de didactique, le nettoyage des pratiques anciennes ou récentes qui contrarient à la fois la pratique de l'arithmétique et l'introduction de l'algèbre qui pourrait être plus précoce. (Voir l'exemple les contradictions de l'usage de l'égalité au primaire et au secondaire)

Les recherches en Didactique des Mathématiques ont montré que l'on pouvait obtenir des résultats meilleurs et plus précoces. Mais l'usage de ces méthodes qui conjuguent des dispositions mathématiques, didactiques et pédagogiques complexes ne peut pas s'improviser ni, pour diverses raisons, se développer à partir de pratiques sommaires primitives présentées comme populaires et qui s'imposent aujourd'hui. La durée des études des professeurs est assez longue pour qu'on y aménage la formation appropriée qui serait nécessaire. Le fait d'exiger, lors du recrutement des enseignants, d'avoir thésaurisé tout au long des études universitaires, des unités de valeurs spécifiques serait de nature à améliorer le professionnalisme des professeurs et la sensibilité des disciplines à ce sujet.

Précisions, commentaires et références sur les réformes

Sur l'aménagement de pratiques du calcul

Officialiser l'adoption (déjà répandue) de méthodes de calcul écrit dites « ergonomiques »

- Pour la multiplication : remplacement de la méthode rapide, dite « de Fibonacci », par celle dite « per gélosia » (ou « à l'arabe » ou « à la grecque »,
- Pour la division, adoption en la perfectionnant, de la méthode anglaise et rejeter la méthode rapide,
- Pour l'addition et la soustraction (diverses expériences permettent d'examiner la question)

Note : Pour ce qui concerne la multiplication, il est facile pour les élèves de pratiquer Fibonacci pour les opérations de taille moyenne après avoir appris avec *per gélosia*, qu'ils conservent pour les opérations de grande taille. Ce n'est pas le cas pour la division.

Références :

a. Guy Brousseau : « Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ? 1973 » Actes du 3e congrès des sciences de l'éducation « Apports des disciplines fondamentales aux sciences de l'éducation » tome 1, epi 1973 pp 364-378. Origine : Enquête de 1969 sur 600 enfants.

b. Les résultats de plusieurs études de l'IREM de Bordeaux au cours des années 70-80 sont présentés en 2010 sur mon site : 4 diaporamas consacrés à ce sujet2.

Motif : Pouvoir effectuer facilement toutes les opérations « à la main » quand on en a besoin est indispensable. Payer par des années de travail l'apprentissage d'une dextérité dont l'inutilité est devenue évidente, est une exigence injustifiée et coûteuse. Est-elle perçue implicitement par la plupart des élèves comme une exigence obsolète ? (enquête ?)

Organiser et renforcer l'enseignement du calcul mental.

Il sert moins à fournir les éléments des opérations classiques rapides qu'à contrôler et encadrer même grossièrement, certains résultats donnés par les machines, et d'abord leur ordre de grandeur

a. « Apprentissage des tables »

Préconiser l'apprentissage progressif et raisonné des résultats des tables par la répétition des usages motivés, et ne pas faire apprendre et réciter « la table de Pythagore», dans l'ordre des lignes ou des colonnes. Les méthodes de calcul ergonomiques facilitent un mode d'apprentissage par l'usage du contenu des tables suivant un ordre de parenté arithmétique des produits élémentaires beaucoup plus souple et efficace3. Commencer par les doubles, les multiples de 5, les carrés, les multiples de 3, le complément… 9x8, et les produits réfractaires 6x9 et 8x7 (en utilisant systématiquement la commutativité) Les élèves utilisent les produits connus pour établir les produits nouveaux, puis pour contrôler. Le stade de la réponse rapide (qui équivaut à la récitation) ne vient qu'après pour parachever les apprentissages résiduels. L'angoisse des élèves baisse fortement sans que l'efficacité s'en ressente.

b. Estimations, encadrements

Étendre le calcul mental aux encadrements, aux estimations, aux calculs approchés. Il s'agit de préparer les élèves aux contrôles rapides des résultats fournis par ou avec l'aide de machines et de combattre l'effet des appareils de mesures numériques qui remplacent partout les appareils analogiques, sur la connaissance de la topologie des nombres

Développer le calcul mental sur les puissances, les ordres de grandeurs et sur les mesures décimales

Équilibrer entre le calcul sur les nombres seuls et sur des mesures dans des situations simples

Écrire après coup les décompositions et les calculs utilisées dans le calcul mental

c. Choix mentaux rapides

- de l'opération seule (sans effectuer le calcul)
- de l'opération et de la réponse avec la calculette
- de l'opération et calcul sans calculette

exercices d'énonciations du résultat (le professeur expose les données, écrit l'opération et son résultat les élèves disent ce qu'on a calculé.

Utilisation des calculs écrits

Utilisation des calculs et de leur formulation dans des situations courantes simples répertoriées. En attendant la refonte de l'enseignement de l'algèbre et son articulation avec l'arithmétique dans le primaire, ne pas négliger l'usage des unités de mesures.

Perspectives sur des réformes futures des pratiques

Le « nettoyage » de l'inévitable base arithmétique des connaissances des enfants serait très utile, mais il présente de grandes difficultés. L'introduction précoce mais inconsidérée de pratiques d'allure « algébriques », mais en fait fausses, irrégulières ou dénuées de sens dans le contexte, perturbe l'introduction de l'algèbre dans le secondaire et ses méfaits se prolongent jusqu'à l'université. La réforme doit être préparée pour faire reculer la conservation des vestiges sans autre intérêt que culturel ou affectif.

L'usage du signe « = » au primaire est inutile. Il prend un sens faux, ni réflexif, ni symétrique, qui conduit plus tard à une interprétation unidirectionnelle des équations. Le secondaire ajoute à cet héritage ses propres confusions entre « = » et « ⌒ », entre fonction et valeurs, entre énoncés et programmes de calcul…, etc.

Rappeler que les calculs et les résultats des élèves doivent être introduit par un texte. Sous prétexte de rapidité, les professeurs acceptent ou ont dû accepter sa disparition : les phrases, les mots, et même les symboles d'unités physiques disparaissent souvent (ex. la présentation du résultat en langue ordinaire, sans parler des raisonnements arithmétiques ou algébriques eux mêmes), de sorte que les exercices deviennent inintelligibles pour l'élève lui-même. Ces confusions qui plaisent aux élèves moyens et faibles, augmentent en fait leurs difficultés.

Les objectifs relatifs à l'usage de fractions sont différents entre les différents pays, selon qu'ils bénéficient du système métrique ou non. Les pays qui utilisent le système métrique n'ont pas les mêmes efforts à faire. En France, on pourrait se concentrer d'abord sur les usages des fractions simples courantes (en repoussant l'étude formelle des opérations sur les fractions) puis sur les fonctions comme scalaires (naturelles puis rationnelles) et n'entreprendre que plus tard l'étude des opérations (de l'anneau ou du corps des fractions) comme composées de fonctions naturelles par exemple). Il s'agirait d'éviter les finesses entassées par trois ou quatre mille ans d'usage qui pourraient être laissées aux historiens et aux archéologues.

Le bannissement de « la règle de trois », et son remplacement par un raisonnement en deux étapes, jusqu'à l'introduction du calcul algébrique qui la rend inutile.

L'inversion de l'ordre des calculs (la multiplication avant la division) n'a pas besoin d'être taillée dans le marbre d'une « règle » il suffit soit de laisser le premier résultat non calculé (sous forme de division, de rapport, fraction ou fonction) puis d'effectuer la multiplication de ce résultat dans la deuxième étape…

La réintroduction prudente d'éléments de métamathématique.

Les professeurs de mathématiques, orientés vers la production et la reproduction précise des énoncés de mathématiques ont eu tendance, après une saison d'intense intérêt, à négliger, voire à mépriser l'explicitation et l'apprentissage du métalangage (logique) nécessaire. En effet des recherches ont montré les dérives possibles liées au recours en chaîne à des explications d'explications ou à des illustrations de toutes sortes. Cependant les linguistes et les professeurs de français savent bien que sans l'étude de la grammaire, les vertus de la langue s'évaporent. Le nombre et la précision des termes et des expressions de toutes formes qui envahissent aujourd'hui l'univers des élèves par l'intermédiaire des médias et de la technologie devraient nous encourager à équilibrer un peu les différentes composantes de l'enseignement. En fait ces aménagements et ce « nettoyage » des pratiques demanderaient une justification et un complément de formation pour les professeurs du primaire et du collège conjointement (IREM). Les didacticiens ont montré que l'initiation à l'algèbre, aux statistiques aux probabilités, à la logique etc. pouvait commencer avec profit dès l'école primaire, mais sous des conditions encore irréalisables aujourd'hui.

Ces suggestions de réformes sont fondées sur des travaux solides les miens sont déjà anciens mais d'autres les prolongent malgré des conditions très difficiles. Ils sont peu ou mal connus en dehors de la sphère des spécialistes. Je n'ai pas d'étude de développement à leur appui et je ne peux pas me charger d'en faire ni d'en diriger, ni même m'engager à en accompagner.

Il est indispensable de créer des organismes scolaires offrant des conditions strictement respectueuses de l'éthique de l'éducation et de l'éthique scientifique, dans lesquels les chercheurs en didactique pourraient effectuer leurs observations et leurs recherches. En même temps il faut protéger l'enseignement des initiatives et même des investigations incontrôlées et désordonnées des intrusions commerciales, des visites sans encadrement sérieux de la part d'étudiants en formation ou de curieux.

La formation universitaire des enseignants et de leur encadrement professionnels est un échec flagrant qui doit être médité au plus tôt

Elle prend la forme d'abord de la transmission d'un ensemble de « connaissances SUR ou A PROPOS de l'enseignement et ses composantes, qui, au lieu de simplement compléter les indispensables « connaissances DE l'enseignement » et en particulier de sa pratique, tendent à les remplacer. La formation des enseignants prend la forme d'un discours de différentes disciplines sur les difficultés de l'enseignement. Ce discours est complété par la communication d'un ensemble raffiné de prescriptions techniques picrocholines, générées par le management sur la base d'inférences infondées à partir des évaluations

Ces deux faits relèvent d'un phénomène que nous avons étudié sous le nom de « glissement méta » à l'occasion de la réforme des mathématiques modernes.

Résultat : la préparation de quinze minutes d'activités à l'école maternelle se présente sous forme d'un discours académique de 10 pages qui prévoit des évaluations de toutes sortes sur une activité dont on ne connaît même pas les consignes précises ni les « issues » possibles. Rien de ce qui se fera d'utile aux élèves n'est reçu comme une information honorable.

Les jeunes professeurs attaquent leurs difficultés avec la longue fourchette d'un savoir savant inapproprié. Et n'ont rien reçu pour se défendre par leur travail.

Cette dérive est très grave car elle détruit la communication aux enseignants des renseignements basiques qui leur sont nécessaires. Elle est très dangereuse car elle fait obstacles aux interactions directes indispensables. Elle est récursive car on tend à la corriger par un nouveau glissement méta aussi impuissant que le précédent Elle tend donc à être incoercible. Ainsi, elle est elle échappe totalement à l'entendement de l'institution qui devrait la combattre. L'absence d'une science mature et reconnue de la diffusion des connaissances amplifie le phénomène.

Annexe : L'information du public sur les réformes en cours et en projet

Donner l'exemple des usages légitimes et illégitimes des évaluations scolaires de masse et appeler à en faire un usage plus modéré.

Ce ne sont pas les évaluations qui sont en cause, mais leur interprétation par le public et les décisions qui sont prises inconsidérément à leur lecture :

- les interprétations, les conclusions et les conseils qui en sont tirés, en l'absence de connaissances scientifiques suffisantes sur le système lui même
- les décisions absurdes et dangereuses, privées ou publiques, individuelles ou collectives, qui sont toujours supposées capables de corriger l'enseignement malgré leurs échecs réitérés

La croyance primitive en l'efficacité universelle du modèle « essai-erreur-sanction » devrait être dénoncée et encadrée. Ce modèle n'est pas légitime lorsqu'il s'applique à un système dont on veut ignorer comment, quand il est stressé, il pourrait résoudre le problème qu'on lui pose. Martelée dans le domaine économique où elle est loin d'avoir les effets escomptés, cette doctrine primitive est indûment étendue à toutes les activités humaines. Or en matière d'enseignement, elle a depuis 35 ans conduit à prendre des décisions mal inspirées, dont les résultats se sont révélés d'abord inopérants, ensuite désastreux. Ils sont peut être irréversibles.

Informer que l'on souhaite parvenir à ce que les réformes de l'école puissent se traiter comme on traite les chantiers publics

Avertir, projeter, étudier, discuter, préparer, financer, mettre en œuvre par étapes, contrôler etc. Et qu'avec cela, les connaissances du public et même celles des spécialistes doivent progresser pour éviter de se jeter dans l'urgence dans toutes les improvisations1. Il faut mettre en doutes certaines « évidences », retenir les improvisations et surtout ne pas instrumenter l'école. Les auteurs ajoutent, si nécessaire, une annexe avec une section non numérotée.

Notes :

1 Elles sont confinées par divers phénomènes qu'il n'est pas dans vos intentions d'examiner ici aujourd'hui. Entre autres on peut observer deux erreurs de la noosphère mathématique, l'une consiste à sous évaluer la difficulté du projet et a confondre la légitimité que donne une grande culture mathématique avec la capacité effective d'y acculturer tout une société. L'autre est l'inverse, en cas d'échec de l'hypothèse d'innocence elle consiste à renvoyer l'étude des difficultés à des domaines scientifiques, sérieux, mais dédiés à d'autres fins, et d'attribuer des vertus magiques à leurs propositions les plus improbables.

2 http://guy-brousseau.com/1396/cours-gb-2010-diapo-9-la-complexite-des-activites-mathematiques/#more-1396

3 Une partie de cette méthode est recommandée par Dehaene, après l'avoir été par Diderot et après avoir été pratiquée couramment dans les écoles publiques françaises au 20ième siècle. La méthode « populaire » de récitation des tables ralentit en fait les calculs ordinaires.

3.8 Les grandeurs et leurs mesures à l'école primaire – regards sur les curricula et les pratiques de classes en France et en Suisse romande

Mots-clefs : école, mesure, grandeurs, comparaison internationale, didactique

Florence Ligozat, Maître Assistante, Université de Genève / Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation / GREDIC

Introduction

Le point de vue que j'apporte ici est soutenu par dix années de recherches (2002-2012), menées au sein de la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de l'Université de Genève, sur le fonctionnement de l'enseignement et apprentissage des mathématiques au quotidien dans les classes du primaire, en Suisse romande, mais aussi en France. Dans ce cadre, j'ai rédigé une thèse sur les logiques de l'action enseignante et leurs effets sur les savoirs enseignés dans le domaine de la mesure et des grandeurs, et plus particulièrement celui des aires de figures planes (Ligozat, 2008). Ce travail inclut une comparaison des curricula en France (programmes de 2002) et en Suisse romande (Plan d'étude de 1997 ; Moyens d'enseignement de 1999) afin de comprendre les racines épistémologiques mais aussi idéologiques des logiques d'action observables dans les classes, de part et d'autre de la frontière franco-suisse.

Je soutiens l'idée qu'une réflexion sur l'enseignement des nombres et des grandeurs ne peut se faire sans coordonner différent points de vue apportés par les recherches : point de vue développemental sur l'acquisition des savoirs par les sujets (élèves); point de vue anthropologique sur la construction de ces savoirs, leurs fonctions dans les activités sociales et les choix curriculaires ; point de vue pragmatique des conditions de la diffusion et de maîtrise de ces savoirs en contexte d'enseignement. La perspective comparatiste qui est la mienne, à la croisée des systèmes scolaires suisse-romands et français, et centrée sur les pratiques de classe, permet de croiser ces points de vue, en pointant les lieux de tension dans le curriculum concernant les relations entre nombres, grandeurs et mesures.

Le point de vue anthropologique - grandeurs et mesures dans les curricula en France et en Suisse romande

Comme la grande majorité des didacticiens des mathématiques francophones, je me retrouve dans l'idée que la réforme de l'enseignement des mathématiques dans les années 70 a profondément bouleversé les rapports entre les grandeurs et les nombres, faisant disparaître certains outils de conceptualisation des opérations arithmétiques ; et ramenant la construction du nombre décimal à une transformation des entiers par un changement d'unité. Je ne reviendrai pas sur les évolutions curriculaires en France, fort bien décrites par mes collègues. Si en France, la période post-réformiste débute dès les années 80, avec une réintroduction progressive des grandeurs dans certains types de tâches, par nécessité pratique, mais aussi sous l'influence grandissante des travaux de didactique des mathématiques qui visent à restaurer la fonctionnalité des savoirs à travers la construction de situations didactiques (Brousseau & Brousseau, 1987, sur les rationnels et décimaux), la réalité est un peu différente en Suisse romande. Les effets de la réforme y ont été prolongés par jusqu'au milieu des années 90, par la « force » des moyens d'enseignement officiels1 qui constituent le référentiel de base pour enseigner dans toutes les classes. La période de « post-reforme » apparaît avec la définition d'un nouveau plan d'étude en 1997 (grade 1-6), assorti d'une nouvelle collection de moyens d'enseignement (COROME 1999) qui vise à tenir compte des développements les plus récents des recherches en éducation.

Aussi bien dans les programmes français de 2002 à 2007 (cycle 3 – grades 3, 4 & 5) que dans le plan d'étude romand de 1997 (grade 1 à 6) et les moyens d'enseignement associés, on trouve une section dédiée à la « mesure »2. Je résume rapidement les points de divergence entre ces deux curricula ; la comparaison créant un moyen d'excentration pour comprendre autrement, ce que l'on sait indépendamment.

En France, il s'agit de « Grandeurs et mesures », comportant une sous-section spécifique pour les « aires », au côté de celle regroupant « longueurs, masses, volumes / contenance, temps et durées » d'une part et « angles » d'autre part. Ce découpage assume une spécificité de l'approche des aires en déclinant une série de compétences précises à acquérir selon une progression qui va des comparaisons qualitatives dans l'espace sensible à l'usage des unités de mesures conventionnelles et leurs équivalences3. Les documents d'accompagnement détaillent de nombreuses activités de manipulation des grandeurs avant de s'engager dans des activités de mesures (longueur & aires). A noter que l'introduction des nombres décimaux fait l'objet d'une section différente intitulée « Connaissance des fractions rationnelles et nombres décimaux » dans laquelle les fractions sont introduites comme un moyen de codage des mesures de longueurs (ou aire), puis servent de « passerelle » vers l'écriture décimale, via l'identification des fractions décimales.

En Suisse romande, il s'agit de « Nombres réels et mesure ». Parmi la liste des 18 compétences attendues, on peut dégager deux grandes catégories :

- Celles qui visent des compétences purement numériques (ex : comparer, ordonner encadrer, intercaler des nombres entiers) sur les entiers, les décimaux, les fractions unitaires (½ ; 1/3 ; ¼...) ou de mêmes dénominateurs (2/3; 5/3; 8/3...) ;
- Celles qui mettent jeu des grandeurs et leurs mesures (ex : comparer, ordonner des grandeurs par manipulation de lignes, surfaces, solides à l'aide d'unités non conventionnelles).

On trouve une insistance sur le dédoublement des techniques de mesurage à l'aide d'unités non conventionnelles et conventionnelles (système métrique) ainsi qu'une référence explicite aux activités de mesurage issues de la vie quotidienne (calculer une longueur de trajet et un périmètre; exprimer des mesures dans différentes unités courantes) ou des pratiques scientifiques (prendre une mesure à l'aide d'un instrument et en donner un encadrement). Au niveau du plan d'étude, il n'y a pas d'approche spécifique préconisée pour certaines grandeurs; en revanche, on trouve dans les « Commentaires didactiques »4 qui accompagnent les moyens d'enseignement, un condensé théorique5 sur :

- les opérations sur les grandeurs indépendamment de leur mesure - référence à Rouche (1992)-,
- l'encadrement d'une mesure par subdivisions successives d'une unité choisie;
- es spécificités de la mesure instrumentée en fonction des problèmes posés par les différentes grandeurs.

Signalons que l'on retrouve une progression similaire à ce qui est préconisé pour la notion d'aire dans les Programmes français (d'abord des superpositions et des recouvrements, puis des pavages en fonction d'une unité choisie & composition additive des unités ; puis la multiplication comme moyen plus économique de dénombrer les unités d'aire à partir des longueurs des côtés d'un rectangle).

Si, au niveau du Plan d'étude suisse-romand, la référence aux grandeurs est nettement moins sensible qu'en France pour appuyer la construction des nombres et des opérations, on constate qu'il apparaît une justification du fonctionnement de la mesure (même sommaire) à partir des opérations sur les grandeurs dans les documents d'accompagnement. Toutefois, dans le module « Problèmes pour mesurer » (grade 4) incluant longueurs, masses, aires et volumes /contenances, l'examen des types de problèmes qui sont effectivement proposés aux enseignants et aux élèves montre qu'il est possible de traiter tous les problèmes par la mesure directement. Du reste, le terme de « grandeur » disparaît dans le texte introductif du module : « l'enjeu de chaque activité du module est d'adopter alternativement ou simultanément ces deux points de vue, c'est à dire traduire des observations ou des manipulations sur les objets en actes de pensée sur des nombres, et réciproquement, de s'assurer que les opérations numériques sur les mesures se vérifient dans la réalité de l'espace sensible » (COROME, 1999 grade 3 & 4). Le principe est donc de travailler dialectiquement la relation entre objets (grandeurs) et nombres, aucune hiérarchie ne semble prépondérante.

Au grade 5, la mesure est abordée à travers deux thèmes, celui des « Mesures de longueurs » et celui des « Mesures d'aires ». On relève que le thème des longueurs a pour enjeu central les changements d'unités dans le système métrique. Il fait stratégiquement suite au thème « Nombres rationnels » car il contribue, selon les auteurs, à montrer la nécessité de travailler avec des nouveaux nombres non-naturels pour exprimer des mesures de longueur dans le système métrique. Précisons que les nombres rationnels sont introduits par la subdivision de segments sur une droite graduée, mais aussi la subdivision du rang des unités du nombre entier, créant ainsi des dixièmes, centièmes... Ainsi la construction du nombre décimal est-elle supportée par le cadre géométrique procuré par les longueurs mais pas par des rapports de grandeurs dénotés par des fractions6.

Le thème des aires vise la découverte de « la règle multiplicative » du calcul de la mesure d'aire d'un rectangle à partir des mesures de ses côtés. Toutes les activités proposées, y compris celles qui sont suggérées comme des points de départ, reposent toutes sur du mesurage d'aires, avec une unité qui peut être reportée ou qui quadrille déjà la figure. En effet, la plupart des fiches-élèves demandent de dénombrer par diverses techniques des pavés-unités sur des figures déjà quadrillées, ou par des réseaux à mailles différentes, privilégiant l'observation des changements d'unités sur la mesure de l'aire.

Cette visite comparée des curricula français et suisse-romands nous donne une idée de la diversité du traitement des grandeurs et de leurs mesures. A l'appui des grands résultats de la didactique des mathématiques des années 80, la réintroduction des manipulations de grandeurs dans l'espace sensible comme préalable à la définition des nombres et des opérations numériques est assez évidente dans le contexte français. En Suisse romande, si l'importance des grandeurs est évoquée dans certaines strates du discours de justification des activités, le cadre numérique issu des mathématiques modernes reste fortement présent dans la construction des nombres décimaux, mais il est combiné à une approche pratique de la mesure à l'aide du système métrique. Les élèves sont amenés à fréquenter ces nombres dans des pratiques de mesurage, d'opérations sur les mesures en lien avec les opérations sur les grandeurs.

Un type de tâche privilégiée au grade 4 est par exemple le mesurage de la longueur d'un couloir d'une vingtaine de mètres, comportant des pans de murs en renfoncement. Cela nécessite la mesure de plusieurs segments au mètre-ruban et l'addition de ces mesures pour trouver la distance totale; cette addition met en jeu la somme de décimaux concrets (ex: 3 m et 15 cm s'écrit 3,15 mètres) à traiter à l'aide de la connaissance du système métrique (3,15 m + 4,89 m c'est en fait 3 m + 4 m = 7 mètres et 15 cm + 89 cm = 104 cm ; mais on sait que 104 cm c'est aussi 1 mètre et 4 cm (on peut le constater sur le mètre ruban) donc la longueur totale c'est 8 m et 4 cm, on peut l'écrire 8,04 mètres – pas de dizaine au nombre de cm). Cette fréquentation « pratique » du nombre décimal au grade 4 précède souvent l'introduction « formelle » de ces nombres au grade 5, par subdivision de segments sur la droite numérique.

Le point de vue pragmatique : difficultés de gestion didactique dans les premières approches de l'aire

J'en viens maintenant aux constats qui peuvent être faits sur la base de l'observation de l'action conjointe de professeurs et de leurs élèves, dans le cas de la mesure des aires. Je me référerai pour cela à deux activités scolaires prototypiques que j'ai observées pour aborder cette notion, en 4ème année d'école primaire.

- En France, il s'agit d'une séquence ERMEL CM1, intitulée « Ces rectangles ne manquent pas d'aires ». La séquence propose une progression qui repose sur la complexification des variables didactiques : il s'agit d'abord de comparer les « quantités de papier » de rectangles d'abord à vue, puis en les superposant et recomposant si besoin dans l'espace sensible (rectangles découpés et recollés). La grandeur « aire » est instituée comme équivalente à la notion de « quantité de papier ». Une fois cela fait, on aborde des méthodes dites de superposition et recomposition « fictives » lorsqu'il n'est plus possible de superposer les rectangles effectivement (recours au dessin géométrique). Il est précisé à l'enseignant que le recours au comptage d'unités d'aire n'est pas une attente dans cette séquence (cela fait l'objet de la séquence suivante, pour travailler la distinction aire-périmètre). Le cadre géométrique est explicitement privilégié.
- En Suisse romande, il s'agit d'une fiche d'activités des Moyens d'enseignement (grade 4) : « Du plus grand au plus petit ». Le problème demande de comparer et ordonner les aires de 13 polygones (carrés, triangles isocèles, triangle-rectangle, rectangles, parallélogrammes, trapèze) qui sont fournis prédécoupés. Aucune progression n'est proposée à l'enseignant; si ce n'est que la consigne fournie aux élèves comporte d'emblée le mot "aire" et que cela suppose un travail sur les figures "en aparté" de la consigne dans un premier temps, pour définir le type de tâche en jeu. Une grande diversité de procédures est possible, depuis le pavage de tous les polygones par le plus petit (triangle) pouvant servir d'unité, jusqu'aux procédés géométriques de superpositions et transformations, permettant de rechercher des inclusions entre les figures. L'enseignant a alors à sa charge de coordonner les différentes procédures pour aboutir à la sériation des aires.

L'observation de ces deux activités fait saillance parmi toutes les situations observées sur une année à propos de la mesure de différentes grandeurs (longueurs, masses, contenances, temps) car enseignants et élèves rencontrent des difficultés plus importantes que dans les autres cas. Pour certains élèves, il apparaît que les résultats obtenus par des manipulations dans l'espace concret ne sont pas nécessairement liés à la grandeur considérée. En quoi un rectangle totalement inclus dans un carré permet-il de dire quelque chose sur leurs aires ? Le constat d'inclusion ne vaut que s'il est relié à un discours qui institutionnalise la notion d'aire par une relation du type : « si une figure A peut être totalement incluse dans une figure B (soit par superposition directe, soit par découpage et recomposition), alors on peut dire que l'aire de A est plus petite que l'aire de B ». Toutefois, lorsqu'elle est institutionnalisée, cette relation n'est pas facilement reconvoquée lorsque les figures ne sont plus déplaçables (travail sur dessin); pour les élèves, la technique de superposition et recomposition (et les résultats permis par cette technique en terme de comparaison d'aire) reste contingente à la situation de manipulation dans l'espace sensible. Dans le même temps, d'autres élèves recherchent des solutions numériques pour attester de ce qui est « plus grand » ou « plus petit ». Quel statut donner à ces procédures numériques par rapport aux manipulations dans l'espace concret ? Ces observations révèlent que la gestion didactique de la définition de l'aire est délicate avec des élèves de 9 ans.

- Si le dispositif didactique essaie de se fonder dans une dialectique d'action, formulation, validation, propre à faire évoluer le statut des connaissances construites7, on remarque que la description des superpositions et transformations de figures est un obstacle sérieux au fonctionnement de la situation. Les élèves ne disposent pas d'outils géométriques suffisants (propriétés des figures; repères pour dénoter les transformations) pour formuler les opérations concrètes qu'ils réalisent; on peut « montrer », mais on ne peut pas construire un discours sur la procédure. Cela continue à renforcer l'effet de contingence des résultats obtenus. La difficulté s'accroît lorsque les figures ne sont plus manipulables dans l'espace concret et qu'il faut reporter les longueurs des côtés d'une figure sur les côtés d'une autre pour les comparer.

– Le « nombre » est un outil culturel bien installé au grade 4. Les élèves ont déjà rencontré des situations de dénombrement de carrés dans un rectangle (ou de mailles dans un réseau). En Suisse, cela reste un moyen privilégié pour introduire la table de Pythagore (construction de différentes « couvertures » à l'aide d'un même nombre de carrés donnés – une situation provenant des anciens Moyens d'enseignement, jugée efficace par les enseignants). En France, mais aussi en Suisse, cela apparaît dans nombre d'exercices sur la multiplication : dénombrer des carrés ou des mailles dans une figure rectangulaire (ex: Cap Maths CM1 p31), voire dans une figure décomposable en plusieurs rectangles (ex : Corome, grade 4, Grand L, p174 et Sous Pli, p194). En France, cela peut apparaître aussi à l'occasion de la construction des fractions (progression proposée dans « J'apprends les maths » CM1, p90-102, qui se prolonge par le découpage effectif de rectangles en portion égales recomposables, pour traiter de l'égalité des « étendues » ou aire). Dans la réalité de la progression en classe au fil de l'année, on se rend compte que certains élèves sont à même de reconvoquer des techniques de fractionnement des côtés des rectangles créant un quadrillage ou application d'un quadrillage par transparence (avec plus ou moins de maîtrise de l'opération de dénombrement), comme outils de mesurage de « l'étendue » ou « surface » qu'il leur est demandé de comparer.

Un constat assez général peut-être fait, à la fois dans les classes françaises et suisse-romande observées : les élèves recherchent une mathématisation des problèmes qui leur sont soumis, mathématisation dans le domaine numérique qui peut aller au-devant du projet didactique. Je l'attribue au fait qu'en 4ème année, les élèves ont déjà intégré une culture mathématique assez développée pour imaginer qu'une comparaison de « ce qui se voit » ne suffise pas à satisfaire l'enquête qui leur est proposée. Certes, ce n'est pas le cas de tous élèves. Les cas les plus « remarquables » sont bien sûr ceux qui proposent d'emblée des techniques pertinentes pour la mesure de l'aire par un dénombrement sur quadrillage ou le produit des longueurs directement, ou un mixte des deux. Toutefois, vu sous l'angle des pratiques culturelles liées au nombre, parmi ceux qui calculent le « périmètre », certains ne recherchent pas nécessairement la mesure du « tour » de la figure, mais une technique pour évaluer « la surface occupée », technique qu'ils ne maîtrisent pas encore. La procédure qui consiste à faire la somme de deux côtés et à la multiplier par deux (technique dite du « ½ périmètre ») peut aussi être vue comme un théorème en acte (au sens de Vergnaud) dans une tentative « manquée » d'utiliser une technique calculatoire qui permette de quantifier cette "place occupée" par le rectangle.

Il est évident que l'attribution d'un nombre à un objet ne suffit pas à généraliser la notion grandeur comme classe d'équivalence sur des objets, surtout dans le cas où des objets appartenant à une même classe de grandeur peuvent avoir des formes géométriques différentes (et je rejoins en cela l'hypothèse de Perrin-Glorian, 1992). Mais les observations de classe m'amènent à dire que la notion de grandeur se construit avec les élèves de l'école primaire, dans des opérations de comparaisons garanties par des techniques de mesurage (mesures à l'aide d'une unité pré-définie). Le nombre concret (8 carrés) fait « mémoire » de la grandeur manipulée, et partant, il permet de la désigner, de la communiquer et de la confronter à d'autres, selon le même procédé de dénombrement. Cette hypothèse fait écho aux résultats d'une recherche développementale menée par Fluckiger & Brun (2005), et à laquelle j'ai participé, concernant la mesure des longueurs. Fluckiger et Brun mettent en évidence que les invariants conceptuels de la mesure des longueurs[8] se construisent en même temps que les unités se constituent en systèmes, pour le sujet, à travers les pratiques d'usage. Grâce à une étude longitudinale menée avec des élèves de grades 2 à 5 (équivalent CE1-CM2), ces chercheurs constatent que les comparaisons de distances à l'aide de mesurants non conventionnels (baguettes) qui doivent être mis en rapport pour déduire la mesure des distances à comparer, n'est valide qu'à partir des grades 4 et 5. Auparavant, les élèves restent centrés sur des estimations des longueurs de baguettes à l'aide des unités conventionnelles, qui elles sont bien prégnantes dans les pratiques culturelles et scolaires. Ce n'est qu'ensuite, que peut se produire leur « désinvestissement » au profit d'une généralisation, qui s'observe dans des productions argumentatives de plus en plus denses, pour comparer les distances sur la base des nombres de reports de baguettes.

De mon point de vue, les deux processus (définition des procédés de mesurage numériques et définition de la grandeur comme classe d'équivalence par des opérations sur les objets géométriques) sont nécessaires et complémentaires. Leur « déconnexion » dans une progression (par une séquentialisation trop rigide des opérations sur les objets précédant les procédés numériques) semble produire des obstacles dans la gestion didactique en 4ème année de primaire[9]. Dans le cas de l'aire (contrairement aux autres grandeurs), il n'existe pas d'instrument donné par la culture; le travail des techniques de mesurage (engageant le principe fondamental d'un agencement et somme d'unités) est alors un moyen de faire exister concrètement cette grandeur pour les élèves. Le quadrillage peut prendre le statut d'instrument de mesure pour donner du sens aux manipulations géométriques (ex : « par superposition et recomposition, la figure A peut être complètement incluse dans la figure B et par comptage d'unités, on constate qu'il y a moins d'unités dans A que dans B » ; ou encore « Si je superpose A sur B en les ayant pavés avec la même unité ; je compare 8 carreaux de A qui dépassent de B et 12 carreaux de B qui ne sont pas recouvert par A »). Les observations conduites en classe ordinaires montrent que les techniques géométriques de superposition – recomposition pour montrer l'inclusion doivent faire l'objet d'un travail explicite de mise en relation avec les techniques numériques du comptage d'unités d'aire (évoluant vers le produit des mesures des cotés des rectangles), car ces deux approches s'informent mutuellement pour construire la notion d'aire.

Une étude des problèmes posés par l'enseignement / apprentissage de l'aire, parmi les problèmes de mesure des différentes grandeurs les plus courantes à l'école primaire, en « visitant » différents points de vue, conceptuel et anthropologique, semble fructueuse. Il existe toute une littérature anglo-saxonne sur les manipulations des unités (« unitizing ») dans le cas des longueurs (Barrett & Clements, 2003) mais aussi des aires (Outhred & Mitchelmore, 2000) qui sensibilisent aux contraintes qui pèsent sur la généralisation des opérations de dénombrement sur les grandeurs, et qui finalement nous rappelle qu'une mesure est le compte rendu des opérations sur une collection (ou une grandeur), selon la formule de Lebesgue (1975). Selon nous, il y a matière à saisir le problème cognitif de la mathématisation des grandeurs dans son contexte anthropologique d'émergence (tel qu'il se révèle dans les pratiques de classes, qui se font elles-mêmes l'écho d'un problème culturel), et pas seulement d'un point de vue psychologique (c'est à dire interne à l'élève), ni seulement d'un point de vue mathématique (axiomatique des grandeurs).

Quelques recommandations sur les ressources pour enseigner à la lumière des observations dans les classes.

Il est primordial que les professeurs gardent la responsabilité de construire et agencer la progression des enseignements dans leur classe, en choisissant les ressources qui conviennent à un projet d'enseignement fondé dans des notions à enseigner désignées par les instructions officielles. Une standardisation des ressources pour enseigner peut paraître un bon moyen de faire pénétrer rapidement certaines innovations voulues à un moment donné ou bien faisant gagner du temps de formation, en contrôlant comment les savoirs sont enseignés dans les classes mais cela a des effets pervers. Cela réduit la responsabilité des professeurs et donc leur engagement dans l'analyse des ressources disponibles afin de les sélectionner et les coordonner entre elles (réduction de la vigilance épistémique sur le contenu des activités). Le contrôle et l'uniformisation des modalités pédagogiques d'enseignement est l'un des aspects les plus problématiques des Moyens d'enseignements officiels en Suisse-romande. Côté français, le recours aux « fichiers » proposés par les éditeurs commerciaux pour les classes du primaire produit le même effet d'enfermement car l'enseignant perd la maîtrise de la progression.

L'évolution des pratiques effectives dans les classes dépend de l'intensité de la formation initiale des enseignants bien évidement, mais aussi de la possibilité pour les enseignants en poste de développer l'étude des activités pour enseigner à partir des ressources disponibles, mais aussi des analyses de pratiques croisées au sein de collectifs d'enseignants (animés par des formateurs ou des chercheurs) sur la base d'enregistrements vidéo. Les travaux que je mène dans le réseau Maison des petits à Genève10 exploitent ces modalités depuis quatre ans, nous constatons que cela a des effets concrets sur la manière dont enseignants repèrent et utilisent les variables didactiques dans les ressources pour enseigner.

La possibilité d'accroître la qualité de l'enseignement mathématique passe par une mise en cohérence des ressources existantes pour reconstruire des formes de progressions dans les savoirs qui ont été « endommagées » dans les réformes successives. Il y a certes le problème de la reconstruction des « chaînes trophiques » telles que Chambris (2010) le pointe, mais plus généralement, il faut aussi être vigilant sur la mise en forme des savoirs à enseigner dans les ressources à disposition des enseignants (Ligozat, 2010). En Suisse romande, la post-réforme de la fin des années 90 a produit un éclatement des types de tâches qui fondent les mathématiques de l'école primaire, dans un ensemble de fiches d'activités de recherche utilisables « à la carte » au fil de l'année. Dans ces conditions, les éléments d'organisation entre les situations disparaissent aux yeux de l'enseignant. Dans le cas de la séquence ERMEL « Ces rectangles ne manquent pas d'aire », il y a certes des difficultés conceptuelles liées à une chronologie des techniques devant être développées, mais par ailleurs la complexification progressive d'un type de tâche (comparaison de rectangles) par le changement des variables didactiques permet de guider la problématisation et faire émerger la nécessité de relier les résultats permis par les techniques géométriques et ceux permis par les techniques numériques pour comparer des aires. A contrario, les Moyens d'enseignement suisse-romands proposent des problèmes « complexes », dont la responsabilité de la structuration est entièrement laissée à l'enseignant. Si, sur le plan mathématique, le problème est intéressant (souvent potentiellement porteur d'un PER au sens de Chevallard – cf. Ligozat 2012), en pratique la responsabilité de la structuration est trop lourde à porter du point de vue de chaque enseignant ; le problème est alors traité a minima, parce qu'il est donné entier à l'élève. Je considère que le risque de ce genre de dérive doit être pris au sérieux avec la montée en puissance du discours sur la nécessité d'engager les élèves dans des démarches d'investigations scientifiques (ou Inquiry Based Leanring), qui tendent à privilégier les manières de l'activité sur les savoirs à apprendre.

Bibliographie

Références scientifiques

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Brochure de l'IREM de Bordeaux.

Barrett, J. E., & Clements, D. H. (2003). Quantifying Path Length: Fourth-Grade Children's Developing Abstractions for Linear Measurement. Cognition and Instruction, 21(4), 475-520.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20ème siècle: théorie et écologie. Recherches en Didactique des Mathématiques, 30(3), 317-368.

Clements, D. H. & Brights, G. [Eds] (2003) Learning and teaching measurement. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fluckiger, A. & Brun, J., (2005). Conceptualisation et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure. Recherches en didactique des mathématiques, 25 (3), 349-401

Lebesgue, H., (1931/1975). La mesure des grandeurs. Paris: Blanchard. [articles originaux parus dans le Bulletin de l'enseignement mathématique, 1931-1935].

Ligozat, F. (2008). Un point de vue de didactique comparée sur la classe de mathématiques. Étude de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement / apprentissage de la mesure des grandeurs dans des classes françaises et genevoises. (thèse de doctorat en sciences de l'éducation). Université de Genève & Université de Provence, Genève & Marseille.

Ligozat, F. (2010). Les textes de l'activité mathématique scolaire. Préconstruits et ressources dans la genèse des formes de l'action didactique. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Éd.), Ressources Vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques (PUR & INRP., p. 303-320). Rennes & Lyon.

Ligozat, F. (2012) La démarche d'investigation dans les moyens d'enseignement suisse-romands pour les mathématiques? Modéliser les conditions de l'enquête didactique. Texte d'une communication au colloque EMF, GT, 10, 3-9 février.2012, Genève

Outhred, L. N., & Mitchelmore, M. C. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. Journal for Research in Mathematics Education, 31(2), 144-167. doi:10.2307/749749

Perrin-Glorian, M. J. (1992). Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème. Thèse de doctorat d'état. Université Paris 7

Rouche, N., (1992). Le sens de la mesure. Bruxelles: Didier HatierBrissiaud, R., Clerc, P., & Ouzoulias, A., (2001). J'apprends les maths, CM1. Livre de l'élève et livre du maître. Paris : Retz.

Textes et ouvrages institutionnels

CDIP / SR+TI (1997). Plan d'étude romand de mathématiques. Degrés 1 à 6. Neuchâtel : Institut de recherche et documentation pédagogique.

Charnay, R., Combier, G. & Dussuc, M.-P., (2003). Cap Maths, CM1. [Livre de l'élève et livre du maître]. Paris : Hatier.

Chastellain, M. & Jacquet, F. / COROME (2001). Mathématiques (5ème et 6ème année). [Livre de l'élève, Fichier de l'élève et Livre de Maître] Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement (IRDP).

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. / COROME (1999). Mathématiques (3ème et 4ème année primaire). [Livre de l'élève, Fichier de l'élève et Livre de Maître] Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement (IRDP).

ERMEL / INRP (1997/2001/2005). Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM1. [Livre du maître] Paris : Hatier.

Gagnebin, A., Guignard, N. & Jacquet, F. / COROME (1998). Apprentissage et enseignement des mathématiques. Commentaires didactiques sur les Moyens d'Enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire. Neuchâtel : Commission Romande des Moyens d'Enseignement (IRDP).

M.E.N. [Ministère français de l'Éducation nationale], (2002a). Qu'apprend-on à l'école élémentaire? Programmes de 2002. Paris : Scéren / CNDP

M.E.N. [Ministère français de l'Éducation nationale] (2002b). Mathématiques, Cycle 3. Documents d'application des programmes. Paris : Scéren / CNDP.

Notes :

1 Si les notions et compétences à enseigner sont définies dans un "plan d'études" comportant un diagramme des attentes pour chaque de degré, le contrôle de l'enseignement se prolonge par la définition d'un corpus commun de ressources institutionnelles pour enseigner, corpus construit par une commission d'experts mandatés par la Conférence intercantonale des directeurs de l'instruction publique.

2 Ces références correspondent à l'époque où j'ai réalisé mes observations dans les classes (entre 2003 et 2005). Depuis d'autres programmes sont entrés en vigueur en France en 2008, et un nouveau plan d'étude est apparu en Suisse romande en 2011.

3 Notons que cette progression a disparu dans les programmes de 2008, ce qui est regrettable car elle met en lumière des types de tâches importants pour faire manipuler des aires aux élèves en tant que grandeur peu accessible dans la vie courante.

4 Gagnebin, Guignard, Jacquet, 1998; Chapitre 10 - la mesure et le mesurage, p153-161

5 C'est un cas concret de ce que Chambris (2008) nomme "savoirs savants de deuxième ordre".

6 Ce qui est somme toute assez proche des recommandations de Lebesgue (1935), pour qui la théorie des fractions n'est pas indispensable dans l'enseignement obligatoire.

7 Dialectique mise en évidence en Théorie des Situations Didactiques par G. Brousseau, qui influence fortement l'esprit des séquences ERMEL.

8 Fluckiger & Brun (2005) dégagent quatre dimensions relatives à la conceptualisation de la mesure des longueurs (quantification associé à la mesure, comparaison par report d'une longueur de référence, fractionnement via une longueur de référence, constitution d'une unité stable) qui se construisent en interaction et non pas dans une succession temporelle. Ils ajoutent que l'idée que "mesurer, produire un nombre" est présente dès les premiers degrés de l'école et que cela s'exprime en situation de comparaison par l'énonciation de la comptine numérique, avant même qu'il y ait des tentatives d'isolement d'une unité adéquate.

9 Ce qui est sans doute différent pour les comparaisons d'objets avec des enfants plus jeunes, qui ne disposent pas encore de l'outil nombre. Alors que les comparaisons à vue de longueurs peuvent être pertinentes pour des élèves de classes enfantines, il se pourrait que la culture mathématique dont dispose les plus grands, rende moins pertinente une entrée par des comparaisons perceptives pour les aires. Ayant intégré l'intérêt ou l'économie du nombre dans la comparaison de collections, il ne serait pas surprenant que les élèves essaient de le reconvoquer d'une manière ou d'une autre dans le "nouveau cas" de comparaison qui leur est soumis. Du fait de l'approche "tardive" des aires dans le curriculum, on ne pourrait plus reproduire le même type de genèse didactique que pour les longueurs.

10 Le Réseau « Maison des petits » réunissant des chercheurs et des enseignants du cycle 1 de l'école genevoise (équivalent MS à CE1) autour de la conception, mise en œuvre et analyse de séquences didactiques pour enseigner le dénombrement et la numération de position, mais aussi les prémices du raisonnement scientifique à travers l'exploration de phénomènes physiques accessibles à de jeunes élèves (flottaison des corps, équilibres, mélanges et solutions) et également la compréhension en lecture dans le cadre de la maîtrise de la langue. Ce contexte de recherches coopératives et co-disciplinaires fournit un observatoire des pratiques didactiques au début de la scolarisation, mais il permet aussi d'étudier les conditions de développement professionnel des enseignants au contact de la recherche.

3.9 Quelques réflexions sur l'enseignement des grandeurs, des relations entre grandeurs et nombres, voire des nombres à l'école primaire

Mots-clefs : mesures, nombres, grandeurs, opérations, école, collège, enseignement, programme, didactique

Christine Chambris, Maître de conférencesUniversité de Cergy-Pontoise IUFM / Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Denis Diderot-Paris 7

Éléments pour un état des lieux des relations en grandeurs, nombres et opérations

Pour établir un état des lieux des relations en grandeurs, nombres et opérations dans l'enseignement primaire actuel, il me semble important de considérer que ces relations résultent de diverses transformations opérées dans la société depuis 150 ans (Chambris 2010), notamment :

- l'évolution des pratiques de la vie courante qui implique les grandeurs (notamment les techniques de mesurage sans « étalon » de masse ou de capacité, les achats « à l'unité » dans des emballages qui prennent en charge la capacité ou la masse – pack de lait, plaquette de beurre...),
- les relations entre nombres et grandeurs dans les mathématiques savantes (suppression des grandeurs dans la définition savante des nombres depuis le milieu du 19e siècle),
- les changements opérés dans l'enseignement au moment crucial de la réforme des mathématiques modernes (programmes de 1970 en primaire en France) et leurs conséquences jusqu'à aujourd'hui.

Voici quelques éléments concernant la réforme et ses suites. Elle se manifeste par une modification des savoirs de référence et de leur nature que j'interprète comme un écho aux transformations dans les mathématiques savantes du 19e siècle. Ceci a deux conséquences :

- le programme de 1970 qui est une réorganisation du programme de 1945 comporte un nouveau domaine : « mesure ». Ce domaine contient ce qui relevait du continu tant en arithmétique qu'en géométrie dans l'ancien programme – sauf la proportionnalité qui est intégrée au « numérique ».
- à court terme, on observe des ruptures dans des relations installées depuis longtemps entre objets dans l'enseignement, en particulier entre numération et système métrique, opérations et grandeurs, techniques de calcul et sens des opérations.

Savoirs de référence

Pour préciser les modifications dans les savoirs de référence, je définis deux types de savoirs mathématiques :

- les savoirs savants du premier ordre, ce sont les savoirs utiles pour les mathématiciens, mais pas nécessairement adaptés pour l'enseignement primaire,
- les savoirs savants du second ordre, ce sont des savoirs mathématiquement corrects, utiles pour l'enseignement, mais pas nécessairement utiles pour les mathématiciens. Je fais entrer les travaux de Rouche sur les grandeurs (1992, 1994, 2006) dans ce cadre.

Voici deux exemples repris par la suite. Le premier concerne les fractions : définir un rationnel comme classe d'équivalence d'un couple d'entiers est un savoir savant du premier ordre, définir un rationnel à partir des opérateurs de fractionnement sur une grandeur (un enchaînement d'une multiplication et d'une division d'une grandeur par un entier) (Rouche 1992) est un savoir savant du second ordre. Le deuxième exemple concerne la numération des entiers. Le savoir savant du premier ordre réside dans l'existence et l'unicité de la décomposition polynomiale d'un entier dans une base. Les traités de Bezout et Reynaud (1821) contiennent des « théories » de la numération – des savoirs savants du second ordre – où interviennent les différents ordres d'unité (unité, dizaines, centaines, milliers...) que j'appelle aussi les unités de numération.

Au cours de la réforme, on observe une bascule des savoirs de référence : les anciens savoirs du second ordre (éventuellement caduques) sont remplacés par des savoirs du premier ordre. Depuis la réforme, il y a eu peu d'évolution explicite des savoirs savants de référence pour le primaire (sauf pour le domaine mesure qui est notamment relié aux grandeurs repérables et mesurables de la physique en 1980). En revanche, il y a une pénétration plus ou moins explicite (mais de plus en plus nette) des grandeurs dans le domaine numérique : fractions en 1980, proportionnalité en 2002.

Relations entre objets d'enseignement : le système métrique

À travers des manuels scolaires, j'ai étudié l'enseignement des grandeurs (longueurs, masses, capacités) au cours élémentaire. Avant la réforme (Chambris 2009), j'ai identifié un maillage serré entre numération et système métrique : ce dernier apparaît comme un contexte de l'étude de la numération. Certains types de tâches et leurs techniques de traitement sont communs aux deux thèmes. Elles reposent sur les « unités de numération ». J'ai aussi relevé une utilisation « scolaire » des instruments de mesure « de la vie courante » qui contribue à la conceptualisation des grandeurs (pour mesurer trois mètres, reporter trois fois un mètre, plutôt que lire 3 m sur un décamètre). Le maillage entre numération et système métrique ne survit pas à l'introduction du travail en bases au moment de la réforme. Le système métrique vit ensuite dans le nouveau domaine mesure et la numération dans le « nouveau » domaine numérique.

Depuis 50 ans, l'enseignement du système métrique est relativement stable (avec un appauvrissement probable) comparativement à celui de la numération : certaines tâches « anciennes » de « numération » ont survécu dans l'étude du système métrique (les relations entre unités) alors qu'en « numération » ces tâches ont disparu et de nouvelles tâches ont été introduites (notamment le dénombrement de grandes collections). Les représentations des nombres « en unités de numération » ont plus ou moins disparu de l'enseignement de la numération au profit de représentations en « écritures chiffrées des puissances de dix » (5x1000+4x10, plutôt que 5 milliers 4 dizaines) alors que les écritures correspondantes en unités métriques (5 km 4 dam) ont perduré malgré un enseignement devenu probablement marginal de la signification des préfixes métriques.

Plus précisément, les unités de numération vivent très mal dans l'enseignement actuel :

- la seule unité est le « nombre 1 »,
- ces unités de numération survivent dans le tableau de numération et quelques décompositions réglées dont « chiffre des », « nombre de »,
- les relations entre unités « 1 millier = 10 centaines » ne sont pas systématiquement formulées dans les manuels.

Le problème « Combien peut-on faire de paquets de 100 avec 6543 jetons ? » qu'on peut résoudre avec cette relation est considéré comme un problème de division par les enseignants et est massivement échoué avant l'apprentissage de la division par un nombre à 3 chiffres (Parouty 2005).

Savoirs de référence, relations : opérations sur les grandeurs

Il n'y a pas d'opération sur les grandeurs dans les savoirs du premier ordre pour le « numérique ». En revanche, il y en a dans ceux du second ordre, notamment les fractions de grandeurs. Elles ont un rôle dans la construction des nombres non entiers. Avec les opérateurs de fractionnement par exemple, les propriétés des nombres découlent des propriétés des grandeurs. En particulier, ces opérateurs de fractionnement sur les grandeurs précèdent les nombres rationnels : savoir partager une longueur en 4, prendre 3 fois une telle longueur et aussi prendre 3 fois une longueur puis le quart du tout, puis 3 quarts d'une longueur, 6 huitièmes de la même longueur, ensuite définir le nombre ¾. Des fractions de grandeurs peuvent aussi intervenir dans les techniques d'autres thèmes, notamment dans certaines utilisations de la linéarité (isomorphisme de grandeurs) dans l'étude de la proportionnalité. Considérons le problème : « En marchant à vitesse régulière, on parcourt 900 m en 20 min. Quelle distance parcourt-on en 15 min ? » On peut dire que 15 min ce sont 3 quarts de 20 min, donc comme on parcourt 900 m en 20 min, à la même vitesse, on parcourt 3 quarts de 900 m en 15 min ce qui peut aussi s'écrire : 900 m x¾.

Des pistes pour aboutir à un meilleur apprentissage ?

Sur la numération (et le système métrique)

Une première piste pourrait être de « réhabiliter » les unités de numération et le travail des relations entre ces unités. Utiliser le système métrique pour restaurer unités de numération et introduire des tâches clés est peut-être un levier. C'est une des hypothèses que j'ai faite pour écrire le texte « Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs » (Chambris à paraître), destiné à accompagné les programmes de primaire. Voici quelques choix effectués pour l'écrire :

- expliciter un parallèle entre numération et système métrique en mettant en évidence des « techniques communes » de traitement pour des tâches relevant les unes de la numération, les autres du système métrique ;
- utiliser explicitement les unités de numération pour décrire des éléments du système métrique (Un kilomètre, c'est un millier de mètre. Un hectomètre, c'est une centaine de mètre. Un mètre, c'est une centaine de cm.) ;
- « valoriser » les unités de numération pour le travail de la numération… en proposant des tâches et des techniques de traitement qui en utilisent.

Certaines tâches qui font travailler les relations entre unités existent en système métrique et pas en numération, le texte décrit l'intérêt de certaines d'entre elles, par exemple : convertir 3 milliers en centaines (convertir 3 km en hm) ; comparer 4 dizaines et 3 centaines (comparer 4 dm et 3 m). Les tâches du type convertir 3 milliers en centaines et 30 centaines en milliers sont en effet cruciales car elles interviennent – sous des formes diverses – dans de nombreux domaines : nombres entiers, décimaux, système métrique, calcul mental... Sans doute faut-il aussi développer d'autres moyens pour agir sur l'enseignement de la numération.

Sur les opérations sur les grandeurs

Une autre piste consiste à réintroduire explicitement des opérations sur les grandeurs tant en terme d'action sur les objets matériels qu'au niveau du symbolisme arithmétique (900 m x). Ceci passe notamment par l'enseignement de la multiplication d'une grandeur non mesurée (puis mesurée) par un entier, par la division d'une grandeur non mesurée (puis mesurée) par un entier, puis le fractionnement de grandeurs, et aussi par l'addition des grandeurs.

Dès le cycle 2, notamment pour la longueur, en relation avec le lexique : moitié, double, tiers, triple, quart… de telles opérations peuvent être enseignées, des tâches d'estimation notamment (cf. point suivant). Plus tard, on peut apprendre 3 quarts d'une longueur, 7 cinquièmes d'une longueur, d'une masse...

À un moment, ces opérations sur les grandeurs, doivent être reliées aux opérateurs sur les nombres (le tiers de 60).

Les tâches d'estimation

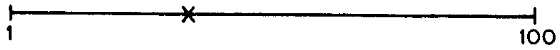
Une autre piste concerne les tâches d'estimation. Il existe une grande diversité de telles tâches. Elles sont peu répandues dans l'enseignement français, souvent évoquées dans les travaux internationaux au sujet du « number sense ». Les tâches d'estimation combinent souvent une (ou plusieurs) estimation(s) simple(s) de grandeur(s) et du calcul.

On peut estimer en unités conventionnelles. Cette dimension est présente dans (Chambris à paraître). Un travail relativement systématique sur la grandeur des différentes unités métriques y est suggéré, conjointement à la mise en relation des unités. L'unité peut être imposée ou au choix. Pour estimer en mm la longueur du trait ci-dessous, la mise en relation des unités métriques est nécessaire.

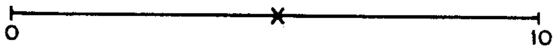
Pour travailler les fractions de grandeurs, à partir d'un trait déjà là, on peut demander de tracer un trait de longueur moitié, 5 quarts… (et de vérifier en pliant, par exemple).

Mon expérience de formateur me porte à croire que l'incompréhension de ce qu'est l'unité sur une droite graduée constitue une entrave majeure à l'utilisation de cet outil dans l'enseignement des nombres et des opérations. Je ne connais qu'un manuel actuel de primaire (Euro Maths, Hatier, CM1) qui prenne en charge cette question. Placer des points d'abscisses entière ou rationnelle sur une droite graduée (ou déterminer – sans instrument de mesure – les abscisses de points déjà placés) me semble pourtant être un moyen assez puissant pour travailler les estimations de longueurs et les opérations sur la grandeur longueur. Voici aussi quelques exemples de tâches (évaluatives) tirées de (Stigler et al. 1990, p. 55).

4. a. "Look at this line. This is 1 and this is 100. What number do you think X is?"



b. "Here is another line. This is 0 and this is 10. What number do you think X is?"



Pour la recherche

Sur les savoirs savants du second ordre

Une hypothèse est que fonder l'enseignement sur des savoirs du second ordre, communs à l'école et au début du collège, est une condition favorable pour agir sur la continuité des apprentissages (ce n'est pas une condition suffisante…). En effet, un tel choix pourrait notamment avoir les conséquences suivantes :

– produire davantage de repères partagés entre les enseignants, les formateurs des deux institutions ;

– la référence à de tels savoirs peut permettre de « ne pas oublier d'enseigner » certaines choses importantes (telles par exemple les relations entre unités en numération) ;

– contribuer à l'élaboration de progressions.

À titre exploratoire, (Chambris à paraître) est structuré par une théorie de la numération du second ordre, mais ce n'est pas explicite dans le texte.

Même si des variations importantes sont possibles dans le choix des savoirs de référence, les textes officiels récents ont pris des options assez nettes sans, la plupart du temps, référer explicitement à des « savoirs mathématiques de référence ». Quels savoirs mathématiques (du second ordre) retenir ou expliciter ? Du point de vue de la formation des enseignants, la mise en évidence de tels savoirs pourrait être favorable à la continuité des savoirs entre la formation théorique (pour les concours) et les savoirs pour l'enseignement. Cette hypothèse n'est pas incompatible avec des travaux récents sur l'impact mitigé voire négatif des mathématiques « académiques » dans la formation des enseignants (Moreira & David 2008, Proulx & Bednarz 2010). Quelles sont les possibilités (compte-tenu notamment des contraintes institutionnelles), quel serait le gain à former sur les questions théoriques en référence à des savoirs savants du second ordre pour les enseignants du 1er degré ? Du second degré ?

Quelle place donner à ces savoirs de référence dans les ressources pour les enseignants du primaire et du secondaire ? Dans les ressources pour les formateurs ? Dans quel type de ressources ?

Sur les relations entre conceptualisation des grandeurs et instruments

Une autre dimension des questions de recherche sur le thème des grandeurs me semble devoir être liée aux relations entre conceptualisation des grandeurs et pratiques de la vie courante impliquant les grandeurs, notamment les instruments. C'est un autre objectif de (Chambris à paraître) que de tenter une articulation entre les deux. Que l'enseignement des instruments de mesure ne se limite à l'enseignement de gestes est important d'une part car le temps d'enseignement n'est probablement pas suffisant pour assurer une maîtrise suffisante des gestes, d'autre part car les instruments de mesure, notamment analogiques, incarnent des propriétés conceptuelles des grandeurs dont il est dommage de se passer lorsqu'elles se manifestent.

Par exemple, les dernières évaluations CM2 montrent que beaucoup d'élèves n'interprètent pas comme il le faudrait la position de la petite aiguille sur une horloge analogique : apparemment, ils lisent 3h55 (car la petite aiguille est presque sur le 3) au lieu de 2h55 (ou « 3h moins 5 »). Ce constat amène plusieurs remarques et questions :

Cette erreur n'existait peut-être pas dans les proportions actuelles il y a quelques années car les horloges (et les montres) à aiguilles étaient le seul moyen de connaître l'heure. Elle est probablement due à l'absence de perception de la continuité du déplacement de la petite aiguille au fil du temps et aussi au fait que la lecture de l'heure sur une horloge à aiguille n'est plus une connaissance sociale critique (en tout cas en fin de CM2).

Faut-il encore enseigner aux élèves de primaire à lire l'heure sur une horloge à aiguille ? Si oui, pourquoi ? Et comment ? Peut-on mieux cerner le rôle que joue cet instrument dans la conceptualisation des durées ? Et aussi, comment enseigner la lecture de l'heure pour qu'elle soit favorable à la conceptualisation des durées ?

Il me semble que l'enjeu de ces questions réside dans l'articulation entre l'enseignement des pratiques de la vie courante impliquant les grandeurs et de ce qui vise la conceptualisation des grandeurs dans l'enseignement. On peut le voir comme un problème d'écologie des savoirs (Chevallard 2007), c'est-à-dire de relations entre objets d'enseignement : il faudrait concevoir des tâches et des progressions qui tout en impliquant des pratiques de la vie courante (relatives aux grandeurs) participent de la conceptualisation des grandeurs.

Plus généralement, eu égard à des considérations notamment d'ordre développemental, pragmatique, cognitif, mathématique, écologique... (cf. textes de F. Ligozat et M.J. Perrin), une question de recherche importante qui rassemble les trois interventions est sans doute « comment et à quel moment de la scolarité intégrer de façon optimale l'usage des instruments de mesure et des unités métriques – notamment les estimations – dans des progressions visant la conceptualisation des différentes grandeurs et plus généralement l'apprentissage des opérations sur ces grandeurs nécessaires entre autres aux apprentissages des quatre opérations, des fractions et de la proportionnalité ? »

Sur les ressources

Pour terminer, j'évoque la question des ressources. Même s'il en existe d'autres, je me place dans la perspective de ressources visant à la diffusion de résultats de recherches plus ou moins récentes. Une question importante est : de quelles ressources les enseignants ont-ils besoin pour faire évoluer leurs pratiques liées à grandeurs et mesures ? Elle se décline en « sous » questions :

Que mettre dans les ressources ? Jusqu'où la réponse à cette question dépend-elle du cadre théorique que le chercheur / concepteur de la ressource utilise ?

Comment élaborer les ressources ? Quelle place pour les enseignants dans cette élaboration ? Quelles collaborations entre enseignants – formateurs – chercheurs – inspecteurs ?

Comment les enseignants s'approprient-ils les ressources ? A quelles conditions sont-elles des facteurs de développement ? Quels dispositifs de formation sont-ils les plus pertinents pour accompagner les ressources ?

Pour écrire mon « texte ressource » (Chambris à paraître), j'ai essayé d'utiliser quelques résultats de recherche sur ce qu'on sait de « comment se forment les pratiques ». Dans la mesure où il semble que, la plupart du temps, les pratiques ne se transforment pas « brutalement », j'ai essayé de donner la possibilité de modifications « locales » (par exemple, introduction de discours pour accompagner certaines techniques ou introduction de technique ou introduction de tâches...) tout en prenant en compte la cohérence globale d'un objet d'enseignement assez gros (l'enseignement du système métrique) et aussi ses ramifications (numération) (praxéologie locale, Bosch et Gascon 2005). J'ai aussi essayé de positionner le propos et les tâches « nouvelles » par rapport aux pratiques dominantes : ce qu'il faut garder, ce qu'on pourrait enlever et par quoi le remplacer. Une série de recherches à venir pourrait consister à étudier des effets de cette ressource sur les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves, et les conditions de ces effets (existence de ressource dérivée, accompagnement des enseignants...).

Bibliographie

Bezout E., Reynaud A. (1821) Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, 9e édition. Consulté sur Internet le 21 janvier 2012, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse. In Mercier et Margolinas (Eds) Balises en didactique des mathématiques. Cours de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In C. Ouvrier-Buffet & M.J. Perrin-Glorian (Eds.) (2009) Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques. (pp. 211–222) Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. Recherches en Didactique des Mathématiques, 30, 317–366.

Chambris (à paraître). Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Javier García F. (Eds.) Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico (pp. 705–746). Jaén : Servicio de publicationes – Universidad de Jaén.

Moreira P.C., David M.M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. Journal for Mathematics Teacher Education, 11(1), 23-40.

Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres (Cédérom). Toulouse : IREM de Toulouse.

Proulx J., Bednarz N. (2010). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana. 1(1)

Rouche N. (1992) Le sens de la mesure. Bruxelles : Didier Hatier

Rouche N. (1994) Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. Repères IREM 15 25–36.

Rouche N. (2006) Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions. Ellipses

Stigler J.W., Lee S.-Y. Stevenson H.W. (1990) Mathematical Knowledge. National Council of Teachers of Mathematics.

3.10 « Résolution de problèmes » : mettre l'accent sur les démarches spécifiques aux mathématiques

Mots-clefs : problèmes, curriculum, formation, didactique

Cecile Ouvrier-Buffet, MCF, IUFM de Versailles, Université de Cergy Pontoise

Un constat pragmatique

Les professeurs des écoles ne peuvent bénéficier actuellement d'une formation (initiale et continue) abordant pleinement ce que revêt l'expression « résolution de problèmes ». Celle-ci apparaît pourtant en chapeau des programmes actuels : « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. ». Et c'est bien la démarche de résolution qui est visée ici, tout autant que le concept construit à l'issue de celle-ci. Cet ensemble d'apprentissages visés dans ce cadre relève d'un curriculum implicite, qui reste à définir. En effet, si l'apprentissage « en situation » a effectivement un sens en didactique des mathématiques, tous les concepts mathématiques ne peuvent prétendre à être enseignés par la résolution de problèmes. Par ailleurs, différents cas se présentent, en fonction des objectifs de ladite résolution de problèmes (s'approprier un savoir, construire de nouvelles connaissances, appréhender de nouvelles démarches et considérer leur portée, réinvestir certaines connaissances dans différentes configurations plus ou moins complexes, ou encore unifier un concept, etc.). Ce qui nous conduits nécessairement à considérer non seulement les concepts enseignés, mais aussi les démarches spécifiques aux mathématiques, dont l'une sera abordée plus particulièrement ci-après.

Un constat curriculaire

Les curricula, nationaux et internationaux, tentent de rapprocher les mathématiques et les sciences quant aux démarches « expérimentales » : similitudes et différences doivent être questionnées. On parle fréquemment de démarche d'investigation et d'expérimentation en sciences, mais en mathématiques, il est davantage question de démarche de recherche [voire de résolution de problèmes (chapeau encore plus large pouvant s'approcher du problem-solving)]. Dans les deux cas, les termes même de « démarche d'investigation » (il sera même question de « démarches d'investigation ») et « démarche de recherche » ne sont pas définis dans les curricula. Dans ce contexte, la polyvalence des enseignants reste à prendre en compte : comment les professeurs des écoles peuvent-ils acquérir une culture mathématique non seulement des concepts qu'ils enseignent mais aussi des démarches spécifiques aux mathématiques ? Leur polyvalence est-elle réellement un frein ? Du côté de la formation. De nombreuses questions se posent quand à la possibilité réelle de dégager un temps suffisant permettant d'appréhender, en formation initiale dans un premier temps, une formation effective aux démarches de recherche en mathématiques. En formation continue, une question plus spécifique encore apparaît : quelles sont les attitudes des enseignants face aux changements possibles de leur enseignement concernant la résolution de problèmes ? Un champ de recherche en didactique se dessine.

Des perspectives de travail

Les instructions officielles pourraient recentrer et expliciter les objectifs de la résolution de problèmes, en s'inspirant de la récente publication de l'UNESCO (2011) par exemple, et en identifiant précisément ce qui relève de l'école, ce qui relève du collège et ce qui est en jeu de manière cruciale dans la transition école-collège. Des compétences transversales (intra-mathématiques mais pouvant prendre une dimension transdisciplinaire) pourraient ainsi s'organiser autour des points suivants :

- maîtriser les formes caractéristiques de poser et résoudre des questions mathématiques ;
- pouvoir reconnaître, formuler et résoudre des problèmes mathématiques ;
- pouvoir comprendre, évaluer et construire des modèles mathématiques ;
- pouvoir suivre, analyser, évaluer et construire des raisonnements mathématiques ; -
- pouvoir manier diverses représentations de phénomènes mathématiques ;
- pouvoir manier les formalismes mathématiques ;
- pouvoir communiquer en mathématiques et à leur propos ;
- pouvoir utiliser les outils appropriés pour l'activité mathématique.

Dans ce contexte de travail, une (re)définition des types de situations permettant d'impliquer de telles compétences s'avère nécessaire. Celle-ci peut s'appuyer sur différents travaux en didactique des mathématiques s'intéressant à la résolution de problèmes (voir la synthèse historique et didactique de Coppé & Houdement, 2009), certes, mais plus précisément aux situations-problèmes, problèmes ouverts, situations de recherche en classe (voir par exemple la contribution de Denise Grenier), ateliers de recherche, activité de recherche et de preuve entre pairs, Activité d'Étude et de Recherche (AER) et Parcours d'Étude et de Recherche (PER) etc. La caractérisation de l'épistémologie sous-jacente aux démarches de recherche en mathématiques d'une part et à celle des démarches d'investigation en sciences d'autre part est à étudier, en particulier pour former des professeurs des écoles polyvalents. La question de la dévolution de situations impliquant des démarches spécifiques aux mathématiques se pose également, de même que les phases possibles d'institutionnalisation, ainsi que l'identification des apprentissages notionnels et transversaux que permet l'apprentissage de telles démarches. L'appropriation de ce thème par les enseignants, au-delà des mathématiques seules, reste à explorer, en classe et en formation, par la recherche.

Bibliographie

UNESCO (2011). Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base.

Coppé, S. & Houdement, C. (2009). Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaires et didactique. Actes du XXXVIème Colloque de la COPIRELEM, pp. 48-71.

3.11 Prolongements, perspectives et commentaires

Guy Brousseau, Prix Félix Klein pour ses travaux en didactique

Deuxième Niveau de propositions : aménagements, didactiques des mathématiques

Les deux propositions qui suivent demandent un effort plus grand que mes premières propositions, de la part des enseignants et de leurs encadrements, pour définir les pratiques les plus utiles et les plus compatibles avec les usages actuels.Elles sont compatibles aussi avec toutes les méthodes pédagogiques empiriques.

Réintroduire ou améliorer l'enseignement de la manipulation des applications linéaires naturelles puis rationnelles, à l'école primaire.

Cette réforme permettrait d faciliter l'apprentissage du traitement mathématique des rationnels en rendant claire la parenté mathématique entre les divers usages et apparences des fractions,spécifiques de ses nombreux champs d'application (taux échelles, grandeurs dérivées etc.) et de traiter ce sujet de façon aussi riche et plus économique. Le fait que les nombres, naturels, rationnels, etc. soient aussi des opérateurs a été trop longtemps occulté à l'école primaire et au collège1. Mais il ne serait pas raisonnable de faire payer davantage à nos enfants les nostalgies des restaurateurs de la pensée médiévale. Cet enseignement permettrait remplacer progressivement mais avantageusement celui des fractions.

Une seconde approche, dont il n'est pas question ici, conduirait à réformer divers aspects de l'enseignement des mathématiques des neuf ou dix premières années d'éducation. Il s'agirait de réformer par exemple les usages erronés ou obsolètes du symbolisme mathématique, (voir un exemple en annexe) ou la répartition des efforts des enseignants et des élèves entre des branches des mathématiques plus adaptée aux études et aux préoccupations de la société (statistiques, informatique, …)

Réorganiser l'introduction au primaire et au collège des symboles et des termes propres à l'algèbre de façon à éliminer les erreurs et les mésusages.

Il est bien connu des professeurs que l'emploi des signes algébriques en arithmétique à l'école est aujourd'hui faux ou inadéquat du point de vue logique, mathématique et informatique.

- Ou bien il faut supprimer l'usage du signe « = » en attendant une introduction correcte avec son milieu naturel, l'algèbre (qui pourrait être plus précoce qu'il ne l'est aujourd'hui. C'est difficile mais on pourrait n'introduire qu'un signe non algébrique : « → » avec le sens de « je trouve alors», « font » ou « on fait ensuite »2, « 3 et 2 font 5 » s'écrit alors : « 3+2 → 5 ». Les élèves peuvent enchaîner les opérations par leurs résultats[1] 2 Par exemple 3+4 → 7 se lirait « en calculant 3 + 4 je trouve 7 » ou retrouver l'original « 3 + 4 sont 7 » 2 comme les étapes successives d'un programme (l'algèbre n'y perdra rien et l'informatique s'en trouvera mieux)

- Ou bien on peut introduire tout de suite l'usage du signe égal.

Mais d'abord avec un sens et un usage correct (c'est possible aussi).

Et pour des raisons sémiologiques, en introduisant en même temps que lui, au moins un ou deux autres symboles relationnels dont il doit se distinguer. Par exemple (si ce n'est déjà fait), introduire les signes « < » et « > ».

---

[1] La contre performance d'un ministre de l'éducation dans l'exercice public de la règle de trois à montré le limites de cette conception médiévale.

Enfin en corrigeant la lecture des égalités : « 3 + 2 = 5 » se lit « 3 plus 2 est égal à 5 ». Mais on peut aussi énoncer 5 = 3 + 2 « cinq c'est trois plus deux » ou même « cinq c'est deux plus trois ». Ou alors restaurer l'énonciation ancienne originale « 3 et 2 sont 5 »

Remarquons que l'introduction de l'égalité dans les raisonnements arithmétiques soulève des types de difficultés similaires à celles que les élèves rencontrent dès l'apprentissage de la lecture :

- Distinguer le mot de la chose : Paul a cinq ans, `Paul´ a quatre lettres. Il faut le faire sans le dire formellement et en particulier sans introduire des notations méta : `, ´, «, », ou ".

- Distinguer les dénominations ou les propriétés qui concernent une même chose : un même objet peut être désigné par des mots et par des expressions différentes en référence à des connaissances générales ou contextuelles : « Louis XIV », « le roi soleil » ou bien « Pierre » « le frère de Mathilde ». Ex. Dans le phrase « Je prends la louche et je la trempe dans la soupière ». Il faut bien, à l'école primaire, distinguer le second « la » du premier et pour le dire introduire un peu de grammaire. -

- L'égalité est une relation entre des signes ou des mots. Elle informe qu'ils désignent un même objet unique. On devrait écrire : « Louis XIV » = « le roi soleil » et non « Louis XIV = le roi soleil » -

- Introduire le signe égal dès la première année de l'école primaire comme on le fait actuellement, implique qu'il faut introduire un minimum de grammaire et de logique au cours de la scolarité pour préserver son sens. Autant alors lui donner un environnement de connaissances grammaticales et une sémantique mathématique limitée mais correcte comme cela se fait en langue. Encore faut- - il que cet effort soit poursuivi au collège -

- D'autres difficultés similaires viennent de l'utilisation, selon l'usage, du même terme pour désigner selon les cas un objet précis ou une catégorie d'objets : « Le loup est un animal sauvage » et « Pierre à attrapé " le Loup »

L'introduction a l'algèbre en primaire peut se faire très tôt et avec fruit, mais à la condition d'utiliser correctement la langue que l'on veut enseigner et non pas en utilisant prématurément un argot d'utilisateurs peu soucieux d'enseignement. L'étude de cette question à été polluée par les excès dus à l'impatience et à la naïveté didactique des années 60, puis par les excès d'un repentir parfaitement hypocrite et suffisant. Ces perspectives sont des sujets de débats où les conflits d'intérêts ne sont pas maîtrisés. Des recherches sérieuses et enfin désintéressées pourraient être entreprises avec fruit pour préparer l'avenir[2].

Troisième niveau de propositions Didactiques

Une autre approche concernerait la conduite des leçons et des apprentissages spécifiques des mathématiques et impliquerait l'usage de connaissances scientifiques plus précises, mieux répandues, plus techniques et plus complexes, dans une stratégie plus fine d'enseignement. Il s'agirait de permettre aux enseignants de distinguer et de mettre en oeuvre les diverses stratégies possibles adaptées aux innombrables circonstances de l'enseignement, car aucune méthode n'est universellement préférable et aucune n'est universellement rejetable. Cette approche pourrait aboutir à la détermination de « protocoles » permettant d'opposer à des exigences infondées et à une mythique liberté pédagogique, une légitime exigence de moyens.

Mais leur mise en oeuvre ne sera possible que lorsqu'elle pourra s'appuyer sur des connaissances et sur une culture didactique et pédagogique du public plus appropriée. La persistance de la faveur que le public accorde à des procédés manifestement et obstinément inadaptés à leurs objectifs et les contradictions des contrats sociaux et techniques qui en découlent et qui sont imposés à l'enseignement est très inquiétante.

A propos de l'évaluation de masse automatisées et des échecs de leurs interprétations

La réussite des projets de deuxième et de troisième niveau dépend d'une évolution non seulement de la formation des professeurs et des connaissances produites par les recherches, mais surtout de modifications profondes dans les connaissances du public et dans les postures des pouvoirs publics relativement aux phénomènes de didactique. Actuellement les difficultés viennent d'une inadaptation totale des croyances et des exigences de la société vis - à - vis de son enseignement face à de très puissants mouvements d'investissement du bassin de profits que représente le territoire de l'enfance.

---

[2] le « ʃ » était anciennement un « s », qui a été confondu avec le « f » nouveau au moment de la normalisation typographique alors que les anciennes tables étaient toujours reproduites.

L’erreur la plus grave consiste à interpréter directement et naïvement, les évaluations scolaires automatisées comme un indicateur global pertinent et complet des résultats de l’enseignement, suffisant pour former un jugement et prendre des décisions.

La collation des grades et l’appréciation des résultats par des professionnels du savoir et de son enseignement tendent à être remplacées ou contrôlées par des évaluations de masse, préparées par des spécialistes et interprétées par une gouvernance (managers) de techniciens et de politiques. Le but proclamé est d’homogénéiser les décisions, de favoriser les comparaisons et d’assurer la » transparence » des politiques d’éducation ! Les deux systèmes ont leurs avantages et leurs défauts… mais plus précisément les remarques suivantes s’imposent.

Les comptes rendus des épreuves d’évaluation des résultats scolaires qui se succèdent depuis le début 70, sont toujours à peu près les mêmes : les résultats sont déclarés de plus en plus décevants voire alarmants.

Malgré cette permanence des résultats, les conclusions, les orientations et les conseils aux acteurs de l’éducation sont eux, toujours identiques. Et les conclusions des politiciens incriminent toujours seulement les acteurs du système : les élèves et les professeurs.

Ce système conduit certains à appliquer à l’éducation le modèle behaviouriste essais - erreurs - sanctions. Mais il semble convenu que seuls acteurs de l’école peuvent être soumis à ce traitement primitif : jamais les connaissances des analystes ne sont vraiment mises en doute, pas plus que l’adéquation des décisions pratiques qui en sont tirées.

Ainsi même le modèle qui semble servir de théorie à ce système - prétendument « scientifique » et rationnel est lui - même violé. Il reste une idéologie scandaleusement primitive, brutale, aveugle, et inefficace.

Quels sont ses résultats scolaires après 40 ans d’utilisation ?

Les objectifs opérationnalisés dans ces épreuves ont poussé les professeurs

a) à appliquer des méthodes plus simplistes et inefficaces que celles qu’ils utilisaient précédemment,

b) à faire disparaître le subtil travail des connaissances avec les élèves,

c) à rompre l’équilibre essentiel du dit et du non dit, au profit de la récitation de savoirs convenus

d) à émietter ce savoir jusqu’à le rendre impropre à tout autre usage qu’au contrôle de bonne réception, autrement dit à réduire les activités des élèves à un « quiz » universel.

e) à rendre les meilleurs, meilleurs par rapport à leurs camarades, ceux qui ne rétablissent pas une partie de la fonction des savoirs et qui rejoignent ainsi les moins bons

Ces recommandations ont le mérite d’être crédibles pour la population mais elles ont conduit les professeurs

f) à gaspiller un temps précieux dans des interactions individuelles et plutôt symboliques avec les élèves,

g) à s’égarer dans l’attente de mystérieux effets de technologies sophistiquées mais douées d’un didactisme frivole…

Quand le système réagit, il ne peut le faire qu’avec une lourdeur prétendument respectueuse de la rationalité supposée rustique. L’évaluation des savoirs est aujourd’hui « complétée » par celle des « compétences ». Bonne idée, qui semble orienter les professeurs vers les causes et non vers les effets. Mais le mode d’interrogation conservé ne peut « voir » que des savoirs. Les professeurs ne peuvent qu’essayer d’appliquer les méthodes behavioristes prônées aux compétences et d’ajouter les compétences à leur programme d’activités. Le résultat sera une déperdition supplémentaire de temps et un éloignement toujours plus grand de ce qui fait l’activité mathématique et l’apprentissage des élèves et des professeurs. Je ne vois dans cette « innovation » qu’une caricature d’application de nos travaux.

J’insiste sur un point, je ne critique pas les analystes ni les décideurs qui participent à la réalisation et à l’interprétation de ces épreuves, ils sont eux aussi des acteurs captifs. Je critique l’état de la science à propos de l’éducation, et les préjugés de la société à son propos, la lenteur que l’obstination dogmatique oppose à la prise de conscience des efforts à faire pour comprendre d’abord les phénomènes qui s’y produisent et peut être ensuite pour intervenir sur l’enseignement.

Conclusions

L’école pour tous, est le moyen d’acculturation par lequel une société accueille ses nouveaux entrants et affirme ainsi sa cohésion perpétue son identité. En imposant à cette école des contraintes incompatibles ou concrètement impossibles, la société fait échouer le dispositif mais surtout se discrédite et se détruit elle-‐même. Ce processus est aggravé par l’absence d’une culture didactique commune qui laisse la discussion aux aléas des intérêts et des passions. Dès qu’une alternative se présente elle est abordée sous l’angle de son utilité politicienne, ou sociale ou religieuse et deux partis se reforment. Les deux partis ont beau s’accorder pour présenter l’école comme un instrument indispensable de la cohésion sociale, chaque parti croit avoir le droit d’imposer ses choix sans l’accord de l’autre. Comme ils ne parviennent pas à résoudre les questions qui ont pollué le débat initial et qu’ils n’avouent jamais que le choix ne peut pas être le fait de l’école elle-‐même, leurs dissensions se conjuguent et ils se retrouvent, de fait, ensemble, dans le camp des détracteurs de l’école et des ennemis de la société. En fait les deux partis ne dissimulent pas leur désir commun de mettre l’école à leur service particulier. Le nombre de ceux qui profitent de la faiblesse du système éducatif est incomparablement plus élevé que le nombre de ceux qui voudraient la combattre.

Exemple 1 Objectifs sociaux et éthique didactique

Certains reprochent au système scolaire de ne pas obtenir les meilleurs résultats possibles pour chacun de ses élèves. Respecter cette condition fait partie de l’éthique pour les professeurs. Ce choix conduit en principe à une distribution gaussienne de la population des élèves sur l’échelle des résultats. Mais d’autres veulent que l’école donne à chacun les meilleures chances de trouver du travail. Or la distribution des emplois « offerts » par le marché est multimodale (les postes ne sont pas également disponibles pour les élèves de tous les niveaux de sortie), et variable dans le temps. Les deux demandes ne sont donc pas conciliables et ce n’est pas l’école qui doit choisir.

Exemple 2. Culture ancienne et acculturation honnête

Certains reprochent à l’Ecole de « reproduire » les erreurs, les travers et les inégalités de la société. Ils attendent d’elle qu’elle corrige les erreurs du passé, qu’elle bannisse les maladresses et les erreurs dénoncées par les progrès de la science ou celles résultant de leur transposition maladroite… Par contre d’autres exigent que l’école reproduise exactement toutes les « connaissances » du passé, même les plus absurdes ou les plus néfastes.

En mathématiques il faut concilier les pratiques anciennes encore utilisées par la population entière avec les connaissances considérées comme actuellement nécessaires aux activités aux arts et aux industries et aussi avec les nécessités et les meilleurs usages actuels dans la discipline elle-‐même, meilleure entrée dans les usages à venir. Ce dilemme est particulièrement surprenant en mathématiques. Les connaissances fondamentales que l’école doit enseigner à ses élèves devraient être les plus exactes, les plus fécondes et celles qui seront le plus universellement utiles, à tous les élèves et à chacun… Il faut arbitrer de façon raisonnable entre ce qui doit être enseigné des anciennes connaissances et ce qui doit être enseigné des nouvelles. Le propre des nouvelles connaissances, en sciences, c’est de modifier ou même de disqualifier les anciennes. Elles ne sont donc compatibles dans l’enseignement que dans une perspective génétique ou historique.

Il est surprenant que l’enseignement des mathématiques soit aujourd’hui un des domaines où ces arbitrages sont bloqués le plus fermement depuis trente ans. Il s’y manifeste les oppositions les plus vives contre ceux qui souhaitent adapter et résoudre ces contradictions et ceux professent un très fort mépris pour leur nécessaire résolution. Cet attachement pour des usages inappropriés, pour des objets d’enseignements manifestement faux, dépassés et/ou inadaptés, et pour des modes d’apprentissage et d’enseignement extrêmement différents de ceux en usage chez les mathématiciens eux-‐mêmes est surprenant.

Le tableau se complique quand ceux que l’on peut penser les plus capables de « dire » les mathématiques parce qu’ils s’y sont montrés les meilleurs, croient naïvement pouvoir résoudre le problème sans aucun intermédiaire en s’affranchissant par l’autorité des contradictions et des difficultés didactiques.

L’exemple le plus patent est celui de l’étude de la métamathématique à l’école primaire. Les instituteurs ont depuis longtemps compris que l’enseignement de la langue écrite ne pouvait pas se borner des simples usages et qu’il fallait structurer ces usages par un enseignement de la grammaire. Certes les mises à jour de la « grammaire des professeurs » par la Linguistique scientifique rencontrent les mêmes difficultés de mise à jour que les mathématiques, sans parler des questions liées aux évolutions divergentes de la langue elle-‐même. La tentative d’introduire un modeste contingent de notions de logique et de raisonnement et de bannir ainsi les erreurs les plus dommageables s’est heurté à une opposition sans précédent. Pourtant la comparaison entre la quantité et la complexité des connaissances du programme de grammaire et celui des mathématiques est éloquente. De plus, les élèves peuvent apprendre plus facilement des lois que des exceptions. Quand le rapport du public aux mathématiques s'enferme dans des rites immuables, les mathématiciens apparaissent comme une secte mystérieuse, gardienne d'un savoir ésotérique puissant mais hostile, et les efforts des professeurs apparaissent comme des recruteurs sectaires. Les efforts des médias tendent à promouvoir cette nouvelle religion. La présentation du discours brillant d'un prestigieux savant dans un exercice d'enseignement réputé exemplaire suffit à appuyer les jugements les plus inconsidérés sur le travail besogneux et obscur des enseignants.

Exemple 3 Sciences entre elles et Science didactique

Les connaissances communes sur l'éducation doivent permettre à un grand nombre d'institutions savantes (ou non) qui y ont un intérêt légitime, à participer aux débats. Ainsi la faiblesse et même l'inconsistance des connaissances mobilisées dans les débats sur l'enseignement sont à la fois une conséquence et une condition ; Elles répondent à une sorte de nécessité macro-- didactique.

Faire avancer les formes de connaissances qui sont mobilisées dans chacun de ces domaines, pour qu'elles puissent s'adapter au développement dans autres est une tâche dont on ne mesure pas la complexité. Pour que cette tâche reste supportable il ne faut pas avancer beaucoup. Cette situation épistémologique est comparable à celle de l'émergence de la théorie de l'évolution. Elle réclamait des résultats en rupture avec la culture de l'époque, dans de trop nombreux domaines. Le cas de la théorie de la diffusion éducative des connaissances me paraît encore beaucoup plus complexe et surtout se heurte à des intérêts plus puissants.

Il reste qu'il faut arrêter la machine infernale qui nous fait casser nos systèmes éducatifs

4 Du cycle 3 au Collège et après

4.1 PISA : Prudence (envers les) Interprétations Statistiques Avancées !

Mots-clés : évaluation, contrat didactique, transposition didactique,

Yves Matheron, MCF, EAM ADEF, Université de Provence, IFE ENS-Lyon

Mes remerciements à Antoine Bodin, pour nos discussions et les documents fournis

Evaluations externe ou interne : une négociation

Questions préalables à toute interprétation d'une évaluation

Pour pouvoir être enseignés, les contenus mathématiques sont toujours soumis à un processus de transposition didactique. De ce fait, ce que l'on croit être des objets mathématiques communs et partagés, ainsi que les attentes institutionnelles qui leur sont adressées en termes d'apprentissage, diffèrent fortement. Prenons un seul exemple.

La réduction des matrices est ordinairement enseignée en France en licence de mathématiques (en L2) où ce savoir est déjà issu d'une transposition. À la fin des années 1990, la résolution des systèmes linéaires de 3 ou 4 équations à 3 ou 4 inconnues figurait aux programmes des Terminale S, ES et L (spécialité mathématiques). À la même époque, cette résolution était enseignée dans certaines classes américaines correspondant au niveau de la 4e. Pour la résolution de tels systèmes, la méthode la plus fréquemment enseignée dans les Terminales était celle du pivot de Gauss, tandis que dans « les 4e américaines » on montrait l'utilisation convenable des touches de la TI 83… Il s'agit dans les trois cas (L2, Terminale, « 4e américaine ») de ce que l'on pourrait désigner comme relevant de la compétence ou capacité consistant à résoudre un système de n équations à n inconnues. Chacun conviendra que les connaissances attendues diffèrent fortement d'un système éducatif à l'autre : quelle compétence évalue-t-on alors à travers un problème de résolution de tels systèmes, est-ce la compétence « résolution de problème » ? L'évaluation envisage-t-elle de porter sur la connaissance mathématique qui s'exprime au niveau des techniques à mettre en œuvre et, au-delà et surtout, des mathématiques qui les ont produites, ou encore – pourquoi pas ? – sur la capacité à rechercher une réponse dans divers médias (manuels, Internet…) ? Ou bien est-ce que les mathématiques importent peu du moment que la réponse convenable est fournie ?

La négociation sur le savoir attendu : une des fonctions de l'évaluation

Ce qui est toujours évalué est le degré de conformité des connaissances acquises par des personnes (les évalués) à ce qui est attendu par une institution donnée (celle représentée par les évaluateurs). Et cette dernière ne s'autorise pas d'elle-même. Quelle est la définition de ce rapport ? Quelles sont les instances qui l'établissent et… à l'issue de quelle négociation ? La fonction centrale de négociation portée par les évaluations est très souvent ignorée1. Portant toujours sur les enjeux de savoir, la négociation propre aux évaluations externes s'établit à un autre niveau que celui impliquant le professeur et les élèves dans une classe : elle se joue entre les instances en charge de l'évaluation et… « la société » ou une partie de celle-ci, et se révèle lors de dysfonctionnements. Souvenons-nous, par exemple, de l'épisode relatif au sujet de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S de 2003. Il constitue le prototype d'une négociation qu'auraient dû mener *in abstentia* les autorités en charge du sujet, parce qu'investies des attentes sociales sur ce que doit être un sujet de baccalauréat, mais pour laquelle une partie de la société s'est sentie flouée et l'a fait savoir. Revenant à PISA, Il est nécessaire de rechercher quelle est la définition du rapport attendu et comment il se négocie.

Mais on peut toujours éviter la question à partir de deux attitudes opposées. La première consiste à l'ignorer et à poursuivre un enseignement des mathématiques tel qu'on pense qu'il convient. La seconde, qui semble être prise au Nouveau Brunswick (Canada), consiste à entrainer les élèves aux items PISA ou à des items que l'on considère proches2.

Ce que PISA dit évaluer et ce qu'il n'évalue pas

Qu'évalue PISA ?

La réponse a été donnée à plusieurs reprises par les promoteurs de PISA eux-mêmes3. PISA évalue ce qui se nomme en anglais literacy, traduit en français par le mot « littératie », pour l'heure absent des dictionnaires. Quelques passages tirés de PISA, certains notés en italique, permettent de cerner ce que l'OCDE entend par literacy. « […] la définition du concept de “ littératie ” [qui] renvoie à la capacité des élèves de faire des extrapolations à partir de ce qu'ils ont appris pour appliquer des connaissances et des compétences dans des contextes originaux et d'analyser, de raisonner et de communiquer lorsqu'ils énoncent, résolvent et interprètent des problèmes dans des diverses situations » (p. 22). « […] la culture mathématique s'évalue à l'aune de la capacité des élèves à analyser, raisonner et communiquer lorsqu'ils énoncent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques […] » (p. 128).

La proximité que permet d'établir la comparaison de ces deux citations n'aura pas échappé au lecteur : un même cadre se spécifie selon les disciplines. Le présupposé sur lequel s'appuie PISA apparaît proche de celui ayant abouti à la mise en œuvre, dans divers pays, d'une « pédagogie des compétences » reposant sur l'existence de « transferts » d'apprentissages. On sait que le concept même de « compétence », sa traduction en acte dans les réformes éducatives, ainsi que l'existence de « transferts », sont loin de faire l'unanimité au sein de la communauté scientifique qui étudie l'enseignement et l'apprentissage4. Regardé sous ce seul angle, le but assigné à PISA par ses promoteurs, s'il concerne l'évaluation de compétences ou encore « de dispositions d'esprit »5, mérite d'être appréhendé avec prudence.

PISA souhaite évaluer les mathématiques à travers ce qu'il désigne par « vie réelle ». Si les mathématiques modélisent et permettent de répondre à certaines questions qui se posent « dans la vie », elles modélisent et répondent néanmoins aussi à des questions internes aux mathématiques. Les « applications pratiques », s'il en existe, ne peuvent être immédiatement enseignées aux élèves ou sont parfois devenues socialement désuètes. Peut-on axer la finalité des mathématiques à 15 ans sur la « vie réelle », au risque de compromettre l'acquisition d'un bagage pour des études plus approfondies dans cette discipline ?

Qu'évalue PISA des mathématiques du Collège ?

Le fichier PISA 2009 (op. cit.) indique qu'il s'agit de « concepts […] en rapport avec la quantité, l'espace, les probabilités et autres » (p. 128). Antoine Bodin a réalisé un travail de comparaison avec le programme de mathématiques du Collège6. De son étude de 2006 il ressortait que les questions PISA ne couvraient guère qu'environ 15 % du programme du Collège, mais représentent 75 % des questions PISA. 25 % des questions PISA portent donc sur des contenus mathématiques non enseignés dans le programme français, et environ 85 % des contenus mathématiques du programme français ne sont pas évalués par PISA. Nonobstant le fait qu'un grand nombre des items PISA ne sont pas libérés, une rapide enquête sur ceux d'entre eux qui nous sont accessibles m'a permis de préciser cela7.

La majorité des items hors programme sont trouvés dans la catégorie « incertitude » : ils portent sur l'équiprobabilité enseignée au Collège depuis le programme de 2008 entré en vigueur à la rentrée 2009, donc absent des connaissances des élèves testés par PISA.

En géométrie, est absent pratiquement tout ce qui concerne l'étude des configurations, des transformations, de la trigonométrie. Se dégageant des contenus, si tant est que cela puisse être, la partie que l'on pourrait penser renvoyer à la compétence « raisonner », évaluée par PISA, ne demande jamais aux élèves de fournir de « démonstrations » dans le sens où nous l'entendons. L'algèbre est, elle aussi, quasiment absente de l'évaluation PISA. Peu de calculs sur des opérations avec des nombres fractionnaires, aucun sur les relatifs ou les racines carrées, ni d'items sur le repérage sur la droite ou dans le plan. Dans la partie « Relations et variations », les fonctions sont données à l'aide de tableaux de valeurs ou de représentations, non par leurs expressions analytiques. Elles modélisent le plus souvent des processus non linéaires. Ceci exclut des tests PISA nombre des questions sur les fonctions linéaires et affines du programme de 3e : détermination de coefficients de fonctions affines, d'antécédents ou constructions de droites dans un repère. Enfin, les questions posées dans PISA et leur forme sont assez éloignées de celles généralement en vigueur dans une évaluation mathématiques. Environ 1/3 des questions PISA sont des QCM aux justifications rarement demandées.

Toutes ces remarques incitent à prendre la mesure du risque encouru lorsqu'on rapporte les résultats des élèves d'un pays à ceux obtenus par les élèves d'autres pays.

Que nous apprennent PISA et d'autres études ?

Ce qui ressort de PISA pour la France

Selon Antoine Bodin, les résultats PISA sont confirmés par les études TIMSS8, elles aussi d'inspiration anglo-saxonne.

Les principales informations tirées de l'observation des données quantitatives issues de PISA, de 2000 à 2009, sont connues. Dans le cadre des attentes relevant de la littératie :

- l'écart entre les meilleurs élèves français et les plus faibles s'est accru régulièrement depuis la première enquête PISA de 2000 ; les meilleurs ne sont pas les meilleurs du monde et leur niveau n'a pas progressé ;
- les résultats des élèves français sont plus fortement qu'ailleurs liés au niveau socio-économique de leurs parents : le système est très inégalitaire ;
- la France a rétrogradé du groupe des pays les plus performants dans l'enseignement des mathématiques au groupe des moyens ;
- les élèves français hésitent à se lancer dans des problèmes demandant d'extrapoler dans des contextes nouveaux à partir de leurs connaissances antérieures.

Des indicateurs convergents fournis par d'autres travaux

Le dernier des points précédents est à rapprocher de certains des résultats de l'analyse menée par Roger Establet et al. en 20059 à partir de l'enquête de 1998-1999 initiée par le ministère sur le rapport des lycéens aux disciplines enseignées. Ils perçoivent l'enseignement des mathématiques comme ennuyeux et formel, ne fournissant pas d'éclairage sur le monde. L'intérêt à leur accorder réside dans l'accès qu'elles offrent à des débouchés professionnels.

Le rapport Rocard de 2007 pour la Commission Européenne dresse pour l'enseignement scientifique en Europe un tableau que beaucoup des didacticiens qui observent l'enseignement des mathématiques partagent : un enseignement peu stimulant, formel, oublieux des questions génératrices des mathématiques, aux chapitres se succédant sans liens visibles, laissant peu de place à la recherche par les élèves, duquel le sens « échappe », etc.

- Faire vivre les mathématiques comme réponses à des questions
- En finir avec la banalité d'« activités » recopiées dans les manuels

Les professeurs, même s'ils s'en défendent, sont attachés aux manuels. L'explication avancée tient en ce qu'ils fourniraient une aide aux élèves pour une poursuite d'étude hors classe. La réalité est bien différente. Loin de proposer un exposé mathématique dont les élèves pourraient prendre connaissance, comme c'était le cas autrefois, la majeure partie d'un chapitre de manuel, papier ou en ligne, est consacré à des « activités » à « passer » dont l'objectif proclamé est de faire construire des mathématiques par les élèves ; fiction ne résistant pas à l'analyse. Reposant sur des questions enchaînées qui guident les élèves vers ce que l'on attend d'eux, ils ne peuvent le percevoir comme une réponse qu'ils auraient produite à une question dont ils se seraient emparés. L'observation de cahiers ou de séances en classe montre que, souvent, les « activités » de classe auxquelles sont confrontés élèves et collégiens sont celles des manuels du commerce, quelquefois modifiées à la marge. Les élèves sont actifs, mais cette activité est-elle mathématique quand son contenu est épistémologiquement et didactiquement si faible ?

Etudier les mathématiques en dévoluant l'instruction de questions

Pourtant, sans trop toucher aux programmes de l'école obligatoire – bien qu'il faille parfois les actualiser ou leur redonner de la cohérence –, ni à la finalité adressée à l'enseignement des mathématiques en France, il est possible de faire vivre par les élèves les mathématiques comme recherche et étude de réponses à des questions qui en valent la peine10. Cette option n'a rien à voir avec un exposé d'histoire des mathématiques, ni avec un constructivisme idéalisé mais impuissant à faire apprendre. Il s'agit plutôt de dévoluer aux élèves, et sous la direction du professeur, une question dont les éléments de réponses sont construits par le collectif de la classe. Ces réponses constituent des mathématiques recouvrant des parties du programme. Des questions telles que la recherche de distances entre points inaccessibles, de modélisations et de calculs sur des programmes de calcul, permettent par exemple d'engendrer au Collège des grandes parties des domaines « géométrie » et « nombres et calculs ». Il en existe aussi pour l'École primaire et pour les autres domaines mathématiques. Le but consiste à faire rencontrer en acte, et par la recherche de réponses à une grande question, des sous-questions auxquelles les élèves pourront le plus souvent apporter des réponses ; soit par eux-mêmes, soit, lorsque cela dépasse les ressources du collectif, en sollicitant leur professeur. Ce qui engage vers une autonomie de recherche et d'étude.

Mobiliser des forces, former la profession enseignante

S'engager dans ce type d'enseignement demande la mobilisation de forces qui dépassent les possibilités d'un professeur isolé. Il est nécessaire de concevoir, expérimenter, observer, valider ou retoucher des propositions originales d'enseignement reposant sur les analyses des mathématiques à enseigner et des formes didactiquement viables dans les classes. Cela demande du temps pour une mise au point à jamais inachevée car les relations humaines, comme le sont les relations didactiques, sont aussi pour une part indéterminées.

Ce type d'enseignement, qui est celui d'une direction par le professeur de l'étude des mathématiques par les élèves, n'est pas coutumier aux enseignants. Il nécessite une formation avant toute diffusion de ressources, afin de pouvoir les recevoir et les utiliser de manière appropriée. Les opérations de recherche et développement menées par l'IFÉ (CDAMPERES ou École St Charles de Marseille) associent donc la production des ressources à l'accompagnement et la formation des professeurs. Le développement de ces travaux, non négligeables dans leur forme actuelle, nécessite une volonté politique pour décider des forces à mobiliser et de leur orientation, ainsi qu'un changement profond de la formation des enseignants ; aussi bien du primaire que du secondaire.

Conclusion

En tout état de cause, et pour en revenir aux évaluations quelles qu'elles soient, on ne peut que souscrire au constat établi il y a plus de trente ans par Guy Brousseau : l'évaluation écrase les objectifs d'enseignement et d'apprentissage11. Une prudence minimale impose aux systèmes éducatifs de préserver leur originalité, tout en poursuivant un objectif d'amélioration par d'autre voies, certes complexes et exigeantes, mais tout en choisissant les orientations qui évitent… « l'écrasement ». L'enseignement, ses finalités en termes d'apprentissage et d'éducation, les programmes qui indiquent les chemins possibles pour les atteindre, devraient résister à la tentation de céder à une soumission aux évaluations, aussi respectables et rigoureuses soient-elles.

4.2 Enseignement des mathématiques en collège. Quelques constats et questions pour contribuer à un état des lieux

Mots-clefs : calcul, problèmes en classe, responsabilités et missions des enseignants, évaluations locales, évaluations nationales et internationales, accompagnement des élèves en difficulté, TICE, pilotage pédagogique, rallyes et jeux mathématiques

Rémy Jost

Constat 1 et questions : le calcul

En collège les compétences en calcul sont globalement faibles, voire très faibles : en calcul mental (exact ou d'ordre de grandeur), en calcul littéral et en calcul algébrique. Les exercices de calcul sont essentiellement techniques. Les élèves prennent souvent leur calculatrice pour effectuer des calculs élémentaires.

Pour l'entrée aux lycées les compétences en calcul sont insuffisantes. Existe-t-il un argumentaire officiel pour le calcul mental ? Y a-t-il une progression des apprentissages dans ce domaine ?

Constat 2 et questions : les problèmes en classe

En classe de mathématiques de collège, la résolution de problèmes reste en retrait par rapport à l'acquisition de savoir-faire et de techniques. On peut regretter que la résolution des problèmes soit très souvent guidée. Des problèmes ouverts sont ils régulièrement proposés ?

Constat 3 et questions : les responsabilités, les missions des enseignants

Les professeurs se sentent responsables de finir le programme. Se sentent ils aussi responsables des apprentissages de tous les élèves en mathématiques et de leurs acquis ? Dans le statut des enseignants la mission d'être responsables de la réussite des élèves n'est pas vraiment explicite.

Que retiennent les élèves des cours et exercices résolus de mathématiques ? Qu'apprennent-ils réellement ? Le sait-on ?

Le travail en équipe d'enseignants est encore rare. Au collège il manque souvent une salle ad hoc pour se concerter, les emplois du temps des professeurs ne facilitent pas la concertation !

Constat 4 et questions : les évaluations en classe, les évaluations nationales et internationales

Les professeurs évaluent les élèves , mais qu'évaluent-ils réellement? des connaissances ? des compétences ? Lesquelles ? à l'oral , à l'écrit ? A quel moment ? pendant l'apprentissage ? Comment procèdent-ils ?

En collège la plupart des évaluations pratiquées en classe sont d'ordre technique, portent souvent sur le dernier chapitre étudié de sorte que chaque notion ou compétence est généralement évaluée une seule fois. Elles sont essentiellement écrites, les compétences à l'oral ne sont que rarement évaluées.

Les évaluations diagnostiques sont peu pratiquées. Les évaluations nationales en sixième elles mêmes ont été insuffisamment exploitées.

Peu d'enseignants de mathématiques sont rentrés dans une réflexion sur les évaluations nationales ou internationales pour les exploiter au niveau des acquis de leurs propres élèves, pour réfléchir aux apprentissages, à leurs pratiques pédagogiques.

Le ministère a installé le socle de connaissances et de compétences, et son évaluation. : la formulation du pilier 3 demeure floue. Entre autres, les mathématiques ne se distinguent pas assez nettement des autres sciences, elles ne paraissent plus constituer un fondamental dans la formation scientifique des élèves.

Le ministère a pris en compte, mais avec retard sur d'autres pays, les résultats à PISA. Il a abandonné l'évaluation TIMSS. Pourquoi ?

Constat 5 et questions : l'accompagnement pour les élèves en difficulté

L'aide individualisée demeure le recours essentiel pour les élèves en difficulté, mais les contenus de cet enseignement relève parfois (voire souvent ?) de la reproduction du cours et des exercices déjà donnés en classe. Par exemple, dans près de la moitié des classes observées par les inspecteurs, les procédures erronées des élèves ne sont pas analysées, ni exploitées. L'aide individualisée, l'accompagnement personnalisé sont ils des dispositifs qui portent des fruits ? Faut-il chercher dans l'individualisation, à la mode, la réponse à tous les problèmes des élèves en difficultés ?

Constat 6 et questions : les TICE

Les logiciels, les exerciseurs, les fichiers interactifs téléchargeables sur Internet sont de facture très variable : il est vrai qu'ils sont de plus en plus utilisés, mais pas forcément intégrés dans les apprentissages de façon pertinente. L'utilisation des TICE en collège donne une large place aux exerciseurs sans que l'on s'interroge sur la place de l'outil : sert-il réellement à résoudre un problème pédagogique ? qu'apporte-t-il aux élèves ? aux enseignants

Le rôle moteur des jeunes enseignants dans l'intégration des TICE est à souligner

L'intégration des TICE désigne à la fois le recours aux fiches toutes faites, les exerciseurs, l'usage de tableaux interactifs , celui de logiciels de production, de logiciels de géométrie ou de tableurs, mais ce ne sont pas du tout les mêmes outils en terme de formation mathématique des élèves ! En fait l'utilisation des TICE n'est pas encore assez réfléchie par les enseignants et ne donne que rarement l'occasion de faire réfléchir les élèves.

Le ministère de l'éducation nationale promeut l'utilisation et l'intégration des TICE. Mais quelle est la plus value dans la formation mathématique des élèves ? Quand, où et par qui cela a-t-il été évalué ?

Constat 7 et questions : le pilotage pédagogique

Au sein du collège le chef d'établissement n'est pas considéré comme véritable pilote pédagogique, par exemple, pour inciter les enseignants à être responsables des apprentissages des élèves, à travailler en équipe dont la culture est encore peu partagée.

L'inspecteur pédagogique est davantage considéré par les enseignants comme pilote pédagogique, mais comme il n'est que rarement présent, les effets de sa guidance demeurent modestes.

Comment doit s'organiser le pilotage pédagogique en mathématiques dans les collèges ? Qui organise la liaison avec l'école primaire ? Quelles sont les obligations des enseignants dans ce domaine ? Le pilote pédagogique est-il celui qui fait réfléchir aux méthodes de travail ? aux méthodes d'enseignement? aux résultats des élèves?

Constat 8 et questions : les rallyes et les jeux en mathématiques

En France, les concours et rallyes mathématiques sont variés et très prisés lorsqu'ils sont proposés aux élèves. De nombreuses académies proposent un rallye mathématique, souvent en liaison avec l'IREM local. Ces rallyes s'adressent le plus souvent à des classes entières.

Mais ils sont plus considérés comme un « supplément d'âme » que comme de véritables outils de formation pour les élèves.

Dans l'enseignement des mathématiques les jeux de logique sont quasi inexistants ? Les textes officiels n'en font que rarement mention. Quelles sont les vertus formatrices des jeux ? Mais aussi quelles sont les vertus pédagogiques de l'histoire de mathématiciens célèbres et de leurs œuvres… ?

4.3 Contribution à la conférence sur l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire

Mots clés : Collège, didactique, psychologie…

Laurent Noé, IA-IPR de mathématiques

Introduction

L'intitulé de cette conférence nationale nous ramène nécessairement à la CREM, commission Kahane, du début des années 2000. On doit s'appuyer sur cette ressource considérable et, surtout, ne pas s'épuiser à ré-établir les mêmes constats. Il semble judicieux de :

- garder ce rapport en toile de fond,
- voir les effets de certaines préconisations d'alors qui ont été suivies
- pointer les principaux changements de la décennie écoulée, notamment du point de vue du contexte,
- explorer les aspects qui n'avaient pas été les plus privilégiés à l'époque

Un point de départ possible lorsque l'on veut parler d'enseignement des mathématiques est la perception qu'ont les élèves de cette discipline. C'est un point de vue régulièrement pris, y compris par certains didacticiens des mathématiques comme Yves Chevallard. Prenons comme lui la référence à la radiographie du peuple lycéen de 2005. On y lit que, lorsque l'on demande aux lycéens de citer positivement ou négativement les disciplines enseignées, les mathématiques arrivent bonne dernière, avec un très fort taux de citations négatives, immédiatement précédées d'ailleurs par la physique. Lorsque l'on demande d'approfondir ce jugement et de préciser les « valeurs » attribuées à cette discipline, l'ennui et l'inutilité sont mis en avant, mais aussi une assez forte importance pour la vie professionnelle. Pour d'autres disciplines, citées très positivement, les valeurs sont inversées. Ainsi, les aspects scolairement voire socialement utilitaires restent attachés aux mathématiques et le « plaisir » de faire des mathématiques, objectif prioritaire notamment énoncé dès le préambule des programmes de collège, est loin d'être partagé.

Nul doute que cette représentation des mathématiques est partagée par les familles ; vraisemblablement aussi par l'opinion publique. Quant à la responsabilité des différents acteurs de l'enseignement des mathématiques dans cette représentation, la question mérite d'être posée dans le cadre de cette conférence.

Cette question interroge la représentation des mathématiques et de leur enseignement qu'ont ces acteurs, et par là leur formation et les éventuels éléments saillants de leur culture professionnelle commune. Les quelques remarques faites ci-dessous à ce sujet ne peuvent prétendre ni à l'exhaustivité ni à l'absolue représentativité. Elles sont le fruit d'observations multiples d'enseignants et d'équipes de deux académies, comme formateur puis inspecteur.

Soulignons d'abord que le temps global de formation des enseignants que l'on peut observer, dans des dispositifs collectifs (académique, d'établissement, universitaires, …) ou de façon individuelle et personnelle (lectures de revues ou d'ouvrages professionnels, scientifiques, …) est en moyenne assez restreint.

Tout d'abord, il me semble que les mathématiques souffrent de la difficulté d'accès à ses avancées actuelles pour qui n'est pas mathématicien professionnel. Cela peut créer un rapport aux savoirs disciplinaires ambigu, alors même que l'écrasante majorité des enseignants de mathématiques est entrée dans ce métier par « amour de la discipline ». Le risque est alors fort de se recroqueviller sur les seuls pans de mathématiques que l'on a reçus comme élève ou étudiant ou bien que l'on a enseignés jusqu'à présent, et de cristalliser les représentations des bonnes mathématiques à enseigner et du cœur de la mission d'un enseignant de mathématiques. Ceci peut expliquer les réactions parfois très vives lors de la disparition d'objets d'enseignement, jugés indispensables par la plupart des enseignants (ce qu'ils sont peut-être parfois, je ne prétends pas trancher cette question !) ou de l'apparition d'autres, ne correspondant pas au curriculum « classique ».

Evidemment, le trait est un peu forcé dans cette description. Les tendances sont complexes. Les évolutions ont tout de même lieu pour peu que l'on ne soit dans des logiques d'immédiateté et que l'institution se donne les moyens d'accompagner le changement. En outre, une partie des enseignants est très vite dans une démarche positive vis-à-vis des changements. Mais il semble urgent pour l'institution de réaffirmer que les enseignants de mathématiques exercent une profession intellectuelle supérieure, avec toute la complexité et la grandeur que cela suppose. Il semble tout aussi nécessaire que les enseignants eux-mêmes assument cela.

Ceci passe par le maintien d'un lien culturel aux mathématiques. Sans doute une partie de celles qui se font aujourd'hui pourraient être rendues plus accessibles. Le travail remarquable fait par des mathématiciens sur le site Images des mathématiques en est la preuve et l'institution devrait en faire une promotion plus grande. L'intérêt pour des champs mathématiques fondamentaux et accessibles mais légèrement décalés par rapport au corpus classique enseigné participe de l'actualisation des représentations évoquées ci-dessus ; de mêmes que les liens avec les autres disciplines.

La didactique des mathématiques, domaine de recherche d'une très grande richesse, au niveau international mais singulièrement en France, devrait raisonnablement être un objet d'étude constant pour des professionnels de l’enseignement des mathématiques. Des didacticiens des mathématiques, dans leur diversité, seront entendus par le conseil scientifique de

Qu’on me permette ici de souligner le caractère non suffisant, quoiqu’éminemment nécessaire, d’une approche trop étroite de la didactique.

Le haut niveau, la diversité et la richesse de la didactique des mathématiques justifient la place prépondérante qu’elle a prise dans le volet « professionnel » de la formation des enseignants de mathématiques (ce volet n’excluant nullement des aspects théoriques, voire de recherche, mais désignant dans mon propos la formation à l’enseignement des mathématiques plutôt qu’aux mathématiques elles-mêmes, conscient des difficultés à distinguer toujours ces deux aspects).

Ceci conduit culturellement les enseignants à s’intéresser, en formation, majoritairement aux objets à enseigner, éventuellement à la manière de les enseigner, mais moins aux effets de cet enseignement, aux apprentissages réels des élèves et à leurs acquis durables. La culture et les souhaits prépondérants de formation sont donc tournés vers un corpus amputé de ce que l’on appelle parfois les sciences de l’apprendre et plus généralement d’une grande partie des sciences de l’éducation, sciences cognitives, …

Lorsque des enseignants – ou des inspecteurs – sont « exposés » à de la didactique et à d’autres champs de recherche des sciences de l’apprendre, c’est trop souvent de façon séparée - quand ces champs ne sont pas opposés les uns aux autres. Or ils sont tous engagés dans la réalité de la pratique enseignante. Pour aller vite, une conception mathématique et didactique pertinente ne sera pas rendue pleinement efficace sans prendre en compte les conditions de possibilité des apprentissages non pas des élèves génériques mais de ces élèves qui à cet enseignement est destiné aujourd’hui. Inversement, quels apprentissages peuvent être possibles sans une visée didactique claire et une assise scientifique solide de l’enseignant ?

La prise en compte des éléments de contexte et ses effets sur les apprentissages mais aussi les enseignements est essentielle. Certaines recherches en didactique des mathématiques donnent des résultats concernant l’un des éléments de contextes les plus prégnants : l’origine socio-économique des familles des élèves fréquentant un établissement. Mais ces recherches ne sont pas assez connues et diffusées par l’institution. En outre, un champ des sciences de l’éducation concerne la sociologie du curriculum. Des équipes françaises de ce domaine de recherche commencent à s’intéresser au lien entre l’enseignement des mathématiques et la composition sociale des classes ou des établissements ; leurs résultats sont utiles à la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques et on peut espérer la poursuite de telles recherches.

Aussi, c’est cette complexité qu’il s’agit d’assumer et sur laquelle il faut porter l’attention plutôt que d’en subir la tension.

Cette conférence pourra sans doute permettre l’émergence de consensus sur les éléments de didactiques des mathématiques les plus pertinents à diffuser mais aussi sur les autres sciences de l’apprendre à mettre en avant pour favoriser les apprentissages des élèves, dans leur diversité. Surtout, la nécessité des liens entre les champs de recherche trop souvent imaginés comme cloisonnés pourrait surgir.

Ensuite, c’est l’articulation des conclusions de cette conférence avec la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques qui constituera l’enjeu majeur. Dans cette entreprise, les corps d’encadrement pédagogique ont un rôle essentiel à jouer afin de trouver les modalités les plus efficaces de diffusion et d’accompagnement. Rapprocher le centre de gravité de la formation des établissements ou réseaux d’établissements est sans doute l’une des pistes pour que l’évolution des pratiques touche des équipes et non seulement des individus. Outre la cohérence que cela peut amener dans la formation des élèves, ceci peut permettre de partager les analyses sur les éléments de contexte qui favoriseront les apprentissages.

4.4 Quelques réflexions sur l'enseignement des nombres et grandeurs au long de la scolarité obligatoire

Mots-clefs : nombres, grandeurs, géométrie, mesure, école, collège, formation, ressources, didactique

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Professeur émérite, Université d'Artois

Mon propos s'appuie sur toute mon expérience professionnelle, aussi bien en recherche en didactique des mathématiques qu'en formation des maîtres (voir bibliographie) depuis la création de l'IREM de Paris en 1968 jusqu'à maintenant.

La réforme des mathématiques modernes et ses effets à long terme sur la formation des professeurs

L'analyse de l'évolution de l'enseignement me paraît importante quand on s'intéresse à la formation des enseignants parce que ceux-ci ont été formés dans les périodes antérieures, avec des programmes différents de ceux qu'ils enseignent. Dans la réforme des « mathématiques modernes », on a voulu fonder les mathématiques enseignées dans le secondaire et même le primaire sur une théorie ensembliste des nombres. Les grandeurs qui fondaient jusque là largement l'enseignement des nombres, au moins en primaire (voir thèse de C. Chambris et ses articles dans Repères-IREM et dans RDM), ont disparu de l'enseignement. En primaire, il est resté un enseignement des mesures pratiques et du système métrique pour les grandeurs continues mais séparé de l'enseignement des nombres entiers qui est fondé uniquement sur les quantités discrètes. La commission des programmes d'alors avait choisi de passer sous silence l'aspect grandeur (par un abus de langage mentionné dans les commentaires des programmes) en ne gardant que les objets et leur mesure, une fois l'unité fixée, d'où l'expression de l'époque « la mesure en cm est » et l'interdiction d'écritures du type 1m = 100cm qui n'étaient pas définies. A l'époque où j'ai fait ma thèse (entre 1985 et 1992), l'aire était un nombre dans les manuels et programmes du collège et, si l'on regarde les programmes du primaire de 1970, on peut même lire que l'aire change quand l'unité change ! Une telle approche ne permet pas d'aborder facilement les changements d'unité et réduit l'enseignement de la proportionnalité à celui des fonctions numériques. On se prive alors du calcul dimensionnel, indispensable en physique, qui donne pourtant des moyens de contrôle efficaces dans la résolution de problèmes (voir exemple en annexe) et peut s'exprimer mathématiquement (voir par exemple Bosch et Chevallard, 2001 et 2002) même si, de mon point de vue, cette mathématisation doit rester dans le domaine du professeur au collège.

Dans les années 80, les grandeurs font leur réapparition en primaire avec construction de la notion d'unité et du principe de la mesure (on commence par reporter des unités arbitraires) mais restent séparées des nombres entiers ; on parle d'ailleurs de « mesurage » ; les grandeurs continues n'interviennent que pour l'approche des fractions et décimaux. Les grandeurs n'ont refait leur apparition au collège qu'à partir de 2005, surtout autour de la proportionnalité. Les programmes ont beaucoup évolué depuis l'époque des mathématiques modernes, en tenant compte des travaux de didactique, mais il ne me semble pas qu'on ait vraiment résolu, pour l'enseignement obligatoire, le problème de la synthèse du fondement des nombres sur les grandeurs ou sur les ensembles.

Plusieurs travaux de didactique des mathématiques (voir bibliographie) se sont intéressés aux grandeurs géométriques dès le début des années 80 voire avant, notamment Bessot et Eberhard (1983) pour les longueurs, Rogalski J. (1982) pour les aires, Vergnaud et al. (1983) pour les volumes. J'ai moi-même travaillé la question des aires avec Régine Douady entre 1983 et 1989 dans le contexte de la liaison école-collège ; ce travail a été poursuivi au collège par Moreira-Baltar (1996) et, plus récemment, Ligozat (2008) pour le primaire. Ces travaux ont été pris en compte dans les programmes d'enseignement où la notion de grandeur a repris droit de cité et n'est plus confondue avec la mesure qui est un nombre (dépendant de l'unité choisie) mais certains enseignants continuent à ne pas se sentir à l'aise avec la notion de grandeur. Le lien avec l'enseignement des nombres n'est pas restauré et celui avec l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au début du collège n'est pas questionné.

Grandeurs géométriques et mesure

J'ai choisi de parler des grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes) parce qu'elles peuvent être un appui essentiel dans la conceptualisation des nombres et des opérations et sont fondamentales aussi dans les autres disciplines, en relation avec d'autres grandeurs physiques comme les masses et les durées. Je laisserai de côté les angles qui demanderaient un développement spécifique. Bien sûr le travail sur d'autres grandeurs et leur mesure est essentiel, notamment les masses, grandeur unidimensionnelle, qui peut se mener en parallèle avec les longueurs mais donne lieu à des expériences différentes, notamment parce que la comparaison directe est difficile sans instrument. Les durées demanderaient aussi un développement spécifique.

L'exemple des aires

Dans nos travaux (avec R. Douady) sur les aires nous avions repéré un conflit entre une conception de l'aire comme forme géométrique, soumise éventuellement à des transformations et une conception de l'aire comme nombre issu d'une procédure de calcul. Le passage trop rapide aux nombres enferme les élèves dans les formules qu'ils cherchent à inventer au besoin, sans tenir compte des opérations sur les grandeurs. Faire le lien entre les deux est essentiel en traitant successivement et dialectiquement trois aspects incontournables me semble-t-il : l'aire sans mesure (conservation de la grandeur par découpage et recollement sans chevauchement, comparaison directe ou par transitivité, addition), l'aire comme grandeur unidimensionnelle (liée au pavage, report d'une unité), l'aire comme grandeur bidimensionnelle (lien entre les unités de longueur et les unités d'aire).

Aborder la grandeur sans mesure

Dans tous les cas, le travail sur la grandeur sans mesure, notamment sa conservation, les moyens de comparer et d'ajouter deux grandeurs de même espèce sans passer par les nombres me paraît fondamental pour constituer la grandeur et ses opérations (addition, complément, multiplication et division par un entier) sur lesquelles on aura besoin de s'appuyer dans la résolution de problèmes, y compris sur les entiers, ainsi que pour étendre les opérations sur les nombres non entiers (par exemple le produit des fractions pour les aires).

L'aspect dimension pour les aires et les volumes

A l'école et au collège, l'aspect dimension ne concerne que les aires et les volumes. Il est délicat et il me semble que, dans l'enseignement actuel, il est plutôt contourné que traité à l'école primaire sans être vraiment traité au collège : en primaire, pour les volumes, on ne considère que les contenances, grandeur unidimensionnelle (système d'unités en base dix), renvoyant les volumes pleins au collège et, pour les aires, on a surtout recours au pavage ou aux quadrillages. Les programmes de sixième de 2008 demandent de savoir faire des changements d'unités de mesure mais ne semblent pas s'intéresser à l'effet d'un agrandissement sur les aires et les volumes. Cette connaissance figure dans toute sa généralité au programme de troisième mais ne semble pas mise en évidence auparavant dans le cas particulier des rectangles ou pavés, pour expliquer les systèmes d'unités. On se restreint aux relations entre les unités légales elles-mêmes pour expliquer les facteurs 100 ou 1000 entre les unités d'aire ou de volume. Pourtant, l'effet sur les aires d'agrandissements de rectangles par un coefficient entier quelconque ne nécessite que le pavage et la multiplication.

La question des unités et des changements d'unités, en lien avec les opérations est sans doute un point sur lequel pourrait porter l'attention et motiver pour les enseignants un travail sur les grandeurs géométriques correspondantes, longueurs et aires notamment dès le primaire. Le cas des volumes pleins, plus complexe et où les manipulations sont plus difficiles, ne peut se traiter efficacement que si on a bien compris le cas des aires.

Les instruments pour identifier les grandeurs et les mesurer

Pour les autres grandeurs, les masses en particulier, un instrument peut être nécessaire pour décider de la conservation ou comparer. La question des instruments est donc importante pour aborder et conceptualiser les grandeurs elles-mêmes aussi bien que leur mesure et elle se pose de façon différente pour chaque grandeur.

La longueur est la grandeur prototypique, pour laquelle on peut construire un instrument, une graduation, par report d'une unité arbitraire. La longueur et la graduation permettront de représenter toutes les longueurs sur un axe gradué. Les instruments standard (règle graduée, mètre ruban…) restent proches des opérations qu'on peut faire sur la grandeur elle-même.

Les contenances peuvent se comparer par transvasement, on peut graduer un vase cylindrique mais la grandeur doit se dégager de la forme et les manipulations sont plus difficiles à mener en classe.

La masse est plus difficile à aborder directement. La balance Roberval qui permet de conceptualiser les opérations sur la grandeur (comparaison, addition) n'est plus guère utilisée dans la vie courante.

Pour les aires et les volumes pleins, il n'y a pas d'instrument qui permette de donner facilement un encadrement. Un calque quadrillé pourrait jouer ce rôle pour les aires mais le résultat dépend de la manière de poser le calque sur la surface. On se ramène à des découpages et à des calculs ou on passe par une autre grandeur, la masse ou la contenance pour les volumes (immersion), ce qui, dans le cas de la masse, met en jeu la conservation d'une autre grandeur

Grandeurs continues et nombres décimaux (rationnels, réels)

Contexte de définition des opérations sur les entiers

L'introduction classique des décimaux par changement d'unité (conversions) dans le système métrique ne suffit pas, en particulier pour l'ordre et les approximations, car elle ne fait pas sortir des entiers mais la considération de ce point de vue est néanmoins indispensable. Les grandeurs continues (longueurs en particulier) permettent à la fois de rencontrer l'insuffisance des entiers pour les mesurer et de donner des pistes pour enrichir l'ensemble des nombres, que ce soit par recours à la commensuration (« il faut n*a pour faire p*b », Brousseau, 1980, 1981) ou au partage de l'unité (Douady, 1980). Dans les deux cas, il faut avoir donné du sens à la multiplication d'une grandeur par un entier par report de cette grandeur. Cela suppose que l'enseignement des entiers et de leurs opérations dans les premières classes du primaire considère non seulement des grandeurs discrètes (collections d'objets) mais aussi des grandeurs continues qu'il faut discrétiser par choix et report d'une unité (en particulier construction de graduations pour les longueurs). Or l'introduction des opérations sur les entiers se fait souvent dans le cas des réunions (ou compléments, partages...) de collections ; elles sont supposées s'étendre naturellement aux grandeurs continues éventuellement sollicitées dans les résolutions de problèmes ou en géométrie. C'est dans ce genre d'extensions « naturelles » que peuvent commencer les difficultés de certains élèves. L'introduction des décimaux et de leurs opérations doit se situer en cohérence avec ce qui précède (les entiers) et avec ce qui suit (rationnels et réels). Il est important que les enseignants puissent ancrer le nouveau dans ce que les élèves savent déjà et voir comment la suite des études (à un ou deux ans au moins) viendra reprendre et compléter ce qu'ils enseignent.

Multiplication et division dans le cas des grandeurs

Alors qu'on n'ajoute et soustrait que des grandeurs de même nature, la multiplication et la division entretiennent des rapports différents avec les grandeurs selon les situations : on peut par exemple avoir des produits de mesure (pour les aires ou les volumes) ou des situations de proportionnalité entre grandeurs de même nature (le coefficient est alors un nombre sans dimension) ou entre grandeurs de natures différentes (le coefficient est lui-même une grandeur). Dans le cas des grandeurs de même nature, on peut néanmoins avoir des unités différentes au départ et à l'arrivée, par exemple dans les problèmes d'échelle, ce qui amène une unité dans le coefficient, par exemple des km/cm. De plus, quel que soit le point de vue pris pour l'introduction des opérations (la multiplication notamment qui peut être introduite par les aires ou la proportionnalité), le transfert aux autres types de situations ne va pas de soi. De même, si les fonctions linéaires ne sont traitées que dans le cadre numérique, elles ne se transfèreront pas toutes seules aux situations qui portent sur les grandeurs (voir annexe).

Grandeurs géométriques et géométrie, place des instruments de géométrie

La géométrie intervient aussi dans la conceptualisation des grandeurs et des mesures à cause de l’importance des grandeurs géométriques, et en particulier des longueurs pour la construction des nombres. Régine Douady a souligné le rôle moteur des changements de cadres dans la production des mathématiques et la possibilité de s'en servir dans l'enseignement pour la progression des connaissances des élèves. Mais les jeux de cadres ne peuvent fonctionner que si les élèves ont des connaissances suffisantes dans chacun des cadres. Réciproquement, les grandeurs géométriques interviennent dans la conceptualisation des objets géométriques, en lien avec les instruments, notamment le compas pour les longueurs, l'équerre pour l'angle droit. Ainsi, dans les problèmes de reproduction de figures, le remplacement de la règle graduée par une règle (non graduée) et une bande de papier pour reporter les longueurs ou les partager (par exemple pour prendre le milieu) permet de travailler sur les grandeurs et les opérations sur les grandeurs sans passer par les nombres. Pour reproduire une figure, le fait de fixer une grandeur par un élément géométrique de la figure (par exemple la longueur d'un côté en donnant un segment) plutôt que par une mesure, permet de travailler les relations entre grandeurs plutôt que le calcul et d'asseoir un cadre géométrique qui pourra par la suite interférer avec le cadre numérique pour faire progresser les connaissances. D'autres points seraient à prendre en compte pour la continuité des apprentissages en géométrie, par exemple le passage d'une vision de la figure en termes de surfaces juxtaposées à une vision en termes de réseau de lignes et de points, et la vision des points comme définis par intersection de lignes, droites ou cercles, ou position définie par une grandeur sur une ligne. Je ne développe pas cet aspect, important cependant, puisqu’il n'est pas l'objet de la présente discussion.

Formation des enseignants et élaboration de ressources

La formation des enseignants est un des points essentiels pour l'amélioration de l'enseignement. Sur le thème des grandeurs et mesures, il y a sans doute un gros travail à faire parce que beaucoup des enseignants actuels ont été élèves à l'époque moderne ou post-moderne et ne sont peut-être pas persuadés de l'importance d'un appui sur les grandeurs pour faire des mathématiques. C'est sans doute particulièrement le cas dans le secondaire, d'autant plus que la place de la physique a depuis longtemps été largement diminuée au profit de l'informatique dans la formation des professeurs de mathématiques.

La mise à disposition de ressources pour les enseignants associée à une formation continue appuyée sur ces ressources me paraît un des moyens les plus efficaces de faire évoluer l'enseignement. Dans les paragraphes précédents, j’ai essayé de dégager quelques points qui me paraissaient importants sur les grandeurs et les relations entre grandeurs et nombres, entre opérations sur les grandeurs et opérations sur les nombres. J’ajouterais, en relation avec le thème et plus largement :

- La rencontre d'une variété suffisante de types différents de relations entre grandeurs qui se traduisent par la même opération sur les nombres (par exemple la multiplication) dans des situations qui donnent aux élèves des moyens de contrôler ce qu'ils avancent.
- On touche ici des questions de modélisation.
- Le travail sur les divers systèmes sémiotiques utilisés et les conversions d'un système à un autre.
- Aider les enseignants à voir le lien (et à en créer pour leurs élèves) entre ce qu'ils enseignent, ce que les élèves connaissent déjà et ce qu'ils verront plus tard.

Pistes de recherches

En conclusion, je voudrais dégager quelques pistes pour des recherches en didactique qui me sembleraient aller dans le sens de l'amélioration de l'enseignement des mathématiques à tous les élèves :

Recherche d'une progression cohérente et adaptée au développement des élèves de l'enseignement des mathématiques au long de la scolarité obligatoire

Les enseignants doivent pouvoir comprendre la cohérence et la logique de cette progression non seulement au niveau où ils enseignent mais aussi aux niveaux précédents (d'où viennent leurs élèves) et à un ou deux niveaux suivants (où ils vont).

Cela demande de considérer non seulement les mathématiques mais aussi les supports matériels, les langages et les représentations ainsi que l'activité réelle des élèves et les conditions de fonctionnement de l'enseignement.

La continuité de l'enseignement est faite aussi de ruptures nécessaires. La question porte sur le repérage et la prise en compte de ces ruptures par l'institution et ses agents, les enseignants, qui doivent avoir les moyens de les gérer.

La liaison entre l'école et le collège est toujours selon moi un des nœuds de l'amélioration de l'apprentissage pour tous les élèves.

Production de ressources efficaces pour l'enseignement ordinaire et étude de la façon dont elles permettent aux enseignants d'améliorer leurs pratiques et l'apprentissage de leurs élèves.

Travailler sur ces deux thèmes demande aussi de tenir compte et d'intégrer la masse de recherches déjà existantes sur l'enseignement des mathématiques en testant leur portée, en les affinant, en les complétant.

Annexe : Rôle des grandeurs dans la résolution de problèmes

Exemples portant sur la multiplication et la proportionnalité

Un exemple fictif pour poser le problème

Pescadou, le robot pêcheur attrape 8 poissons à l'heure. Il pêche 6 heures par jour et 5 jours par semaine. Il vend ses poissons 12 F l'un. Combien aura-t-il gagné à la fin de ses quatre semaines de vacances ?

Résolution de Paul :

8 x 6 = 48 ; 48 x 5 = 240 ; 240 x 12 = 2880 ; 2880 x 4 = 11520

de Juliette :

8 x12 = 96 ; 96 x 6 = 576 ; 5 x 4 = 20 ; 576 x 20 = 11520

Les grandeurs soutiennent le raisonnement :

Paul raisonne en poissons (pêchés en une semaine) puis en francs. Il suit l’ordre du texte. Sa solution s'écrit (((8x6)x5)x12)x4

Juliette raisonne en francs (gagnés par jour) puis en semaines (durée en jours) avant de revenir aux francs : ((12x8)x6)x(5x4) Le raisonnement en francs jusqu'au bout serait (((12x8)x6)x5)x4

Le raisonnement en poissons jusqu'au bout serait (((8x6)x5)x4)x12. Les francs arrivent à la dernière étape pour la multiplication par 12 francs par poisson. Les grandeurs rendent intelligible le produit : Accepterions nous comme solution d'élève 12 x 5 = 60 ; 60 x 6 = 360 ; 8 x 4 = 32 ; 360 x 32 = 11520 ?

Les décompositions du résultat 12 x 8 x 6 x 5 x 4 n'ont pas toutes un sens dans le problème. Par exemple la réponse ci-dessus qui s'écrit aussi ((12x5)x6)x(8x4) donne le même résultat mais n'a pas de sens dans le problème. Peut-on multiplier des francs / poisson par des jours ? Les raisonnements acceptables sont donc cohérents avec le produit des grandeurs :

pour Paul (((p/h*h/j)*F/p)*j/s)*s

pour Juliette ((p/h*F/p)*h/j)*((j/s)*s)

(8x(6x(5x4)))x12 et (12x8)x((6x5)x4) sont acceptables : ils correspondent à la recherche du nombre d'heures de pêche (h/j*j/s*s) suivie du calcul du nombre de poissons (p/h*h) puis du prix p*(F/p) pour le premier ou précédée du gain par heure (F/p)*(p/h) pour le second.

Dans les résolutions de problèmes de proportionnalité sur les grandeurs la multiplication n'est ni associative ni commutative. Mais il est important de pouvoir se dégager du sens pour utiliser les propriétés de l'opération sur les nombres pour le calcul, notamment le calcul mental (cf. algèbre).

Exemples vécus :

- Question d'un enseignant stagiaire : Que dire à Juliette, très bonne élève de CM2 qui refuse d'utiliser le coefficient de proportionnalité pour traiter un problème de consommation d'essence en demandant : « Comment se fait-il qu'en multipliant des litres par des kilomètres on obtienne des litres ? »
- Des élèves de 6ème ne comprennent pas pourquoi on multiplie des francs par des kilos pour trouver un prix. La question se pose de façon cruciale quand les quantités par lesquelles on multiplie ne sont pas des entiers et qu'on ne peut plus penser la multiplication comme une addition itérée. (exemple 1,35 kg de roti de porc à 12€ le kilo : pourquoi faut-il multiplier alors que, pour l'élève 1,35x12 signifie seulement 1,35+1,35+1,35...). Pourquoi est-ce pareil que 12 kg à 1,35€ le kg.
- La procédure « isomorphisme » permet de rester dans les mêmes grandeurs. La procédure « fonction » peut en introduire de nouvelles. Les auteurs ajoutent, si nécessaire, une annexe avec une section non numérotée.

Bibliographie

Bessot A. et Eberhard M. (1983) Une approche didactique des problèmes de la mesure. Recherches en didactique des mathématiques, 4/3, 293-324.

Brousseau G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux Recherches en didactique des mathématiques, 1/1, 11-59.

Brousseau, G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux, Recherches en didactique des mathématiques, 2/1, 37 - 127.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une atlantide oubliée. Petit x, 55, 5-32.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2002) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. Petit x, 59, 43-76.

Douady R. (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). Recherches en didactique des mathématiques, 1/1, 77-111.

Douady, R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil objet. Recherches en didactique des mathématiques, 7/2, 5-31.

Douady R. et Perrin-Glorian M.J. (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie "Petit x" n° 6, p.5-33 et "Petit x" n° 8, p. 5-30 IREM de Grenoble repris dans Grand N n°39-40 et n° 41.

Douady R. et Perrin-Glorian M.J. (1986) Nombres décimaux. Brochure n° 62. IREM, Université Paris 7.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane Educational Studies in Mathematics Vol.20. n°4, p. 387-424.

Moreira Baltar, P. (1996) Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège, Université Joseph Fourier Grenoble 1.

Perrin-Glorian, M.J. (1989-1990) L'aire et la mesure, Petit x n°24, 5-36.

Perrin-Glorian, M.J. (1992) Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème, thèse soutenue en février 1992, Université Paris 7.

Perrin-Glorian, M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, Recherches en didactique des mathématiques, 13/1.2, 5-118.

Perrin-Glorian M.J. (2002) Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires in Dorier, J.L.& alii Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, Corps, 2001, La Pensée sauvage, Grenoble, p. 299-315. Version plus longue avec annexes dans le CD-rom associé.

Rogalski, J. (1982) L'acquisition de notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface) Recherches en didactique des mathématiques n° 3.3, 343- 396.

Vergnaud et al. (1983) Didactique du concept de volume. Recherches en didactique des mathématiques, 4/1, 5-132.

4.5 Enseignement et apprentissage de l'algèbre

Mots-clefs : collège, calcul algébrique, didactique

Michèle Artigue Professeur émérite Université Paris Diderot, LDAR et IREM

Introduction

Dans ce texte qui correspond à la présentation que j'ai faite sur ce thème à la réunion du 16 janvier du comité scientifique de la conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques, j'essaie d'abord de contribuer à l'état des lieux concernant la recherche didactique dans ce domaine en mettant notamment l'accent sur certaines évolutions des perspectives de recherche qui me semblent importantes pour penser l'entrée aujourd'hui dans le monde algébrique. Je m'appuie pour cela sur un certain nombre de travaux de synthèse et notamment l'étude menée sur ce thème par l'ICMI, la commission internationale de l'enseignement mathématique, dont les résultats ont été publiés en 2004 (Stacey, Chick & Kendal, 2004). J'insiste aussi sur la diversité des stratégies curriculaires qui existent aujourd'hui pour l'entrée dans l'algèbre au niveau international pour situer les choix curriculaires français dans un contexte élargi, et j'essaie enfin de tirer de ces travaux et constats quelques leçons pour penser l'enseignement de l'algèbre en France dans la scolarité obligatoire, en étant particulièrement attentive à la viabilité des propositions qui peuvent être faites.

Les recherches en didactique de l'algèbre

L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre est une question qui a préoccupé les didacticiens depuis l'émergence de ce champ de recherche. Il y a à cela une raison évidente, le fait que l'entrée dans l'algèbre a constitué traditionnellement, pour beaucoup d'élèves, un moment de rupture, un moment où l'activité mathématique cessait de faire sens, tendait à se réduire à un jeu formel basé sur des règles dont ils ne comprenaient pas les raisons d'être. Le sens de l'algèbre disparaissait derrière l'apprentissage d'un nouveau calcul : le calcul littéral, souvent conçu comme un préalable à l'activité algébrique, ses tâches spécifiques (développer, simplifier, factoriser) et ses techniques. La recherche, interpellée par cet échec, a essayé d'en comprendre les sources et les mécanismes, de démêler ce qui relevait de difficultés cognitives ou épistémologiques, liées à la nature même de ce domaine mathématiques, de ce qui relevait de choix curriculaires et de pratiques d'enseignement. Elle a aussi cherché à comprendre comment ces différentes sources de difficultés interagissaient au sein des systèmes didactiques.

Elle l'a fait, en croisant de multiples entrées, comme le reflète bien l'étude ICMI citée plus haut. Les approches historiques et épistémologiques ont permis de baliser le développement de ce domaine dans différentes cultures, d'identifier les étapes clefs et les obstacles épistémologiques progressivement surmontés. Elles ont aussi permis de comprendre que le symbolisme algébrique qui nous est familier aujourd'hui résulte d'une longue et patiente conquête. Les approches cognitives, très dominantes dans les débuts de cette recherche comme c'est souvent le cas en didactique quand débute l'étude d'un domaine, se sont centrées sur l'identification précise des difficultés des élèves et la recherche de cohérences susceptibles d'expliquer les erreurs particulièrement résistantes. Très tôt, et notamment en France, certains travaux ont aussi adopté une entrée systémique, cherchant à comprendre les conditions et contraintes de l'enseignement de l'algèbre. Les articles très souvent cités de Chevallard (1984, 1989, 1990) en sont un exemple pionnier. Au fur et à mesure que se produisaient les avancées technologiques, la recherche a également essayé de tirer parti de l'évolution des moyens à la disposition de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre qui en résultait. Cette recherche s'est accompagnée de nombreuses réalisations didactiques dans les classes, qu'il s'agisse d'ingénieries didactiques développées pour ses besoins ou de projets d'enseignement cherchant à en exploiter les résultats. Enfin, de façon croissante depuis deux décennies au moins, la recherche s'est intéressée aux enseignants, à leurs représentations de l'algèbre et de son enseignement, à leurs connaissances algébriques, aux formations qui leur étaient dispensées et à leurs effets, à la façon dont se développaient leurs compétences professionnelles dans ce domaine. Elle l'a fait à l'aide de questionnaires, d'entretiens, d'observations naturalistes de classe, mais aussi de plus en plus, au sein de communautés de recherche intégrant enseignants et chercheurs (Jaworski, 2003). Précisons pour terminer ce panorama général des recherches didactiques en algèbre, que la recherche, si elle s'est beaucoup concentrée sur l'entrée dans le monde algébrique, a néanmoins concerné tous les niveaux d'enseignement jusqu'à celui des structures algébriques à l'université (cf. par exemple les nombreux travaux concernant l'algèbre linéaire). Les travaux menés sur l'algèbre au sein de mon laboratoire, les thèses qui y ont été soutenues, illustrent parfaitement cette diversité des approches et leur complémentarité : toutes ces dimensions y sont représentées.

Ces travaux ont donné lieu à un nombre impressionnant de publications de recherche (articles, ouvrages, rapports), de réalisations technologiques et de ressources pour l'enseignement. Des ouvrages de synthèse en favorisent l'accès. S'agissant de synthèses internationales, outre l'étude ICMI déjà citée, je mentionnerai par exemple l'ouvrage coordonné par Bednarz, Kieran et Lee (1996) cité en référence, et les deux chapitres dédiés à l'algèbre dans le *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Lester, 2007), le premier écrit par Carraher et Schliemann étant dédié à ce que l'on appelle « *Early Algebra* » et couvrant les premières années de la scolarité, le second écrit par Kieran concernant l'enseignement secondaire. Il s'agit là d'une littérature en langue anglaise mais on dispose aussi de nombreux écrits en langue française : productions des IREM et de l'INRP, articles publiés dans les revues *Petit x* et *Repères IREM*, dans la revue *Recherches en didactique des mathématiques*. Précisons que cette revue va d'ailleurs publier incessamment un numéro spécial concerné à ce domaine coordonné par Coulange et Drouhard (2012). Il n'est pas question d'essayer en quelques minutes de faire une synthèse des résultats obtenus. Comme annoncé, je vais me centrer sur quelques évolutions qui me semblent importantes s'agissant notamment de l'enseignement jusqu'à la fin du collège.

Quelques évolutions importantes

Comme je l'ai souligné plus haut, dans ses débuts, la recherche en didactique de l'algèbre a mis tout particulièrement l'accent initial sur l'identification et la compréhension des difficultés des élèves, essayant de comprendre pourquoi l'apprentissage de ce domaine était si problématique. Ces travaux ont conduit à mettre en évidence des discontinuités et fausse-continuités entre arithmétique et algèbre. Elles concernaient notamment l'usage des lettres, essentiel en algèbre. Les lettres existent déjà en arithmétique, utilisées pour désigner des objets ou coder des unités, mais elles n'y représentent pas des nombres et ne sont pas engagées à ce titre dans des calculs. Par exemple, il est fréquent d'écrire pour exprimer des conversions entre monnaies que 1 €=k$, k le taux de change entre euro et dollar étant ce jour par exemple égal à 1,30226. Les symboles € et $ sont ici des symboles d'unités, mais si l'on veut passer d'une somme S exprimée en euros à son correspondant S' exprimé en dollars, on devra écrire S'=kS et non S=kS'. De nombreuses erreurs d'élèves, par exemple celle classique consistant à exprimer, en utilisant pour E le nombre d'élèves et P le nombre de professeurs dans un établissement, qu'il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs par 6E=P au lieu de 6P=E, est souvent interprétée par les chercheurs comme le signe de la difficulté à passer d'une lettre désignant un objet à une lettre désignant un nombre, une difficulté dont la trace historique est bien attestée (cf. par exemple (Serfati, 2005)). Ceci a conduit à distinguer différents sens pour les lettres : étiquette, inconnue, nombre générique, variable, indéterminée, paramètre, et à étudier les difficultés rencontrées par les élèves à naviguer entre ces différents sens. Un autre point de rupture identifié dans les recherches est celui concernant le signe d'égalité. Les travaux de recherche ont montré que les pratiques arithmétiques usuelles mobilisaient dans les classes le signe d'égalité avec un sens de production : à gauche de l'égalité, un calcul, à droite, le résultat de ce calcul, tandis que les techniques de calcul algébrique ne peuvent prendre sens que si le signe d'égalité est vu comme un symbole d'équivalence. Et, encore une fois, ceci a été mis en relation avec les difficultés résistantes éprouvées par certains élèves à rentrer dans le jeu du calcul algébrique, un jeu où l'on pilote le calcul en fonction du but poursuivi en navigant entre expressions équivalentes.

Les recherches ont aussi mis l'accent sur les différences existant dans la formation et le traitement des expressions, au-delà de la seule introduction des lettres, la nécessaire lecture par blocs qui s'impose en algèbre, les implicites qui apparaissent dans l'écriture (implicite du signe x entre deux facteurs, implicite du facteur 1 par exemple), le fait que la terminaison d'un calcul algébrique peut être une expression comportant encore des signes opératoires. Enfin, les recherches ont mis en évidence le renversement des démarches de résolution en jeu dans la résolution algébrique de problèmes, en particulier de problèmes conduisant à des équations, la nécessité d'entrer dans une démarche où l'on ne procède pas du connu vers l'inconnu, la nécessité de s'affranchir du contrôle par le sens externe des transformations et calculs effectués au profit d'un contrôle syntaxique et d'un contrôle par la sémantique interne des expressions. Ces résultats de la recherche, consolidés par des travaux convergents menés dans de nombreux pays, sont aujourd'hui bien connus. Ils ont été source de réalisations didactiques diverses et souvent fructueuses, au moins en environnement expérimental, visant d'une part, en formation, à sensibiliser les enseignants à ces discontinuités, d'autre part, à construire des séquences didactiques pour les classes, mettant sciemment l'accent sur les ruptures et permettant aux élèves de les affronter. Cependant, on peut se demander si un tel accent mis sur les discontinuités est pleinement justifié, et s'interroger sur la part respective de discontinuités due à des différences fondamentales entre les champs de l'arithmétique et de l'algèbre, et de discontinuités dues à des pratiques d'enseignement inappropriées tant du côté de l'arithmétique que de l'algèbre. Pour y voir plus clair, il faut élargir le regard, tant sur le plan épistémologique que didactique.

La recherche didactique qui s'est développée s'est également préoccupée des fonctionnalités de l'algèbre en s'appuyant notamment sur la diversité des routes utilisées suivant les cultures pour organiser l'entrée des élèves dans ce champ. Comme l'a bien montré initialement l'enquête menée par Sutherland (2000) et le prolongement de cette enquête réalisé dans le cadre de l'étude ICMI, co-existent en effet différentes voies d'entrée dans l'algèbre qui expriment la diversité des fonctionnalités de l'algèbre. Historiquement, l'algèbre apparaît comme une science des équations, l'algèbre moderne qui s'est développée au vingtième siècle est une science des structures. Mais l'algèbre est aussi le langage par lequel s'expriment de façon privilégiée les rapports entre mathématiques et autres domaines scientifiques, le langage de la modélisation mathématique, et il est aussi le langage de la généralisation, celui dans lequel s'expriment les propriétés des opérations et les régularités de l'arithmétique. Comme le souligne le mathématicien Howe par exemple, cité dans (Carraher & Schliemann, 2007), il y a de ce fait une continuité entre arithmétique et algèbre. Cette diversité des fonctions de l'algèbre se retrouve dans les choix curriculaires. Dans certains pays, c'est la voie historique des équations associée à la démarche analytique cartésienne qui est choisie, dans d'autres, notamment de culture anglo-saxonne, c'est la voie de la reconnaissance de structures et de la généralisation qui est choisie. Il ne s'agit pas d'enseigner les structures algébriques mais de repérer ce que l'on appelle des « patterns » dans des suites de nombres, dans des configurations géométriques, de les exprimer algébriquement et d'utiliser cette expression algébrique pour les étudier, les caractériser, les comparer. Dans d'autres pays, c'est la voie de la modélisation qui est choisie, souvent en lien avec des situations extra-mathématiques. A cette diversité d'entrées s'ajoute la façon dont s'organise la mise en place du symbolisme algébrique, les techniques de calcul associées, comme une propédeutique à une algèbre à venir, ou de façon étroitement imbriquée à son enseignement et aux besoins qu'il fait naître, et le degré d'attention porté à la progressivité nécessaire de cette mise en place.

Revenant aux difficultés de l'entrée dans le monde algébrique, il semble bien que ces différentes voies ne soient pas équivalentes, qu'elles ne posent pas dans les mêmes termes les rapports entre arithmétique et algèbre. Une approche par les patterns et la généralisation par exemple, conduisant à des formules et à leur exploitation, ou à des programmes de calcul, est une approche dans laquelle la pensée algébrique étend la pensée arithmétique, mais ne s'y oppose pas. C'est aussi le cas dans de nombreuses pratiques de modélisation conduisant à des formules et des fonctions. Contrairement à cela, une entrée par la mise en équations nécessite bien une rupture de pensée. Et si elle se cumule avec une entrée tardive donc plus brutale dans le symbolisme algébrique, ou un développement du calcul littéral comme une propédeutique à l'algèbre dont les finalités et fonctionnalités ne sont pas accessibles à l'élève, on accumule les obstacles, faisant de ce domaine un domaine inaccessible à beaucoup.

Les travaux qui se sont développés ces dernières années dans ce que l'on appelle le champ de « l'early algebra » ou « algèbre précoce » tendent à confirmer ceci. Au-delà du chapitre de handbook cité plus haut, l'ouvrage coordonné par Cai et Knuth et publié en 2011, en donne une vision détaillée. Ces travaux, contrairement à ceux qui ont marqué les débuts de la recherche en didactique de l'algèbre, mettent l'accent sur les potentialités des jeunes élèves, dès les premières années de scolarité, leur capacité à entrer dans des modes de pensée algébriques : envisager des généralisations, soutenir ces généralisations par des représentations symboliques et développer un certain calcul sur ces représentations, à condition bien sûr que des stratégies didactiques appropriées soient mises en place. Les stratégies qui ont été construites et expérimentées, le plus souvent à petite échelle et en contact étroit avec la recherche, mettent l'accent sur les interactions possibles entre l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. Elles voient dans l'algèbre précoce un appui au développement des connaissances et compétences numériques. Je ne rentrerai pas ici dans plus de détails, renvoyant le lecteur aux ouvrages cités ou à l'article de Carraher, Schliemann et Brizuela à paraître dans le numéro spécial de la revue *Recherches en didactique des mathématiques* déjà cité. Dans certaines stratégies, l’accent est mis sur la généralisation de propriétés des nombres et des opérations (par exemple la généralisation de faits numériques comme 5+12-5=12) et l’utilisation de ce que les chercheurs concernés appellent des quasi-variables (des nombres qui ont un rôle générique) en préalable à l’usage de lettres. Dans d’autres stratégies, inspirées des travaux de Davidov, par exemple le « Measure-up Project » cité dans le Handbook, c’est un calcul sur les grandeurs qui est développé dès le début de la scolarité donnant lieu à des raisonnements portant sur égalités et inégalités, compositions et décompositions, s’appuyant là-encore sur un symbolisme progressivement introduit. Dans d’autres cas, c’est la voie des patterns et des fonctions mentionnée plus haut qui est adaptée à ces jeunes élèves avec une entrée très progressive dans le symbolisme. Mais, comme le soulignent aussi généralement les auteurs, si ces travaux montrent des potentialités réelles des élèves, il reste beaucoup à faire pour développer des stratégies didactiques robustes pouvant fonctionner hors du contrôle de la recherche.

Technologie et enseignement de l’algèbre

J’ai mentionné plus haut que la recherche didactique a sérieusement investi dans l’étude des potentialités offertes pour l’enseignement de l’algèbre par les avancées technologiques. On peut distinguer plusieurs pistes et notamment :

La piste tableur : cette piste a été une des premières explorées (cf. par exemple, en France, la thèse de Bernard Capponi (1988)). Les travaux ont été très nombreux. Ils ont montré que le tableur atténuait les discontinuités entre arithmétique et algèbre en permettant de faire vivre un monde intermédiaire, arithmétique par les modes de pensée et de résolution de problèmes, algébrique par l’organisation de la feuille de calcul et la symbolisation. Dans divers projets expérimentaux, le tableur a été utilisé avec succès pour l’entrée dans l’algèbre. La thèse d’Haspekian a cependant montré qu’une entrée simultanée dans le tableur et dans l’algèbre n’allait pas de soi lorsque l’on se plaçait dans les conditions ordinaires d’enseignement au collège en France. Et, tout en confirmant certains résultats des recherches, elle a mis en évidence la complexité des notions de variable et de formule dans le tableur, ainsi que la sous-estimation de cette complexité et plus généralement des besoins des genèses instrumentales dans les ressources proposées aux enseignants.

La piste des interactions entre représentations : cette piste a été exploitée notamment en liaison avec le travail sur les fonctions et la modélisation fonctionnelle dès le développement des interfaces graphiques. Pour les débuts dans l’algèbre, elle a été particulièrement associée aux approches en termes de patterns et de modélisation. Le développement de calculatrices dotées de logiciels de calcul formel a permis d’enrichir ces interactions en y intégrant le registre symbolique algébrique mais avec des exploitations surtout au niveau lycée.

Considérant le faible usage des outils de calcul formel aux niveaux d’enseignements concernés par cette conférence, même s’ils ont montré des potentialités certaines par exemple pour donner sens à l’équivalence algébrique, je n’insisterai pas plus ici sur les potentialités de cette technologie. Je voudrais cependant ajouter que les logiciels de calcul formel ont, plus que les autres technologies, conduit à questionner l’enseignement de l’algèbre car, contrairement aux tableurs et aux logiciels graphiques, ils prenaient en charge le cœur de l’activité traditionnelle des élèves en algèbre : factorisations, développements, simplifications, résolution d’équations. L’approche instrumentale qui a été initiée en France (Artigue, 2002) mais s’est ensuite développée internationalement a conduit alors à repenser les rapports entre activité technique et activité conceptuelle dans ces environnements, et à souligner la nécessité de renforcer, par des tâches appropriées, le potentiel épistémique des techniques instrumentées si l’on voulait leur assurer une légitimité didactique. Ceci a rejailli de façon plus générale sur la didactique de l’algèbre, en promouvant une vision plus dialectique des rapports entre travail technique et conceptuel en algèbre, comme le montre l’étude ICMI.

La piste de « l’embodiement » : cette piste exploite les possibilités offertes par l’exploration de dispositifs physiques reliés à des ordinateurs pour développer une approche expérimentale des notions mathématiques, par exemple celles de vitesse et d’accélération. L’algèbre y intervient comme langage de modélisation de situations extra-mathématiques (cf. par exemple (Nemirovski & Borba, 2004).

La piste de l’équivalence algébrique : c’est celle qui fonde par exemple le développement poursuivi depuis de nombreuses années du logiciel Aplusix1.

La piste du diagnostic et de la remédiation : c’est la piste qui a été notamment développée en France à partir de l’outil de diagnostic des compétences des élèves en algèbre élémentaire développé par Grugeon dans sa thèse (Grugeon, 1995) dans les projets Pepite et Lingot2 (Delozanne & al., 2010), et maintenant dans le projet Pepimep qui vise à associer au diagnostic automatisé, des parcours différenciés en fonction des profils d’élèves.

Quelles leçons tirer de cet ensemble de travaux ?

Les travaux existants en didactique de l'algèbre fournissent donc aujourd'hui des éléments substantiels pour penser l'enseignement de l'algèbre et rompre avec l'image d'un domaine formel où les mathématiques cessent de faire sens. J'insisterai ici sur quelques points clefs s'agissant de la problématique de cette conférence :

D'abord le fait que s'il existe des difficultés à l'apprentissage de ce domaine, elles sont fortement renforcées par les choix curriculaires et les pratiques d'enseignement. On peut par exemple penser que des discontinuités entre arithmétique et algèbre comme celle concernant le sens de l'égalité sont largement créées par les pratiques d'enseignement car rien n'interdit mathématiquement que le signe d'égalité puisse vivre en arithmétique avec un sens d'équivalence. Comme je l'ai souligné dans les remarques concernant l'enseignement du calcul, décompositions et compositions des nombres sont toutes deux nécessaires à l'exercice du calcul, à la mise en place des rapports adéquats entre automatisation et raisonnement que nécessite un calcul efficace. Et, sans se lancer dans un enseignement précoce de l'algèbre auquel notre système éducatif n'est pas du tout préparé, il serait important de pointer les différentes occasions que l'on a, dès l'école élémentaire, dans le cadre des programmes actuels, de cultiver les continuités entre arithmétique et algèbre, de souligner notamment l'intérêt pour servir ces continuités du travail sur les formules, du repérage de régularités numériques avec des codages adaptés, tout ceci permettant une entrée fonctionnelle et plus progressive dans le symbolisme algébrique que ce n'est le cas aujourd'hui.

Comme souligné dans l'étude ICMI, nous faisons partie des pays où l'entrée dans l'algèbre, culturellement, est d'abord perçue comme l'entrée dans le monde des équations. Cette tradition ne contribue certainement pas à faire de l'enseignement de l'algèbre un enseignement accessible à tous. Mais par ailleurs, l'accent est de plus en plus mis sur la nécessité de faire face dans la scolarité de base aux besoins d'une mathématique citoyenne, sur la nécessité de renforcer les liens entre mathématiques et autres disciplines, ce qui nécessairement impose des processus de modélisation mathématique. Ces besoins font intervenir, comme souligné plus haut, d'autres fonctionnalités de l'algèbre, d'autres leviers pour son enseignement. Ils peuvent favoriser une entrée plus progressive dans ce champ. Dans le documents d'accompagnement des programmes du collège intitulé « Du numérique au littéral »3, on les voit émerger. L'algèbre apparaît ainsi comme outil de généralisation et de preuve, des exemples de patterns comme celui emblématique du carré bordé, des programmes de calcul sont proposés. Mais si d'autres fonctionnalités sont prises en compte, en particulier dans une culture où elles ne vivaient pas préalablement, il faut qu'elles soient prises en charge dans de véritables progressions et ne se bornent pas à apparaître comme des situations anecdotiques et isolées. Sur ce plan, beaucoup reste à faire si l'on considère les manuels actuels.

Enfin, dans ce domaine comme dans tous les autres, la formation des enseignants est déterminante. Et même si l'initiation à l'algèbre ne commence pas en France à l'école primaire, les enseignants du primaire sont concernés. Les recherches montrent bien les difficultés qu'ils ont souvent avec le symbolisme algébrique, faisant partie de ceux justement pour lesquels l'enseignement secondaire a échoué à construire un rapport adéquat à ce domaine. Si l'on veut ne pas accentuer artificiellement les discontinuités entre arithmétique et algèbre, il est important que les enseignants du primaire se sentent à l'aise pour le moins avec cette pré-algèbre qu'ils peuvent contribuer à installer. Les conditions de la formation, tant initiale que continue, rendent aujourd'hui cette ambition, qui peut sembler pourtant très modeste, difficile à réaliser.

Bibliographie

Artigue M., Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol 7, n°3, 2002, p. 245-274.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dotdrecht : Kluwer Academic Publishers.

Capponi B. (1988) *Calcul algébrique et programmation dans un tableur. Le cas de Multiplan*. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Carraher, D., Schliemann A., (2007). Early Algebra, In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 669-706. NCTM. Information Age Publishing.

Chevallard Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, n°5, 51-94.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, n°19, 45-75.

Chevallard Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, n°23, 5-38.

Combier, G., Guillaume, J.C., Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège*. Paris : INRP.

Coulange, L., Drouhard, J.P. (eds.) (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Delozanne, E., Previt, D., Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. (2010), Vers un modèle de diagnostic de compétences, *Revue Technique et Sciences Informatiques*, 29 (8-9), 899-938.

Grugeon B., *La transition entre enseignement professionnel et enseignement général : le cas de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris 7, p.9-96, 1996.

Haspekian M., *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Étude du cas des tableurs*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7, 2005.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulations. In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 707-762. NCTM. Information Age Publishing.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics* 54: 249–282.

Nemirovsky R. & Borba M. (eds) (2004). Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. PME Special Issue. *Educational Studies in Mathematics*, 57/3.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique*. Editions Petra.

Stacey, K., Chick, H., Kendal, M. (2004). *The future of the Teaching and Learning of Algebra*. Springer Verlag.

Sutherland, R. (2000). *A comparative study of algebra curricula*. Bristol, UK : Qualification and Curriculum Authority.

4.6 Quelle fonctionnalité pour l'algèbre au niveau de l'enseignement secondaire ? La piste de la modélisation fonctionnelle

Mots-clefs : collège, calcul algébrique, ressources, didactique

Maggy Schneider, Professeur, Université de Liège, Belgique

Introduction

A vrai dire, mon travail de didacticienne ne m'a pas amenée à approfondir les questions d'apprentissage et d'enseignement spécifiques à l'algèbre. Mais j'ai travaillé des problématiques connexes, soit liées à des apprentissages en aval dans le domaine de l'analyse mathématique au Lycée, soit relatives à des contenus enseignés en parallèle avec l'algèbre, plus particulièrement la géométrie enseignée au Collège, y compris dans sa dimension algébrisée. C'est donc à travers un certain filtre que je parlerai aujourd'hui de l'algèbre au niveau du Collège. J'y ajouterai un regard d'actrice de terrain, ayant participé à des commissions chargées de rédiger des programmes et des référentiels de compétences et ayant exercé jusqu'en 2007 la fonction d'inspectrice et d'animatrice des professeurs de mathématiques des institutions scolaires dirigées par les Jésuites de la Province méridionale de Belgique.

Dans ce dernier contexte, mes observations sur l'enseignement de l'algèbre au Collège m'ont laissée perplexe. J'en garde l'impression globale que l'algèbre est un enjeu de formatage des élèves, sommés de respecter des règles fort peu motivées et donc obligés de manœuvrer à coup d'obligations et d'interdictions. J'en prends pour indicateur le nombre élevé de questions adressées au professeur du type « Peut-on faire ceci ?» ou « Doit-on faire cela ? ». Et le risque que s'installe, chez les élèves, une telle posture vis-à-vis des mathématiques pour le reste de leur scolarité n'est pas négligeable. J'ai vu de telles « connaissances de contrat » à l'œuvre également dans des recueils d'exercices dont je vous livre deux exemples assez interpellant : Précise si le résultat du calcul suivant est un périmètre, une aire, un volume ou aucun des trois : 3a + 5a et Simplifie en utilisant toutes les règles algébriques vues : (5 – 2a) 3d (2 – b). J'ajouterai une anecdote qui me paraît significative même si piège il y a. Invités à commenter, sans autre précision, les trois égalités ci-dessous, la quasi totalité des professeurs y repèrent des erreurs classiques d'élèves lorsqu'ils divisent une somme par un même nombre plutôt que d'y voir des égalités ayant, par rapport à la lettre a, des statuts différents d'identité, d'équation sans solution ou d'équation avec solution.

$$\frac{3a+6}{3} = a+2$$
$$\frac{3a+6}{3} = a+6$$
$$\frac{3a+6}{3} = 3a+2$$

Quant à ce qui se passe au niveau du Lycée, on peut noter le désarroi des élèves qui doivent assumer un certain degré d'incertitude, devant choisir suivant les circonstances une forme factorisée d'une expression algébrique, une qui ne l'est pas et même des formes dans lesquelles des mises en évidence, telles que $2x^2 – 3x + 1 = x^2(2 – 3/x + 1/x^2)$, n'avaient aucunement droit de cité au Collège. J'ai pu également observer, dans le discours des professeurs de Lycée, le peu d'explications qui marquent et motivent cette rupture, comme si l'important était plutôt de remplacer une espèce de formatage par une autre, à savoir le respect inconditionnel d'une démarche canonique pour étudier les variations d'une fonction.

Il s'agit là d'observations « sauvages » qui présentent cependant l'intérêt de corroborer ce que d'autres chercheurs ont pu mettre en évidence. En particulier, des écrits déjà anciens d'Y. Chevallard (1988) me paraissent toujours d'actualité. Ce dernier souligne bien que c'est un changement de contrat qui est une cause majeure d'échec à l'entrée au Lycée et que, si changement de contrat il y a, c'est parce que l'enseignement de l'algèbre au Collège ne procure aucune fonctionnalité à cette discipline : « A l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser) ». Il n'est d'ailleurs pas certain, en Belgique comme en France, que ce défaut soit complètement corrigé au Lycée tant l'enseignement souffre de ce que Chevallard (op. cit.) appelle la pseudo-algorithmicité :

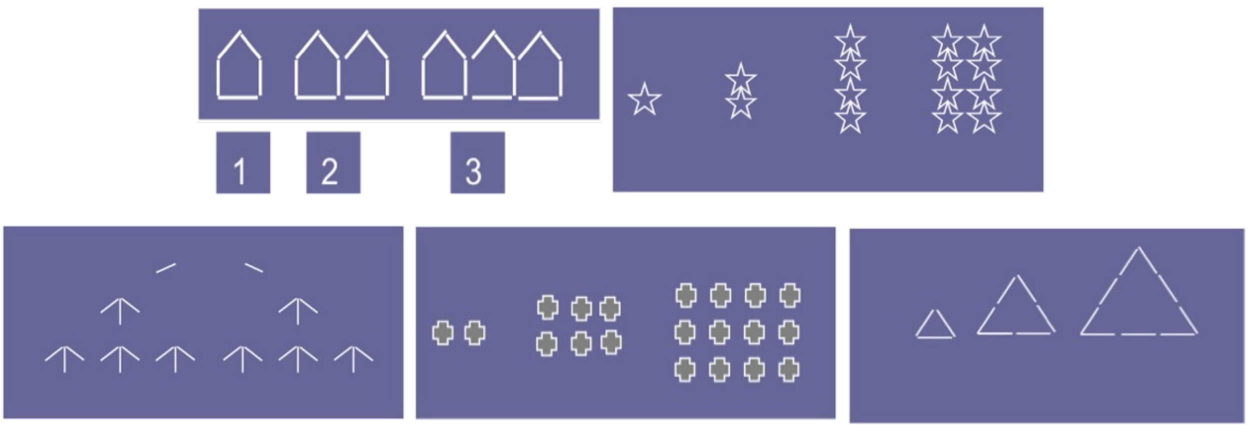
> « D'une manière générale, l'enseignement usuel tend à diminuer l'incertitude inhérente à l'activité mathématique en fournissant à l'élève un code de conduite, nulle part explicité comme tel, mais extrêmement prégnant, qui engendre un quasi déterminisme des pratiques mathématiques scolaires, ce que nous nommerons la pseudo-algorithmicité ».

Ainsi, quand on a un carré, on s'empresse de le développer que ce soit judicieux ou non de le faire. D'autres chercheurs (Mercier, 1992 et 1995) soulignent l'ampleur du phénomène en mettant en évidence un malaise lié à la validation des règles algébriques qui sont souvent présentées comme des règles de « conformité » dans des versions pouvant différer selon qu'il s'agit de théorèmes « élèves » (par exemple, Tout terme qui change de membre change de signe) ou de théorèmes « professeurs ». En Belgique, les professeurs du Collège insistent sur la récitation en « mots » des règles, en faisant référence le cas échéant, quoique de plus en plus rarement, aux structures que confèrent certaines propriétés aux ensembles de nombres.

Je reviendrai plus loin sur la difficulté réelle à justifier les règles du calcul algébrique. Mais je souhaite pointer un autre phénomène que j'ai pu souvent observer dans les classes belges, à savoir l'absence de prise de conscience que les expressions algébriques « dénotent », c'est-à-dire qu'elles fournissent une valeur numérique lorsqu'on remplace les lettres contenues dans l'expression par des nombres donnés et que cette valeur fournie ne se modifie pas lorsqu'on transforme ces expressions selon des règles conformes. On a là un point de vue jadis présent dans les manuels, les expressions algébriques y étant spécifiées par des ensembles de nombres représentés par des lettres et des opérations à effectuer sur ceux-ci. Mais aujourd'hui, plusieurs recherches mettent en évidence que, pour certains élèves, les expressions algébriques sont des étiquettes mises sur des objets graphiques ou géométriques et non des contraintes portant sur des coordonnées de points, que ce soit dans le domaine de l'analyse (Schneider, 1988) ou dans celui de la géométrie analytique (Sackur et al., 2005; Lebeau et Schneider, 2010) et que cette conception est le signe d'une ignorance du phénomène de dénotation. Dans de nombreuses recherches, on tente de trouver aux erreurs algébriques habituelles une certaine cohérence en termes de règles implicitement appliquées par les élèves. Personnellement, je pense qu'on peut interpréter toutes ces erreurs en termes de contrat didactique, entre autres par le respect de la complexité ostensive de l'expression initiale (Chevallard, 1992) et qu'il n'y a guère d'intérêt à faire des catégories d'erreurs relevant du « non sens » en regard de ce problème lié à la dénotation. Aussi, dans une étude faite sur les compétences algébriques des élèves belges après 2 ans de collège (Vlassis et Demonty, 2002), ai-je tendance à souligner que le résultat le plus important est que ceux-ci ne savent pas ce que signifie : vérifier que 2 est solution de l'équation $3x - 6 = 0$. Et je souscris dans la foulée à la proposition que ces chercheuses étayent sur base de la littérature anglo-saxonne qui consiste à « rendre aux démarches intuitives [de résolution d'équations], une place véritable […] en cessant de présenter les méthodes formelles comme unique méthode de résolution ».

Vers une approche de l'algèbre par ses usages

D'un tel relevé d'écueils relatifs à l'enseignement de l'algèbre, je déduis l'importance de rendre à l'algèbre une certaine fonctionnalité et cela d'entrée de jeu. Les domaines où l'algèbre est utilisée sont multiples : le calcul des grandeurs, la géométrie analytique, l'analyse mathématique sans oublier des domaines plus spécifiques tels que l'algèbre financière ou la programmation linéaire, … Bien sûr, il est plus facile de penser « applications » que « situations d'amorce » à l'algèbre dans chacun de ces domaines. Mais il n'est pas exclu d'imaginer avancer au collège l'étude d'objets que l'on réserve habituellement pour le lycée et le reste de mon exposé ira dans ce sens. J'ai une affection particulière pour la géométrie analytique et l'étude des fonctions. La géométrie analytique offre des occasions privilégiées d'apprendre aux élèves à faire un plan de calcul algébrique. Il suffit de penser à la preuve analytique du concours des médianes d'un triangle pour voir que l'on y fait jouer à leurs équations respectives des sorts différents dans un programme finalisé. Mais, la géométrie analytique trouve, en la géométrie vectorielle, une forte concurrente et je ne peux ici argumenter valablement du choix de l'une par rapport à l'autre. Je choisis donc de développer, bien que schématiquement, la piste de la modélisation fonctionnelle sur laquelle, je pense, peuvent se greffer les principales techniques algébriques. C'est une piste que j'ai personnellement travaillé dès le milieu des années 80 dans le cadre d'une commission des programmes ayant observé, dans des manuels de la série School Mathematics Project, qu'il y avait des avancées de ce point de vue très tôt dans le curriculum anglais alors même que l'algèbre y était moins développée. Et, en particulier, j'ai proposé d'introduire les problèmes de suites de nombres figurés qui y étaient présents. Je reviendrai, dans la conclusion, sur les heurs et malheurs de cette proposition, pour décrire ce qu'une recherche récente, co-dirigée par A. Mercier et moi-même, a permis d'en dire. A des élèves de 12 ans, les suites ci-dessous ont été présentées et, pour chacune, ont été posées des questions relatives au nombre d'objets à une étape éloignée et à n'importe quelle étape ainsi qu'une question sur le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets. S'ensuivait une question globale sur les ressemblances entre suites.



Les expérimentations et l'analyse qui en est faite (Krysinska, Mercier et Schneider, 2009 ; Krysinska & Schneider, 2010) montrent et expliquent les potentialités mais aussi les limites de ce milieu en termes d'instrumentation sémiotique de l'idée de covariation, d'algébrisation ou de pré-algébrisation des programmes de calcul, de références temporelles qui sont un catalyseur tantôt positif, tantôt négatif et de la faisabilité d'un classement que le professeur peut traduire par un paramétrage. Le focus mis sur les suites arithmétiques et géométriques, le dernier exemple ayant le rôle d'intrus, est délibéré : elles sont en effet très facilement identifiables par des élèves de cet âge et se prêtent à une double lecture, itérative et fonctionnelle, ce qui fait que la validation du terme général vient tout simplement de la définition du produit comme addition répétée et de la puissance comme multiplication répétée. L'une de ces suites au moins favorise une pluralité de programmes de calcul. Se pose alors la question de leur équivalence et celle des règles algébriques qui permettent de transformer l'un en l'autre. La dénotation, qui joue déjà un rôle dans l'algébrisation, permet alors d'invalider certaines règles non conformes. En outre, ces programmes de calcul correspondent à différentes stratégies de comptage qui s'adaptent à toute valeur de n. On sait donc qu'ils sont équivalents. Par conséquent, dans le contexte du problème, les règles algébriques mobilisées sont validées comme étant celles qui permettent de passer d'un programme de calcul à un autre dont on sait déjà qu'il est équivalent au premier. Certaines de ces règles peuvent être corroborées par des évidences relatives au calcul de grandeurs. Dans les deux cas, on a une forme de validation pragmatique des règles d'algèbre lesquelles doivent être cohérentes avec les propriétés des objets et leur modélisation algébrique. Ce n'est que dans un second temps que ces règles, une fois acceptées pour les raisons qui viennent d'être décrites, seront les outils de démonstration de l'équivalence de nouveaux programmes de calcul.

Le travail fait sur ces suites en début de collège peut faire l'objet d'une institutionnalisation dans laquelle les mots « fonction », « identité » et « équation » sont illustrés et contrastés pour la 1ère fois sur base des exemples traités. Les progressions arithmétiques et géométriques et divers modes de reconnaissance trouvent là leur place.

Modélisation par des relations fonctionnelles

Mais intégrer l'algèbre dans un parcours de modélisation fonctionnelle est une entreprise qui doit être pensée sur la globalité du cursus et en articulant toutes les dimensions en jeu. D'abord, l'aspect fonctionnel. Il s'agirait de se focaliser non sur le concept même de fonction, défini en termes de triplets d'ensembles, et tout le vocabulaire associé mais bien sur l'étude des principaux modèles fonctionnels qui servent d'outils dans des applications diverses : étude de tarifs, problèmes de croissance, phénomènes harmoniques… Les fonctions ne seraient donc plus étudiées une par une mais par classes paramétrées, les paramètres étant les degrés de liberté qui permettent l'adaptabilité du modèle aux particularités du problème étudié. Dans cette étude, les fonctions de référence et leurs composées avec certaines affinités sont centrales mais il faut se prémunir d'un enseignement trop exclusivement basé sur les constatations graphiques que les calculatrices permettent aujourd'hui. Des activités d'anticipation s'imposent alors. A ce stade, le discours technologique demeure cependant hybride, loin des théories standard : d'une part, des axiomes graphiques portant sur la représentation des fonctions de base qu'il convient d'étayer de considérations numériques telles que Si un nombre est inférieur à 1, son carré lui est inférieur et, d'autre part, du travail relevant de la géométrie analytique, comme celui-ci qui permet de déterminer la transformation que subit une expression analytique lors d'une translation :

$$\begin{array}{l} y = x^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ x' = x + 3 \end{array} \right. \\ y' = (x' - 3)^2 \end{array}$$

Ensuite, passer des premières suites numériques aux modèles fonctionnels suppose une densification numérique. Celle-ci met en jeu une dialectique particulière entre numérique et algébrique. Par exemple, l'extension à tous les points d'une même droite d'une même relation $y = ax$ ou $y = ax + b$ ou le regroupement de toutes les droites du plan en un seul et même ostensif $ax + by + c = 0$ imposent des règles relatives aux opérations sur les relatifs que ceux-ci soient des variables ou des paramètres. C'est l'algébrique qui commande ici au numérique puisqu'il s'agit de prolonger un même calcul littéral, des naturels aux relatifs, en définissant en conséquence l'extension des opérations. Un autre exemple est donné par la construction progressive du sens de l'ostensif 2^x pour des x appartenant à des ensembles de plus en plus vastes, dans le souci d'uniformité d'écriture et de permanence d'une régularité : à des abscisses en progression arithmétique correspondent des ordonnées en progression géométrique, ce qui amène jusqu'à l'axiome des intervalles emboîtés et la continuité numérique. Les modèles fonctionnels sont in fine construits comme solutions d'équations fonctionnelles (ici, $f(x+y) = f(x)f(y)$ puis $f'(x) = kf(x)$) et l'unicité d'une fonction engendrée par des programmes de calcul équivalents est gérée dans ce cadre.

Enfin, dans ce parcours, les fonctions constituent le principal objet d'étude, celle des équations et inéquations y étant subordonnée. Quant aux identités, elles sont d'emblée enseignées dans le but de transformer des expressions analytiques de fonctions pour des besoins particuliers : factoriser pour obtenir les racines,… Les sophistications techniques abordées sont alors délibérément liées au choix des modèles fonctionnels et à la manière de les introduire et l'intérêt de toute tâche ou technique algébrique devrait être jaugée à l'aune d'un tel parcours. Ainsi, je m'interroge sur l'intérêt de l'exercice suivant en dehors de l'étude de la classe des fonctions homographiques pour des raisons diverses que je ne peux développer en l'espace de ces quelques lignes.

$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$.

Démontrer que $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

Démontrer que f est décroissante sur $]-2;+\infty[$.

Cette piste de la modélisation fonctionnelle telle que je viens de la décrire rejoint le point de vue de Bolea et al. (2001) selon lequel l'algèbre est une organisation mathématique au service des autres. Et en diffère à la fois. Pour ces chercheurs, les organisations mathématiques liées aux programmes de calcul et aux (in)équations du Collège font place à la modélisation fonctionnelle au Lycée. Ici, c'est cette dernière démarche qui pilote l'ensemble et elle est organisée, qui plus est, autour de l'étude de classes de fonctions.

En conclusion

Cette proposition curriculaire a laissé quelques traces timides dans les programmes belges de la fin des années 80. Les problèmes de suites de nombres figurés avaient bien leur place dans une rubrique appelée « activités » mais n'ont jamais donné lieu, que ce soit dans les écrits officiels, dans les manuels ou dans les pratiques enseignantes à des institutionnalisations structurées. Or, il y a ici plusieurs couches d'institutionnalisation, les fonctions, les ensembles de nombres et les techniques algébriques se construisant par enrichissement mutuel et il y aurait lieu de constituer progressivement des cahiers séparés, celui relatif à l'algèbre permettant d'isoler de contextes divers les propriétés d'expressions algébriques et de les organiser en un tout cohérent. A l'époque de la réforme des compétences (qui n'est pas terminée), l'importance des problèmes de suites de nombres figurés a été soulignée, ces problèmes étant jugés protypiques des fameuses tâches complexes et inédites auxquelles il convenait d'entraîner les élèves. On se souciait alors encore moins des modèles fonctionnels mobilisés et de l'ingénosité qu'ils demandaient aux élèves. Et je me suis rendue compte alors que toute institutionnalisation, des suites arithmétiques et géométriques par exemple, était jugée inopportune par les enseignants comme entravant l'exercice de la résolution de problèmes dont elle facilite trop la résolution. C'est que la péjoration dont l'algèbre a souvent pâti aurait bien, dans le contexte scolaire, un parfum d'élitisme. Des propos cités par Chevallard et Bosch dans un article à paraître, tels que Si la solution algébrique est plus rapide que la solution arithmétique, nous ne devons pas oublier que c'est cette dernière surtout qui contribue à développer le raisonnement, illustrent une des raisons de cette péjoration. Et, parce que l'algèbre apporte une réelle économie de pensée, elle ne permet pas toujours de déceler quels sont les élèves suffisamment ingénieux pour s'en passer sauf à compliquer le niveau technique dans le but de créer ce que Mercier (à paraître) appelle le « verrou algébrique » pour l'accès à une orientation scientifique au Lycée. Ce qui est d'ailleurs de l'ordre de l'illusion vu l'existence d'élèves qui rentrent dans le format sans forcément s'impliquer dans une recherche de sens. N'y aurait-il pas lieu plutôt de glorifier l'économie réalisée par l'algèbre en tâchant qu'elle soit organisée comme une conquête de la classe ? Auquel cas, il serait bien légitime que les élèves puissent rentabiliser celle-ci, les autres occasions de rencontrer la complexité étant suffisamment nombreuses en mathématiques.

En bref, je plaide pour un programme d'algèbre dans lequel la technique est au service d'autre chose. Et pour une certaine façon d'envisager la modélisation fonctionnelle qui permet de relativiser l'intérêt de certaines prouesses algébriques. Sans doute faut-il miser sur un temps long pour changer les pratiques enseignantes de ce point de vue mais, après tout, on est bien arrivé à éradiquer les exercices où il fallait rendre logarithmiques certaines expressions algébriques !

Bibliographie

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001), La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. Recherches en Didactique des Mathématiques, 21(3), pp. 247-304.

Chevallard Y. (1988), Notes sur la question de l'échec scolaire, Publication n°13 de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.12/1, pp. 72-112.

Krysinska, M., Mercier, A. & Schneider, M. (2009), Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 29/3, pp. 247-304.

Krysinska, M. & Schneider, M. (2010), Émergence de modèles fonctionnels. Liège : Les éditions de l'Université de Liège.

Lebeau, C. & Schneider, M. (2010), Équations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 30/1, pp. 11-46.

Mercier A. (1992), L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. Thèse du troisième cycle, Université de Bordeaux I.

Mercier A. (1995), La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 15/1, pp. 97-142.

Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J.PH. & Paquelier Y. (2005), L'expérience de la nécessité épistémique. Recherches en Didactique des Mathématiques 25(1), pp. 57-90.

Schneider M. (1988) Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives. Thèse doctorale, Louvain-la-neuve : Université catholique de Louvain.

Vlassis J. & Demonty I. (2002), L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire. Bruxelles : De Boeck & Larcier.

4.7 Ressources pour l'enseignement des mathématiques à l'école et au collège : conception, usages, partage, formation

Mots-clefs : ressources, formation, professeurs, enseignement, école, collège

Ghislaine Gueudet, Professeur des universités, UBO IUFM Bretagne / CREAD

Luc Trouche, Professeur des universités, ENS-Lyon IFÉ / EducTice-S2HEP

Les enseignants de mathématiques mobilisent de nombreuses ressources, dans leur travail de préparation comme dans leur travail en classe avec les élèves. Ils les puisent encore largement dans des manuels scolaires “papier”, qui jouent encore un rôle central ; dans le même temps, se développent d'autres formes de ressources : manuels en ligne, logiciels “dynamiques”, sites Web etc. Ce développement incite à s'intéresser aux ressources pour l'enseignement des mathématiques, à leurs usages, à leurs modes de conception et de mutualisation, aux modalités de formation qui peuvent accompagner ceux-ci ; et, plus généralement, à étudier ce que nous nommons le travail documentaire des professeurs (Gueudet & Trouche 2010)1, dans le cas des mathématiques.

Ressources pour l'enseignement des mathématiques

L'enseignement des mathématiques, à l'école comme au collège, a toujours mobilisé de nombreuses ressources (Adler 2000). Certaines sont spécifiquement conçues pour l'enseignement, d'autres sont utilisées dans le contexte de l'enseignement alors qu'elles n'avaient pas été a priori conçues dans cet objectif (ainsi, pour la numération entière, un enseignant peut utiliser des cubes emboîtables conçus pour s'organiser en barres, afin de constituer “des paquets de dix”, ou faire constituer aux élèves des “paquets de dix” allumettes).

Parmi les ressources conçues dans un objectif d'enseignement, le manuel scolaire joue un rôle central. Dans différents pays, le manuel a été vu comme un moyen de faire évoluer les pratiques d'enseignement des mathématiques, d'influencer ce qui se passe dans les classes (Ball & Cohen, 1996 ; Pepin, 2009).

La situation, en France, est différente en ce qui concerne le premier et le second degré. Au premier degré, les manuels proposent des progressions précises ; le livre de l'élève est accompagné d'un guide du maître, proposant des mises en œuvre. Certains enseignants suivent de près ce qui est proposé, notamment s'ils ne sont pas eux-mêmes à l'aise avec l'enseignement des mathématiques. Margolinas & Wozniak (2010), interrogeant des professeurs des écoles, identifient pour certains un “document générateur” : un manuel spécifique, qui peut avoir été rencontré très tôt, éventuellement en formation, et qui continue d'influencer les choix de l'enseignant au fil des années. Au second degré, les manuels et leurs usages sont différents : les professeurs utilisent couramment plusieurs manuels, choisissant dans l'un une activité introductive, dans l'autre des exercices, adaptant les énoncés etc.

Cependant, même dans le cas du premier degré où l'influence qu'un manuel donné peut avoir sur les pratiques en classe semble potentiellement plus importante, les modifications de pratiques qu'un manuel peut entraîner restent limitées. C'est ce que montre, notamment, Remillard (2012) qui a suivi pendant deux ans des professeurs des écoles utilisant un nouveau manuel – conçu pour accompagner un enseignement des mathématiques incorporant plus “d'investigation”. Ce manuel est utilisé très différemment par chaque enseignant, en fonction de ses pratiques usuelles : certains sélectionnent des fiches d'application, mises en œuvre sans investigation préalable, d'autres ne gardent que certaines activités... Les chercheurs observent quelques évolutions, chez certains professeurs, mais celles-ci restent limitées.

Ces résultats montrent que les professeurs conçoivent leur enseignement en fonction de connaissances professionnelles qu'ils ont développées dans la durée, et qu'il serait vain de compter uniquement sur l'appui d'un manuel spécifique pour introduire des changements de pratiques. Il s'agit donc plutôt de mettre à profit ce travail de conception effectué par les enseignants ; les nouveaux types de ressources disponibles incitent particulièrement à considérer une telle direction.

Evolution des ressources et de leur conception

Les ressources disponibles pour l'enseignement des mathématiques, ressources en ligne en particulier, sont désormais foisonnantes (Artigue & Gueudet 2008) : sites Web divers, logiciels, manuel numérique. Un site comme ItunesU (http://www.apple.com/fr/education/itunes-u/) propose ainsi de “tout apprendre, à tout moment et en tout lieu”, et propose conférences, cours, modèles d’activités pour l’enseignement. Ces ressources peuvent être conçues par des inspecteurs, par des professeurs, individuellement ou en groupe, dans le cadre de diverses structures. Ce constat soulève de nombreuses questions, en particulier :

– Comment sont conçues ces nouvelles ressources ? Qui les conçoit, selon quels processus ?

– Comment évaluer la qualité de ces ressources ? Quel lien entre mode de conception et qualité des ressources ?

En France, les sites Web des académies offrent de nombreuses ressources, comme le site Eduscol ; toutefois, contrairement à ce qu'on peut observer dans certains pays (exemple?), il n'y a pas de ressource en ligne “officiellement” proposée par l’institution, qui couvrirait l'intégralité du programme de mathématiques de l'enseignement obligatoire.

D'un point de vue technique, la conception de ressources en ligne est largement accessible ; c'est sans doute une des raisons qui amène la conception et la diffusion de ressources par des collectifs de professeurs : la communauté GeoGebra (active à l'échelle mondiale, Lavicza et al. 2010) ; l'association Sesamath, dont le site web enregistre plus de 1,3 millions de connexions mensuelles (Kuntz, Clerc & Hache, 2009). Dans le cas de Sesamath, on observe une importante évolution de l'offre de ressources : d'une simple base d'exercices en ligne (Mathenpoche), on est passé à des manuels numériques, et un environnement de travail complet pour les professeurs, Labomep, permettant d'associer exercices en ligne, manuel numérique, différents logiciels... On assiste ainsi à une évolution importante, de ressources conçues pour des professeurs (dans le cas du manuel scolaire, ou de certains logiciels complexes) à des ressources conçues par des professeurs.

Du plus le cercle des concepteurs d'une ressource donnée peut s'élargir, au fil de ses usages : en effet les utilisateurs sont souvent incités à faire remonter aux concepteurs initiaux leurs remarques et suggestions, et celles-ci donnent lieu à des évolutions, à de nouvelles étapes de conception. De même, les utilisateurs peuvent être délibérément associés au processus d'évaluation de la qualité des ressources. C'est le cas, par exemple, dans le cadre du projet Intergeo (Trgalovà, Jahn, & Soury-Lavergne, 2010), projet Européen de conception et de diffusion de ressources pour l'usage de logiciels de géométrie dynamique. Les utilisateurs de ressources sont invités à répondre à un questionnaire ; un indicateur de qualité de la ressource est construit à partir de leurs réponses.

Ainsi une ressource n'est plus considérée comme un produit achevé au terme d'un processus initial de conception ; elle est en permanente évolution, et cette évolution, incluant les contributions des utilisateurs, participe de manière essentielle à la qualité des ressources disponibles. A cette évolution des ressources est associée une évolution du lien entre conception et usages de ressources : les professeurs ne sont pas de simples utilisateurs, ils jouent des rôles essentiels dans la conception des ressources pour l'enseignement des mathématiques.

Collectifs et formation des professeurs

Ces évolutions du travail des professeurs, avec l'émergence de collectifs organisés pour le partage des ressources, ont des conséquences sur les modes de formation. Sabra (2009, 2011) montre ainsi, dans le cas de Sesamath, le développement professionnel en jeu dans une communauté d'enseignants concevant un manuel de mathématiques : le développement des ressources propres et celui des ressources pour le projet commun se nourrissent mutuellement (Figure 1) ; la nécessité de la production commune de ressources pour l'enseignement, et la mise à l'épreuve de ces ressources dans les classes des professeurs impliqués, pousse à une explicitation et à un questionnement du projet mathématique et didactique de chacun. Dans ce processus, développement de ressources et développement de nouvelles connaissances professionnelles vont de pair.

L'essor de Sesamath, en France, a bénéficié de circonstances favorables : le réseau des IREM constituait sans doute un terreau favorable. On peut faire l'hypothèse que ce développement annonce les évolutions à venir, encore en germe aujourd'hui. La prise en compte des enseignants comme concepteurs de leur propre enseignement ("instructional designers" pour Vinovska et al. 2012) dépasse en effet le contexte des associations professionnelles. Au niveau international, ce principe apparaît au cœur de nombreux dispositifs de formation, initiale ou continue, dispositifs souvent appuyés sur des équipes de recherche.

Llinares et Valls (2010) décrivent ainsi une expérience, en mathématiques, de formation initiale de professeurs d'école. Elle s'appuie sur des ressources en ligne, principalement des vidéos de leçons de mathématiques et d'interviews des professeurs impliqués dans ces leçons, qui sont étudiées dans le cadre de groupes de discussion : il s'agit pour ces groupes de réaliser une étude didactique de chaque leçon (quelles peuvent être les raisons d'être et les conséquences des choix du professeur sur les apprentissages des élèves) et de concevoir collaborativement des tâches mathématiques alternatives. Ces groupes de discussion réalisent ce travail en ligne, avec l'aide d'un tuteur. Les auteurs soulignent l'efficacité de ce programme, articulant l'étude de ressources expertes et la conception de nouvelles ressources, le travail collaboratif et l'apport d'un formateur.

Figure 1. La représentation de son “système de ressources” par Anaïs, impliquée dans Sesamath (Sabra 2011)

En France, le programme Pairform@nce (http://national.pairformance.education.fr/) se situe dans la même perspective. Il propose, dans le contexte de la formation continue des enseignants, un catalogue de parcours de formation en ligne, tous structurés selon un même modèle en sept étapes (introduction de la formation, sélection des contenus et organisation des équipes, collaboration et auto-formation, conception collaborative d’une leçon, expérimentation par chaque professeur de la leçon dans sa classe, analyse commune de cette mise en œuvre et révision de la ressource correspondante, enfin retour critique sur la session de formation). Chaque session rassemble une vingtaine de professeurs stagiaires (4 ou 5 par équipes de conception), elle est encadrée par un ou deux formateurs. Elle alterne des moments de travail en présence et à distance. Le parcours de formation, disponible sur la plateforme du programme, propose, pour chaque étape, des ressources génériques ou spécifiques du thème de la formation, des suggestions d’activités et des outils collaboratifs. Plusieurs parcours ont été réalisés pour la formation continue des professeurs de mathématiques à l’école et au collège. Pairform@nce, programme du ministère de l’Éducation nationale, est encore marginal dans l’ensemble des propositions institutionnelles de formation continue (ensemble lui-même en difficulté, faute de moyens). Cependant les études réalisée dans ce contexte (Soury-Lavergne et al. 2011) mettent en évidence un lien fort entre : développement des interactions au sein des équipes de conception de ressources et effectivité des mises en œuvre de ces ressources dans les classes ; enrichissement des ressources au fil de leurs mises en œuvre et efficacité – ressentie par les professeurs impliqués – de la formation. Ce sont à la fois la nature des ressources disponibles et les modalités du travail collectif sur ces ressources qui concourent à cette efficacité. Nous avons mis en évidence ainsi (Gueudet et Trouche 2012) les effets d’un parcours Pairform@nce visant l’intégration de logiciels de géométrie dynamique pour la mise en œuvre de démarches d’investigation dans la classe. Dans ce cas la géométrie dynamique, par ses potentialités de manipulation directe, appuie la conception de ressources mobilisant l’activité des élèves et la formulation de conjectures, et l’aller-retour entre des phases de conception collaborative et de mise en œuvre dans la classe appuie le développement de nouvelles connaissances des professeurs associés au pilotage de ces démarches d’investigation.

Ces recherches nous ont amenés à considérer que la proposition de ressources aux professeurs doit être remplacé par un travail systématique de formation associant des collectifs d'enseignants à la conception de ressources. C'est dans cette perspective que s'inscrit, notamment, notre participation au projet de “mallette mathématique pour le cycle 2”. Nous travaillons avec des professeurs des écoles, pour concevoir des ressources qui pourront être, certes, diffusées, mais également adaptées, modifiées par d'autres enseignants, tout en conservant leur cohérence mathématique.

Le bouleversement dans la conception et la diffusion des ressources que provoquent la numérisation et Internet a ainsi des conséquences fortes sur le travail des enseignants : émergence du collectif, développement de nouveaux dispositifs de formation situant les professeurs comme des contributeurs essentiels, et solidaires, de la conception de leurs propres ressources.

Conclusion et discussion

Nous avons voulu mettre en évidence, dans cette courte contribution, l’importance de la thématique des ressources, saisissant le travail des professeurs dans un faisceau d’interactions entre ressources, pratiques et développement professionnel, dans des dynamiques ou l’individuel rencontre toujours le collectif. Le collectif a toujours été présent dans le travail des professeurs – le Nouveau dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson (1911) disait déjà “enseigner, c’est collaborer” au sein d’un conseil des maîtres – mais Internet renforce ces aspects collectifs.

D’un point de vue des responsabilités institutionnelles, qui est celui de cette conférence, on peut situer les évolutions (évolutions effectivement observées, mais aussi évolutions souhaitables, dans les choix de l'institution) concernant les ressources pour l’enseignement dans un espace à trois dimensions, suivant trois axes (Figure 2). La situation que nous avons décrite met en évidence trois types de déplacements nécessaires pour une politique institutionnelle efficace : d’une démarche top-down à une démarche bottom-up, prenant en compte la contribution essentielle des professeurs aux ressources de leur enseignement ; d’une démarche de fournisseur de ressources à une démarche d’assistance à des processus de conception de ressources ; d’une attention portée aux processus individuels à une attention portée aux formes collectives du travail enseignant.

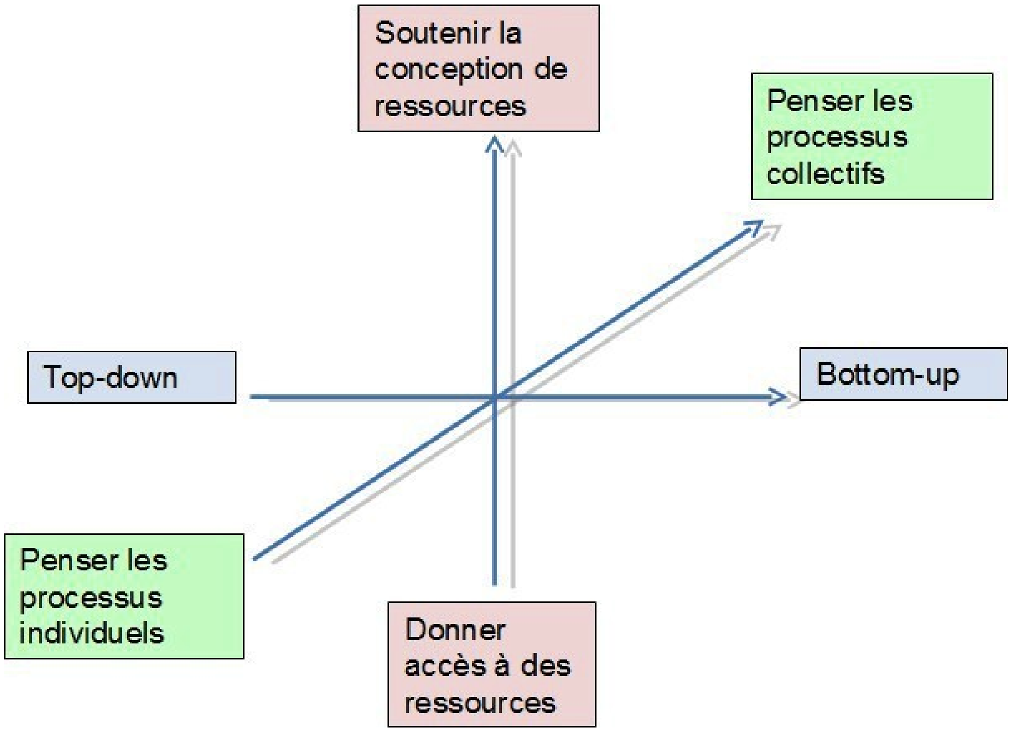


Figure 2. Trois dimensions pour penser les ressources pour et par les professeurs (Trouche et al. 2012)

Ce point de vue sur les ressources des professeurs amène également un questionnement sur les ressources critiques, celles qui permettent d’initier au mieux le travail de conception des professeurs. Quelles sont les ressources critiques, quelles sont les ressources aujourd’hui manquantes (Chevallard et Cirade 2010), le thème d’une deuxième conférence nationale sur l’enseignement des mathématiques ?

Bibliographie

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, Journal of Mathematics Teacher Education 3, 205–224.

Artigue, M., & Gueudet, G. (2008). Ressources en ligne et enseignement des mathématiques. Actes De l'Université d'Été De Mathématiques, Saint-Flour.

Ball, D., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book. What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? The Educational Researcher, 25(9), 6–14. doi: 10.3102/0013189X025009006.

Buisson, F. (1911). Le nouveau dictionnaire pédagogique et d'instruction primaire, numérisé par l'INRP en 2007 http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/, mis au format ePub pour tablettes numériques par l'IFÉ EN 2011: http://ife.ens-lyon.fr/epub/dictionnaire-buisson.epub

Chevallard, Y., & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. In G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 129-145). Rennes/Lyon: Presses Universitaires de Rennes/INRP.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. le travail documentaire des professeurs en mathématiques. (pp. 57-74) Rennes / Lyon : Presses Universitaires de Rennes / INRP.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. ZDM—The International Journal on Mathematics Education. 43(3), 399–411. doi: 10.1007/s11858-011-0313-x

Kuntz, G., Clerc, B., & Hache, S. (2009). Sesamath: Questions de praticiens à la recherche en didactique. In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), Approches plurielles en didactique des mathématiques (pp. 175–184). Paris, France: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Jones, K. D., Lu, A., & Dawes, M. (2010). Establishing a professional development network around dynamic mathematics software in England. International Journal for Technology in Mathematics Education, 17(4), 177–182.

Margolinas, C. & Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet et L. Trouche, Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques, (pp.233-249), Rennes / Lyon : Presses Universitaires de Rennes / INRP.

Pepin, B. (2009). The role of textbooks in the "figured world" of English, French and German classrooms—A comparative perspective. In L. Black, H. L. Mendick & Y. Solomon (Eds.), Mathematical relationships: Identities and participation (pp. 107–118). London, UK: Routledge.

Remillard, J. (2012). Modes of Engagement: Understanding Teachers' Transactions with Mathematics Curriculum. In Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. From Textbooks to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Documentation, (pp. 105-122), New York: Springer.

Sabra, H. (2009). Entre monde du professeur et monde du collectif : réflexion sur la dynamique de l'association Sesamath. Petit x, 81, 55–78.

Sabra, H. (2011). Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques : les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire.

Soury-Lavergne, S., Trouche, L., Loisy, C., & Gueudet, G. (2011). Parcours de formation, de formateurs et de stagiaires: suivi et analyse, rapport à destination du ministère de l'Education Nationale, INRP-ENSL. Available from http://eductice.inrp.fr/EducTice/equipe/PRF-2010/

Trgalovà, J., Jahn, A.-P., & Soury-Lavergne, S. (2009). Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth European Conference on Research on Mathematics Education (pp. 1161–1170). Lyon, France: INRP. Available from www.inrp.fr/editions/cerme6

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (to be published in 2012). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.), Third International Handbook of Mathematics Education, Springer

Van Es, E., & Sherin, M.G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice, Journal of Mathematics Teacher Education, 13, 155–176. doi:10.1007/s10857-009-9130-3

Visnovska, J., Cobb, P., & Dean, C. (2012). Mathematics teachers as instructional designers: What does it take? In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche, From text to "lived" resources: Mathematics curriculum materials and teacher development (pp. 323–341). New York, NY: Springer.

4.8 Quelques remarques sur l'enseignement des mathématiques et ses conditions d'efficacité

Mots-clefs : enseigner, didactique, résultats, principes

Alain Mercier, Professeur, IFE, EAM ADEF Aix-Marseille Université, ENS-Lyon

Deux résultats acquis et quelques unes de leurs conséquences

Après 40 ans de travaux en didactique des mathématiques, nous pouvons déclarer des résultats, que tout chercheur, en France ou ailleurs dans le monde, pourrait reconnaître pour assurés même si tous ne l'énonceraient pas dans les mêmes termes. Nous savons depuis les premières évaluations systématiques (et en particulier EVAPM, mouvement impulsé et maintenu longtemps par Antoine Bodin (Bodin, 1997) que :

En mathématiques, ce qui n'est pas enseigné n'est pas appris

L'énoncé de ce résultat a un énoncé équivalent (ce qui est appris a été enseigné) ce qui suppose un commentaire. En mathématiques comme ailleurs, ce qui est enseigné l'est parfois par l'usage et non pas explicitement (ainsi, nous avons découvert à l'occasion d'une évaluation internationale à 13 ans, ce premier fait : les élèves français étaient en 1985 les meilleurs au monde dans le traitement d'une question dont le traitement était attribué à la maîtrise du théorème de Thalès… (deux sapins de hauteur différente dont les sommets sont alignés pour l'observateur, quelle est la taille du plus grand connaissant les distances à l'observateur) or, les élèves interrogés étaient en 4e, un an avant l'enseignement du théorème : c'est que le problème des deux sapins est utilisé en France pour présenter les questions de proportionnalité (Matheron, 1994). Grâce à EVAPM, un autre phénomène a été identifié (Lleres, 2000) : la progression lente des résultats sur le traitement de la proportionnalité par un tableau, tout au long du Collège, dans les années 90, ; une analyse rapide montre que le traitement des questions de proportionnalité par un tableau n'est explicite qu'en CM2 (et 40% des élèves réussissent en fin d'année), le tableau a manifestement un usage en 6e (la réussite passe à 60%) mais n'est plus objet d'enseignement, et le tableau de proportionnalité est remplacé en 5e et 4e par le produit en croix ou la résolution d'une équation (la réussite à une question posée par le moyen d'un tableau stagne à 70%), c'est finalement par l'introduction du travail sur les fonctions linéaires et affines que le tableau revient en usage… et que pour les questions de proportionnalité il est enfin maîtrisé par plus de 90% des élèves, en fin d'année)

Nous avons une explication simple de ces phénomènes : Les mathématiques sont constituées de techniques socialement partagées pour le traitement de certaines catégories de problèmes que les activités sociales conduisent à rencontrer: ce sont donc aussi des savoirs utiles, et l'usage est une des manières d'apprendre ce qui est utile1.

On ne peut enseigner en décrivant les règles de l'action

En mathématiques comme ailleurs, on ne peut dire tout ce qu'il faut savoir pour une action réussie (ainsi, la bonne manière d'indiquer un chemin en ville est de le tracer sur un plan, pas de dire « Continue and when you are in front of the post office you turn on the left » parce que je ne sais pas reconnaître un « post office » en Australie : l'enseigne n'y est même pas jaune ; ainsi, les professeurs qui cherchent à expliquer aux élèves comment faire inventent-ils chaque jour des manières de décrire l'action attendue qui créent de nouveaux problèmes, comme par exemple les arbres de calcul permettant en principe de démontrer le calcul en ligne… en en faisant une description dans le plan qu'il faut interpréter, ou les flèches indiquant les produits à faire dans le développement d'un produit de deux binômes (Mercier, 1995) : on connaît le peu d'efficacité de ces procédés)

Un principe et un constat

Principe

Les mathématiques ne proposent pas de décrire l'action juste, mais de modéliser le monde dans lequel on cherche à agir efficacement .

L'accord sur ce point est aujourd'hui acquis, les procédés décrits ci-dessus sont des « glissements métadidactiques » dont le plus connu est « l'effet Topaze ». Les mathématiques sont donc un domaine de connaissances pratiques, techniques, et théoriques, qui même au niveau élémentaire ne peuvent être apprises indépendamment de l'expérience personnelle et collective du monde modélisé. Ainsi, un enfant qui apprend a réciter la comptine « un, deux, … vingt-six » ne sait pas compter tant qu'il n'a pas éprouvé personnellement comment « compter » peut servir à : « Aller chercher des crayons pour tous les élèves de la classe (qui sont 26) en les prenant dans les boites de 12 où ils sont rangés, de manière à avoir exactement un crayon pour chacun, pas plus. » en découvrant qu'il faut non seulement compter les élèves, mais retenir ce compte en comptant les crayons, et s'arrêter à 26 c'est-à-dire qu'il lui faut prendre seulement deux crayons de la troisième boite.

C'est pourquoi apprendre les mathématiques (et pas seulement le calcul de quatre opérations, vite oublié aujourd'hui où il peut être outillé par n'importe quel téléphone) ne concerne l'ensemble d'une classe d'âge que dans les sociétés réalisant un effort important d'instruction (Chevallard & Mercier, s. d.) : la transmission minimale des mathématiques suppose une école pour tous et un enseignement explicite de cette discipline à chacun.

C'est pourquoi les mathématiques doivent être considérées (dans la société et bien sûr, par les professeurs leurs formateurs et leurs cadres) non pas comme une curiosité à laquelle quelques excentriques s'intéressent, mais comme une part essentielle de la culture, une des œuvres humaines qui a nous rendu la vie meilleure. Tout citoyen est donc en droit d'être initié à cette pratique, et devrait exiger d'en avoir acquis une expérience suffisante pour imaginer s'y engager de manière autonome, en cas de besoin (c'est le sens que j'aimerais voir donner à la notion de « mathematical literacy »).

Constat

L'instruction minimale obligatoire (socle commun) suppose déjà 13 ans de scolarité mais toute formation professionnelle est fondée sur ce socle et demande donc 16 ans… le temps d'enseignement des mathématiques élémentaires peut donc être évalué. Suivant la manière dont on compte et dont on l'organise effectivement, le résultat réel pourrait varier du simple au double, entre le minimum strict de 12 ans X 33 semaines X 3 heures hebdomadaires = 1188 heures et le maximum possible de 16 ans X 36 semaines X 5 heures hebdomadaires = 2880 heures, pour la France et dans les trente dernières années (la scolarité de 3 à 16 ans, avec 36 semaines de présence en classe, 5 heures effectives d'enseignement et « pas de fin de scolarité sans un métier » soit, sortie avec un Bac Pro). En réalité aujourd'hui cela fait plutôt un an (1700 heures) en fin de Collège, alors que dans les conditions d'efficacité actuelles deux ans équivalent temps plein (2 ETP) sont indispensables pour une étude élémentaire visant les compétences d'un socle commun, comme c'était le cas il y a quarante ans, si je calcule bien. On comprend que la société ait des exigences sur les résultats de son effort, car même si les résultats sont corrélés entre autres avec les efforts consentis (les résultats s'améliorent lorsque le temps d'enseignement augmente), parfois ces efforts se dispersent et le temps d'enseignement ne produit pas les effets escomptés. Cependant il y a un effort minimal en deçà duquel plus grand' chose n'est possible. Alors, la société ne peut plus rien exiger du système d'enseignement : il semble que nous sommes en train de le vérifier et peut-être, de comprendre qu'il faut changer de stratégie.

Voilà pour un premier tour de réflexion sur ce que nous savons des conditions d'efficacité d'un système d'enseignement. On peut aller un peu plus loin. Ces éléments ont des corollaires, qui donnent des voies de travail

Non seulement ce qui n'est pas enseigné n'est pas appris, mais ce qui n'est plus enseigné ou n'a plus d'usage est oublié.

Ainsi, on observe une baisse des résultats sur les calculs mobilisant des décimaux en Angleterre, entre la 7e et la 10e année de scolarisation (Hart, Kerslake, & Brown, 1981). Tout le monde sait cela, mais en général on ne pense pas que ce soit vrai pour les élèves, ou plutôt on fait comme si dans leur cas, c'était faux. Car les professeurs sont toujours légitimes à rappeler les anciens objets d'enseignement, pour en exiger la connaissance s'ils viennent à en éprouver le besoin. Ainsi, le professeur de Collège qui enseigne le calcul de l'aire d'un cercle est légitime à rappeler aux élèves qu'une multiplication donne directement le compte des carreaux d'un quadrillage et que par conséquent, les calculs de surface sont toujours multiplicatifs.

Pour améliorer cela on peut envisager d'organiser la matière de l'enseignement en éléments fortement dépendants les uns des autres, afin que ce qui est enseigné le soit façon telle que ce soit utile longtemps. Je prendrai pour exemple l'introduction explicite des parenthèses comme signe d'agrégation dans les écritures numériques : cela manque au Collège, durant les deux premières années. Inversement, les additions à trous que l'on utilise au CE pour désigner des problèmes de soustractions ne sont pas manipulables par les élèves puisqu'on n'ose jamais « déplacer un trou ». et n'ont pas d'avenir.

Pour de très nombreux élèves ce qui est appris l'est après coup, quand l'expérience en montre l'utilité incontournable et que le professeur ne pénalise l'ignorance que comme un oubli.

Ces élèves constituent 30 à 60% des enquêtés APMEP, selon les questions. On peut penser que la plupart des malentendus (Bautier, Rayou, & others, 2009) observables tiennent à cette difficulté, qu'une liste de « pré requis » aussi longue soit-elle ne peut résoudre. Ainsi les professeurs doivent donc, lorsqu'ils veulent que leurs élèves progressent sur une question sans l'enseigner de nouveau, acceptent de voir souvent les mêmes erreurs en demandant systématiquement des travaux nécessitant d'aborder cette même question, et annoncer que cela ne changera pas avec le changement de chapitre. Pour améliorer cela on peut envisager d'organiser les programmes d'enseignement en proposant leur introduction avec les problèmes d'une même classe, qu'il s'agit dans une période donnée de deux ou trois mois « d'apprendre à résoudre tous », ce qui déclare l'enjeu.

On ne peut décrire entièrement et on ne peut transmettre explicitement (en produisant un récit ou en présentant la nécessité d'un algorithme) que les buts et les enjeux de l'action

Ainsi l'analyse didactique peut montrer le manque d'un discours capable de décrire et de fonder système décimal de numération, rôle que remplissaient les pratiques du système métrique lorsque le professeur et les élèves pouvaient dire : « trois MILLE » c'est comme « trois KILOMETRES » et introduire les décimaux et les fractions comme des notation de sous-unités. Cette observation appartient à une « anthropologie » de l'école. C'est pour cela qu'on ne peut définir ce que vont faire les professeurs comme une suite d'instructions faites à des exécutants.

L'observation montre que les mathématiques ne sont pas seulement des connaissances personnelles et des compétences techniques, elles sont des techniques sociales que les personnes portent et font vivre en les interprétant à nouveau, de génération en génération.

Elles doivent donc être transmises (faute de quoi elles périclitent et n'outillent plus l'action humaine) ; elles doivent être explicitement identifiées comme telles (parce qu'elles sont toujours produites et étudiées à loisir, c'est-à-dire ailleurs que dans le cadre des pratiques qu'elles outillent) ; leur pratique publique doit être visible, elles trouvent là leur légitimité comme œuvre humaine servant à rendre la vie meilleure (les mathématiques sont partout dans les pratiques sociales) ; elles figurent parmi les sciences du quotidien (les mathématiques sont la première science expérimentale, elles sont des compte rendus complets d'expériences disait Lebesgue (1935), c'est-à-dire des modèles calculables dispensant de l'action).

Mais cela suppose que soient aussi bien identifiées les catégories de problèmes dont les mathématiques outillent la résolution, (« faire des mathématiques ce n'est pas résoudre des problèmes, c'est produire les méthodes de résolution de problèmes les plus générales possibles ») et il devient possible, à l'école, de chercher à valider ces techniques en étudiant leur rationalité (alors « faire des mathématiques » devient aussi une activité éducative, propédeutique à l'entrée dans les pratiques de la rationalité).

Pour aller un peu plus loin

Nous avons exploré certaines des conséquences fortes de ces résultats des travaux en didactique, je les organiserai en 7 déclarations, dont j'ai développé un peu longuement les premières et dont les autres sont à argumenter bien sûr en revenant chaque fois aux travaux originaux : Trois principes liés, donc,`

– *En mathématiques, le professeur doit enseigner explicitement.*

– *En mathématiques comme ailleurs, ce qui est enseigné l'est parfois par l'usage*

– *En mathématiques comme ailleurs, on ne peut pas dire tout ce qu'il faut savoir pour une action réussie*

Des principes qu'il faut mettre en musique ou plutôt, en mathématiques

Un programme d'enseignement étant rendu public, il donne une orientation et un cadre à l'action des professeurs. Mais il faut que les professeurs deviennent les designers de leur enseignement, qu'ils en inventent la forme (par exemple, qu'ils produisent des ressources pour leur action en classe et d'abord « un parcours dans le programme qui est une interprétation des commentaires », pour continuer avec la métaphore musicale).

Comme cela s'apprend aujourd'hui par l'expérience, il faut au mieux plusieurs années pour cela : en trois ans et au mieux, un professeur ne répète que six fois la tâche d'enseigner une question et au départ, il s'intéresse plutôt à « faire de ses élèves une classe dont il soit le professeur » qu'à « faire classe à ses élèves et s'en montrer ainsi le professeur », ce qui suppose une certaine expérience du premier mouvement, que l'on peur aider à venir mais qui ne suffit pas.

Il faut encore que les professeurs aient ce qu'à Marseille on nomme « le vice » et chez les forgerons africains « l'œil » c'est-à-dire, qu'ils soient attentifs à ce qui fait difficulté pour les élèves et qu'il apprennent à interpréter en mathématiciens leurs tentatives de traitement des questions que le professeur met à l'étude, pour les organiser et les diriger, comme un collectif de travail. C'est entre autres ce savoir que les didacticiens explicitent, et que la didactique permet d'accumuler et de transmettre.

La connaissance de l'objet d'enseignement qui caractérise l'expérience des professeurs qui enseignent efficacement, que les chercheurs savent décrire, leur montre les hiatus dans les programmes et leur permet d'expérimenter des réponses qu'ils amélioreront progressivement. EXEMPLE: les fractions aujourd'hui, présentées comme des rapports, n'apparaissent plus comme des nombres permettant de mesurer des grandeurs, ce sont des opérateurs et les additionner n'a pas de sens. Pourtant, le programme le propose...

Nos travaux actuels confirment la généralité de ce genre de faits, un genre que j'ai présenté d'abord mais qui s'observe sous les nombreuses variations que l'on rencontre dans l'observation quotidienne comme dans les travaux de recherche reconnus :

– Un professeur efficace organise la production et l'étude d'un système « qui a de l'avenir » (Rajoson, 1988)

– Un professeur qui peut mettre en place des manières discursives associées au travail sur les systèmes sémiotiques (qui sont de ce fait des modèles de l'action dans un système mis à l'étude) gagne en efficacité (Chambris, 2010) le montre indirectement

– Le mouvement de modélisation et le jeu entre système étudié et modèle pour l'étude est alors pertinent, et le travail dans l'un (qui devient modèle) prend sens de ce qu'il est parlé avec les mots de l'autre (qui est le système) (Brousseau, 2005) Cela recoupe ce qu'écrit Liping Ma (qui semble venir de Shulman), et c'est apparemment ainsi que l'IGEN propose d'interpréter les programmes. Nos travaux actuels confirment ces faits par leurs conséquences :

– Le travail d'observation que nous conduisons montre un peu partout comment un programme rate souvent l'organisation rationnelle des savoirs, qui permet seule l'organisation efficace de l'étude (Bronner, 1997)

En conclusion

Pour aller plus loin, il faudrait montrer les conditions de l'investissement des élèves dans les tâches scolaires et s'apercevoir que les formes primitives des relations didactiques sont peu nombreuses : On connaît le jeu. Jouer est une manière de mettre à l'épreuve ses capacités et de ressentir la résistance des choses ou des êtres. Lorsque le professeur propose un jeu il le fait pour ses vertus didactiques et déjà les professeurs de maternelle savent orienter l'activité libre des élèves par des jeux à vocation éducative ou didactique. La pratique des mathématiques a aussi la dimension ludique d'une pratique matérielle libre mais régulée.

On connaît le récit

Raconter des histoires est une technique utilisée déjà par les professeurs des écoles maternelles, ces histoires sont d'abord des récits fondateurs qui décrivent des formes du rapport entre les hommes et entre les hommes et le monde, elles deviendront plus tard les théories qui s'organisent en disciplines : les mathématiques en font partie, lorsque le récit présente les grandes constructions que l'on a pu entrevoir en pratique et que certains iront explorer.

On connaît l'exercice

Le plaisir du jeu lorsque le gain possible est visible et que les élèves peuvent en juger par eux-mêmes est un moteur puissant de l'exercice qui commence avec la répétition. L'entrainement suppose un peu plus de distance, et l'analyse stratégique du jeu qui engage à exercer des capacités tactiques utiles. Les mathématiques relèvent aussi de ce type d'activité, du moins lorsque l'exercice est orienté par l'intérêt pour le gain au jeu.

On sait enfin que la coopération dans l'exécution d'une tâche complexe

Les humains sont des animaux sociaux et ils organisent collectivement leur environnement, pour le rendre plus vivable et avoir une vie meilleure. Les élèves sont prêts à œuvrer collectivement si cela est organisé et si les enjeux de leur activité sont déclarés. Mais cela suppose que soient mises à l'étude des questions et des réalisations dont l'importance n'échappe à personne et surtout pas à eux. Cela est de la responsabilité collective des hommes politiques, des savants dans la matière enseignée et des acteurs du système d'enseignement.

Comment ces dimensions essentielles des relations par lesquelles une génération engage la suivante à entrer dans les rôles et les métiers qui l'attendent, sont-elles réalisées dans les gestes quotidiens d'enseignement que réalisent les professeurs, comment les professeurs sont-ils soutenus dans cette tâche par leurs cadres et comment sont-ils formés à cette mission par leurs maîtres ? Chacun peut se poser la question, la réponse appartient à ce collectif qu'est un système d'enseignement et aux responsables de son organisation.

Bibliographie

Bautier, É., Rayou, P., & others. (2009). Les inégalités d'apprentissage. Programmes, Pratiques et malentendus scolaires. Rennes : PUR.

Bodin, A. (1997). L'évaluation du savoir mathématique. Questions et méthodes. Recherches en didactique des mathématiques, 17(1), 49–95.

Bronner, A. (1997). Etude didactique des nombres réels: I-décimalité et racines carrées. Thèse de l'université de Grenoble 1. Cote INIST : T 113034

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et operations dans les mathematiques de l'ecole primaire au 20e siecle : theories et ecologie. Recherches en didactique des mathématiques, 30(3), 317–366. 5.Chevallard, Y., & Mercier, A. (1988). Sur la formation historique du temps didactique. Marseille : IREM D'Aix Marseille.

Hart, K. M., Kerslake, D., & Brown, M. (1981). Children's understanding of mathematics: 11-16. John Murray London.

Lebesgue, (1936). Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique XXX.

Matheron, Y. (1994). De la proportionnalité vers le théorème de Thalès, point d'appui et évolution du rapport au savoir. Mémoire de DEA de Sciences de l'Education, Université de Provence.

Mercier, A. (1995). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. In G. Arsac et alii, Différents types de savoirs et leur articulation. Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 129–144.

Rajoson, L. (1988). L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique: trois études de cas. Thèse de 3e cycle. Université Marseille II.

5 Discours collectifs : Associations, Institutions, Autorités

5.1 Jeux mathématiques, culture mathématique. L'innovation pédagogique à travers la culture, l'expérience et le jeu

Gilles Cohen, Directeur de la rédaction de „Tangente“, fondateur de la FFJM et du CIJM, Rubrique „Affaire de logique“ du quotidien „Le Monde“

Elizabeth Busser, Ancienne présidente de l'APMEP, Rubrique „Affaire de logique“ du quotidien „Le Monde“

Michel Criton Président de la FFJM, Rédacteur en chef de „Tangente Education“

Denise Grenier, MCF, Equipe « Mathématiques discrètes et Didactique » de l'Institut Fourier, Fédération de Recherche « Maths-à modeler » et IREM, Université I de Grenoble

Introduction (Gilles Cohen)

Dans le monde d'aujourd'hui, une discipline doit gagner sa place auprès des élèves. L'argument d'autorité (« Faites des maths, on vous garantit que c'est dans votre intérêt ») n'est plus accepté comme auparavant.

Les attentes et les réponses

Chaque discipline est en concurrence

– avec une foule de nouvelles activités plus séduisantes les unes que les autres (le sport, le multimédia…) et doit prouver son intérêt intellectuel ; d'où le message sous-jacent à faire passer par les enseignants de mathématiques : « La pratique des mathématiques va vous procurer du plaisir »

– avec les autres disciplines et doit prouver qu'elle est indispensable dans la formation de l'esprit et dans la compréhension du monde ; d'où le message sous-jacent à faire passer par les enseignants de mathématiques : « Les mathématiques ne sont pas enfermées dans un ghetto déconnecté du reste du monde, mais sont impliquées à tous les stades de la connaissance et de la vie. »

– avec les réalités économiques, elle doit prouver son utilité dans ses applications ; d'où le message sous-jacent à faire passer par les enseignants de mathématiques : « Les mathématiques sont un langage universel, qui ouvre la porte des autres sciences ainsi que celle du développement industriel. »

Comment faire passer ces messages ?

– en associant, à tous les stades de l'apprentissage des mathématiques, les concepts théoriques à des contextes culturels.

Mot-clé : la culture

– en insérant les mathématiques de manière tant scolaire que périscolaire dans une pratique sociale familière qui inhibe les blocages.

Mot-clé : le jeu.

– en traitant l'apprentissage des mathématiques de manière pluridisciplinaire, ce qui permet d'en distinguer certaines applications et de ne pas les isoler dans la perception des élèves.

Mots-clés : l'expérimentation, l'interdisciplinarité.

Les facettes de la culture mathématique (Elisabeth Busser)

Pour montrer que, d'abord l'apprentissage et la pratique des mathématiques vont être enrichissants pour l'esprit , ensuite que les mathématiques sont plaisantes et aimables et enfin faire la preuve de l'utilité de cette science dans ses applications, nous associerons à tous les stades de l'apprentissage des mathématiques les concepts théoriques à des contextes culturels. Nous montrerons aussi, pour chacun des thèmes, non seulement ce que sont les diverses facettes de la culture mathématique, mais aussi les façons de les mettre en valeur aussi bien à l'école élémentaire qu'au collège.

Les mathématiques, vecteur culturel

La culture, cela commence par la transmission du savoir et les mathématiciens le savent bien, eux qui ont inventé les chiffres et les codes, un langage et des méthodes pour faire progresser, perpétuer et répandre leur savoir. Les sciences et les mathématiques en particulier ont été largement impliquées dans l'Histoire. En voici quelques exemples, qui peuvent être mis en œuvre en classe :

– Comment on est, grâce aux mathématiques, passé de l'astrologie à l'astronomie.

– Comment on a inventé le calcul et ses instruments, du boulier à l'abaque, de l'abaque à la « pascaline », de la calculatrice à l'ordinateur.

– Comment la cartographie a permis les grandes découvertes géographiques.

Les concepts mathématiques eux-mêmes, qui ont parfois mis des siècles à s'établir, ont suivi le cours de l'Histoire. On peut le faire saisir à un jeune public à travers l'étude de textes mathématiques historiques, peu nombreux mais bien choisis :

– La duplication du carré ou l'histoire de racine de deux,

– La mesure de la hauteur de la pyramide

– La corde à treize nœuds des arpenteurs égyptiens

– La démonstration du théorème de Pythagore par Euclide

La culture, c'est encore la culture scientifique qui bien trop souvent est écartée de l'univers culturel à proprement parler. Oui, les mathématiques font partie de la culture pour de multiples raisons :

– Faire des mathématiques c'est aussi et surtout apprendre à raisonner.

– Les mathématiques sont aussi un langage et c'est celui des sciences.

– Les mathématiques sont un outil, celui des sciences. C'est en particulier pratiquement le seul outil de modélisation.

Arts et mathématiques sont indiscutablement liés

La culture, c'est aussi l'activité artistique. De nombreux artistes et plasticiens se sont appuyés sur des concepts mathématiques dans leurs créations, dans tous les domaines et on peut montrer au jeune public ces passerelles entre mathématiques et arts :

– entre mathématiques et arts plastiques, (visites d'expositions artistiques liées aux mathématiques, prise de conscience de la perspective en liaison avec le professeur d'arts plastiques)

– entre mathématiques et musique, (étude de concepts musicaux reliés aux mathématiques, comme les rapports de fréquences, la gamme de Pythagore, en liaison avec le professeur de musique)

– entre mathématiques et littérature, (écritures sous contraintes, Perec, Oulipo …à faire en liaison avec le professeur de français)

– entre mathématiques et architecture (formes et surfaces géométriques dans l'architecture, Le Corbusier et le Modulor)

Les mathématiques nous font entrer dans le monde d'aujourd'hui.

La culture, c'est simplement le monde dans lequel on baigne :

– mathématiques et économie (lecture intelligente des statistiques, petits Quiz de connaissance de base sur la finance)

– mathématiques et politique (étude critique des sondages d'opinion, mathématiques électorales)

– mathématiques et vie quotidienne (les pourcentages pour les nuls, problèmes de moyennes)

Les jeux mathématiques (Michel Criton)

L'expression "jeu mathématique" recouvre trois notions bien différentes :

C1• Le "jeu" au sens "jeu pour l'élève", par opposition au problème de mathématiques dites sérieuses. On trouve aussi dans la littérature l'expression « récréations mathématiques ». Ce sont ces jeux qu'on utilise souvent dans les compétitions mathématiques. On peut les désigner par l'expression « jeux-problèmes ».

C2• Les "jeux mathématiques" comme on dirait "jeux olympiques" : compétitions à thème mathématique.

C3• Les "jeux" au sens propre : situations et jeux de société où interviennent des éléments de stratégie à caractère logico-mathématique.

Les jeux-problèmes

Il existe une longue tradition de ces « récréations », qui traverse les siècles et les civilisations.

Nous avons illustré cette partie à l'aide d'un ouvrage d'Ozanam (Récrations mathématiques et physiques », 1re édition 1694) qui rassemble un grand nombre de jeux-problèmes, mais cette tradition est beaucoup plus ancienne, puisqu'on attribue à Alcuin d'York (conseiller de Charlemagne pour tout ce qui touche à l'éducation, 8e siècle de notre ère) une collection de 56 problèmes intitulée « Problèmes pour aiguiser l'esprit de la jeunesse ».

Dans la préface d'une des éditions de l'ouvrage d'Ozanam, on trouve le texte suivant qui précise la même idée sur l'utilité de ces jeux pour les jeunes qui débutent dans l'étude des mathématiques : « Enfin, il (cet ouvrage) peut servir à aiguillonner l'esprit de ceux qui commencent à étudier ces sciences ; & c'est-là la raison pour laquelle, dans la plupart des livres élémentaires, on tâche d'envelopper les questions proposées pour exercer les commençans, d'un énoncé moins abstrait que celui des Mathématiques pures, et qui puisse intéresser & piquer la curiosité. »

Les critères qui caractérisent un "jeu-problème" dans l'esprit des élèves sont souvent des contraintes de forme. Mais sur le fond, historiquement, un certain nombre de thèmes ont toujours été perçus comme des éléments récréationnels. Les principaux critères qui séparent le problème scolaire du jeu mathématique ont donc trait à :

L'habillage

– Les problèmes sont écrits en français de tous les jours. Le moins possible de vocabulaire spécialisé, de formules, pas d'énoncé formel (de façon à inhiber les blocages).

– Les problèmes peuvent être placés dans un contexte concret. Des personnages interviennent, une histoire se tisse. Ce contexte est si possible "proche" du lecteur. L'énoncé sera ainsi appréhendé plus facilement.

– Enfin, une touche d'humour se dégagera, un clin d'œil sera adressé au lecteur, pour une mise en confiance.

L'appel aux connaissances

– Les connaissances nécessaires ne sont pas importantes. Le "jeu-problème" fait davantage appel à la déduction, à l'astuce, à la recherche persévérante qu'aux connaissances. Il appartient souvent à un domaine de mathématique « non scolaire », c'est-à-dire qui ne se rattache à aucune partie des programmes scolaires (les mathématiques des programmes scolaires n'étant qu'une petite partie de l'iceberg des mathématiques élémentaires).

- Lorsque des connaissances sont exigées, l'appel à ces connaissances est peu apparent. En aucun cas, le jeu-problème ne doit être perçu comme l'application d'un savoir. Il faut néanmoins préciser que des problèmes font parfois appel à d'autres jeux-problèmes antérieurement posés. L'entraînement à la résolution de jeux-problèmes permet à l'élève de construire un savoir-faire qu'il pourra réinvestir le cas échéant.
- La résolution du problème semble toujours à portée. Même si, à défaut de trouver l'astuce permettant une résolution rapide, il faut déployer des trésors de persévérance. On ne doit pas rester "sec" devant un jeu-problème.

Le type de question. Les formes préconisées sont :

- Le problème ouvert
- Le QCM (questionnaire à choix multiple) qui, bien que moins adapté, détient un caractère ludique incontestable et évite "l'angoisse du vide".
- Le problème "fermé" ("montrer que …") n'est à utiliser que si la méthode de résolution reste ouverte.

Le type de réponse. Voici quelques formes à recommander :

- Le résultat "sec" (numérique ou graphique)
- Le résultat et le nombre de solutions. Cette formule, adoptée par le Championnat des jeux mathématiques et logiques, a fait ses preuves. car trouver le nombre de solutions démontre une maîtrise du problème qui vaut bien une démonstration !
- Le résultat "justifié". On se rapproche alors de la forme scolaire, et le problème apparaît moins comme un jeu.

25 ans de compétitions mathématiques en France

La première compétition mathématique en Europe remonte à 1884. Il s'agit de la compétition Eötvös créée par le baron Eötvös, physicien qui deviendra ministre de l'Education en Hongrie. Cette compétition, qui proposait des jeux-problèmes de type « olympiades » s'adressait à tous les lycéens de Hongrie. On peut rapprocher cette création avec l'importance de l'école mathématique hongroise au cours du 20e siècle. Les compétitions mathématiques en France sont plus récentes : mis à part le Concours Général, elles ont un peu plus de 25 ans. Le magazine Tangente va également fêter dans quelques mois son vingt-cinquième anniversaire, cette simultanéité d'anniversaires n'étant pas le fruit du hasard.

• Les années 80 : On a alors un contexte qui appelle de nouvelles initiatives :

- le besoin de réhabilitation des mathématiques né de la période dite des « maths modernes » et de leur usage en matière de sélection
- de nouvelles populations d'élèves (collège unique, nouvelles sollicitations)
- un renouveau des jeux mathématiques dans la presse.

• Les années 1986-1987

- Le premier rallye mathématique : le rallye d'Alsace (compétition individuelle, niveau lycée).
- Création du Championnat international des jeux mathématiques (également ouvert à des publics non scolaires)
- Création du Rallye du Centre (premier rallye par classes entières)
- Création du Tournoi du Limousin.
- Tangente est également créé, faisant reposer sa communication sur ces compétitions nouvelles.

• Les années 1988-2000 :

Tangente est le support privilégié de ces compétitions mathématiques, avec la création de la rubrique « Le rallye des rallyes ». On assiste à la naissance d'innombrables nouvelles compétitions, régionales, nationales, voire internationales.

– Jean-Pierre Boudine est à l'origine de la naissance du Kangourou des mathématiques ;
– Rémy Jost crée Mathématiques sans frontières ;
– Gilles Cohen crée le CIJM ;
– Création de la Commission interIREM rallyes ;
– Publication des annales du championnat et de quelques autres compétitions ;
– Création du Salon de la culture et des jeux mathématiques ;
– Publication des recueils « Panoramath » par le CIJM.

• Les années 2001-2007 : Après un pic autour de 2000, les compétitions en France marquent un certain essoufflement :

– baisse des effectifs en France
– disparition (ou interruptions) de quelques compétitions : Nice, Poitou, … symbole, le rallye d'Alsace, le premier des rallyes mathématiques français, n'a pas eu lieu en 2007

Contraste : hors de France, où elles sont plus jeunes, les compétitions mathématiques se développent fortement. Celles qui vivent le mieux sont celles qui se sont unies, en particulier avec des compétitions d'autres pays (cf math sans frontières). Les raisons de cet essoufflement : la concurrence, la lassitude, les difficultés croissantes auxquelles sont confrontés les enseignants dans l'école d'aujourd'hui ...

Les jeux « de société » (les « vrais » jeux)

• Citons les solitaire, taquins, puzzles… Ces jeux se prêtent à des raisonnements de type mathématico-logique, bien que ces raisonnements ne soient pas au coeur des programmes scolaires : raisonnements basés sur la parité, sur la notion d'invariant, ...

• Jeux de société adaptés aux compétences mathématiques : Mathador, Magix34, Multiplay, …

• Jeux à jouer en classe à propos d'une notion. Ce type de jeux a notamment été développé dans les manuels en ligne Aventure Math réalisés par l'équipe d'auteurs de Tangente.

• Jeux de grille. De très nombreux jeux de grille font intervenir des raisonnements logiques. Le sudoku est le plus connu, mais il existe des dizaines d'autres jeux. Ces jeux sont très pratiqués au Japon et en Europe du Nord (Pays-Bas) et de l'Est (Hongrie, République Tchèque). En France, Bernard Novelli en a fait connaître un grand nombre (Tangente Jeux & Stratégie, La Recherche, jeux en ligne sur l'Espace Bernard Novelli du site Infinimath).

• Jeux informatiques. Enfin, on ne peut pas ne pas citer des jeux qui font pleinement partie de la vie des élèves d'aujourd'hui : les jeux informatiques, qu'ils se pratiquent sur ordinateur, sur smartphone ou sur tablette, et qu'ils soient résidents ou en ligne. Ce type de jeu ouvre un champ immense, pas encore très exploité mais plein d'avenir, aux jeux éducatifs et pédagogique

Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes (Denise Grenier)

Afin de limiter la taille du document, ce texte est présenté de manière indépendante, sous ce titre.../...

L'infléchissement souhaitable des usages du jeu et de la culture dans l'enseignement des mathématiques (Gilles COHEN)

Les mathématiques sont bien autre chose que les équations ou les racines carrées ; elles sont ouvertes sur le monde et peuvent elles aussi contribuer à l'ouverture d'esprit de nos élèves ; ne les laissons pas enfermées dans la tour d'ivoire du formalisme et de la sélection pointilleuse. Concrètement, que faire pour que toutes ces belles intentions ne restent pas lettre morte ?

Faire passer des messages

Avant même de proposer des solutions bouleversant horaires, programmes ou pratiques scolaires, la priorité est de faire passer des messages. Certains de ces messages sont en direction des enseignants, d'autres en direction des élèves.

Auprès des enseignants

En ce qui concerne les enseignants, le message doit être :

• Le renoncement à la toute-puissance des contenus dans les programmes, au profit de l'insertion de ces contenus dans des contextes : historique, culturel, ludique, expérimental…

• Le renoncement à la toute-puissance du « savoir reporoduire » au profit du « comprendre »

• La valorisation des activités périscolaires menées par les enseignants, tant dans la cadre de l'établissement que d'actions régionales ou nationales. Valorisation non sur le plan financier, mais simplement sur le plan de la reconnaissance et de l'évolution de carrière. Aujourd'hui, être actif rapporte plus d'ennuis de la part de l'administration et de jalousies de la part de certains collègues que de ne rien faire.

Ces messages ne peuvent être efficaces que dans le cadre d'une véritable formation.Cette formation peut être rendue économique si on se sert des médias numériques pour la dispenser.

Auprès des élèves

En ce qui concerne les élèves, le message doit être :

• La mise en avant des dimensions liberté, esthétique, beauté, plaisir, romantique, merveilleux,… d'un concept ou d'une preuve mathématique

• L'échange autour de la notion de beauté. Peut-on enseigner la beauté ? « On peut au moins enseigner que la beauté existe » (Alberola).

• L'échange autour de la notion de vérité : les mathématiques ne sont pas figées. Toute notion a son histoire, elle « raconte une histoire ».

• Le statut de la démonstration : « La plupart des « vérités » sont non démontrables » (Alain Connes). Quelle révolution !

• La part du rêve : « On ne dit pas au lycéen de se laisser aller » (Don Zagier).

• Finie l'ère du « Calcule et tais-toi » : « Calcule, peut-être, mais exprime-toi » (Michel Cassé)

• Le statut de la recherche : une démarche comparable à la création artistique. Le contraire de la démarche scolaire : « On part sur une idée, on ne se fixe pas un objectif précis » (Don Zagier)

• L'incitation à se « cultiver » au-delà du cours, via la lecture et surtout les ressources rendues possibles par les nouvelles technologies.

Outre les actions via l'enseignant, les messages doivent en effet rencontrer l'environnement « naturel » de l'élève. La bataille de la télévision a été perdue, faute d'avoir été ferme sur le cahier des charges culturel des chaînes. Mais une nouvelle chance se présente. Il faut gagner la bataille de l'Internet et des nouvelles technologies, en s'appuyant dessus pour faire passer une partie de ces messages. Développer les pratiques scolaires innovantes qui vont dans le bon sens. De nombreuses idées remarquables ont été émises par le Ministère. Malheureusement, elles ont subi pour nombre d'entre elles le même sort.

• Annoncées en parallèle avec des restrictions horaires, elles ont été mal reçues par les enseignants.

• Non accompagnées de moyens adéquats, elles ont été très difficiles à mettre en œuvre, même par les enseignants acquis à leur principe. De plus, du fait de cette carence en moyens, les éditeurs n'ont pas suivi (hormis quelques-uns comme Tangente).

• Après des efforts importants de mise en forme, certaines ont été néanmoins rapidement abandonnées. Quel gâchis, et surtout quel découragement pour les enseignants qui s'y sont impliqués !

Quelques exemples :

• Itinéraires de découverte au collège. Une idée remarquable : l'introduction de la pluridisciplinarité. Il est significatif que les seuls ouvrages pour aider les enseignants aient été publiés par les Editions POLE et les Editions Ellipses.

• Option mathématiques et informatique en section littéraire. Superbe idée, mal relayée, mal défendue. Sans lendemain.

• TPE. Quelle erreur de ne pas « crédibiliser » cette remarquable initiative en ne prenant en compte au bac que les notes au-dessus de la moyenne, ce qui donne l'impression qu'elles n'ont pas un caractère obligatoire ! (Après notre exposé, nous avons eu confirmeation que certains établissements ne les organisaient pas vraiment, utilisant les horaires pour des cours « traditionnels »).

• Enseignements d'exploration (MPS). Excellente initiative. Nous attendons beaucoup de cette très bonne idée. Mais la contrepartie est la nécessité d'infléchir certaines pratiques pédagogiques.

• Donner moins d'importance au contenu des programmes pour laisser le temps à ces pratiques.

• Ne plus évaluer (au moins partiellement) en fonction de l'habilité à reproduire des « recettes » mais de « créer », même en mathématiques. Encourager un certain nombre de pratiques « hors la classe »

Dans l'établissement scolaire

• Ateliers autour du jeu, de l'art, de l'histoire, de l'expérience, de la recherche… selon les compétences locales.

• Aménagement du CDI et de ses ressources « papier » + « numérique » : revues scientifiques, collections de référence (Bibliothèque Tangente),…sites de ressources (Images des maths, Culture maths, Tangente, Affaire de logique,…). Abonnement des CDI aux initiatives d'indexation de ressources (Cyberlibris, Eduwave Infinimath…)

• Réalisation et/ou location d'expositions. La location sert à montrer la voie, il y en a de nombreuses, mises en place par des associations actives (voir projet Cap Math).

• Projets interdisciplinaires collectifs dans chaque établissement, avec la participation, outre les enseignants de mathématiques, de ceux d'arts plastiques, de musique, d'histoire, de français… On pourra à cet effet réserver dans l'emploi du temps des plages communes aux mathématiques et à ces autres disciplines.

• Mise en place de défis réguliers. Exemple du « jeu de Kitano » : un projet collaboratif, tendant vers une « démonstration collective ». A mi-chemin entre le jeu et la recherche.

Prendre des mesures d'encouragement des activités internes à l'établissement

• Encourager les enseignants à les animer si nécessaire (par exemple en les valorisant sur le plan de la carrière), mais aussi faire appel à des animateurs externes (avec financement des communes, départements, régions).

• Obliger chaque élève à participer à au moins l'une de ces activités (selon son choix). D'où la nécessité d'enseigner autrement et en particulier de créer des créneaux horaires spécifiques pour les élèves et pour les enseignants. Pause méridienne de deux heures en zones isolées.

Prendre des mesures d'encouragement des initiatives hors établissement. Exiger, à l'issue du cycle

• Que chaque élève qui sorte du collège ait participé au moins une fois à une compétition mathématique ;

• Que chaque élève qui sorte du lycée ait participé au moins une fois à un atelier « Maths en Jeans » ou « MathC2+ ».

• Que chaque élève qui sorte du collège ait visité, avec accompagnement approprié, au moins un musée scientifique (ou une exposition autour des mathématiques) ;

Prendre des mesures d'encouragement de pratiques dans le cadre individuel et familial. Inciter les élèves à des lectures, des visites, des fréquentations de sites Internet, au CDI ou à domicile.

• Revues scientifiques

• Sites (voir plus haut documentation CDI)

• Rubriques presse. Un rôle pédagogique indirect via la banalisation de l'activité mathématique, l'occasion d'échanger (forum), avec le professeur ou avec des amis, sur le thème des mathématiques, la découverte de sujets scolaires sous un autre angle, l'attrait du défi.

• Sensibilisation à l'actualité de la recherche.

5.2 L'enseignement des mathématiques à l'école obligatoire

IGEN Groupe des mathématiques

Les mathématiques, un point de vue épistémologique

La modélisation

Les mathématiques se distinguent des autres sciences comme la physique ou la biologie, car elles ne tirent pas leur validité de la confrontation à l'expérience. Précisément, les mathématiques sont la seule science constituée à utiliser ce système de validation du vrai bien spécifique qu'est la méthode hypothético-déductive.

Cette différence de nature a des conséquences au niveau même de l'organisation de l'enseignement. Par exemple, la compétence 3 du socle commun s'intitule « Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique » : les mathématiques sont ici présentées à côté des autres sciences, (il a même été envisagé à un moment que les deux compétences soient séparées). Ainsi, pour tout ce qui relève de la transversalité, les mathématiques doivent prendre toute leur place, mais leur positionnement restera original.

Sciences de la modélisation, les mathématiques permettent de décrire, d'expliquer et de maîtriser les phénomènes.

En 1960, le physicien Eugène Wigner[3] avait publié un article célèbre au titre provocateur : « La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ». Ce titre est à peu de choses près repris par le philosophe Dominique Lambert dans un article de « La Recherche » de janvier 1999 : « L'incroyable efficacité des mathématiques ».

De ce qui vient d'être dit, les exemples foisonnent, bien au delà de ce qu'il est convenu d'appeler les sciences dures. En biologie, on arrive à expliquer et à classer les formes qui apparaissent sur les ailes de papillons ou sur le pelage des mammifères en utilisant des équations aux dérivées partielles. En économie, les divers types d'équilibre des marchés se caractérisent par des méthodes sophistiquées issues de la théorie des systèmes dynamiques, de la théorie des jeux ou de la topologie...

Ce qui est remarquable, entre autres, c'est que des théories construites pour expliquer certains phénomènes soient utilisées avec succès dans des domaines complètement étrangers, par exemple le mouvement brownien, inventé par Einstein pour modéliser le mouvement de particules dans un gaz, et utilisé depuis quelques années par les mathématiciens spécialistes de finances pour modéliser les cours de la bourse

La construction de la capacité d"abstraction

Les mathématiques sont, par nature, une science abstraite, produisant des énoncés symboliques articulés par un jeu de règles précises constituant le langage mathématique. Leur enseignement se caractérise à la fois par l'acquisition de techniques et la

[3] Eugène Wigner (17 novembre 1902 – 1er janvier 1995) est un physicien théoricien hongrois naturalisé américain. En 1963 il partage le prix Nobel avec Maria Goeppert-Mayer et Hans Daniel Jensen pour leur travail sur l'explication de la structure du noyau atomique et son développement de la théorie de la mécanique quantique concernant la nature du proton et du neutron.

construction de la capacité d'abstraction, qui constituent deux volets nécessaires pour résoudre des problèmes. La problématique de la *résolution de problèmes*, souvent présentée comme l'enjeu premier de l'enseignement des mathématiques, apparaît ainsi comme devant réaliser un équilibre entre deux types d'apprentissage :

– le premier régit la nécessaire acquisition de méthodes, de techniques et d'automatismes ;

– le second concerne la mise en place de la pensée abstraite.

C'est dans ce contexte de double finalité de l'enseignement des mathématiques qu'il faut comprendre les programmes de l'école primaire et du collège. Montrer l'efficacité des mathématiques à travers la résolution de problèmes (souvent contextualisés à ce niveau d'enseignement), y acquérir des méthodes, et en même temps développer l'abstraction indispensable à cette discipline. Tout le travail au primaire autour de la numération et du calcul s'inscrit dans cette perspective.

Le contexte international

La prise en compte du contexte international est relativement nouvelle. Dans les années 1970- 1980 les programmes du collège étaient très formels avec une place importante donnée à la démonstration, les mathématiques « modernes » étaient enseignées à l'école primaire avec les systèmes de numération dans des bases autres que 10 et de la géométrie sur des ensembles finis de points. L'évolution actuelle, qui s'appuie sur un certain nombre de constats notamment quant aux résultats des élèves français aux évaluations PISA (à partir des années 2000), inscrit notre École dans une logique internationale. On a pu croire, au début de la construction européenne, que les systèmes éducatifs étaient des spécificités nationales relevant d'un principe de subsidiarité et que les systèmes éducatifs pouvaient se développer de façon autonome. Ce n'est plus le cas et divers exemples le montrent. Citons notamment : l'abandon du principe du redoublement, l'introduction du socle commun dans un enseignement français organisé autour de programmes, l'émergence de nouvelles segmentations de l'enseignement [bac – 3, bac + 3] et l'école du socle, la place accordée aux compétences dans la formation et l'évaluation des élèves. 2 Les mathématiques à l'école obligatoire 2.1 Constats Que savons-nous de la réalité de l'enseignement des mathématiques à l'école obligatoire ? Que savons-nous de l'inscription des pratiques des enseignants dans les réformes actuelles ? Est-ce que les horaires dédiés à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire sont respectés ? Est-ce que les professeurs de collège consacrent un temps suffisant à la résolution de problèmes, à celle de tâches complexes ? Les seules informations dont nous disposons sur la réalité des pratiques des professeurs proviennent des inspections individuelles assurées par les inspecteurs des premier et second degrés. Ces informations sont parcellaires et non structurées. En revanche, nous disposons de nombreuses informations sur ce que savent les élèves :

– Par les évaluations PISA qui concernent les élèves de 15 ans. Les résultats de ces évaluations ont fait l'objet de nombreuses analyses. Retenons simplement la difficulté des élèves français à se lancer dans des démarches s'ils ne sont pas sûrs de leurs réponses, ou à résoudre un problème dont ils n'identifient pas l'origine disciplinaire ;

– Par le cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons (CEDRE) qui établissent des bilans nationaux des acquis des élèves en fin d'école et en fin de collège. Ces évaluations se répètent sur un cycle de six ans ; les mathématiques ont fait l'objet d'une évaluation en mai 2008 et ont donné lieu à deux notes de la DEPP2. Pour l'enseignement primaire, elle montre que 15% des élèves sont en difficulté, et même en grande difficulté pour 3% d'entre eux. Pour le collège, l'étude montre que 15% des collégiens en fin de troisième n'ont pas tiré bénéfice de l'enseignement des mathématiques au collège.

– Par la mesure annuelle (depuis 2008) de l'acquisition par les élèves des compétences de base en mathématiques en fin d'école et de collège aux fins d'alimenter les indicateurs de la LOLF dont on trouve l'analyse dans la publication de la DEPP, « Repères et références statistiques ». Si on tient compte des marges d'incertitude inhérentes à ce type d'enquêtes procédant par échantillonnage, aucune différence significative n'apparaît entre les résultats de 2010 et ceux des années précédentes.

– Par les évaluations CE1 et CM2, moins fiables que les évaluations précédentes, dont on connait les résultats au niveau national, et qui, traitées au niveau des circonscriptions et des départements, permettent de mener des analyses, de dégager des pistes de formation, des points de vigilance.

Les objectifs de la formation en mathématiques

Comme toutes les disciplines, en lien avec les recommandations de l'OCDE, les mathématiques se doivent de :

– faciliter une formation tout au long de la vie ;

– Aider à mieux appréhender une société en évolution ; • Au-delà du cadre scolaire, s'inscrire dans une perspective de formation de l'individu.

Si l'on se réfère au socle commun de connaissances et de compétences, dans chacun des quatre domaines que sont le calcul, la géométrie, les grandeurs et mesures et la gestion des données, les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne. Elles développent la pensée logique, les capacités d'abstraction et de vision dans le plan et dans l'espace par l'utilisation de formules, de modèles, de graphiques et de diagrammes. Les programmes visent à ce que les élèves puissent disposer de connaissances, de méthodes et d'automatismes de base, mais surtout qu'ils puissent exercer leur esprit d'initiative et une certaine autonomie dans le cadre de la résolution de problèmes.

On perçoit bien ici qu'il est devenu indispensable de préciser un certain nombre de points :

– Qu'entend-on par résolution de problèmes ?

– Qu'entend-on par connaissances, méthodes ou automatismes de base ?

On peut ici donner quelques critères comme par exemple la pérennité (une méthode mémorisée doit continuer à servir) ou la transférabilité (une méthode mémorisée doit pouvoir être utilisée dans un autre contexte). Comment les deux aspects ci dessus évoqués se renforcent-ils et s'équilibrent-ils ? Enfin, il est souhaitable de construire chez les élèves, bien sûr dans la durée, quelque chose qui s'apparente à une aptitude à un retour réflexif :

– « De quoi suis-je capable ? »,

– « Que dois-je retenir ? »,

– « De quoi ai-je besoin maintenant pour continuer à construire mon savoir ? »... I

Il s'agit là d'un domaine qui n'est pas exclusivement mathématique, mais dans lequel les mathématiques peuvent apporter une importante contribution.

Les enseignants

L'objectif en matière de gestion des ressources humaines est qu'une masse critique de professeurs soient capables de mener à bien cette mission multiforme de formation des élèves en se référant aux programmes et en s'appuyant sur les documents ressources élaborés par l'institution. Qu'un petit nombre de professeurs maîtrisent ces différents aspects est essentiel pour créer une dynamique de changement mais n'est pas suffisant pour affirmer que les objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège sont atteints. Il apparaît absolument indispensable de se préoccuper des compétences professionnelles de l'ensemble des enseignants, de leur aptitude à prendre en compte les besoins des élèves, à mettre en œuvre une pédagogie différenciée, à trouver les justes équilibres, entre autonomie et initiative d'une part, automatismes et méthodes d'autre part, entre formation et évaluation, entre écrit et oral... Tout cela plaide sans doute pour un renforcement de la formation des enseignants, formation continue mais surtout formation initiale, dont les exigences (et notamment les exigences disciplinaires) doivent être accrues, tout particulièrement dans le premier degré.

Les contenus

Les enseignants français sont trop attachés aux programmes pour que nous omettions d'en dire un mot ici. Il nous semble très important que les programmes laissent une part importante à l'autonomie pédagogique des enseignants et surtout des équipes disciplinaires. Pour autant, le cap doit être donné et l'essentiel doit être dit : les maîtres mots doivent être clarté, concision, hiérarchisation. Il s'agit de donner aux enseignants les moyens de faire des choix pertinents et non de faire tous les choix à leur place. Pour ce qui est des contenus, il n'est bien entendu pas question d'en dresser ici la liste, mais plutôt de présenter les questions incontournables :

– la place du calcul ;

– la place de l'enseignement de l'algèbre et notamment de la valeur de vérité des égalités ; hors socle, ces thèmes peuvent-ils vraiment être reportés au lycée ?

Si oui, il faut au moins se préoccuper de leur prise en charge effective par les enseignants de seconde. Enfin, les manuels scolaires occupent une telle importance dans les pratiques professionnelles des enseignants qu'il semble indispensable que l'institution s'y intéresse d'assez près.

5.3 Contribution du groupe enseignement primaire à la réflexion

Mots-clefs : collège, didactique, psychologie

Philippe Claus, Doyen, IGEN groupe enseignement primaire

Jean-Louis Durpaire, IGEN groupe enseignement primaire

Introduction

Questions posées

Quelles sont les difficultés rencontrées actuellement par les professeurs dans leur enseignement des mathématiques à l'école primaire, au collège ? Comment faudrait- il l'organiser pour le faire évoluer ? Pour que les élèves apprennent mieux ? Pour améliorer leurs résultats ? Autres propositions ?

Une réflexion organisée en 3 points

D'abord, le constat dressé par l'IGEN en 2006, ce qui n'est pas si loin (que sont six années à l'échelle de l'évolution du système éducatif ?) ; ensuite, un énoncé des actions menées depuis 5 ans pour améliorer la situation ; enfin les premiers résultats engrangés et des propositions pour les dix ans à venir.

Le constat dressé en 2006 par l'IGEN

Rappelons d'abord que cette étude n'était pas une commande ministérielle, mais une étude en auto-saisine du groupe de l'enseignement primaire qui s'est mobilisé dans son intégralité et qui s'est assuré de la collaboration d'un IGEN du groupe des mathématiques (Xavier Sorbe). L'étude a été tout à fait approfondie : visite de classes (observations concrètes dans quelque cent vingt classes du cycle des approfondissements réparties sur l'ensemble du territoire), des entretiens avec des maîtres exerçant à ce niveau et rencontrés sur leur lieu d'exercice, l'examen de travaux d'élèves des classes visitées, entretien avec des IEN ; audition d'universitaires ; lecture de rapports d'inspection ; examen des dispositifs d'accompagnement de cet enseignement : animations et formation des maîtres.

Le constat qui a alors été dressé a pu se résumer en quelques points positifs comme par exemple le respect des horaires officiels, la connaissance des programmes et une volonté d'enseigner les mathématiques de manière active, mais surtout des difficultés ou des insuffisances ont été pointées.

Points positifs

Les maîtres cherchent à donner à l'enseignement des mathématiques un aspect actif et agréable. Cet objectif est plus ou moins atteint selon les classes. Pour certains enseignants, il semble qu'il y ait deux types de moments bien séparés pour les mathématiques : ceux plus stricts d'apprentissage et d'autres plus récréatifs. Il faut noter que les rallyes mathématiques ou concours ou défis connaissent un certain succès puisqu'un tiers des classes rencontrées est engagé dans une telle action.

Points de difficultés

La très grande majorité des maîtres rencontrés en 2006 n'ont pas de connaissances mathématiques assurées

Niveau d'étude du maître	Bac	Bac + 2	Bac + 3	Au delà de Bac + 3
…	27 %	22 %	40 %	11,00%

Si Bac + 3 ou plus, discipline	Sciences de l'éducation, psychologie	Lettres, histoire-géographie	Sciences expérimentales	Maths	Droit, sciences économiques	Langues vivantes étrangères	Autres
…	20 %	27 %	19 %	2 %	14 %	9 %	9,00%

La moitié des maîtres interrogés a un niveau d'études universitaires supérieur ou égal à la licence1 ; l'enquête confirme que ceux qui ont suivi un cursus scientifique sont minoritaires (un sur cinq) et que les « mathématiciens » sont vraiment rares (2 %).

Une vision peu claire du rôle des mathématiques dans la société qui se traduisait alors par un lien ténu avec la vie courante des élèves

Problèmes issus de la vie de la classe	J'en donne beaucoup	J'en donne un peu	Pas du tout
…	20	57	14

Les problèmes de vie courante qui sont cités se rapportent à l'utilisation de la monnaie, aux achats et ventes d'objets, à l'utilisation des transports, à des événements divers. Divers documents (publicités, tarifs postaux, horaires, etc.) servent de support à ces problèmes. Les problèmes issus de la vie de la classe sont encore moins nombreux : les exemples évoqués portent sur des voyages scolaires, sur des achats scolaires et sont donc un sous-ensemble des problèmes de vie courante.

La notion de « problème » que nous avions alors qualifiée de brouillée, malgré les longs développements dont elle avait fait l'objet dans les documents d'accompagnement des programmes de 2002, et même depuis les programmes e 1980.

3 difficultés étaient principalement citées :

– la typologie des problèmes, souvent pas claire et donc la question des objectifs de chaque problème posé ;

– la notion de procédure personnelle… qui pouvait conduire à ne pas faire apprendre une démarche efficace et standard de résolution ou à la retarder considérablement ;

– la démarche de recherche peu efficace

L'insuffisance de la pratique du calcul sous toutes ses formes

Les programmes invitent les maîtres à distinguer clairement le calcul mental, le calcul posé, le calcul instrumenté. Le questionnaire s'est révélé trop imprécis pour mesurer le temps consacré au calcul mental qui est massivement estimé inférieur à une heure par semaine. Les observations ont par ailleurs montré l'insuffisance de cette activité : lors des observations de l'inspection générale, seulement une séance sur trois a commencé par un temps de calcul mental alors que cet entraînement devrait être quotidien. Dans certaines classes, le calcul mental est dissocié de la séance quotidienne de mathématiques. Il constitue quelquefois une activité, brève et intense, qui se glisse entre deux autres plus longues, sollicitant une attention un peu moins soutenue.

Le calcul instrumenté n'est l'objet d'un apprentissage organisé que pour une très faible minorité de maîtres.

Le calcul posé apparaît le plus pratiqué, le nombre et la fréquence des suites d'opérations effectuées étant très variables d'une classe à l'autre. La perception par le maître du caractère d'utilité ou des aspects rébarbatifs de ces exercices d'entraînement décide de l'ampleur de ce type d'activité.

Des démarches pédagogiques … à améliorer (disions-nous)

– peu de différenciation pédagogique

– l'erreur permise mais peu prise en compte

– le travail en groupes confus

Les actions engagées et en cours

Pour que ce rapport ne reste pas à l'état de constat, une dynamique a été immédiatement enclenchée par un séminaire national en novembre 2007. Des actes écrits et en ligne ont permis d'étendre la réflexion et finalement de préparer l'arrivée des nouveaux programmes.

La publication des nouveaux programmes a appelé une mobilisation de l'IGEN et de tous ceux qui voulaient bien réfléchir aux moyens d'améliorer l'enseignement des mathématiques. Au centre des réflexions, la notion de relation entre sens et technique. L'ouvrage de Denis Butlen Le calcul mental entre sens et technique est tombé parfaitement à point et il a aidé à comprendre ce que d'autres chercheurs disaient depuis un certain temps : des psychologues comme Fayol, Barouillet, Camos et d'autres, ou des mathématiciens (Mercier, Sarrazy, …) dont certains avaient pu s'exprimer au séminaire de 2007. Il n'empêche que la partie fut rude pour redonner une place à certaines notions comme par exemple les catégories de problèmes ; il a fallu rappeler les travaux de Vergnaud par exemple.

L'IGEN a été mobilisée :

– interventions dans des séminaires académiques (Lille, Nantes, Paris, Lille, Versailles, Dijon…) ;

– interventions dans les séminaires inter-académiques de la DGESCO

Puis, ne pouvant faire face à la demande locale, une autre stratégie a été adoptée avec la décision de la création d'un réseau d'IEN maths, interlocuteurs de la DGESCO et de l'IGEN ; deux séminaires nationaux ont eu lieu, un troisième est programmé. Une liste de diffusion est active, animée par une petite équipe. Il y a une vraie (re)mobilisation pour l'enseignement des maths dans le primaire.

La création d'un document Ressources pour la classe : Le nombre au cycle 2 a été un autre élément de cette dynamique. Là aussi, il s'agit d'un travail d'équipe. Un deuxième document est sur le point d'être publié : le nombre au cycle 3. Nous sommes, à l'IGEN , très attaché aux relations avec les chercheurs et les formateurs, particulièrement avec la CPIRELEM dont les éclairages sont très précieux.

Il y a de nombreuses actions –on ne peut pas toutes les citer -, mais parmi elles les parcours de formation sur Eduscol.

L'amélioration de l'enseignement des maths en primaire passe aussi par les évaluations nationales. Depuis 2009, nous accumulons de l'expérience et des connaissances, à tous les niveaux : école, circonscription jusqu'au national, sur les difficultés des élèves, mais aussi sur leurs compétences et connaissances.

Les constats de l'IGEN en 2012 et les perspectives

Les observations effectuées depuis deux ou trois ans montrent des progrès sensibles pour l'enseignement des maths en primaire.

– Les pratiques pédagogiques évoluent donc, conformément aux nouveaux programmes et grâce à l'effort d'appropriation qui en est fait dans les écoles et les circonscriptions.

– Le calcul mental est redevenu une pratique quotidienne dans la quasi-totalité des classes élémentaires ; le calcul posé est également une pratique régulière, chaque enseignant comprenant qu'il contribue aussi au calcul mental en sollicitant les connaissances en mémoire.

– La mémorisation est, en effet, mieux exercée ; le rôle de la mémoire est en quelque sorte réhabilité, à la fois pour les « faits » et les procédures.

– Les élèves ne sont plus laissés seuls face à l'immensité des « découvertes » à faire : des classes de problèmes leur sont données à comprendre et à apprendre ; ils sont ainsi en mesure de mieux trouver des réponses aux nouveaux problèmes qui leur sont posés. On a ainsi retrouvé l'idée essentielle de la confiance qui est si nécessaire pour pouvoir progresser.

– L'instauration de propositions de progression annuelle a permis de mieux étaler les apprentissages sur le cycle.

– L'environnement mathématique se modernise ; il faut probablement y voir l'incidence du plan Ecole numérique rurale qui a doté plus de 6700 écoles de tableau numérique interactif (TNI) et de classe mobile. L'étude menée en 2011 par les inspections générale sur la mise en œuvre de ce plan a montré que le TNI et la classe mobile modifient les démarches pédagogiques : de plus en plus d'enseignants pensent leurs préparations de classe en fonction de l'outil, « la classe mobile [est] un levier pour le travail en autonomie et l'individualisation », « Le TNI [permet] des temps de travail collectif plus denses, plus riches, plus rapides ».

– En matière de progrès dans l'acquisition des connaissances, et même s'il faut rester prudent, on note des « frémissements » notamment sur la connaissance des tables et des techniques opératoires : 76,2 % de réussite à la dictée de multiplications en 2011 ; les multiplications dictées sont les mêmes qu'en 2010 ; une progression de 4 points.

Des difficultés perdurent sur les nombres décimaux, les fractions, la résolution des problèmes lorsqu'ils sont un peu complexes.

Mais ce qui est nouveau, c'est l'idée que ce n'est pas parce qu'une compétence est difficile à acquérir qu'il faut la reporter à une année ultérieure. C'est typiquement le cas de la proportionnalité avec des exercices comme celui-ci : « 10 objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent 15 de ces objets ? » (réussite : 30 % ; 2011) ou encore « A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ? » qui cumule les difficultés (être capable de convertir des mètres en cm, savoir définir des étapes de résolution, connaître la proportionnalité) (réussite : 25 % ; 2011).

Les résultats aux évaluations nationales montrent que les difficultés majeures portent essentiellement sur des connaissances nouvelles au cours moyen et dont la maîtrise s'étend sur plusieurs années : nombres décimaux, fractions, proportionnalité ; des résolutions de problème (savoir distinguer des étapes, effectuer un raisonnement).

Les perspectives

Augmenter le nombre de professeurs des écoles issus de formations scientifiques

Poursuivre des plans de formation sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, à tous les niveaux, notamment national (réseaux des IEN Maths)

Donner une nouvelle dynamique aux liaisons Ecole-Collège autour des maths

Mieux exploiter les résultats des évaluations nationales, au plan national (liaison avec la recherche)

Travailler sur les premiers pas en mathématiques (école maternelle)

Penser la ressource pédagogique dans le cadre des TICE (entrainement, remédiation, culture,…)

5.4 Avis de l'APMEP

Mots-clefs : collège, école, nombres, ressources, formation, recrutement

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public. Le présent avis est conforme au texte d'orientation de l'APMEP voté en juin 2010 et au texte intitulé « *Propositions et revendications* », votés par le Comité national de l'APMEP en juin 2011.

Introduction

La scolarité française obligatoire jusqu'à l'âge de 16 ans couvre environ les deux périodes scolaires constituées par l'école primaire (et maternelle, celle-ci sera incluse dans les propos écrits ici) et le collège (même si beaucoup d'élèves de moins de 16 ans sont déjà entrés au lycée en classe de seconde.

Cette période se termine à 16 ans, par l'obtention obligatoire, pour tous les élèves, d'un socle commun de connaissances et de compétences défini par la loi de 2005.

L'entrée à l'école maternelle et la poursuite d'étude au primaire et ensuite au collège, sont conditionnées seulement à l'âge des enfants et non à leur maturité ou avancement scolaire. Pourtant, toute la scolarité d'un individu se joue durant ces années qui construisent, d'une manière presque irréversible, son insertion sociale et professionnelle. Ainsi, les difficultés de calcul ou de lecture non prises en compte assez tôt, constituent un handicap très préjudiciable pour la scolarité suivante.

Depuis sa création en 2005, le socle commun a profondément modifié l'enjeu de la scolarité obligatoire en instituant une obligation de résultats. Pourtant son application dans les classes a été très longue à démarrer et ses modalités d'évaluation sont encore loin d'être satisfaisantes.

Une réflexion sur les objectifs et le rôle du socle commun dans l'ensemble de la scolarité (obligatoire et non obligatoire), dans l'orientation en lycées (professionnel ou général et technologique) et dans les examens nationaux (DNB, Baccalauréat) est à entreprendre.

L'enseignement à l'école primaire

Les objectifs fondamentaux de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire sont multiples et indissociables : former, dès le plus jeune âge, l'imagination, l'autonomie et l'esprit d'initiative ; acquérir des mécanismes fondamentaux (de calculs, de repérage dans le monde qui entoure, de raisonnements) ; découvrir une culture scientifique.

Cet apprentissage scientifique et mathématique est constitutif de la formation citoyenne, au même titre que l'apprentissage de la langue maternelle et de la culture générale.

Or, on assiste depuis quelques années à un constat alarmant concernant les acquisitions et les compétences des élèves. Un néologisme apparaît, semblable à l'analphabétisme, pour qualifier certains élèves dont l'apprentissage en mathématiques est extrêmement difficile voire en péril : l'innumérisme[1].

Constats de l'APMEP

Les programmes actuels sont rédigés de façon trop concise ; ils laissent une assez grande liberté aux professeurs, mais ne les aident pas suffisamment à préparer leur enseignement. En particulier, il manque des documents ressources, compléments indispensables. Beaucoup d'enseignants n'ont que les manuels pour se former.

Ces programmes sont rédigés comme une liste de connaissances. Ils manquent de mise en perspective, de démarches possibles.

Il y a un manque de transparence dans la rédaction des programmes de l'école primaire.

Les évaluations nationales mises récemment en place en CE1 et CM2 ne remplissent pas le rôle qu'elles devraient avoir, en particulier celui de détecter les difficultés pour y remédier dans les apprentissages. Ces évaluations ne constituent pas des indicateurs fiables[2] et ne servent pas aux remédiations. Trop d'élèves en fin de CM2 entrent au collège sans qu'une aide efficace leur ait été apportée auparavant.

La formation initiale des étudiants en mathématiques est mise à mal par la réforme du lycée qui a supprimé l'enseignement des mathématiques pour tous en série littéraire. La majorité des étudiants qui passent le concours de professorat des écoles est issue des sections littéraires.

Propositions de l'APMEP

Rédiger, dans une commission d'élaboration de programmes composée d'enseignants de terrain, de formateurs, d'inspecteurs, de nouveaux programmes explicitant davantage certains aspects fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques (rôle des problèmes, travail sur le langage et sur le raisonnement, créativité…).

Donner les moyens à la commission de suivi des programmes créée en 2011 d'évaluer le suivi et la mise en place des nouveaux programmes.

Ecrire des documents ressources et diffuser, auprès des professeurs des écoles, des documents officiels qui permettent aux enseignants d'approfondir certains contenus mathématiques, d'effectuer des choix didactiques pertinents, et de développer des approches interdisciplinaires, dans le cadre de l'exercice de leur liberté pédagogique.

Rétablir le rôle diagnostique et pédagogique des évaluations nationales, notamment en les plaçant en début d'année de début de cycle.

Limiter les effectifs de classe à 24 ou 25 (voire un peu moins en cycle 2), pour favoriser la prise en compte de la diversité des élèves.

Évaluer systématiquement les programmes, et tous les dispositifs mis en place à l'école primaire (aide personnalisée, PPRE, évaluations nationales…).

Renforcer les offres de formation continue en mathématiques au plus près des besoins des professeurs des écoles, qui sont polyvalents mais qui sont, dans le cursus scolaire des élèves, leurs premiers enseignants de mathématiques.

Étaler davantage les heures d'enseignement, dans la semaine ou dans l'année, pour favoriser la réceptivité des élèves.

Réinstaurer un enseignement de mathématiques pour tous en section littéraire (L) au lycée pour que tous les étudiants qui se destinent au professorat des écoles aient une formation dans ce domaine.

L'enseignement au collège

En seulement quelques années, les missions de l'enseignant de collège se sont multipliées et sont devenues plus complexes : Socle commun de connaissances et de compétences, histoire des arts, B2I (brevet informatique et Internet), PPRE (programmes personnalisés de réussite éducative), ASSR (attestation scolaire de sécurité routière), etc. La gestion des classes, jamais dédoublées, est devenue de plus en plus difficile.

Le collège semble être le parent pauvre de la scolarité obligatoire et les politiques éducatives mises en place depuis de nombreuses années n'ont pas effacé l'image négative du « collège unique », aussi bien auprès des enseignants que des familles.

Aujourd'hui, le collège est accusé (à tort ou à raison) de nombreux défauts : tout élève entrant en sixième arrive en troisième quels que soient ses résultats et ses efforts ; les classes sont de plus en plus surchargées et non dédoublées ; les aides personnalisées sont en trop petit nombre et ne sont pas efficaces ;

Pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, les programmes de mathématiques semblent cohérents et plutôt bien faits. Toutefois les contenus sont trop lourds en regard du nombre d'heures de mathématiques allouées et de la surcharge des effectifs par classe. Si l'on veut une meilleure réussite il faut donner du temps à l'assimilation, du temps pour la recherche de problème, du temps pour développer l'autonomie de la réflexion.

Le collège doit faire l'objet d'une réforme profonde, réfléchie en concertation avec tous les acteurs du système éducatif. Les objectifs de la scolarité au collège doivent être revus et précisés, en liaison avec l'obtention pour tous du socle commun permettant une orientation choisie et non subie. Celle-ci doit permettre de se destiner soit à des études en lycées (général et technologique ou professionnel), soit à des études professionnelles par alternance. Le choix ne peut pas être fait avant une certaine maturité soit avant l'âge de 16 ans.

Constats de l'APMEP

Le socle commun impose des changements de pratiques et nécessite une transversalité aussi bien organisationnelle que pédagogique. Cela augmente considérablement le temps de travail, hors de la présence des élèves, demandé aux enseignants, sans compensation.

Les possibilités d'accompagnement des élèves en difficulté pour l'acquisition du socle commun sont très insuffisantes. Les dispositifs de soutien sont réservés à un nombre limité d'élèves, faute de moyens suffisants. Quant aux PPRE, leur mise en œuvre s'avère souvent inefficace, par manque de temps consacré à l'aide.

Les documents et ressources disponibles sur Internet, en quantité importante, se sont améliorés en clarté, richesse et précision. Cependant, ils ne peuvent suffire à une vraie mutation des pratiques pédagogiques et d'évaluation. D'autant plus que les consignes d'application et l'accompagnement des équipes sont encore très variables selon les académies et les établissements. Une formation continue des enseignants est indispensable en complément.

La mise en place du LPC (livret personnel de compétences) s'est faite dans l'urgence au cours de l'année 2010-2011, par manque de préparation, alors que le décret d'application de la loi date de 2006.

Les classes sont souvent trop chargées et trop hétérogènes pour permettre une différenciation efficace en classe entière, garantir à tous la maîtrise du socle commun, et, en même temps, amener chacun à son meilleur niveau (dualité socle commun / programme).

L'évaluation actuelle, pouvant être double (chiffrée et « par compétences »), constitue une charge de travail supplémentaire pour l'enseignant, et réduit de fait le temps réellement consacré en classe aux apprentissages.

L'intégration des TICE n'est pas suffisamment développée en raison du manque de dédoublements indispensables.

Propositions de l'APMEP

Dans le service des enseignants, réserver un temps pour des séances en effectifs réduits (pour un réel suivi des élèves et une aide personnalisée, surtout pour les élèves en difficulté), et aussi un temps pour la concertation des équipes pédagogiques (pour organiser les enseignements et les évaluations, et assurer le suivi global de chaque élève).

Limiter les effectifs de classe à 24 ou 25, pour favoriser la prise en compte de la diversité des élèves.

Prévoir des horaires d'enseignement (au moins 4 heures hebdomadaires) qui permettent de proposer des activités tenant réellement compte des acquis de chacun, et qui laissent aux élèves un temps suffisant pour de réels apprentissages (notamment en ce qui concerne la résolution de problèmes, fondamentale en mathématiques).

Mener une réflexion d'une part sur la dualité de l'évaluation relative au socle commun et de celle relative au programme, et d'autre part sur la pérennisation de l'évaluation chiffrée. Beaucoup d'enseignants de mathématiques tiennent au Diplôme national du brevet (DNB).

Former tous les enseignants à la mise en œuvre du socle commun. Cette formation doit être disciplinaire, pour construire ou mutualiser des outils opérationnels, mais aussi interdisciplinaire, au moins au sein de chaque établissement, pour permettre l'approche transversale des contenus, des pratiques et de l'évaluation.

Accorder des moyens suffisants (en temps, en formation et en personnels) pour la mise en place des PPRE, et de la remédiation en général, pour tous les élèves qui en ont besoin ; cela suppose en particulier que soit présenté un bilan national des dispositifs existants (PPRE et « accompagnement éducatif », notamment).

Mettre en œuvre progressivement l'évaluation du socle dès la Sixième, dans la continuité de l'école primaire, afin de mettre en place suffisamment tôt les dispositifs d'accompagnement.

Évaluer la réalité de l'intégration des TICE et favoriser leur développement en organisant des dédoublements et des travaux en groupe à effectifs réduits.

Conclusion

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège participe de la formation de l'esprit à travers rigueur et raisonnement, de la connaissance des outils utiles et nécessaires à la vie sociale, de la transmission d'une culture et des bases du développement du capital mathématiques du pays.

Des réformes importantes doivent être réfléchies et menées selon les axes suivants :

Les remédiations, mises en évidences par de véritables évaluations nationales, doivent être instituées plus efficacement pour qu'aucun élève entrant en sixième ne souffre d'innumérisme ;

Les modalités de conception des programmes sont à redéfinir, pour laisser une véritable expérimentation avant leur application et permettre un suivi après les premières années d'application.

Le collège ne doit pas renouer avec une filiarisation précoce qui accentuerait encore davantage les inégalités sociales criantes dans l'orientation des élèves. Des rythmes scolaires personnalisés, dès le plus jeune âge, doivent permettre **à** tous les élèves :

d'obtenir le socle commun (qui doit devenir le bagage obligatoire de fin d'étude pour que tous s'insèrent dans la vie sociale et professionnelle sans être comptabilisés dans les « *sortant du système scolaire* »;

de bénéficier ensuite d'une orientation vers des études plus ou moins longues, soit en lycées (général et technologique ou professionnel), soit vers des études professionnelles par alternance.

Notes :

1 L'avis du comité sur l'enseignement des sciences de l'Académie des sciences daté du 31 janvier 2012 s'intitule « *combattre l'innumérisme* » et soulève cette question.

2 Le rapport du HCE intitulé « *les indicateurs relatifs aux acquis des élèves* » conforte cette idée.

5.5 Conférence Nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école et au collège

Après les 40 auditions d'experts et la journée du 13 mars à l'IFE, ENS-Lyon, quels sont les constats communs et les propositions principales qui ressortent de toutes les auditions ?

Rémy Jost et Alain Mercier, présidents du Comité Scientifique

Remarques préalables :

Il est toujours aussi difficile de répondre à la question : « Comment améliorer l'enseignement des mathématiques ? »

Les mathématiques "élémentaires" sont des mathématiques profondes : leur enseignement nécessite, pour les professeurs qui l'organisent, un ensemble complexe de connaissances mathématiques épistémologiques et didactiques intriquées.

Les recherches sont nombreuses et des éléments de solution existent mais leur diffusion est un phénomène social qui ne dépend pas seulement de la volonté de quelques uns. L'organisation des études universitaires, de la formation initiale, de la formation professionnelle et continue, des établissements, et du système national d'enseignement, doivent être travaillées ensemble, sur une longue durée, suivies et évaluées, pour qu'un changement efficace réussisse : l'histoire des IUFM en témoigne.

Constats communs et idées principales (en caractères droits, les remarques génériques ; en italiques, les questions relatives aux mathématiques)

- *Le nombre d'élèves en difficulté en mathématiques, en particulier en calcul devient préoccupant. Pour une bonne part des élèves, les nombres ne sont pas « vivants » et chez les adultes, l'« innumérisme » gagne du terrain de façon inquiétante (voir le texte de l'académie de Sciences, 31/01.2012)).*

- La qualité de l'enseignement des mathématiques dépend du recrutement, de la formation universitaire des étudiants dans la discipline, du statut, de la formation professionnelle initiale et continue des enseignants : entre autres ils ont à connaitre les enjeux mathématiques et didactiques de ce qu'ils enseignent, et ils ont besoin de la meilleure lucidité possible sur l'ensemble du curriculum (ce qui est difficile dans un curriculum organisé en trois niveaux séparés). Un travail d'équipe accru dans les établissements et entre établissements de niveau différent et d'un même secteur, appuyé régulièrement par des formateurs universitaires, est nécessaire afin que les enseignants produisent des moyens d'enseignement partagés et validés.

- On sait que ce qui n'est pas enseigné, en mathématiques, n'est pas appris. On apprend aussi des mathématiques par l'usage, mais seulement après que les savoirs visés aient été présentés et définis. Ce que l'on apprend ainsi doit aussi être enseigné, c'est-à-dire que les savoirs visés doivent aussi été présentés pour eux-mêmes et définis faute de quoi, on ne peut pas « savoir ce que l'on sait », et on ne sait pas des mathématiques c'est-à-dire, des moyens d'agir et de penser, partagés, valides, transmissibles, qu'il est possible d'étudier et d'adapter selon les besoins.

- Il y a consensus sur le fait qu'il ne faut pas sous-estimer l'importance des premiers apprentissages, ceux de la maternelle en lien avec les apprentissages sociaux et sur le fait qu'il faut mettre au travail le rapport des élèves aux nombres ; il se dégage aussi un nouveau regard sur l'apprentissage de l'algèbre, au collège. Pour autant les évolutions nécessaires sur ces points ne nécessitent pas un changement des attentes du socle.

- Au sein du CS, il y a une vision partagée sur ce qui est attendu de l'enseignement du calcul, des équilibres à trouver entre automatisation et flexibilité, de l'importance du calcul d'estimation et d'ordres de grandeur, du travail à mener sur les rapports entre grandeurs, nombres et numération.

La pratique du mesurage et l'étude systématique du système métrique (compréhension des systèmes d'unités pour une grandeur donnée) sont nécessaires. L'appropriation de ce que sont les grandeurs (quantité, espace, temps, masse, puis les grandeurs composées aire, volume, vitesse, force, travail) suppose en particulier l'expérience pratique des ordres de grandeur et le raisonnement correspondant. L'intuition commune des grandeurs fondamentales que sont l'espace, le nombre, et le temps, doit donc être travaillée tout au long de la scolarité et fonde ce qu'on appelle « le sens des opérations. » C'est ainsi que l'on peut penser développer à l'école obligatoire, école du socle commun, l'« intelligence du calcul »

- La question de la familiarité nécessaire des élèves avec les nombres et de la manière de la construire est revenue plusieurs fois au débat. Elle doit occuper une place centrale dans l'enseignement des mathématiques : le système de la numération décimale de position fonde les techniques de calcul et les algorithmes opératoires, les élèves doivent avoir sur ces questions une maîtrise pratique théorique et technique. Cette maîtrise comprend nécessairement la modélisation des problèmes et leur organisation en types ou classes qui donne accès aux sens des opérations, parce qu'elles permettent de résoudre les problèmes d'un(e) même type ou classe. Un travail conjoint d'équipes de chercheurs et de professeurs des écoles semble possible à organiser sur ces questions.

- Le travail de constitution des classes de problèmes socialement vifs dans les pratiques d'une époque, et qui à ce titre doivent être proposés aux élèves pour qu'ils les étudient1, doit être organisé comme une tâche collective de la profession de professeur et d'abord, des équipes de professeurs dans les établissements d'enseignement. C'est ainsi que le curriculum en mathématiques au collège pourra être repensé en continuité et en cohérence avec le curriculum de l'école élémentaire.

Le socle devrait aider à cela, mais il est devenu un point de focalisation du mécontentement des enseignants de collège et dans la formulation du pilier 3, les mathématiques ne se distinguent pas nettement comme un enjeu de la formation scientifique des élèves.

L'approche spécifique de l'algèbre en France et les alternatives mises en évidence sont éclairantes de ce qu'il est possible de faire évoluer. Le système éducatif institutionnel et la recherche didactique ont enfin établi un lien de coopération, qui devrait conduire à la prise en compte des résultats de la recherche dans l'élaboration des programmes, des ressources, et de la formation. Les documents d'accompagnement des programmes devraient témoigner de ce travail conjoint et il semble possible aujourd'hui d'engager une évolution concertée sur l'enseignement de l'algèbre au collège.

Il y a enfin nécessité d'expliquer et de moduler le rôle réel et la place des évaluations, qui sont utiles aux professeurs et aux élèves quand elles sont faites en classe, aux professeurs et aux parents quand elles font un bilan ponctuel, aux administrateurs du système quand elles sont externes. Mais ce sont des instantanés qui ne permettent ni de savoir les évolutions d'une classe d'âge ni sans autre analyse de faire le diagnostic des difficultés d'une catégorie d'acteurs (élèves, professeurs, parents, administrateurs, société).

Pour une comparaison internationale sur la formation des compétences en mathématiques dès le primaire, il faudrait faire entrer la France dans le dispositif d'évaluation internationale TIMSS (Trends in international mathematics and science study), d'abord au niveau 4 de l'école obligatoire, puis aux niveaux 2 et 7.

5.6 Bibliographie

[1] Auteur1 et Auteur2, Un article dans une revue. *Nom de la revue*, 3(10) : 133-139, Janvier 2001.

[2]

[3] Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, Journal of Mathematics Teacher Education 3, 205–224.

[4] Artigue, M., & Gueudet, G. (2008). Ressources en ligne et enseignement des mathématiques. Actes De l'Université d'Été De Mathématiques, Saint-Flour.

[5] Ball, D., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book. What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? The Educational Researcher, 25(9), 6–14. doi: 10.3102/0013189X025009006.

[6] Buisson, F. (1911). Le nouveau dictionnaire pédagogique et d'instruction primaire, numérisé par l'INRP en 2007 http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/, mis au format ePub pour tablettes numériques par l'IFÉ EN 2011: http://ife.ens-lyon.fr/epub/dictionnaire-buisson.epub

[7] Chevallard, Y., & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. In G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 129-145). Rennes/Lyon: Presses Universitaires de Rennes/INRP.

[8] Grenier, D. (2006), Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec (AMQ), Sherbrooke, juin 2006.

[9] Grenier, D. (2008), Expérimentation et preuves en mathématiques, in Didactique, épistémologie et histoire des Sciences, PUF, collection « Sciences, homme et société » (L. Viennot ed).

[10] Grenier D. &Tanguay D. (2008), L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers, petit x n°78, ed IREM de Grenoble.

[11] Grenier, D. & Payan, Ch. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. Recherches en didactiques des mathématiques, Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

[12] Grenier, D. & Payan, Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002.

[13] Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. le travail documentaire des professeurs en mathématiques. (pp. 57-74) Rennes / Lyon : Presses Universitaires de Rennes / INRP.

[14] Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. ZDM —The International Journal on Mathematics Education. 43(3), 399–411. doi: 10.1007/s11858-011-0313-x

[15] Kuntz, G., Clerc, B., & Hache, S. (2009). Sesamath: Questions de praticiens à la recherche en didactique. In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), Approches plurielles en didactique des mathématiques (pp. 175–184). Paris, France: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

[16] Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Jones, K. D., Lu, A., & Dawes, M. (2010). Establishing a professional development network around dynamic mathematics software in England. International Journal for Technology in Mathematics Education, 17(4), 177–182.

[17] Margolinas, C. & Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet et L. Trouche, Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques, (pp.233-249), Rennes / Lyon : Presses Universitaires de Rennes / INRP.

[18] Pepin, B. (2009). The role of textbooks in the “figured world” of English, French and German classrooms—A comparative perspective. In L. Black, H. L. Mendick & Y. Solomon (Eds.), Mathematical relationships: Identities and participation (pp. 107–118). London, UK: Routledge.

[19] Remillard, J. (2012). Modes of Engagement: Understanding Teachers' Transactions with Mathematics Curriculum. In Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. From Textbooks to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Documentation, (pp. 105-122), New York: Springer.

[20] Sabra, H. (2009). Entre monde du professeur et monde du collectif : réflexion sur la dynamique de l'association Sesamath. Petit x, 81, 55–78.

[21] Sabra, H. (2011). Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques : les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire.

[22] Soury-Lavergne, S., Trouche, L., Loisy, C., & Gueudet, G. (2011). Parcours de formation, de formateurs et de stagiaires: suivi et analyse, rapport à destination du ministère de l'Education Nationale, INRP-ENSL. Available from http://eductice.inrp.fr/EducTice/equipe/PRF-2010/

[23] Trgalovà, J., Jahn, A.-P., & Soury-Lavergne, S. (2009). Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth European Conference on Research on Mathematics Education (pp. 1161–1170). Lyon, France: INRP. Available from www.inrp.fr/editions/cerme6

[24] Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristan, A. I. (to be published in 2012). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (eds.), Third International Handbook of Mathematics Education, Springer

[25] Van Es, E., & Sherin, M.G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice, Journal of Mathematics Teacher Education, 13, 155–176. doi:10.1007/s10857-009-9130-3

[26] Visnovska, J., Cobb, P., & Dean, C. (2012). Mathematics teachers as instructional designers: What does it take? In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche, From text to “lived” resources: Mathematics curriculum materials and teacher development (pp. 323–341). New York, NY: Springer.

[27]

[28] APA, 1996. DSM-IV : Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux, 4ème édition. Washington DC : American Psychiatric Association (traduction française par J.-D. Guelfi et al., Paris : Masson, 1996).

[29] Butterworth B., Varma S. & Laurillard D., 2011. Dyscalculia: From brain to education. Science, 332, 1049-1053. DOI: 10.1126/science.1201536

[30] Chatel L., 2011. Une nouvelle ambition pour les sciences et les technologies à l'école. Dossier de presse disponible à l'adresse : http://www.education.gouv.fr/cid54824/le-plan-sciences.html

[31] Fischer J.-P., 2005. Le diagnostic de dyscalculie à partir de l'évaluation en CE2 : vers une approche scientifique ? Nouvelle Revue de l'AIS, 32, 85-98.

[32] Fischer J.-P., 2007. Combien y a-t-il d'élèves dyscalculiques ? A.N.A.E., 19 (3), 141-148.

[33] Fischer J.-P., 2011. La cacophonie à propos (de la prévalence) de la dyscalculie incite-t-elle à lui préférer la notion d'innumérisme? In: Actes du symposium : Dyscalculie développementale et troubles d'apprentissage en mathématiques (pp. 13-18). Montréal : Cénop.

[34] Fischer J.-P. & Charron C., 2009. Une étude de la dyscalculie à l'âge adulte. Économie et Statistique, N° 424-425, 87-101.

[35] Fischer J.-P., Charron C. & Meljac C., 2008. Les différences entre sexes en arithmétique : des enfants aux adultes. Bulletin de psychologie, 61 (3), 227-235.

[36] Hein J., Bzufka M.W. & Neumärker K.-J., 2000. The specific disorder of arithmetic skills. Prevalence studies in a rural and an urban population sample and their clinico-neuropsychological validation. European Child & Adolescent Psychiatry, 9 (Supplement 2), 87-101.

[37] Hofstadter D.R., 1982. Number numbness, or why innumeracy may be just as dangerous as illiteracy. Scientific American, 246 (5), 20-34.

[38] Kosc L., 1974. Developmental dyscalculia. Journal of Learning Disabilities, 7 (3), 164-177.

[39] Lewis C., Hitch G.J. & Walker P., 1994. The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year-old boys and girls. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 35 (2), 283-292.

[40] Paulos J.A., 1988. Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences. New York: Hill and Wang.

[41] Peard R., 2010. Dyscalculia: What is its prevalence? Research evidence from case studies. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8, 2010, 106-113. International Conference on Mathematics Education Research (ICMER 2010). doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.015

[42] Ramaa S. & Gowramma I.P., 2002. A systematic procedure for identifying and classifying children with dyscalculia among primary school children in India. Dyslexia, 8 (2), 67-85.

[43] Reigosa V., Valdés Sosa M., Butterworth B., Torres P., Santos E., Suárez R., Lage A., Rodrı´guez M., Estévez N. & Hernández D., 2008. Large-scale prevalence studies of learning disabilities in Cuban school-children population. Clinical Neurophysiology, 119 (9), Page e111.

[44] Reigosa-Crespo V., Valdés-Sosa M., Butterworth B., Estévez N., Rodríguez M., Santos E., Torres P., Suárez R. & Lage A., 2011. Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: The Havana survey. Developmental Psychology. Advance online publication (september 12). doi:10.1037/a0025356

[45] Reyna V.F., Nelson W.L., Han P.K. & Dieckmann N.F., 2009. How numeracy influences risk comprehension and medical decision making. Psychological Bulletin, 135 (6), 943-973. doi:10.1037/a0017327

[46] Vigier M., 2010. Dyscalculie ou innumérisme ? Approches de la résolution des problèmes arithmétiques par les abaques. Bulletin de l'APMEP, 488, 301-311 (+348).

[47] Wood S., Hanoch Y., Barnes A., Liu P.-J., Cummings J., Bhattacharya C. & Rice T., 2011. Numeracy and Medicare Part D: The importance of choice and literacy for numbers in optimizing decision making for medicare's prescription drug program. Psychology and Aging, 26 (2), 295-307. doi:10.1037/a0022028.

[48] Bautier É. Rayou P. (2009). Les inégalités d'apprentissage. Programmes, pratiques et malentendus scolaires. Paris : PUF , 184 p..

[49] Berthelot R. Salin M.-H. (1992). L'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Thèse de doctorat, Bordeaux.

[50] Briand J. (1993). L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique, thèse de doctorat de l'Université Sciences et Technologies - Bordeaux I (1993-12-14), BROUSSEAU Guy (Dir.)

[51] Briand J. Loubet M. Salin M-H. (2004). Apprentissages mathématiques en maternelle, Hatier (CD-Rom)

[52] Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[53] Charotte F. Emprin F. (2006). Un rallye mathématique à l'école maternelle ? Oui, c'est possible. CRDP Champagne Ardenne

[54] Houdement C. Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement des la géométrie, ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 175 – 193.

[55] Emprin, F. Jourdain, C. (2010). Les représentations des enseignants sur l'échec scolaire : étude à partir d'une question contraposée, actes du colloque AREF 2010 : Actualité de la recherche en éducation et en formation, Genève, 13 au 16 septembre 2010 :

[56] ERMEL (1995). Apprentissages numériques en Grande Section, Hatier

[57] IREM de Grenoble (1999), Grand N. Spécial maternelle : T. 2. IREM de Grenoble, Grenoble, 1999

[58] Liping Ma (1999), Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States: Teachers' Understanding ... Mathematical Thinking and Learning Series, Lawrence Eribaum Associates Inc, Publishers.

[59] Lurçat, L. (1976). L'enfant et l'espace : le rôle du corps. Paris : PUF.

[60] Piaget, J., & Inhelder, B. (1947). La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris : PUF

[61] Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, Recherches en didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage éditions Grenoble, Vol. 18. Num. 2. p. 139-190.

[62] Vergnaud G. (1996) La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed). Didactique des Mathématiques. Delachaux et Niestlé. Lausanne.

[63] Bigot, R., Croutte, P. & Muller, J. (2011). La culture financière des Français. Paris : Crédoc. http://www.latribune.fr/static/pdf/La_culture_financiere_des_Francais_2011.pdf

[64] Brown, P. (1998). Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive. Paris : Seuil.

[65] Cluzel, R. & Court, H. (1951). Algèbre. Paris : Delagrave.

[66] Granderoute, R. (1988). La fortune de l'article Collège dans le discours pédagogique (1753-1789). Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie, 5(5), 55-71. http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rde_0769-0886_1988_num_5_1_980

[67] Isambert-Jamati, V. (1990). Les savoirs scolaires. Paris : Éditions Universitaires.

[68] Jey, M. (2005, 7 octobre). Gustave Lanson et la réforme de 1902. Fabula. La recherche en littérature [site Web]. http://www.fabula.org/atelier.php?Gustave_Lanson_et_la_r%26eacute%3Bforme_de_1902#_edn6

[69] Lelièvre, C. (1990). Histoire des institutions scolaires (1789-1989). Paris : Nathan.

[70] Matthews, J. (1989). The Roman Empire of Ammianus. Londres : Duckworth.

[71] Pavé, A. (2011). La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard. Paris : EDP Sciences.

[72] Poulain, A. (1885). Traité de géométrie élémentaire. Paris : Desclée, De Brouwer.

[73] Bigot, R., Croutte, P. & Muller, J. (2011). La culture financière des Français. Paris : Crédoc. http://www.latribune.fr/static/pdf/La_culture_financiere_des_Francais_2011.pdf

[74] Brown, P. (1998). Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive. Paris : Seuil.

[75] Cluzel, R. & Court, H. (1951). Algèbre. Paris : Delagrave.

[76] Granderoute, R. (1988). La fortune de l'article Collège dans le discours pédagogique (1753-1789). Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie, 5(5), 55-71. http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rde_0769-0886_1988_num_5_1_980

[77] Isambert-Jamati, V. (1990). Les savoirs scolaires. Paris : Éditions Universitaires.

[78] Jey, M. (2005, 7 octobre). Gustave Lanson et la réforme de 1902. Fabula. La recherche en littérature [site Web]. http://www.fabula.org/atelier.php?Gustave_Lanson_et_la_r%26eacute%3Bforme_de_1902#_edn6

[79] Lelièvre, C. (1990). Histoire des institutions scolaires (1789-1989). Paris : Nathan.

[80] Matthews, J. (1989). The Roman Empire of Ammianus. Londres : Duckworth.

[81] Pavé, A. (2011). La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard. Paris : EDP Sciences.

[82] Poulain, A. (1885). Traité de géométrie élémentaire. Paris : Desclée, De Brouwer.

[83] ERMEL Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Six ouvrages de la Grande Section au CM2 (Hatier de 1990 à 1999, rééditions récentes)

[84] ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3 (Hatier)

[85]]Des articles relatifs aux dispositifs proposés et à la formation

[86] Argaud H.-C., Douaire J., Dussuc M.-P. (2010) Alternance et formation en mathématiques - Des exemples en PE2 et en T1. Actes du XXXVIe colloque COPIRELEM (Auch)

[87] Douaire J. , Emprin F. (à paraître 2012) Apprentissages géométriques au cycle 2 et formation des enseignants Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM Dijon

[88] [6] Douaire J., Emprin F., Rajain C., (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. Repères IREM n° spécial Géométrie.

[89] [7] Douaire J . Elalouf M.-L. Pommier P. (2005) Savoirs professionnels et spécificités disciplinaires : analyse de mises en commun en mathématiques, en sciences et en observation réfléchie de la langue au cycle 3, Grand N n° 75, pp 45-57

[90] [8] Douaire J., Argaud H.-C..,Dussuc M.-P, Hubert C, (2003) Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in «Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes » (coordination Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. ADIREM/INRP).

[91] [9] Douaire J. Hubert C. (2002) Mises en commun et argumentation en mathématiques Grand N n°68

[92] IGEN, L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire, 2006

[93] Rocher T., Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007, NI 08.38, 2008

[94] Brun A. et Pastor J.-M., Les compétences en mathématiques des élèves en fin d'école primaire, NI 10.17, 2010

[95] Chesné J.-F., Les acquis des élèves en calcul à l'issue de l'école, Education & formations, N°79, 2010

[96] Chesné J-F et Prost S., PACEM : une expérimentation sur l'utilisation d'évaluations standardisées des acquis des élèves par les enseignants, Education & formations, N°81, à paraître

[97] Bezout E., Reynaud A. (1821) Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, 9e édition. Consulté sur Internet le 21 janvier 2012, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

[98] Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse. In Mercier et Margolinas (Eds) Balises en didactique des mathématiques. Cours de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage.

[99] Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In C. Ouvrier-Buffet & M.J. Perrin-Glorian (Eds.) (2009) Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques. (pp. 211–222) Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

[100]Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. Recherches en Didactique des Mathématiques, 30, 317–366.

[101] Chambris (à paraître). Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs.

[102] Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Javier García F. (Eds.) Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico (pp. 705–746). Jaén : Servicio de publicationes – Universidad de Jaén.

[103] Moreira P.C., David M.M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. Journal for Mathematics Teacher Education, 11(1), 23-40.

[104] Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres (Cédérom). Toulouse : IREM de Toulouse.

[105] Proulx J., Bednarz N. (2010). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana. 1(1)

[106] Rouche N. (1992) Le sens de la mesure. Bruxelles : Didier Hatier

[107] Rouche N. (1994) Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. Repères IREM 15 25–36.

[108] Rouche N. (2006) Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions. Ellipses

[109] Stigler J.W., Lee S.-Y. Stevenson H.W. (1990) Mathematical Knowledge. National Council of Teachers of Mathematics.

[110] Ministère de l'éducation (1977) L'école maternelle – Collection horaires, objectifs, programmes, instructions. CNDP

[111] Ermel (1977) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire – Cycle préparatoire. Paris : Sermap OCDL

[112] Ministère de l'éducation nationale (1986). L'école maternelle, son rôle, ses missions. CNDP

[113] Palanque R., Cambrouse E. & Loubet E. (1987) Prépa-math – Maternelle/grande section – Dossier pédagogique. Paris : Hachette.

[114] Ermel (1990) Apprentissages numériques, cycle des apprentissage, Grande Section de maternelle. Paris : Hatier.

[115] Ermel (1991) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire. Paris : Hatier

[116] Gelman R. & Gallistel C.R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge : Harvard University Press.

[117] Briars D. & Siegler R.S. (1984) A featural analysis of preschooler's counting knowledge. Developmental Psychology, 20, 607-618.

[118] Le Corre, M. & Carey, S. (2008). Why the verbal countingg principles are constructed out of representations of small sets of individuals: A reply to Gallistel. Cognition, 107(2), 650-662

[119] MEN/DGESCO (2010) Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle – Découvrir le monde – Ressources pour faire la classe à l'école. Document mis en ligne sur le site eduscol.

[120] Brissiaud R. (1989) Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles. Paris : Retz.

[121] Bandet, J. (1962) Les débuts du calcul. Paris : Bourrelier.

[122] Fayol, M. (2012) L'acquisition du nombre. Collection : Que sais-je ? Paris : Puf.

[123] Dehaene, S. (1997-2010) La bosse des maths – 15 ans après. Paris, Odile Jacob.

[124] Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. Cognition, 108(3), 662-674.

[125] Brissiaud, R. (2007) Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle. Paris : Retz.

[126] Hodent, C., Bryant, P., & Houdé, O. (2005) Language-specific effects on number computation in toddlers. Developmental Science 8 (5), 420–423.

[127] Siegler, R. & Jenkins, E. (1989) How Children discover new strategies. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[128] Fischer, J.P. (1992) Les apprentissages numériques. Nancy, Presses Universitaires de Nancy.

[129] Brissiaud R. (1989-2003) Comment les enfants apprennent à calculer – Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres. Paris : Retz.

[130] Fayol, M. (2012) L'acquisition du nombre. Collection : Que sais-je ? Paris : Puf.

[131] Fischer, J. P. (2010) La dyscalculie développementale : réalité et utilité de la notion pour l'enseignement ? Bulletin de l'APMEP, 488, 293-300.

[132] Fareng R. & Fareng, M. (1966) Comment faire ? L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7 ans. Paris, Fernand Nathan.

[133] Mialaret, G. (1955) Pédagogie des débuts du calcul. Fernand Nathan, Paris (avec la collaboration de l'Unesco)

[134] Brachet, Canac & Delaunay(1955) L'enfant et le nombre. Didier, Paris.

[135] Brissiaud, R. (2007) Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle. Paris : Retz.

[136] Geary D.C., Fan L. & Bow-Thomas C.C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. Psychological Science, 3,180-185.

[137] Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematics Learning, n°7,245-274.

[138] Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. Repères IREM, n° 54, 23-39.

[139] Artigue M., Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, vol 7, n°3, 2002, p. 245-274.

[140] Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching. Dotdrecht : Kluwer Academic Publishers.

[141] Butlen, D. (2007). Le calcul mental entre sens et technique. Presses universitaires de Franche-Comté.

[142] Capponi B. (1988) Calcul algébrique et programmation dans un tableur. Le cas de Multiplan. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier.

[143] Carraher, D., Schliemann A., (2007). Early Algebra, In, F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 669-706. NCTM. Information Age Publishing.

[144] Chevallard Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. Petit x, n°5, 51-94.

[145] Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x, n°19, 45-75.

[146] Chevallard Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. Petit x, n°23, 5-38.

[147] Combier, G., Guillaume, J.C., Pressiat, A. (1996). Les débuts de l'algèbre au collège. Paris : INRP.

[148] Coulange, L., Drouhard, J.P. (eds.) (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques.

[149] Delozanne, E., Previt, D., Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. (2010), Vers un modèle de diagnostic de compétences, Revue Technique et Sciences Informatiques, 29 (8-9), 899-938.

[150] Grugeon B., La transition entre enseignement professionnel et enseignement général : le cas de l'algèbre élémentaire. Thèse de doctorat. Université Paris 7, p.9-96, 1996.

[151] Haspekian M., Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Étude du cas des tableurs, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7, 2005.

[152] Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. Educational Studies in Mathematics 54: 249–282.

[153] Kahane, J.P. (coord.) (2001). L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Editions Odile Jacob.

[154] Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulations. In, F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 707-762. NCTM. Information Age Publishing.

[155] Lester, F. (2007). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM. Information Age Publishing.

[156] Nemirovsky R. & Borba M. (eds) (2004). Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. PME Special Issue. Educational Studies in Mathematics, 57/3.

[157] Serfati, M. (2005). La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique. Editions Petra.

[158] Stacey, K., Chick, H., Kendal, M. (2004). The future of the Teaching and Learning of Algebra. Springer Verlag.

[159] Sutherland, R. (2000). A comparative study of algebra curricula. Bristol, UK : Qualification and Curriculum Authority.