DOCUMENTS ET TRAVAUX DE RECHERCHE EN ÉDUCATION

Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques ?

Actes des journées mathématiques INRP

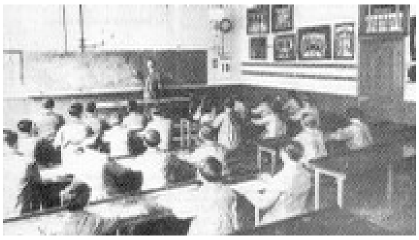
Lyon, 14 et 15 juin 2006

Sous la direction de
Luc Trouche, Viviane Durand-Guerrier,
Claire Margolinas et Alain Mercier

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PÉDAGOGIQUE

ISBN : 978-2-7342-1072-6
Réf. BR 059

Sommaire



Préface

Carolyn Kieran, département de mathématiques, Université du Québec à Montréal

Les contributions aux Actes des journées mathématiques de l'INRP ont une thématique commune, qui est la conception de ressources pour le maître et pour la classe. Cette thématique représente une ouverture assez récente de la recherche en didactique des mathématiques. En fait, la recherche portant sur la figure du professeur est un domaine qui a pris des années à évoluer. Par exemple, au PME (« International Group for the Psychology of Mathematics Education »), la plus grande association de chercheurs en didactique des mathématiques, l'apprenant a été le principal objet d'attention pour la majorité des recherches menées entre les années 1970 et 1990. Même avec l'intérêt croissant en recherche sur l'enseignant et l'enseignement des mathématiques depuis les années 90, le développement des théories portant sur la pratique enseignante et les ressources requises pour cette pratique est assez nouveau (Ball & Bass, 2002 ; Boaler, 2003). Aussi récemment qu'en 1994, année où s'est tenue l'Étude ICMI sur la recherche en didactique des mathématiques (« What is Research in Mathematics Education and What Are its Results ? ») (Sierpinska & Kilpatrick, 1998), la séparation entre la théorie et la pratique était marquante.

Aux journées d'étude, lors des trois exposés pléniers et des discussions subséquentes en ateliers, la thématique de la conception de ressources pour le maître a été abordée selon trois perspectives différentes : la résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique ; les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire ; les instruments du travail mathématique et les dispositifs d'enseignement dans les environnements informatisés. À partir de leurs perspectives particulières, les auteurs de ces exposés posent des questions pertinentes vis-à-vis de la conception de ressources et suggèrent des façons de collaborer et des pistes de recherche pour aborder les questions en jeu.

Dans sa conférence plénière, *La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique*, Viviane Durand-Guerrier prend comme point de départ la résurgence de la dimension expérimentale dans l'activité mathématique des élèves. Elle définit la dimension expérimentale en mathématiques comme « le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets ». Elle présente un exemple portant sur des séquences de nombres entiers, où elle décrit la nature des processus de généralisation utilisés par les élèves. L'auteure nous rappelle que la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques est au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau et que cette prise en compte nécessite de considérer différents types de milieu. Elle souligne que la possible présence de plusieurs milieux pendant la phase de validation rend délicats les débats en classe de mathématiques. En ce qui concerne la conception de ressources dans le cadre de cette perspective expérimentale sur la résolution de problèmes, Durand-Guerrier remarque que : « la question de l'équilibre entre *mathématiques, histoire, épistémologie* et *didactique* dans l'élaboration des ressources et du choix des concepts didactiques, historiques, épistémologiques à introduire, conduit à se poser une nouvelle fois la question de savoir si on peut faire l'économie d'une formation à la recherche pour les professeurs ».

Dans leur conférence plénière, *Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire*, Claire Margolinas, Alain Mercier et Sophie René de Cotret commencent avec des interrogations sur ce qui peut caractériser les relations entre recherche fondamentale, ingénierie, développement et enseignement. Ils mettent en question la vision classique de la chaîne descendante, de la recherche fondamentale à l'ingénierie, puis au développement et pour finir à l'enseignement. En fait, la problématique de leur exposé est celle des relations entre deux pôles : recherche fondamentale/ingénierie versus enseignement/développement. Ils se réfèrent aux travaux de Brousseau et de ses collègues et remarquent que : « Ce sont ces travaux qui ont nécessité la construction de ce que l'on appelle *les ingénieries*, toujours très longues et jamais ponctuelles, qui ont concerné la majeure partie de l'enseignement obligatoire ; cette "raison d'être" des constructions d'ingénierie a très peu diffusé, même dans le monde des chercheurs, pour ne pas parler de l'enseignement, ni même du développement ». L'enjeu, selon ces auteurs, est de comprendre pourquoi et comment cet aspect de la recherche fondamentale pourrait connaître une diffusion et dans quelles conditions. Ensuite, ils prennent un exemple d'une activité de généralisation (« encadrement du miroir »), qui leur permet de discuter l'importance des activités dans l'enseignement qui définissent des *situations* et non pas des *problèmes*. En ce qui concerne la conception des ressources pour le maître, ces chercheurs remarquent :

Notre travail de didacticiens consiste à identifier, avec les professeurs et à leur intention, des outils *techniques, qui ne sont pas toujours décrits dans les travaux mathématiques théoriques mais qui permettent de gérer le curriculum réel que les professeurs mettent en place au quotidien et de même, à leur fournir des* résultats*, des* dispositifs*, des* faits*, pouvant donner des objets d'enseignement conformes aux programmes*.

Une enquête menée par Margolinas et ses collaborateurs auprès d'un groupe de professeurs non débutants révèle que les professeurs des écoles ont besoin de ressources liées aux difficultés des élèves et à la construction d'une progression organisée de la matière. Les résultats de cette enquête suggèrent à ces chercheurs que le problème est « de comprendre sous quelle forme il serait possible de mettre à la disposition des professeurs certains savoirs concernant l'organisation curriculaire mathématique ».

Dans sa conférence plénière, *Instruments du travail mathématique et dispositifs d'enseignement dans les environnements informatisés*, Luc Trouche dresse d'abord l'état des lieux quant à l'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques, et le fait suivre d'un résumé des recherches en cours à l'INRP dans ce domaine. La complexité du rôle du professeur, qui est mise en évidence par ces recherches, suggère la nécessité de concevoir des documents qui assistent l'action du professeur dans sa classe. Pour Trouche, la notion de *ressource pédagogique* pour documenter cette action du professeur émerge comme réponse à cette nécessité. Il souligne que deux composantes sont essentielles à la constitution de ressources pédagogiques : une situation mathématique et des éléments permettant de l'exploiter dans un environnement donné (c.-à-d., un ou plusieurs *scénarios* d'usage). Mais, il met en garde contre la conception de scénarios complets a priori et pointe plutôt vers le bien-fondé de la notion de scénarios adaptables par les professeurs, incluant l'ajout de *comptes rendus d'expérimentation* rédigés par eux. Pour l'avenir immédiat, les objets de recherche communs proposés par les équipes participant à l'atelier lié à cet exposé, incluent entre autres : les traces de l'activité de l'élève ; les scénarios (à savoir, *peut-on envisager un modèle commun dont les différents projets tireraient des déclinaisons différentes ?*) ; les comptes rendus d'usage des ressources par les enseignants ; et les communautés d'enseignants (*quels outils concevoir pour faciliter leur émergence et leur développement ?*).

Les directions de recherche mentionnées dans les textes de conférences et les comptes rendus d'ateliers de ces journées d'étude sont très prometteuses. Même si nous détectons des différences entre les projets quant à la nature des rôles joués par l'enseignant et les chercheurs – par exemple, la conception de ressources pédagogiques pour aider le travail de l'enseignant versus l'implication des enseignants dans une réflexion didactique – l'intérêt porté à la figure de l'enseignant est de bonne augure pour l'avenir de la recherche en didactique des mathématiques. Les nouvelles sensibilités manifestées lors de ces journées constituent un pas dans la bonne direction, vers où sera éventuellement rendue désuète la séparation traditionnelle entre la recherche et la pratique.

RÉFÉRENCES

BALL D. L. & BASS H. (2002), Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Kingston, Canada: CMESG.

BOALER J. (2003), Studying and capturing the complexity of practice: The case of the dance of agency. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of PME* (Vol. 1, pp. 3-16). Honolulu, HI: PME.

SIERPINSKA A., & KILPATRICK J. (Eds.). (1998), *Mathematics education as a research domain : A search for identity*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Introduction

Luc Trouche, équipe ressources mathématiques de l’INRP

Les 14 et 15 juin ont eu lieu à l'INRP (site de Lyon) des journées d'étude sur l'enseignement des mathématiques. Ces journées concernaient les équipes qui se sont constituées, dans une perspective de *conception* de ressources pour le maître et pour la classe (ce qui suppose bien sûr une analyse didactique, un développement effectif de ressources, une analyse des usages et des effets), en relation avec l'équipe mathématique de l'INRP, souvent dans le cadre de partenariats (avec des IREM, des IUFM, des CRDP, des rectorats...). Elles étaient ouvertes naturellement aux équipes travaillant dans le cadre d'UMR liées à l'INRP (ADEF et ICAR). Elles avaient un triple objet :

– faire le point sur les recherches "à mathématiques" menées avec l'appui de l'INRP, en relation avec des recherches du même type menées dans d'autres cadres, en France ou ailleurs ;

– resserrer, pour les recherches en relation avec l'équipe de l'INRP, les problématiques autour d'objectifs mieux définis ;

– développer, autant que faire se peut, une synergie entre les différentes recherches.

L'équipe mathématique de l'INRP est définie, dans le cadre du prochain quadriennal de l'INRP (2007-2010), comme une *unité d'expertise et de ressources*, adossée aux laboratoires de recherche lyonnais, *conjuguant des actions de recherche spécifiques et des actions d'animation et de structuration du champ scientifique*. Une attention particulière est portée aux *relations, dans chaque académie*, entre les professeurs associés à l'INRP et les responsables institutionnels (IPR, responsables recherche des IUFM), et aux *retombées de la recherche* en matière de production de ressources et en matière de formation des enseignants.

Cette situation rend nécessaire, pour les équipes de professeurs associés de l'INRP, de situer leur recherche dans le cadre de *partenariats* reconnus (information aux IPR, aux CSP des IUFM, collaborations avec les IREM, les IUFM et les laboratoires universitaires), d'envisager leur implication dans les *formations* académiques et nationales et de prévoir les retombées de leur recherche en matière de *publications* (publications intermédiaires, le site EducMath de l'INRP pouvant être un support privilégié, publication finalisée dans le cadre d'une collection homogène à définir). Les journées de juin pouvaient être l'occasion de préciser cela, d'opérer des rapprochements entre des recherches différentes se menant sur les mêmes académies ou de penser des interactions entre des recherches complémentaires. Cette recherche de collaboration s’est traduite par l'invitation, à ces journées, des différents partenaires de l'INRP (existants ou potentiels), aux niveaux académique ou national : Michel Mizony, vice-président de l’Assemblée des Directeurs d’IREM, Jacques Moisan, doyen du groupe mathématiques de l’Inspection Générale de l’Education Nationale, ont ainsi ouvert les journées, avec Max Butlen directeur adjoint de l’INRP chargé de la recherche.

Ces journées ont été organisées sous l’égide d’un comité scientifique, représentatif des chercheurs de l’INRP et des collaborations existantes (cf. rattachements institutionnels p. 9) : Sylvie Coppé, Viviane Durand-Guerrier, Denise Grenier, Claire Margolinas, Alain Mercier, et moi-même.

Ce comité scientifique a proposé une problématique générale autour de laquelle les discussions préparatoires se sont organisées :

> L’évolution des curriculums (au sujet de l’enseignement de la statistique par exemple), l’évolution des environnements technologiques, la confrontation avec les autres disciplines scientifiques au sein de dispositifs spécifiques, l’évolution enfin des mathématiques elles-mêmes interrogent l’enseignement des mathématiques, en particulier dans le « socle commun ». Quels nouveaux *équilibres* constituer entre la *recherche* et *l’étude* ? Quelle est *la part de l’expérience* dans le cours de mathématique ? Quelles situations

> mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe, quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle *mutualisation* ? C'est autour de ce faisceau de questions imbriquées, questions vives pour l'institution, que ces journées seront organisées.

Pour l'organisation des journées elles-mêmes, trois thèmes ont été distingués, permettant de fédérer chacun plusieurs équipes :

– la résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique ;

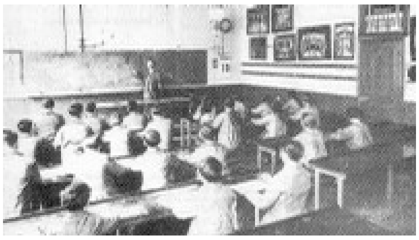
– les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire ;

– instruments du travail mathématique et dispositifs d'enseignement dans les environnements informatisés,

Les journées se sont alors déroulées en trois temps : d'abord, en séance pleinière, présentation de trois exposés situant les trois thèmes, en relation avec les travaux des équipes concernées, puis discussion par ateliers, enfin synthèse commune et pistes de travail. Les actes reprennent tout naturellement cette structure. Merci à V. Durand-Guerrier, C. Margolinas et A. Mercier d'avoir contribué à l'édition de ces actes.

Ces journées auront-elles atteint leur objectif de susciter une synergie entre les différentes recherches menées en partenariat avec l'INRP ? Il faudra sans doute attendre, pour le savoir, de voir les évolutions, les interactions entre les recherches et le développement d'éventuelles collaborations. En tout état de cause, ces journées auront été l'occasion d'échanges fructueux, c'est ce qui est ressorti de la discussion finale. De premières journées d'étude qui en appellent donc d'autres…

Comité scientifique des journées



Sylvie COPPE

IUFM Lyon et UMR ICAR[1], groupe COAST (CNRS, Univ. Lyon 2, INRP, ENS Lyon et ENS-LSH)

Viviane DURAND-GUERRIER

IUFM Lyon, LIRDHIST[2] (Université Lyon 1) et IREM Lyon

Denise GRENIER

IREM et CNAM[3] (Université Grenoble 1)

Claire MARGOLINAS

INRP et UMR ADEF[4] (Université de Provence, IUFM d'Aix-Marseille, INRP)

Alain MERCIER

INRP et UMR ADEF (Université de Provence, IUFM d'Aix-Marseille, INRP) et Inter-IREM Didactique

Luc TROUCHE

INRP, LIRDHIST (Université Lyon 1) et IREM Montpellier

Secrétariat des journées

Gilda CORON, INRP

Isabelle COUSTON, INRP

[1] COAST : Communication et Apprentissage des Sciences et des Techniques, laboratoire de l'UMR ICAR (Interaction, Corpus, Apprentissages, Représentations), Université Lyon 2 <http://icar.univ-lyon2.fr/>

[2] LIRDHIST : Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique et Histoire des Sciences et Techniques, Université Lyon 1 <http://lirdhist.univ-lyon1.fr/>

[3] CNAM : Combinatoire Naïve et Apprentissage des Mathématiques

[4] UMR ADEF : Unité Mixte de Recherche Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation <http://www.adef-umr.fr/>

Intervention de Max Butlen

Adjoint au directeur de l'INRP

En tant que responsable de la recherche et adjoint au directeur, je suis chargé de représenter la direction de l'INRP pour vous souhaiter la bienvenue dans nos nouveaux locaux. J'espère que vous aurez le temps de les découvrir et d'apprécier tout à la fois leur esthétisme et leur fonctionnalité. Permettez-moi de vous suggérer d'aller visiter notre très belle bibliothèque et surtout de vous y inscrire.

Pour vous accueillir et saluer vos travaux, je dirai d'entrée que le titre de vos journées est en parfaite correspondance avec notre projet et notre politique scientifique. Nous vivons de ce point de vue, après la délocalisation, une intense période de refondation scientifique qui s'est exprimée dans les orientations fortes de notre prochain projet quadriennal ? Quelles sont-elles ?

1) **Nous avons la volonté de développer la recherche en inscrivant nos travaux dans un cadre universitaire.**

Voilà qui correspond à notre investissement dans les unités mixtes de recherche (UMR), les équipes de recherche technologique en éducation (ERTé) et les programmes pluri-formation (PPF). L'UMR ADEF qui contribue fortement au développement des recherches en mathématiques et à la production de connaissances en témoigne largement. Dans les cinq années à venir, nos recherches articulées à des structures et des réseaux universitaires devraient s'inscrire dans les thématiques et problématiques suivantes :

– la professionnalité des enseignants et des acteurs du monde éducatif,

– les contenus d'enseignement, les didactiques, les rapports entre disciplines et savoirs,

– la démocratisation scolaire, les politiques compensatoires,

– les espaces éducatifs et leurs acteurs,

– les technologies d'information et de communication appliquées à l'enseignement,

– la citoyenneté, les mémoires conflictuelles, les identités culturelles des élèves.

2) **Nous avons pris en compte des évolutions sensibles dans l'orientation du travail de nos équipes.**

Toutes se sont orientées ces dernières années vers une production accrue de ressources, vers une contribution plus forte à la circulation et à la reproblématisation des savoirs construits par la recherche, au bénéfice, au-delà de la communauté scientifique, du système éducatif et des institutions. Cette évolution contribue à expliquer la place qui est attribuée à notre institut dans la LOLF, dans le cadre de l'action « Diffusion des savoirs ».

3) **De là, une troisième orientation, nous avons voulu créer des équipes de recherche, de ressources et d'expertise, à côté des UMR et ERTé.**

Le travail de ces équipes (plus légères, plus adaptables aux circonstances), s'appuie nécessairement sur des activités de recherche, mais il est profondément orienté vers la production de ressources. De ce point de vue, l'action de l'équipe animée par Luc Trouche est tout à fait exemplaire de ce que nous voulons faire du nouvel INRP : un institut utile au monde éducatif, dont les actions sont lisibles, visibles et l'activité générale marquée par plus d'efficience.

4) **L'INRP : une force de proposition au sein du système éducatif**

Des améliorations du système éducatif sont espérées par les usagers, par nos partenaires, par l'institution. Face aux problèmes posés par la massification des publics et par la nécessaire élévation du niveau des qualifications, les discours, les conclusions, les propositions des équipes de recherche prennent une importance nouvelle pour les responsables et les acteurs du système éducatif. L'actualité récente le montre largement, nous avons pu le vérifier :

– avec les débats sur le socle commun au cours desquels l'importance des mathématiques, et donc d'une certaine manière de vos travaux, a encore été soulignée ;

– nous pouvons aussi le vérifier en appréciant la montée en puissance de certaines problématiques dans l'enseignement des mathématiques et des sciences aujourd'hui : et notamment la pertinence des questions suivantes : quel rapport entre les phases d'étude et de recherche ? Comment mieux intégrer les TICE ? Quelles relations établir entre les mathématiques et les autres sciences au moment où l'on pense à un enseignement intégré en 6e ou à des thèmes de convergence en sciences ? Quelles incidences sur les curriculums, les spécialités, les champs disciplinaires ?

L'INRP entend contribuer à la construction des réponses à ces questions et participer largement à la divulgation des expériences et connaissances nouvelles.

5) **S'affirmer comme un lieu de rencontre entre chercheurs et acteurs du système en s'affirmant comme une maison de la recherche en éducation en Europe.**

Les recherches en éducation sont fort nombreuses en France, singulièrement en mathématiques. Grâce au réseau des IREM, grâce aux laboratoires universitaires, grâce aux études menées par l'institution, la DESCO, la SDTice, l'IGEN. Et bien sûr grâce aussi aux recherches propres de l'INRP, recherches que j'ai découvertes dans leur richesse, leur diversité et leur foisonnement, ce qui appelle, me semble-t-il, des mises en cohérence régulières.

De ce point de vue, l'institut espère pouvoir jouer un rôle original, spécifique. Il aspire à organiser et à favoriser des synergies. Des synergies tout d'abord entre notre équipe interne de recherche et d'expertise et les UMR où se fait de la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Au-delà, l'INRP peut jouer un rôle d'interface entre la recherche universitaire et les recherches de terrain, grâce notamment à notre réseau de professeurs associés. Cette double articulation peut légitimer l'institut comme médiateur privilégié de rencontres entre les différentes structures et équipes (IREM, laboratoires, IUFM...).

Plus généralement, l'INRP s'est donné un nouvel objectif pour son prochain contrat 2007-2010. L'institut a l'ambition d'être un lieu de rencontres, de croisements, entre chercheurs et acteurs du système. Il s'agit de devenir une des maisons françaises de la recherche en éducation en Europe. L'activité de l'équipe math montre que nous sommes sur la bonne voie :

– la tenue de ces journées mathématiques est un premier indice d'un rassemblement de recherches, d'une confrontation des problématiques, pour les équipes en partenariat avec l'INRP ;

– le développement du site EducMath (reposant sur de multiples partenariats nationaux et internationaux) est aussi un signe très encourageant ;

– l'an prochain, deux recrutements de professeurs détachés permettront d'aller plus loin et de relever d'autres défis, car, si une première étape semble réussie, l'essentiel est à venir...

Après la réussite de l'installation à Lyon, de nouveaux partenariats sont à nouer, à élargir dans le milieu régional de la recherche, très riche, mais aussi au niveau national et international...

C'est dans ce contexte qu'encore une fois nous sommes ravis de vous accueillir, pour des travaux que nous vous souhaitons fructueux et enrichissants pour la réflexion et l'action pédagogiques. Bonnes journées d'étude !

Intervention de Michel Mizony

Vice-président de l'Assemblée des Directeurs d'IREM

C'est avec plaisir qu'au nom de l'ADIREM, je salue les nombreux participants à ces journées. Ma courte intervention sera centrée sur le thème :

Réseau, maillage, partenariat.

Dans les échanges autour des trois thèmes de ces journées, plusieurs équipes du réseau des IREM sont impliquées, soit en tant que telles, soit à travers certains de leurs membres, animateurs au sein d'IREM. Ce qui me semble le plus important est le fait que les équipes présentes ici sont « mixtes » au sens où différentes structures mettent en commun leurs compétences (IREM, IUFM, INRP, labos universitaires, Inspection Générale, etc.). Ce travail de partenariat entre différentes structures est un gage de qualité.

Plutôt que de faire un discours, je voudrais vous renvoyer à la lecture de deux documents dans la rubrique « La parole à » qui se trouvent sur le site de l'INRP : http://educmath.inrp.fr/Educmath. Ils ont pour titre :

– *De quelques "déclins" et des débats qu'ils suscitent*, par J.-P. Raoult, l'actuel président du comité scientifique des IREM ;

– *Diversité des recherches sur l'enseignement des mathématiques*, par V. Durand-Guerrier ici présente.

Ces deux textes ont le mérite de situer aujourd'hui le cadre dans lequel s'effectuent les recherches en didactique des mathématiques. En particulier Jean-Pierre situe le cadre actuel de crise « dans lequel peuvent être menées des études » ; et Viviane décrit les différents « lieux », le réseau ou le maillage entre différents partenaires. Un danger dans ce maillage se présente : le réseau des IREM n'est plus reconnu en tant que tel par le ministère de l'EN. Ceci est une conséquence de la LOLF nous dit-on. Mais pas seulement, cela traduit un manque de volonté politique dans le cadre plus général d'une destruction sournoise des services publics ; on pourra prendre comme exemple la division par deux en deux ans des moyens mis à disposition pour la formation continue des professeurs.

Pour nous aujourd'hui cela signifie concrètement un affaiblissement du réseau des IREM et par contrecoup des déchirures dans ce maillage patiemment tissé entre nos différentes institutions. L'ADIREM sait que l'on peut compter sur tous nos partenaires pour juguler ce danger. Ces difficultés n'empêcheront pas cependant un travail serein et utile pendant ces journées.

Merci.

Intervention de Jacques Moisan

Doyen du groupe « mathématiques »
de l'Inspection Générale de l'Education Nationale

L'approche expérimentale en mathématiques

L'introduction des technologies d'information et de communication dans l'enseignement des mathématiques a donné un sens nouveau à la notion d'activité mathématique pour les élèves. La puissance des outils (calculatrices évoluées, tableur-grapheur, logiciels de géométrie dynamique, voire logiciels de calcul formel) mis à leur disposition permet de les confronter à des problèmes plus complexes, moins convenus et – on peut l'espérer – plus intéressants. Il est même possible dans certains cas de permettre aux élèves de participer à l'étape de modélisation – passage de la situation réelle à son modèle mathématique – et donc d'avoir une activité scientifique complète.

Avec les différents relais institutionnels et l'aide de la communauté universitaire, le groupe des mathématiques de l'inspection générale de l'éducation nationale a essayé de faire évoluer dans ce sens les pratiques enseignantes. L'introduction d'une épreuve de modélisation à l'agrégation externe de mathématiques, l'intégration de l'usage des TICE au CAPES interne de mathématiques, puis au CAPLP maths-sciences et la réforme de l'épreuve professionnelle du CAPES externe partent du souci de familiariser dès leur recrutement les enseignants de mathématiques, non seulement avec l'usage des outils, mais surtout avec le changement d'esprit qu'implique une approche intelligente de l'usage de ces outils dans l'enseignement.

Parallèlement, des formations continues ont été mises en place massivement dans toutes les Académies. Trop disparates, souvent trop généralistes, en retard ou en avance sur l'évolution technologique, elles n'ont pas toujours eu les effets escomptés sur les pratiques. Il ne faut pas se le cacher, dans de nombreux cas, les prescriptions des programmes, les recommandations des documents d'accompagnement ou de l'inspection générale ne sont pas appliquées dans les classes.

Nous pensons que, comme pour les concours de recrutement, l'évolution des pratiques dans le respect des programmes devra résulter d'une évolution des épreuves d'examen. Nous demandons donc l'introduction, dans les examens, d'épreuves pratiques de mathématiques s'appuyant sur l'utilisation d'outils numériques. Dans un premier temps, nous lançons pendant l'année scolaire 2006-2007, en collaboration avec la direction générale de l'enseignement scolaire, une expérimentation, dans une vingtaine de lycées, de ce que pourrait être une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat S. Dans notre esprit, le bac S ne constitue qu'un début, mais nous souhaitons que de telles épreuves puissent être introduites dans tous les baccalauréats et au brevet. L'évaluation à l'examen est malheureusement dans notre pays une condition *sine qua non* de l'entrée dans les pratiques.

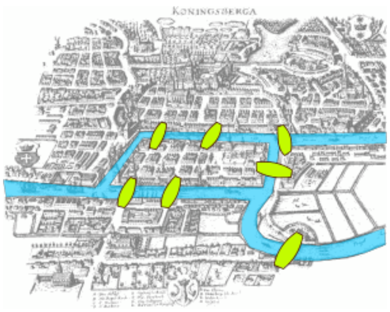
Pour nous, l'image des mathématiques et l'intérêt des élèves pour la discipline y gagneront. Mais nous pensons aussi profondément que leur formation sera améliorée. Nous espérons ainsi stimuler leur intérêt pour les mathématiques et, au-delà, leur goût pour les sciences, bref contribuer à une orientation plus conforme aux besoins du pays vers les filières scientifiques.

Je sais que la tâche ne sera pas facile pour convaincre la totalité des enseignants de mathématiques de la pertinence d'une « approche expérimentale » des problèmes et de son intérêt pour la formation des élèves. Je sais aussi que, dans cette assemblée, je ne trouverai pas les mêmes réticences et j'en profite pour demander votre aide et votre soutien.

Merci.

La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique

Viviane Durand-Guerrier, IUFM et LIRDHIST (Université Lyon 1)



Les interactions mutuelles entre études épistémologiques et didactiques sont anciennes, comme en témoigne une littérature nombreuse (Arsac 1987, Artigue 1991, Dorier 2000). On pourrait à bon droit se demander pourquoi s'interroger à nouveau sur ces questions aujourd'hui. Une des motivations pour le faire est l'émergence, ou plutôt la ré-émergence aujourd'hui d'un questionnement sur la dimension expérimentale des mathématiques, et même plus précisément sur le rôle de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques (Chevallard 2004, Dias & Durand-Guerrier 2004, Perrin à paraître, Durand-Guerrier à paraître). Ceci a donné lieu, dans le cadre du développement du site EducMath, à une étude coordonnée par Gérard Kuntz dont la première version est actuellement en ligne. Un colloque intitulé *Mathématiques, Sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire* a été organisé par La Main à la Pâte à Saint-Etienne en septembre 2005. Enfin, le XXXe colloque de la COPIRELEM qui s'est tenu en juin 2006 avait pour thème *Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?*

Dans une première partie, je me propose de mettre en lumière les enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques. Dans une deuxième partie, j'illustrerai mon propos à partir d'un exemple, riche d'enseignement, emprunté à Barallobres et Giroux (à paraître). Dans une troisième partie, je présenterai brièvement les orientations de travail des quatre équipes qui contribuent à ce thème. Je conclurai en posant quelques questions soulevées par la conception de ressources pour les enseignants dans la perspective d'un développement significatif de la résolution de problèmes comme moteur des apprentissages en classe.

1) QUELQUES ENJEUX EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

1.1. Caractéristiques d'un milieu[5] permettant le recours à la dimension expérimentale en mathématiques (Dias 2004)

Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. L'organisation par le professeur d'un milieu permettant de favoriser le recours à l'expérience est une tâche complexe et exigeante. Un tel milieu doit être nourri par la connaissance a priori, pour le professeur, de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs en jeu dans la situation. Il doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. Il est nécessaire que ce milieu favorise la mobilisation d'outils (par exemple : élaboration de conjectures ou de règles, élaboration d'objets nouveaux, changement de cadre, mise en relation de propriétés etc…) permettant de mettre en œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur les objets. Il faut enfin qu'il permette la médiation entre sujets et objets et

[5] Nous entendons par milieu ce que le professeur doit mettre en place pour permettre l'apprentissage mathématique : objets matériels ou non, état des connaissances, documents et supports de nature variée, organisation des interactions etc. Le concept de milieu a été introduit par Brousseau et retravaillé par de nombreux auteurs. On pourra se reporter aux communications consacrées à *la notion de milieu* dans les actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques (Dorier &al. 2002, 109-206).

favorise l'articulation entre les aspects sémantiques, syntaxiques et pragmatiques qui sont mobilisés pour l'élaboration de conjectures puis de preuves.

1.2. Une situation paradigmatique : le puzzle

Un exemple classique permet d'illustrer les points précédents. Il s'agit de la situation du Puzzle (Brousseau 1998, 237-241). Il s'agit d'agrandir un puzzle, dont on a un modèle, de sorte qu'un côté qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur le puzzle agrandi. Les élèves travaillent par groupes de cinq, chaque groupe se met d'accord sur la manière d'agrandir les pièces, puis chaque élève va agrandir la pièce dont il a la responsabilité. Les élèves se retrouvent et rassemblent les pièces agrandies pour reconstituer le puzzle. Dans la plupart des cas, les élèves de la fin de l'école primaire sont confrontés au fait que la procédure additive ne permet pas de reconstituer le puzzle. La *réalité*[6] résiste ; elle disqualifie le modèle additif. Il faut donc faire d'autres conjectures et mettre en œuvre de nouvelles actions pour tester ces conjectures. Dans cette situation, la question de l'agrandissement renvoie à plusieurs aspects : la conservation de la forme qui relève de l'*aspect perceptif ;* la conservation des angles qui relève de l'*aspect géométrique* et la proportionnalité des mesures de longueurs qui relève de l'*aspect numérique*. Les liens sont étroits avec le théorème de Thalès, l'homothétie, les similitudes.

2) UN EXEMPLE RICHE D'ENSEIGNEMENT

La situation décrite ci-dessous est présentée et analysée dans (Barallobres & Giroux à paraître). Elle intéresse notre propos car elle met en évidence l'importance de la nature des expériences des élèves non seulement dans les phases d'action de la situation, mais aussi dans les phases de formulation, de validation et dans le processus de conceptualisation.

2.1. Présentation de la situation, méthodes et validation

Le problème proposé aux élèves est le suivant : trouver la somme de dix nombres entiers consécutifs. Les élèves travaillent en équipes de 4 ou 5 (élèves de 13 ans). La situation comporte plusieurs étapes. Dans la première étape, celui qui trouve la somme a gagné. Le professeur propose successivement deux suites de nombres : <u>19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28</u> et <u>783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792</u>. Dans la deuxième étape, les élèves sont invités à réfléchir pour trouver une méthode permettant de trouver la somme le plus vite possible, et ce quels que soient les nombres proposés par le professeur, puis à reprendre le jeu avec des nombres de plus en plus grands. La troisième étape est consacrée à la recherche des raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la méthode marche pour toutes séries de dix nombres naturels consécutifs. On termine par le bilan des méthodes et la présentation du travail de chaque équipe.

Lors de l'une des mises en œuvre de cette situation, deux méthodes sont reconnues comme les plus efficaces. La première est celle qui donne origine à la formule $10n+45$ et qui est acceptée par la majorité de la classe ; elle utilise la décomposition 19, 19+1, 19+2, 19+3, …. 19+9. L'origine de 45 pose cependant problème. La deuxième méthode a été produite par un seul groupe. Elle consiste à ajouter 5 au cinquième nombre de la liste. Pour la série 1 qui commence par 19, on obtient 235, qui est bien le résultat correct. Le groupe qui a produit cette méthode déclare avoir observé les différentes séries proposées et les résultats obtenus. Du point de vue des auteurs, et c'est un point de vue que l'on est enclin à partager, le milieu construit au cours du travail en équipe par les élèves ayant adopté une stratégie conduisant à la première méthode est a priori plus riche pour la validation que celui construit par les élèves ayant produit la deuxième méthode. Cependant, un élève de ce dernier groupe est capable, sur la série qui commence par *15* (résultat *195*), de faire très rapidement le lien entre sa méthode et la première méthode, alors que manifestement, les autres élèves ne comprennent pas.

« E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « *4* » ajouté, parce que la première méthode est « fois *10* » et après plus *45*.

Professeur : j'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler le premier nombre ×10 + 45, dans notre exemple : 15×10+45

E2 : le 19 est le cinquième nombre, et il a déjà le 4 ajouté (19 = 15 + 4). Alors il reste juste le 5, mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini ».

[6] Au sens ici des objets du monde sensible.

2.2. Différents types d'actions possibles

L'interprétation, par les auteurs, du phénomène observé concerne un travail de l'élève sur les signes en référence à Peirce. Celle que je propose ici est différente et dans une certaine mesure complémentaire. Elle s'appuie sur l'inventaire de différents types d'actions que les élèves peuvent mettre en œuvre pour obtenir le résultat dans la première étape (action sur des objets familiers avec des techniques disponibles) d'une part, et sur des hypothèses sur les méthodes auxquelles ces diverses actions sont susceptibles de conduire d'autre part. En d'autres mots, il s'agit de tenter de spécifier les différents milieux potentiels pour la validation.

Un premier type d'action consiste à *poser l'addition en colonne*. Si on le fait plusieurs fois, avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul *montre* que : le résultat se termine toujours par 5 ; l'on a toujours une retenue de 4 ; la somme des chiffres des dizaines est égale au premier nombre de la liste ; le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre. Même s'il est évident que rien ne garantit que ces régularités soient observées par les élèves mettant en œuvre cette manière de faire, on peut quand même considérer qu'elle est susceptible de créer un milieu qui favorise a priori le transfert entre les deux méthodes.

Un deuxième type d'action consiste à *faire des regroupements en utilisant les compléments à 10*, comme dans les exemples suivants :

- 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

16+24 = 40 ; 17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ;

Il reste 15 et 20 ; 4×40 + (20 + 15) = 160 + 35

- 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

16 + 24 =40 ; 17 + 23 = 40 ; 18 + 22 = 40 ; 19 + 21 = 40 ;

Il reste 20 et 25 ; 4×40 + (20 + 25) = 160 + 45

- 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

21 + 29 = 50 ; 22 + 28 = 50 ; 23 + 27 = 50 ; 24 + 26 = 50

Il reste 25 et 30 ; 4×50 + (25 + 30) = 200 + 55

Cette manière de faire peut favoriser le repérage de ce que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série, mais elle peut être un obstacle pour reconnaître le rôle particulier de 45.

Un troisième type d'action consiste à *utiliser la décomposition décimale* comme dans les exemples ci-dessous.

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

10+7,10+8,10+9, 20, 20+1, 20+2, 20+3, 20+4, 20+5, 20+6

3×10 +7×20 + (7 + 8 + 9 +1 + 2 + 3 +4 + 5 + 6) = 170 + 45

- 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29

20, 20+1, 20+2, 20+3, 20+4, 20+5, 20+6, 20+7, 20+8, 20+9

10×20 + (1+2+3+4+5+6+7+ 8+9) = 10×20 + 45

Ceci met en évidence le rôle particulier de 45 et fait apparaître, *si on regroupe les dizaines*, la forme générale $10n + 45$. Les séries commençant par un nombre de la forme $10 \times p$ peuvent favoriser dans ce cas l'apparition de l'utilisation de la décomposition à partir du premier nombre, présentée ci-dessous.

Un quatrième type d'action consiste à *décomposer les nombres à partir du premier nombre de la série,* comme dans l'exemple ci-dessous :

- 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

17, 17+1, 17+2 ; 17+3 ; 17+4 ; 17+5 ; 17+6 ; 17+8 ; 17+9

17 ×10 + (1+2+3+4+5+6+7+ 8+9) = 170 + 45

C'est ce qui conduit le plus naturellement à la forme générale $10 \times n + 45$, et permet de la valider simplement.

Un cinquième type d'actions possible consiste à *faire des regroupements en fonction de la position des nombres dans la liste* : on ajoute le premier nombre au dernier, le second à l'avant dernier et ainsi de suite. On trouve cinq fois le même résultat. Cette méthode est proche de la méthode attribuée à Gauss qui consiste à réécrire la suite des nombres dans l'ordre inverse et à ajouter les nombres correspondants deux par deux. On trouve cette fois dix fois le même résultat qui correspond à deux fois la somme. Ceci conduit à la formule $5(2 \times n+9)$.

Ce qui précède montre que le type d'actions mises en œuvre dans la première étape est susceptible de favoriser plus ou moins l'une des méthodes permettant de répondre rapidement. En outre, les connaissances mobilisées implicitement ou explicitement diffèrent d'une méthode à l'autre. Une pratique régulière du calcul réfléchi pourrait favoriser le deuxième et le troisième type d'action, tandis qu'un entraînement systématique au calcul en colonne pourrait favoriser le premier type. Le quatrième type mobiliserait plutôt le point de vue « successeur », tandis que le cinquième s'intéresse plutôt à la recherche d'un invariant. Pour avancer dans le problème, il est naturel de se poser la question de la généralisation à une suite comportant un nombre p donné à l'avance de termes consécutifs.

2.3. Une méthode qui se généralise

La méthode qui se généralise le plus efficacement est la méthode proposée par la majorité des élèves : le résultat est obtenu en appliquant la formule $10 \times n + 45$, où n est le premier terme. Elle se généralise en effet pour des séries de p nombres consécutifs, quel que soit p supérieur ou égal à 2, sous la forme $p \times n + S_{p-1}$, où n est le premier nombre de la série, p le nombre d'éléments de la série, et S_{p-1} la somme des $(p-1)$ premiers entiers non nuls.

Cette méthode ne mobilise pas explicitement la numération décimale de position et ne favorise pas particulièrement *a priori* le transfert entre les deux méthodes proposées par les élèves. Dans le cas d'une suite comportant dix nombres consécutifs, elle est moins rapide que la méthode qui consiste à ajouter 5 à droite du cinquième nombre de la liste. Autrement dit, on ne pourra pas convaincre les élèves dans un tel cas de la supériorité de cette méthode sur l'autre.

La proposition de remplacer 10 par 8, faite par les auteurs va disqualifier les méthodes s'appuyant sur la numération décimale de position puisqu'en effet, contrairement à ce qui se passait avec 10, on n'obtient pas toujours la même suite de nombres à un chiffre. Ceci permet de revenir sur les différentes méthodes, de dégager ce qui est spécifique avec 10. Il faut noter que ce sont les calculs effectifs qui permettent de confronter les résultats obtenus en appliquant une méthode adaptée à partir du travail fait avec les séries de dix nombres consécutifs. Le domaine des entiers avec ses méthodes élémentaires de calcul joue ici le rôle de *domaine de réalité* ou de *domaine d'expérience*[7] par rapport aux connaissances plus générales de type algébrique que l'on veut construire dans cette situation, ceci parce qu'à priori, ces calculs sont non problématiques pour les élèves concernés. À ce niveau, les nombres entiers, l'addition des entiers et les propriétés élémentaires de l'addition sont *naturalisés.*

2.4. Quelques conséquences didactiques

L'exemple présenté ci-dessus illustre plusieurs aspects que je résume ci-dessous.

Cet exemple est une nouvelle illustration de ce que la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (Vergnaud 1991)

Le second aspect est l'*importance des expériences faites par les sujets pendant la phase de la situation d'action dans l'évolution du milieu pour la validation*. Il met en évidence le fait que la situation de formulation ne suffise pas toujours à elle seule à rendre compte des actions des sujets, puisque des actions diverses, mobilisant des connaissances différentes, peuvent conduire à des formulations identiques. Une conséquence immédiate est qu'il n'y a pas, pendant la phase collective, un milieu commun pour la validation, et ceci même si toutes les productions écrites des élèves ont été prises en compte. Sur le plan méthodologique, ceci montre que, pour analyser les enjeux des situations de validation, il est nécessaire de recueillir d'autres traces. Sur le plan du déroulement même de la situation, cela indique que l'émergence d'une méthode générale doit être soumise à nouveau « au tribunal de l'expérience », afin de pouvoir être validée par chacun des sujets. Ceci pourrait expliquer un certain nombre de résultats montrant que les sujets n'abandonnent pas facilement leur mode de traitement des situations, même après qu'un travail collectif important ait été fait (Arsac & al. 1992).

La prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques, qui est au cœur de la théorie des situations didactiques de Brousseau, nécessite de considérer différents types de milieu (Bloch 2001) : *milieu épistémologique ; expérimental a priori ; confrontation à la contingence*, et de repenser la question de l'élève générique :

> « La situation didactique qui contient une phase collective de validation ne peut pas être modélisée par les interactions adidactiques d'un seul sujet générique : la modélisation doit incorporer les

[7] Ici, il ne s'agit plus d'objets sensibles, mais d'objets, de propriétés et de techniques, naturalisés, c'est-à-dire suffisamment familiers pour que les résultats des actions soient considérés comme fiables (on trouve un sens proche de cette notion de réalité chez Tarski, 1960). Ils permettent donc de valider les hypothèses ou les prévisions et constituent donc en ce sens un *domaine d'expérience* pour le sujet, dans un sens voisin de Boero (2002), à qui j'emprunte, en la détournant un peu, l'expression.

possibles interactions autour des situations adidactiques d'autres sujets génériques présents dans la classe. » (Barallobres & Giroux op. cit.)

Concernant la gestion en classe des situations de validation, la présence de plusieurs milieux potentiels dans la phase de validation est l'un des facteurs qui rend délicats les débats. C'est un élément qui souligne l'importance des connaissances mobilisées par les sujets pendant l'action, dans l'élaboration des conjectures et des preuves. Ceci fournit des indicateurs des connaissances que le professeur doit mobiliser pour piloter les situations de ce type, qui peuvent lui faire rencontrer son ignorance (Conne 1999) et rend tout à fait clair le fait que l'analyse fine des interactions ne puisse pas faire l'économie d'une analyse approfondie de l'épistémologie des savoirs en jeu, au-delà des phénomènes de transposition didactique.

3) LES EQUIPES DU THEME 1[8]

Les quatre équipes réunies dans ce thème ont un objectif commun qui s'inscrit explicitement dans le partenariat avec l'INRP : concevoir et élaborer des ressources pour les enseignants dans la perspective d'un développement significatif de la résolution de problèmes de recherche comme moteur des apprentissages mathématiques en classe. Cependant les points d'appui diffèrent pour chacune des équipes, et les collaborations sont encore pour l'essentiel en devenir. C'est l'un des objectifs de ces journées d'études que de dégager les perspectives de collaboration pour la suite du travail.

L'équipe lyonnaise *INRP-IUFM & IREM de Lyon – LIRDHIST-UCBL – Lyon 1 (Responsable : Viviane Durand-Guerrier)* pose explicitement la question de *La dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématiques***.** En retravaillant sur des problèmes de recherche classiques, ou moins classiques, cette équipe se propose d'élaborer des ressources permettant aux enseignants de mettre en œuvre dans le cours ordinaire de la classe des problèmes de recherche en mettant en évidence deux points essentiels. Le premier vise à rendre disponibles les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique pour le développement de compétences heuristiques et de savoirs de type logico - mathématique. Le deuxième point consiste à rendre visibles les connaissances mathématiques potentiellement travaillées en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement primaire et secondaire, éventuellement supérieur. Une des hypothèses forte de ce travail est que ces deux aspects sont étroitement imbriqués. Ce groupe bénéficie d'une longue expertise développée au sein de l'IREM de Lyon autour des problèmes de recherche et d'une pratique soutenue de l'innovation *Problème ouvert* à tous les niveaux du cursus (Arsac & al 1991, Aldon & al. 1997), et s'appuie sur les travaux de recherche conduits au sein du LIRDHIST sur la dimension expérimentale en mathématiques (Dias & Durand-Guerrier op.cit.).

L'équipe *INRP, IREM et IUFM des Pays de Loire, Centre François Viète (Nantes) et Centre de Recherche en Éducation Nantais (Responsables : Évelyne Barbin & Magali Hersant)* associe didactique des mathématiques et histoire des mathématiques dans un projet intitulé : *Écrire–Chercher–Concevoir–Échanger des mathématiques***.** Les membres de cette équipe se proposent de développer l'enseignement des mathématiques par les problèmes à l'articulation lycée – université ; d'analyser et de confronter des écrits de résolution de problèmes produits par des élèves, des étudiants et des mathématiciens ; de conjuguer des approches épistémologique, didactique et historique sur la recherche et l'écriture de résolution de problèmes (Barbin 2001). Les travaux sont conduits en appui sur : les narrations de recherche ; les dialogues épistolaires entre mathématiciens ; l'étude de preuves historiques ; étude du jeu entre local et global ; la multiplicité des points de vue. Ce groupe bénéficie de l'expérience développée dans l'équipe d'histoire des mathématiques, et au sein de la commission Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques[9] et s'ouvre à la collaboration avec les chercheurs en didactique des mathématiques.

L'équipe qui associe *INRP et IREM de Montpellier (Responsables : Marie-Claire Combes & Mireille Sauter)* développe un projet de *Résolution collaborative de problèmes ouverts,* visant à produire des documents d'aide à la constitution d'une communauté de pratique d'enseignants du premier et du second degré sur la résolution de problèmes ouverts. Les travaux, engagés depuis plusieurs années, s'appuient sur : les *narrations de recherche ; la résolution collaborative à distance ; le développement de communautés de pratiques ;*

[8] Un descriptif des équipes se trouve sur le site EducMath à l'adresse suivante : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/

[9] Voir le site du colloque « Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements », Colloque inter-IREM-INRP, 16e Colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand, 19-20 mai 2006 http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/histoire/Sommaire.htm

l'élaboration d'outils d'analyse pour repérer les invariants et les spécificités d'un travail expérimental ; l'étude de l'apport des outils informatiques. Ce projet bénéficie d'une expérience ancienne sur les narrations de recherche et s'inscrit dans la continuité du développement d'un réseau de professeurs mettant en œuvre des problèmes de recherche en classe dans le cadre de collaborations à distance (Combes & al. 2004, Sauter & Saumade 2003).

*L'équipe ERMEL, INRP (Responsable : Jacques Douaire), Ressources en mathématiques pour l'école et le collège***,** se propose de développer des dispositifs d'enseignement pour l'école élémentaire et le collège s'appuyant sur la résolution de problèmes : au niveau de l'*Articulation école – collège ;* en prenant en compte *l'utilisation des outils informatiques* ; par la mise en perspective *avec les travaux antérieurs ;* par *l'observation de l'activité des élèves* et en se centrant sur *l'étude des phases de validation.* Les membres de cette équipe bénéficient de l'expertise développée dans le cadre des recherches antérieures qui ont permis d'expliciter les conditions d'un apprentissage mathématique à l'école élémentaire et au début du collège privilégiant une articulation sur le long terme des savoirs enseignés (ERMEL 1999, 2006).

4) QUELQUES QUESTIONS SUR LA CONCEPTION DE RESSOURCES

Je voudrais évoquer rapidement pour conclure quelques-unes des questions que soulève le travail de conception de ressources dans le cadre de ce thème, questions qui seront au cœur du travail à venir, de manière plus ou moins différenciée suivant les équipes.

La question de la place et du rôle des TICE en situation de résolution du problème renvoie à des questions de nature épistémologique qui ne pourront pas être évitées. La question du public auquel on s'adresse – enseignants du primaire ; du secondaire ; du supérieur – nous renvoie sur la question du niveau de complexité mathématique qu'il faut ou que l'on peut aborder dans les documents. La question de l'équilibre entre *mathématiques, histoire, épistémologie et didactique* dans l'élaboration des ressources et du choix des concepts didactiques, historiques, épistémologiques à introduire, conduit à se poser une nouvelle fois la question de savoir si on peut faire l'économie d'une formation à la recherche pour les professeurs. Enfin, en lien avec ces questions, se posent celles, plus concrètes, sur la nature des supports et sur les articulations entre les supports (textes, vidéo, cédérom, accès à des ressources en ligne, aides en ligne) ainsi que sur le suivi de l'utilisation des ressources diffusées.

RÉFÉRENCES

ALDON G. & al. (1997), *Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques*, IREM de Lyon.

ARSAC G. (1987), L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8/3, 267-312

ARSAC G. , GERMAIN G., MANTE M. (1991), *Problème ouvert et situation problème*, IREM de Lyon.

ARSAC G. & al. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon et IREM de Lyon.

ARTIGUE M. (1991), Epistémologie et Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 241-285.

BARALLOBRES G., GIROUX J. (à paraître), Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective, in *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.

BARBIN E. (2001), La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in E. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, *Produire et lire des textes de démonstration*, , Paris : Ellipse, 31-61.

BLOCH I. (2001), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage.

BOERO P. (2002), Entrer dans la culture des théorèmes, in Assude T. & Grugeon B. (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Année 2000, IREM Paris 7.

BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques*, n°427, 34-36.

COMBES M.-C., SAUMADE H., SAUTER M., THERET D. (2004), Cinq classes au pays de 9 et 11, *Bulletin de l'APMEP* n° 455, p. 82-846.

CONNE F. (1999), Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal.

DIAS T. (2004), *Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques*. Mémoire de DEA de l'Université Lyon 1.

DIAS T. & DURAND-GUERRIER V. (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, 60, 61-78.

DORIER J.-L. (2000), *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions.* Les cahiers du laboratoire Leibniz n°12, http://www.leibniz-imag.frLesCahiers.

DURAND-GUERRIER V. (à paraître), Les enjeux épistémologiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques à l'école élémentaire, in *Actes du colloque XXXIII^e colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres, Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?*, Dourdan, 8-10 juin 2006.

ERMEL (1999), *Vrai, faux, on en débat*, INRP.

ERMEL (2006), *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*, Hatier.

PERRIN D. (à paraître), L'expérimentation en mathématiques : quelques exemples, in *Actes du XXXIII^e Colloque européen des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres, Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école* **?,** Dourdan**,** 8-10 juin 2006.

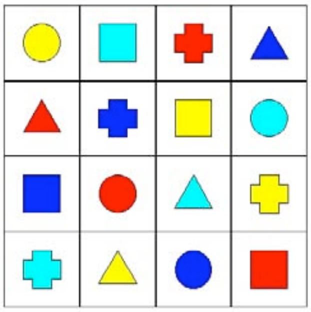
SAUTER M., SAUMADE H (2003), Résolution collaborative à distance de problèmes ouverts (classes en réseau), *Colloque ITEM* (http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/ITEM2003/fr).

TARSKI A. (1960), *Introduction à la logique*, Paris-Louvain.

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 133-169.

Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire

*Claire Margolinas *, Alain Mercier * et Sophie René de Cotret ***
** INRP et UMR ADEF, ** Univ. de Montréal, professeure invitée INRP, UMR ADEF*



Notre exposé vise à introduire les questions de développement curriculaires, dans l'enseignement obligatoire, qui sont sous-jacentes aux démarches de recherche de développement de plusieurs groupes de travail soutenus par l'INRP (DéMathE[10] et CII Didactique[11]).

La question abordée par l'exposé est : *quelle analyse des usages de ces résultats dans la classe et quelle analyse des apprentissages construits ?*

Dans un premier temps, nous situerons la problématique du développement curriculaire en nous interrogeant sur les liens, dans nos travaux, entre *recherche* et *développement*. Nous pointerons ensuite certains résultats de recherche en didactique des mathématiques, relatifs aux savoirs mathématiques, ce qui nous permettra d'aborder la question des *raisons d'être des objets d'enseignement,* organisations mathématiques et organisations sociales à mathématiques, ce qui conduit à considérer la part de l'expérience dans le cours de mathématiques. Nous nous appuierons alors sur un exemple mathématique : la transparence des questions de *combinatoire* dans le curriculum officiel et sur une difficulté de diffusion des travaux didactiques qui tient à la différence entre *problème* et *situation*. Nous nous intéresserons ensuite au *rôle des documents dans le travail du professeur dans les classes ordinaires*. Les travaux de développement, s'ils se destinent aux professeurs, doivent en effet prendre en compte les conditions effectives du travail du professeur. En conclusion, nous nous interrogerons enfin sur *les nouveaux équilibres à constituer entre la recherche et l'étude*.

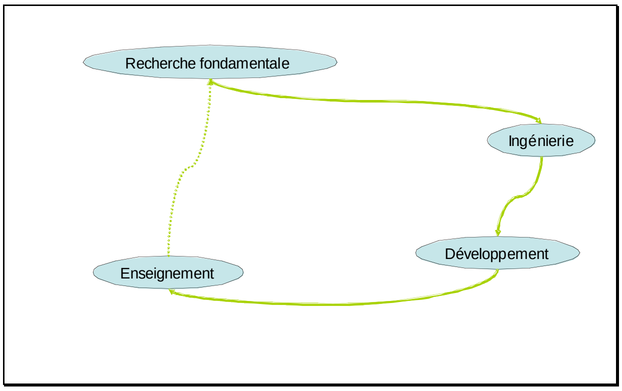
1) RECHERCHES ET DÉVELOPPEMENTS

Les recherches conduites à l'INRP et qui sont l'objet de la rencontre sont des recherches de développement. Elles associent des chercheurs universitaires et des professeurs qui consacrent une part de leur temps à ce travail. Leurs résultats sont orientés vers la *production de ressources* pour les professeurs et/ou les formateurs. Nous allons donc, dans un premier temps, nous interroger sur ce qui peut caractériser voire fonder cette association, qui interroge les relations entre recherche fondamentale, ingénierie, développement et enseignement.

Dans une vision que nous qualifierons ici de « classique » on imagine – idéalement – une sorte de chaîne descendante de la recherche fondamentale à l'ingénierie, au développement et à l'enseignement qui, pour sa part, fournit en retour une partie des questions pour la recherche fondamentale. Sans que ce schéma se trouve jamais écrit tel quel, il semble sous-jacent à certaines conceptions des relations entre recherche et enseignement, il n'y a qu'à penser aux discours sur la « théorie », la « pratique » et « l'articulation théorie-pratique » pour s'en convaincre.

---

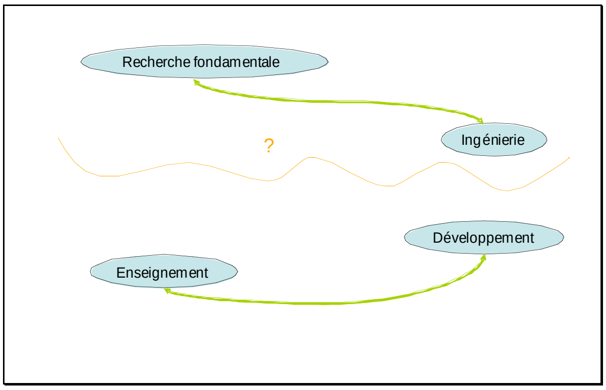
[10] *D*éveloppement des *Math*ématiques à l'*E*cole
[11] Commission Inter IREM Didactique



Un schéma classique

Nous ne partageons pas cette vision, qui reflète une conception plutôt simpliste à la fois de l'enseignement et de la recherche. En effet, la recherche fondamentale entretient avec l'ingénierie des relations réciproques : l'ingénierie n'y joue pas le rôle d'une pratique idéale, mais permet de comprendre certaines conditions de possibilité ou d'existence de situations didactiques. C'est dans ce contexte que Brousseau (1998) insiste sur le fait que les ingénieries qu'il a développées ne sont ni transposables ni destinées à être transposées dans les classes ordinaires, c'est pour cela que Chevallard n'a jamais rien publié de ses travaux d'ingénierie.

Par ailleurs, enseigner nécessite une composante de développement : ni le système éducatif ni les professeurs ne peuvent concevoir le travail d'enseignement autrement que dans cette perspective, d'autant que les conditions du travail scolaire ne cessent de se transformer, de l'intérieur comme de l'extérieur. La question qui se pose est donc celle des relations entre ces deux pôles : recherche fondamentale/ingénierie d'une part, enseignement/développement, de l'autre. C'est la problématique de notre exposé.

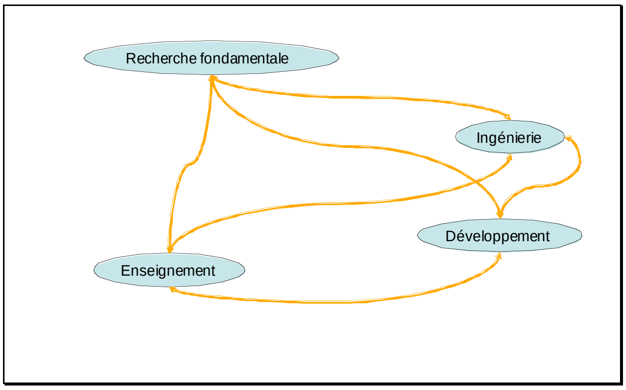


Un schéma des fonctions

Questionnons un instant les différentes relations représentées sur ce schéma. Nous avons déjà évoqué celles de la recherche fondamentale et de l'ingénierie et celle de l'enseignement et du développement. Dans le schéma « classique », l'ingénierie et le développement sont parfois vues comme ayant des relations naturelles, sans doute parce que l'ingénierie conduit à construire des situations de classe et à les réaliser dans des classes effectives, laissant ainsi penser que ce travail pourrait contribuer très directement au développement. Par ailleurs, le développement, ou l'innovation, se considère souvent comme une sorte de « poste avancé » du système éducatif, qui pourrait se rapprocher d'une pratique plus contrôlée, une des caractéristiques de l'ingénierie. La relation entre ingénierie et enseignement a donc parfois été vue, dans une perspective descendante, comme une relation directe.

Ce que nous voulons questionner ici correspondrait aux deux dernières relations, entre recherche fondamentale et développement, d'une part, entre recherche fondamentale et enseignement, d'autre part. Nous allons nous référer une nouvelle fois aux travaux des chercheurs et aux professeurs qui ont travaillé en collaboration avec Guy Brousseau, parce qu'ils fournissent un cas paradigmatique. Les recherches menées dans ce cadre ont conduit d'une part au développement de la théorie des situations didactiques, un développement conceptuel qui détermine, dans le cadre des processus complémentaires de dévolution et d'institutionnalisation, les situations correspondant aux fonctions du savoir mathématique : action, formulation, preuve. Elles ont conduit également, pour chaque recherche singulière, au travail épistémologique, dans l'optique – souvent mal comprise – des situations fondamentales, qui permet de déterminer à la fois les relations nécessaires entre les concepts et les situations caractéristiques ou fondamentales qui y sont associées. Ce sont ces travaux qui ont nécessité la construction de ce que l'on appelle *les ingénieries*, toujours très longues et jamais ponctuelles, qui ont concerné la majeure partie de l'enseignement obligatoire. Cette « raison d'être » des constructions d'ingénierie a très peu diffusé, même dans le monde des chercheurs, pour ne pas parler de l'enseignement, ni même du développement. Or, si les ingénieries sont des organisations singulières, adaptées à la fois aux intérêts de la recherche à un moment donné, mais aussi aux conditions effectives de réalisation dans le cadre scolaire, ces travaux, dont le caractère est à la fois épistémologique et curriculaire ne sont pas a priori limités par les conditions spécifiques qui leur ont donné naissance.

Il y a pour nous un enjeu fort à comprendre pourquoi et comment cet aspect des recherches fondamentales – issu de différentes recherches – pourrait connaître une diffusion et dans quelles conditions.



Questionnement des relations

2) RAISONS D'ÊTRE DES OBJETS MATHÉMATIQUES

Pour aller plus loin, il nous faut introduire cette idée: les savoirs ne sont pas tous de même nature et on peut les distinguer selon le travail de leur production. Ce qui fait qu'on ne peut pas imaginer enseigner de la même manière deux savoirs de natures différentes et qu'il devient nécessaire d'inventer des manières d'enseigner pouvant garantir certaines propriétés des savoirs dont on vise la transmission. A la suite des travaux de Brousseau (1998), nous pouvons dire que les savoirs s'organisent en plusieurs types, et qu'ils sont constitués :

de *théories* ou discours sur le monde de l'expérience,
d' *algorithmes* ou règles d'action dans le monde de l'expérience,
de *routines* ou manières d'agir dans le monde de l'expérience,
d' *expérience* ou connaissances dans le monde de l'expérience.

Chaque type est produit à partir d'un type précédent : la problématisation des *faits* d'expérience produit, par mathématisation, des *résultats* qui se décrivent dans des organisations théoriques, les résultats sont *démontrés* en théorie (sous la condition de vérité des axiomes et des théorèmes précédemment connus) ; l'usage systématique des *résultats* théoriques produit, par démathématisation, des *outils* qui se décrivent comme algorithmes, les outils sont *vérifiés* par ce qu'ils réalisent en pratique (sous les conditions données par la théorie) ; l'emploi usuel des *outils* algorithmiques produit, par désinstitutionnalisation, des *dispositifs* qui appellent des routines ou pratiques, les dispositifs sont *validés* par ce qu'ils permettent de faire (dans des conditions pratiques diverses, sous le contrôle de la contingence) ; la mise en oeuvre des *dispositifs* produit, par réinstitutionnalisation, des *faits* qui sont issus de l'expérience, et des connaissances, les faits sont *prouvés* expérimentalement (dans le domaine de réalité dont une institution donnée traite).

Tout enseignement réalise un équilibre dans cet espace, qui permet donc de décrire les choix de transposition. Mais enseigner des problèmes, des théories, des algorithmes, ou des routines ne se fait pas de la même manière. *C'est sans doute cette nécessaire variabilité de l'enseignement attendu qui fait le principal problème professionnel des professeurs de mathématiques*. On peut bien sûr essayer d'enseigner des théories sans les problèmes qui les motivent, des algorithmes qui ne sont pas les résultats de l'usage de théories, etc., mais...

- ce n'est pas très motivant, pour le professeur comme pour les élèves, puisque le savoir enseigné n'a pas de motif ;
- c'est coûteux en efforts parce que la composition des gestes élémentaires (dont l'exécution

n'est pas sous le contrôle d'une évaluation (théorique, démonstration des résultats, algorithmique, vérification des outils, routinière, validation des dispositifs, ou d'expérience, preuve des faits) appartenant à l'agent, augmente rapidement la complexité de l'action ;

- c'est donc long et pénible pour les élèves, qui ne peuvent pas contrôler leur action et corriger leurs erreurs (Brousseau l'avait déjà dit en, 1973, à propos de la multiplication).

Il faudrait donc enseigner des savoirs qui tiennent solidairement à ces quatre dimensions routines, expérience, théories, algorithmes ; et on peut montrer en effet que tout enseignement stable propose un parcours organisé d'une telle organisation mathématique, l'enjeu de l'enseignement et la culture des élèves déterminant les points de départ et d'arrivée du parcours. Mais nous savons que la difficulté d'un enseignement organisant l'ensemble du parcours n'est pas seulement épistémologique, elle tient aussi à la nécessité de *changer d'activité de référence* chaque fois que l'on change de niveau dans le parcours. C'est ce que déclare par exemple la Théorie des Situations Didactiques (TSD), qui propose trois étapes, pour passer du niveau de l'*action dans un milieu* à la *production de représentations* puis, à la *validation des résultats* obtenus, pour produire des éléments de théorie relatifs à l'action. Mais bien d'autres mouvements sont nécessaires, qui nécessitent peut-être des étapes que la TSD ne nomme pas. Le travail épistémologique à l'usage de l'enseignement n'est pas terminé.

Le mathématicien Henri Lebesgue (1935, réédition 1975), qui disait aux futurs professeurs que « un nombre est le compte rendu complet de l'action qui le produit [...] le reste est métaphysique » déclarait en conclusion de son cours sur « La mesure des grandeurs » que l'étude des mathématiques élémentaires était essentielle pour leur enseignement : cette étude permettait par exemple de comprendre qu'un nombre est le résultat d'une expérience particulière sur une grandeur. Il travaillait pour que peut-être, les professeurs au fait de ce qu'est la mesure des grandeurs envisagent leur enseignement sur les systèmes de nombres comme portant sur les manières de *produire des mesures* par un algorithme vérifié ou des dispositifs validés, selon les cas, et *d'en rendre compte par un nombre,* que l'on considérerait alors comme le compte rendu d'une *expérience de mesure*.

Le groupe DéMathE a pris ce problème comme point de départ du travail de développement de son groupe, dans le cas du geste mathématique le plus élémentaire, l'*énumération* des objets d'une collection, comme geste préalable à (et comme technique de) dénombrement de cette collection. Le travail de développement, dans ce cas, doit répondre aux besoins des professeurs en leur fournissant des savoirs et des ressources, sachant que les professeurs n'auront pas de demandes tant que ceux-ci ne seront pas disponibles…

Dans le cas des travaux conduits dans le cadre de la CII Didactique, qui mobilise dans un travail commun des enseignants-chercheurs, des formateurs d'IUFM et des professeurs, dans une dizaine d'IREM, le travail est conduit par les didacticiens à la fois avec les professeurs et les formateurs. Le problème est donc pris par un autre bout, supposant en quelque sorte que le travail mathématique permettra aux professeurs de transformer les organisations pédagogiques (Fluckiger & Mercier 2002, Matheron & Salin 2002) parce que nous faisons cette hypothèse : *les professeurs ont plus de liberté de décision d'organisation du travail de leur classe, sont plus disponibles à l'observation de leurs élèves, sont plus ouverts à leurs idées, s'ils sont assurés des savoirs qu'ils cherchent à transmettre*. Notre question commune pourrait donc être formulée ainsi: Dans le format d'enseignement devenu classique aujourd'hui :

[activité/synthèse/exercices/évaluation]

quel est l'avenir d'une activité proposée aux élèves en introduction d'une leçon ? Fera-t-elle expérience, produira-t-elle des faits ? Quels résultats sont attendus de la synthèse qui rend compte de son étude, dans quel cadre théorique seront-ils inscrits ? Comment le professeur peut-il gérer cet avenir ?

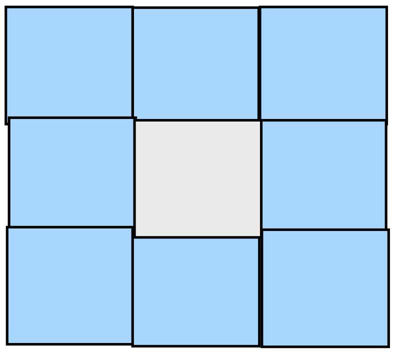
3) SITUATION N'EST PAS PROBLÈME

Pour commencer de répondre, une première question est utile : Sur quoi l'activité proposée ouvre-t-elle ? Sur quoi devrait-elle ouvrir ? Un problème ? Ou... une situation ? Les débats entre nous n'ont pas décidé ; cependant, nous avons quelques éléments permettant d'avancer, ils tiennent à l'analyse des thèmes et des valeurs portés par un projet de leçon.

Quel est l'enjeu actuel de l'*activité*, est-elle robuste?
Quels sont ses avenirs possibles ?
Ouvre-t-elle sur une question *cruciale*?
Ouvre-t-elle sur un thème d'étude dont elle est *génératrice*?
Ouvre-t-elle sur une théorie dont elle est *fondamentale*?

Permet-elle un ou plusieurs *parcours* dans une organisation de savoirs ?

Nous avons, dans les équipes de la CII Didactique, des travaux qui vont dans ce sens et permettent de répondre positivement à ces questions, comme par exemple ceux de l'équipe de Bordeaux, qui prend l'idée de Lebesgue au sérieux et développe le *calcul de l'aire du rectangle* comme situation fondamentale des calculs de produits, de nombres entiers dans l'enseignement élémentaire, de fractions et de décimaux ensuite. Ce travail conduit chaque fois à des éléments théoriques, puis à la construction d'un algorithme et, enfin, à la mise en place d'un dispositif permettant d'asseoir des routines de calcul sur un répertoire connu. Mais, pour être plus explicite sur les difficultés de notre entreprise, qui n'en est qu'à ses débuts, on a préféré ici montrer un cas qui fait problème plutôt qu'une réponse assurée en partant donc d'une proposition d'activité telle qu'on en trouve régulièrement dans les ouvrages d'enseignement du Collège. « Déterminer le nombre de carrés bleus nécessaires pour border, comme sur le dessin ci-dessous, avec des carreaux carrés entiers de côté 1, un miroir central carré de côté : un (le cas représenté), quatre, sept, douze... n'importe quelle taille. »



La figure représente le cas d'un miroir central de côté 1.

Cette activité définit-elle un *problème*, permet-elle de mettre en place une *situation* ? Qu'y a-t-il à en apprendre, du point de vue d'un élève ? Un élève se pose toujours cette question, elle est de sa responsabilité, et parfois il la pose au professeur : « A quoi ça sert ? » ou : « On l'aura à l'interro ? », demande-t-il, lorsque l'activité ne permet pas de saisir un enjeu d'enseignement possible. Le professeur qui se prépare à l'introduire dans sa classe se demande : « Quel est l'enjeu actuel de cette activité, est-elle robuste (produit-elle facilement les effets attendus, ces effets sont-ils connus, peut-on les anticiper ?) » Cette « activité » permet sans aucun doute que les élèves s'engagent dans un comptage et trouvent 8 de contour pour un centre de côté 1, 12 de contour pour un centre de côté 2, 16 de contour pour un centre de côté 3, etc. Des professeurs la proposeront donc. Mais ensuite ? Nous devons pour le savoir conduire ce que Assude et al. (soumis) nomment *une analyse a priori ascendante de la transposition*, c'est-à-dire remonter aux mathématiques que cette activité, considérée comme évocatrice d'un problème, rend possibles en principe. Mais pour que ces mathématiques soient produites, par les élèves, il faudra que le professeur *organise l'étude de ces faits* (on constate que le cadre est constitué de 8, 12, 16 carreaux pour un centre carré de 1, 2, 3 de côté). Et pour cela, il faudra que le professeur conduise les élèves à *changer d'objet* de travail. Par exemple, en disposant en *tableau de valeurs* les tailles des miroirs carrés et celles des contours, et en associant les procédures de calcul venues de la décomposition du contour en éléments rectilignes. Le professeur doit anticiper cela, et être persuadé de cette nécessité, pour prendre rapidement cette décision et arrêter le travail de comptage sur des exemples « à l'infini ».

Côté	**Miroir**	**Contour**	**Calcul 1**	**Calcul 2**	**Calcul 3**	**C+M**
1	**1**	**8**	**4x1+4**	**4x(1+1)**	**2x3+2x1**	**9**
2	**4**	**12**	**4x2+4**	**4x(2+1)**	**2x4+2x2**	**16**
3	**9**	**16**	**4x3+4**	**4x(3+1)**	**2x(3+2)+2x3**	**25**
4	**16[=4^2]**	**20**	**4x4+4**	**4x(4+1)**	**2x(4+2)+2x4**	**36**
?	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**

Selon le point atteint par les élèves, les procédures seront plus ou moins diverses et pourront être enrichies. Ainsi, la poursuite de la colonne M qui représente « l'aire des miroirs carrés de côté entier » permet de remarquer que « ce sont des nombres au carré » et qu'on aurait dû y penser, puisque les miroirs bordés sont... des carrés. On peut remarquer alors que « la somme (miroir M plus contour C) est aussi un carré » et qu'à cela aussi on aurait dû penser, notre connaissance théorique des carrés nous l'aurait dit, si nous y avions fait appel au lieu d'entrer dans le calcul. Un travail systématique du tableau à l'aide d'un tableur engage plus sûrement un tel travail de mise à distance, les calculs exploratoires étant peu coûteux. C'est important de savoir que le professeur y gagne en robustesse, car l'appui sur les remarques des élèves rend la situation moins robuste. On peut obtenir d'autres remarques encore : « Le contour est un multiple de 4 » est un constat possible.

Il faudra que le professeur organise l'étude de certains de ces faits, qui cette fois sont relatifs au tableau de nombres. Pour cela, il faut un dispositif *d'enregistrement* et de *mise à l'étude* des faits constatés : le tableau. La recherche d'une méthode de calcul pour un terme général donne alors des « formules », dans les colonnes associées : 4x1+4 puis 4x2+4 et 4x3+4 qui correspondent à l'énoncé, « Quatre fois le côté plus quatre pour les sommets » sont des formules non algébriques, mais elles ont la même fonction descriptive de même que, dans un premier rapport à l'algébrique, ce que Serfati (2005) nomme forme *rhétorique* parce qu'elle peut se dire : « 4 fois c plus 4s », où c est la longueur d'un côté tandis que s est un sommet, etc. Mais ces formules ne sont pas « calculables ». Plusieurs formules générales peuvent alors être imaginées par des élèves de 4^{e} ou de fin de 5^{e}, selon leur méthode de calcul, qui rend compte du découpage du contour dont elle est de fait, comme le dit Lebesgue une description : 4n+4 (les côtés du carré et les coins) ou 2(n+2)+2n (deux longueurs parallèles et deux côtés) ou 4(n+1) (quatre longueurs égales imbriquées) ou 4(n+2)-4, (quatre longueurs complètes moins les recouvrements) ou encore $(n+2)^2-n^2$ (par différence des aires, une formule moins probable).

On peut alors chercher à montrer l'équivalence des procédés de description et de calcul, et pour cela entrer dans un travail algébrique c'est-à-dire, chercher à transformer une formule en une autre par une manipulation formelle réglée. Mais cela montre que l'activité n'était qu'un prétexte et que *l'enjeu n'était pas la recherche d'une réponse au problème posé* ! Il faut alors l'annoncer et montrer que le problème rencontré correspond à un phénomène général, qui va nécessiter un travail sur les transformations algébriques légitimes, *les formules devenant donc objets d'étude dans ce second niveau de changement d'objet.*

Le travail des *tableaux de nombres* est donc l'un des avenirs de cette activité. Il ouvre sur les relations fonctionnelles. Le travail *algébrique des formules désignant des programmes de calcul* est donc un des avenirs de l'activité, il ouvre sur l'équivalence des formules, envisagées comme programmes de calcul. Mais avant tout, *quel est l'avenir du problème lui- même* ? Comment un mathématicien le traiterait-il ? Sans doute, en cherchant quel est le problème général dont le problème d'encadrement du miroir relève. Imaginons que sa généralité soit obtenue en passant en dimension supérieure. Le travail se poursuivrait donc en direction de l'encadrement... des cubes.

Il faudrait par exemple $6n^2+12n+8$ cubes, pour border les six faces par n^2 cubes, les 12 arêtes par n cubes et les 8 sommets par un cube, pour un cube d'arête n. Mais la généralisation de cette formule à d'autres dimensions suppose une description de l'hypercube de dimension 4 par exemple qui donne le nombre des éléments qui « l'encadrent ». Or, ces éléments sont eux-mêmes des hypercubes de dimension 4 bordant respectivement les éléments de dimension 3 par n^3 hypercubes chacun, ceux de dimension 2 par n^2 hypercubes chacun, ceux de dimension 1 par n hypercubes chacun et les sommets par un hypercube chacun... et ainsi de suite pour les dimensions suivantes. Nous ne disposons pas d'une description permettant de les énumérer puis, de les dénombrer ! Pourtant, puisque nous cherchons ici à faire le tour du problème pour en tester la généralité, nous pouvons voir qu'une des formules imaginées donne des résultats : considérons que le cadre à carreler est la différence des aires du carré complet et de son intérieur :

ainsi, $4n+4=(n+2)^2-n^2$

de même, $6n^2+12n+8=(n+2)^3-n^3$

et bien sûr, par une généralisation

(aisée à démontrer mais cette fois le calcul est en sens inverse),

$$(n+2)^4-n^4=8n^3+24n^2+32n+16$$

Par retour du rapport de système à modèle, la formule permet de savoir que l'hypercube de dimension 4 est bordé de 8 faces cubiques, 24 faces carrées, 32 arêtes, 16 sommets, car nous avons découvert une *fonction génératrice* des éléments constitutifs de l'hypercube. Ainsi, on considère que $8n^3+24n^2+32n+16$ est un polynôme qui décrit complètement l'hypercube si l'on admet maintenant que n^3 désigne les bords de dimension 3 d'un hypercube, n^2 les bords de dimension 2, etc. Cette formule donne même le résultat en dimension 1 : (n+2)-n=2 et en effet, une ligne de cubes a deux bouts, quelle que soit sa longueur n ! L'avenir de notre problème se trouve maintenant en combinatoire, plus du côté de la méthode (ou théorie) combinatoire de Polya que du côté des programmes du Collège. Mais l'analyse faite nous donne une idée du type théorique dont il relève. Elle nous montre aussi, et cela nous confirme dans notre hypothèse précédente, que ce que l'on peut apprendre de la résolution d'un problème tient aux outils mathématiques que cette résolution mobilise. Ici, on apprend *ce qu'est une fonction génératrice* dans un problème de dénombrement, c'est un savoir de combinatoire.

Ce qui s'est passé n'est pas un fait isolé. L'analyse du Puzzle de Carroll est proposée en 3e dans de nombreux ouvrages pour l'enseignement, or Nin (1992) montre que l'on débouche sur une équation de Pell-Fermat qui a donné lieu en son temps à un joli problème de préparation à l'agrégation interne… Mais notre intérêt de professeurs n'est pas dans le travail mathématique de résolution des problèmes dans leur généralité et de construction des théories nécessaires : faire des mathématiques c'est « résoudre des problèmes dans toute leur généralité et pour cela produire les théories les plus larges possible », ce n'est pas notre objet car *le niveau théorique est, dans le cas de l'enseignement, donné par avance*.

L'acculturation aux mathématiques dans l'enseignement obligatoire est donc limitée aux premiers éléments de théorie qu'il est possible de produire pour attaquer quelques classes de problèmes bien particuliers. Pourtant, comme nous l'avons éprouvé dans le cas de la résolution du problème général correspondant à l'activité initiale, cette activité n'est mathématiquement motivée que si elle a un avenir et si son étude peut se poursuivre par des éléments théoriques, si elle produit des résultats qui donneront des outils mathématiques efficaces, utilisables dans de nombreuses occasions pour devenir routiniers, etc. Le niveau théorique auquel nous nous arrêterons, au Collège, est relatif aux *tableaux de nombres* (comme premières mises en forme de relations numériques) et aux *formules* (comme descriptions de procédures de calcul). La reconnaissance de la dimension mathématique de ces objets appartient à *l'épistémologie* savante ou scolaire :

- Savante : Serfati (2005) montre que les formules sont des descriptions de procédures ;
- Scolaire : Erdogan (2006, thèse dirigée par Pierre Duchet et Alain Mercier) montre (comme Schneider, 2006) que les tableaux sont un premier contact avec les fonctions, en combinatoire.

Les outils d'attaque de la question initiale font son intérêt : elle définit une des tâches qui se résolvent à l'aide de ces outils et peut conduire à des routines d'attaque numérique (outillées par des moyens de calcul) de certains problèmes. Soit, par une technique de *mise en tableau* des nombres en relation (dès la 6e, en continuité avec le travail sur les tableaux de proportionnalité mais aussi en rupture avec le raisonnement proportionnel). Soit, par une technique de *mise en formule* des nombres en relation (dès la 5e, en continuité avec le travail sur les tableaux et au-delà avec les représentations graphiques de tableaux puis de relations données par des formules à une variable comme moyen de classification des types de relations numériques par le degré de la formule). Tableaux, puis fonctions et formules sont bien les outils premiers de la *combinatoire*.

Le programme de travail qui peut être ouvert par l'activité étudiée appartient donc à ce domaine mathématique, qui peut *fonder la production de deux outils* mathématiques qui sont l'enjeu des programmes du Collège. Mais ce domaine n'est pas cité dans les programmes, les outils ainsi produits devront donc appartenir *implicitement seulement* à la combinatoire et bientôt ils devront être transférés explicitement dans un autre domaine mathématique, le *cadre* de l'analyse (au sens de Douady 1986). Ce n'est pas pour le Collège. La capacité de ces outils à modéliser des problèmes géométriques devra suffire à en motiver le développement, dans le curriculum réel, en 4e et 3e. C'est ce qu'explore le travail du groupe de l'IREM d'Aix-Marseille. Mais les autres groupes de la CII ne font pas moins, même si on ne peut ici rendre compte de ce que chacun a entrepris.

L'activité « encadrement du miroir » doit donc être pensée non pas comme ouvrant sur un problème, mais comme permettant de *définir une situation didactique initiale, génératrice d'une étude à long terme, relative aux usages puis aux propriétés d'un outil mathématique* (le travail des relations numériques par tableaux puis par formules), la dimension théorique nécessaire à la résolution du problème générique n'étant pas l'enjeu de l'étude. L'activité doit, dans l'enseignement, définir une *situation* et non pas un *problème* : c'est-à-dire, un moyen d'enseignement, mais surtout pas l'origine d'une théorie ou l'essence d'une pratique, questions qui seront, pour nous et par principe, métaphysiques.

> Notre travail de didacticiens consiste à identifier, avec les professeurs et à leur intention, des *outils* techniques, qui ne sont pas toujours décrits dans les travaux mathématiques théoriques mais qui permettent de gérer le curriculum réel que les professeurs mettent en place au quotidien et de même, à leur fournir des *résultats*, des *dispositifs*, des *faits*, pouvant donner des objets d'enseignement conformes aux programmes. C'est ainsi que nous proposons de réaliser le travail de développement que demande l'INRP.

Les outils sont peut-être les éléments les moins visibles. Ils sont identifiés par des systèmes sémiotiques, des *notations* « calculables » et les *notions* associées (tableau de nombres, colonne des différences ; programmes de calcul écrits comme formules d'un tableur ; etc.) dont la vie appartient parfois seulement à la culture d'un niveau d'études. Les résultats sont énoncés et lorsqu'ils sont de quelque ampleur on les nomme théorèmes, les dispositifs s'appuient sur leur usage et certains comme l'algorithme de multiplication sont suffisamment connus pour figurer au programme des études. Ces systèmes de notations et de notions *à usage didactique* sont indispensables au professeur comme aux élèves parce qu'ils correspondent à leur niveau de travail théorique. Mais si ces systèmes langagiers et symboliques, étroitement associés, ne sont pas stables et identifiés comme *les enjeux officiels du travail de la classe*, les activités des élèves et du professeur ne produisent pas de savoir mathématique visible et bientôt, ces activités ne sont plus légitimes.

C'est en ce sens que notre travail de développement participe à la production d'un curriculum effectif : nous nous sommes donné pour enjeu de produire, systématiquement et en coopération, les supports de situations d'enseignement robustes. Dans un premier temps, nous le faisons en soumettant notre travail (tel qu'en chaque lieu il réalise une partie du projet global) à la critique des autres équipes, dans le deuxième temps nous le ferons en le rendant public (sous le nom de ses auteurs, avec les critiques associées) et dans un troisième temps en participant (dans un forum dédié à ouvrir, par exemple, sur le site EducMath) aux débats éventuels auxquels ses usages donneront lieu.

4) LES DOCUMENTS DANS LE TRAVAIL ORDINAIRE DU PROFESSEUR

Dans cette partie, nous allons donner quelques éléments sur les relations possibles entre le travail ordinaire du professeur et la prise en compte, dans ce travail ordinaire, de documents ou travaux issus de la recherche de développement. Insistons tout d'abord sur le fait que la situation du professeur n'est pas identique à celle du « professeur d'essai » qui travaille dans le cadre d'une ingénierie, et pas seulement parce qu'elle en serait une sorte de version « imparfaite ». La démarche de l'ingénierie est en quelque sorte une démarche « descendante »[12], qui part d'une conception de l'enseignement des mathématiques en général, qui réfléchit à la place de la notion mathématique à enseigner dans un ensemble mathématiquement organisé et cohérent, pour ensuite produire une suite de leçons dont chacune joue un rôle spécifique dans cette organisation d'ensemble.

La démarche du professeur est sans doute rarement celle-ci, notamment parce que la relation au savoir n'est pas le seul déterminant dans la situation du professeur. Par exemple, le professeur peut partir du projet d'un exercice, pris dans un manuel scolaire et chercher à insérer ce problème dans sa construction du thème mathématique et dans ses pratiques didactiques. Ou bien il peut partir de ce qu'il a observé de l'activité des élèves dans des situations antérieures, qu'il s'agisse des mêmes élèves ou d'une autre classe pour chercher à modifier son projet de leçon voire à le construire, parfois en perdant de vue la construction du thème mathématique, et donc le savoir. Il peut aussi se reposer entièrement sur un manuel pour penser les projets didactiques et imaginer son rôle seulement à partir de la forme de la relation pédagogique de l'institution scolaire.

Reprenons maintenant l'une des questions posées aux intervenants et participants de ces journées :

- *Quelles situations mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe, quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle mutualisation ?*

La question qui est posée oriente la réponse vers « la classe », ce qui risquerait d'être compris comme « l'ici et maintenant de la classe ». Or cet *ici et maintenant* est conditionné par la situation du professeur dans son ensemble, même si on ne s'intéresse qu'au professeur dans sa dimension didactique, ce qui est déjà une restriction. En effet, le professeur agit au contact avec ses élèves, mais cette action est très largement conditionnée par les choix qu'il a faits en amont de la situation de classe : préparation de la leçon, choix de la succession des objets mathématiques introduits dans la classe, etc.

Le problème se déplace donc, la question deviendrait plutôt :

- *Quelles mathématiques, pour quels dispositifs ? Les professeurs ont-ils des demandes de ressources, lesquelles ?*

---

12 En utilisant ce vocabulaire, nous nous référons à des modèles théoriques qui visent à décrire le travail du professeur d'une façon organisée et hiérarchisée. Plusieurs solutions (compatibles) de cette question existent. Le modèle développé par Claire Margolinas est une conséquence du développement de l'analyse de la structuration du milieu (Brousseau 1990 ; Margolinas 1995) . Il vise à décrire des composantes de la situation du professeur et à interroger leurs relations. Les composantes principales qu'elle considère sont les suivantes : +3 Valeurs et conceptions sur l'enseignement/apprentissage : projet éducatif (valeurs éducatives, conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement) ; +2 Construction du thème : construction didactique globale dans laquelle s'inscrit la leçon (notions à étudier et apprentissages à réaliser) ; +1 Projet de leçon : projet didactique spécifique pour la leçon observée (objectifs, planification du travail) ; 0 Situation didactique : réalisation de la leçon (interactions avec les élèves, prises de décision dans l'action) ; -1 Observation de l'activité des élèves : perception de l'activité des élèves (régulation du travail délégué aux élèves). Dans le modèle de la Théorie Anthropologique du Didactique, TAD (Chevallard 2002, 2002), l'échelle des niveaux de co-détermination didactiques (sujet ; thème ; secteur ; domaine ; discipline ; pédagogie ; école ; société ; civilisation) fonctionne comme une base de décomposition des assujettissements du professeur regardé comme sujet de différentes institutions – pour un exemple d'utilisation de cet outil (Wozniak & Chevallard 2005).

Nous allons maintenant nous appuyer sur les résultats d'une enquête (Margolinas et al. 2004) réalisée dans le cadre du groupe de recherche de développement DéMathE en 2003-2004, sous forme d'entretien semi-directif d'une heure auprès de 11 professeurs des écoles non débutants. Ces entretiens portaient sur les ressources utilisées, en mathématiques, par ces professeurs, dans tous les aspects de leur enseignement (conception de leur enseignement des mathématiques, planification de l'année, détermination des dominantes de l'année, programmation et progression selon des thèmes mathématiques et des chapitres, projet de leçon particulière, conduite des situations, observation des difficultés des élèves).

Disons tout de suite que nous pensons a priori que les réponses à cette enquête sont sans doute spécifiques des professeurs du premier degré, ou du moins pourraient l'être, à notre connaissance une étude similaire n'existe pas pour le second degré. Nous allons décrire ce qui ressort de l'enquête du point de vue d'une ouverture des professeurs à une transformation de leur pratique, en mathématiques.

Les professeurs considèrent que les valeurs et les conceptions de l'enseignement sont en quelque sorte personnelles, il ne s'agit pas de les discuter, il s'agit d'un déjà-là, très fortement déterminé par le genre professionnel et les doxas les plus audibles depuis la place du professeur – ce qui peut être parfois assez local, différent selon les académies ou les circonscriptions, par exemple. Implicitement, les manuels scolaires et les formes d'enseignement sont choisis en partie en fonction de ces valeurs.

De même, contrairement à ce qui sous-tend parfois la relation entre l'innovation et les professeurs, les professeurs interrogés ne sont pas vraiment demandeurs de nouveaux projets de leçon. Il faut développer un peu cette affirmation. Chaque professeur semble rencontrer, assez tôt dans la pratique, un élément – souvent un manuel et/ou un livre du maître – sur lequel il investit beaucoup de travail pour en adopter les façons et qui façonne sa pratique. Même quand il change de manuel, les « lunettes » adoptées restent en place, ce qui justifie d'ailleurs de changer le moins possible de support et de ne pas apprécier de changements trop brusques dans l'édition d'un manuel d'une année sur l'autre. Le document « générateur » (Margolinas & Wozniak, soumis) joue un rôle très important dans la façon dont le maître se perçoit par rapport aux autres. Dans ces conditions, le lancement d'un nouveau manuel, ou d'un nouveau type de manuel, passe nécessairement par un travail intense de diffusion via la formation et ne va pas de soi – les éditeurs le savent bien ! Les maîtres peuvent être demandeurs de nouveaux projets de leçon, parce que leur pratique a sans doute besoin de se renouveler, mais toujours dans un cadre suffisamment stable. Dans les marges de leur enseignement principal (introduction de nouvelles notions, travail de la technique), les professeurs organisent toutes sortes de dispositifs qui permettent, notamment, une certaine différenciation. Au delà du document générateur (manuel de la classe ou non) tous les documents sont bons pour permettre aux élèves de s'entraîner, voire tout simplement de s'occuper tout en faisant des mathématiques.

En fait, les besoins mathématiques s'expriment peu dans les entretiens, sauf à deux niveaux : la construction de la progression ou de la planification en mathématiques, l'observation de l'activité des élèves. Commençons par cet aspect d'observation. Tout se passe comme si les professeurs nous disaient : « je sais enseigner, pas de problème… sauf pour 20% des élèves (pourcentage qui peut varier selon les discours) ». « Pour ceux-là, les élèves *en difficulté*, je suis demandeur d'aide, de suggestion, voire je réclame qu'on me fournisse des aides ». L'observation des difficultés des élèves, souvent à la fin d'un processus d'enseignement supposé provoquer l'apprentissage, est une réalité douloureuse, qui pousse les maîtres à une demande. Dans le projet DéMathE, nous avons pris très au sérieux cette demande et cette possibilité d'ouverture, en nous centrant toujours sur des difficultés qui persistent, même si c'est seulement pour certains élèves – du moins en apparence. Les professeurs, qui décrivent souvent difficilement les objectifs mathématiques de leurs leçons, par exemple, font souvent preuve d'une grande finesse dans l'observation des difficultés qui résistent. Mais la possibilité de description raisonnée manque, parce que le cadre d'analyse n'est pas connu.

En ce qui concerne la construction d'une progression, la question est toute différente, et ne s'exprime pas de la même manière. Beaucoup de professeurs vivent leur enseignement – des mathématiques, mais sans doute pas seulement – sur un mode de « surlignage des compétences successives ». Ce mode d'organisation – ou plutôt de désorganisation – est sans doute d'autant plus fort que la problématique des « compétences » est forte et légitimée (Schneider, 2006). Les professeurs qui s'expriment sur cette difficulté sont ceux qui ont le sentiment d'avoir à faire des choix, sans bien savoir sur quelle base les faire. Ils nous disent parfois que c'est « le plus difficile ». Cette difficulté ne les empêche pas d'enseigner au quotidien, mais certains d'entre eux ressentent ce que l'observation des classes ordinaires nous révèle, c'est-à-dire un manque d'organisation mathématique, qui conduit à l'impossibilité de choix cohérents, y compris dans les projets de leçon et les situations de classe. Le problème qui se pose est de comprendre sous quelle forme il serait possible de mettre à la disposition des professeurs certains savoirs concernant l'organisation curriculaire mathématique.

5) EN GUISE DE CONCLUSION

Les contraintes sont multiples et l'enseignement est déterminé à plusieurs niveaux relatifs aux mathématiques d'un côté, aux professeurs et aux élèves de l'autre, ce qui interdit une intervention directe ; des points d'appui d'une évolution possible peuvent pourtant être identifiés, autour de l'observation des *erreurs persistantes des élèves ordinaires* et des *élèves en difficulté, comme des besoins exprimés des professeurs* : enquête DéMathE, groupes IREM (ateliers, boutiques, forums).

Quelles situations mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe, quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle mutualisation ?

C'était la question qui nous était posée. Nous savons d'expérience qu'il n'y a pas de mutualisation sans théorie commune, pas de ressources produites par les professeurs eux-mêmes en position de professeur, sinon pour eux-mêmes. Produire des ressources pédagogiques est un travail de la noosphère, ce qu'a fait à sa manière le groupe ERMEL. Faute de quoi, les manuels élèves servent au professeur.

Les *dispositifs* dans la classe sont donc à « mettre en place » par le professeur, pour les élèves.

Les *ressources* sont à « mettre à disposition » par l'INRP par exemple, pour les professeurs, ce qui suppose un *suivi des usages* (sur site ou/et à distance : *forum* d'usagers et usagers / concepteurs et *formations*).

Ce qu'il y a à concevoir ce sont donc des *situations* au sens plein de Brousseau, c'est-à-dire à la fois des contenus d'enseignement et les conditions de leur enseignement. Mais le travail des professeurs pour conduire les enseignements décrits ainsi n'est pas simple et ne va pas de soi. L'étude des difficultés que les professeurs rencontrent est aussi l'une de nos questions de travail et c'est sur cette question, un peu en aval de ce qui fait le coeur de notre ligne d'attaque, que s'est centrée l'équipe de l'IREM Paris VII et que travaillent les didacticiens des mathématiques de l'UMR ADEF, à Marseille. On remarquera enfin que l'étude des situations permettant d'enseigner les gestes mathématiques spécifiques des mathématiques que sont : le travail des définitions, l'implication ou les démonstrations, est une question qui ne nous est pas étrangère puisque, un peu en amont de notre problématique centrale cette fois, une équipe de l'IREM de Grenoble travaille autour de « Maths à modeler » et des situations de recherche, tandis que les autres équipes sont sur des problèmes d'enseignement semblables à celui que nous avons exposé, ce que l'on peut vérifier en suivant les publications de ces équipes dans la revue *Petit x*.

RÉFÉRENCES

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (soumis), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

BROUSSEAU G. (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits des nombres naturels? *Cahier de l'enseignement élémentaire, 13*, 195-237.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

ERDOGAN A. (2006), *Le site mathématique d'un objet d'enseignement, outil pour l'aide à l'étude*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

FLUCKIGER A., MERCIER A. (2002), Le rôle d'une mémoire didactique des élèves, sa gestion par le professeur. *Revue Française de Pédagogie, 141*, 27-35.

LEBESGUE H. (1935), *La mesure des grandeurs*. Paris : Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, réédition 1975.

MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C. (2002), Situations, milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARGOLINAS C., CANIVENC B., DE REDON M.-C., RIVIERE O., WOZNIAK F. (2004), Que nous apprend le travail mathématique hors classe pour la formation des maîtres. Actes du *30e colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.*

MARGOLINAS C. WOZNIAK F. (soumis), Usage des manuels dans le travail du professeur: L'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation* (Numéro spécial : Les manuels scolaires: réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves).

MATHERON Y., SALIN M.-H. (2002), Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue Française de Pédagogie, 141*, 57-66.

NIN G. (1992), Le puzzle de Lewis Carroll. Modèle local, modèle régional. *Petit x, 32*, 67-76.

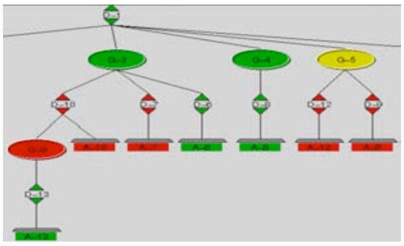
SCHNEIDER, M. (2006), Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 9-38.

SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique: La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Pétra.

WOZNIAK F., CHEVALLARD Y. (2005), Niveaux de détermination didactique et enseignabilité de la statistique. Actes du *1er Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique. Société, École et Mathématiques: Apports de la TAD*, Baeza.

Instruments du travail mathématique et dispositifs d'enseignement dans les environnements informatisés

Luc Trouche, INRP et LIRDHIST (Université Lyon 1)



L'équipe de ressources mathématiques de l'INRP s'est constituée précisément autour de cette question, ou plutôt de ce faisceau de questions : comment se développent pour les élèves, à partir des outils disponibles, des *instruments du travail mathématique*, comment rendre *viables* les TIC (Technologies de l'Information et de la Communication) dans l'enseignement, quels *dispositifs* construire dans la classe, quelle *formation* pour les professeurs, et, finalement, quelles *ressources pédagogiques* concevoir et quels processus de conception envisager ? Ces journées regroupent plusieurs équipes qui développent leur recherche autour de ces questions, elles sont donc importantes pour confronter les méthodes et les résultats, dégager éventuellement des problématiques communes.

Cet exposé est structuré autour de quatre points : nous donnerons d'abord quelques éléments d'état des lieux quant à l'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques, puis nous présenterons les recherches en cours à l'INRP dans ce domaine, ensuite nous essaierons de dégager les appuis théoriques de ces recherches, enfin nous proposerons quelques pistes de développement.

1) DE L'ÉTAT DES LIEUX

La question de l'intégration scolaire des TIC dépasse bien sûr le seul enseignement des mathématiques. Dans un ouvrage de synthèse (FING 2004), la Caisse des dépôts désigne l'objectif « *Pointer les usages qui ont les chances les plus grandes de devenir des usages génériques, c'est-à-dire de répondre aux besoins courants de toute la communauté éducative, enseignants, élèves, mais aussi personnels de direction, administratifs, parents* » et en évalue le coût « *Ces usages génériques n'induisent ni n'exigent aucun formatage particulier, tout enseignant peut les mettre en œuvre lui-même et entraîner ses élèves à faire de même, quelle que soit sa discipline et son niveau d'enseignement, quelles que soient sa façon de travailler et ses convictions pédagogiques* ». Il serait donc relativement aisé pour un enseignant d'intégrer les TIC dans la classe. On retrouve ce point de vue dans le baromètre que la Délégation aux usages de l'Internet du Ministère de l'Education français présente sur son site (http://delegation.internet.gouv.fr/) : 40% des enseignants utiliseraient Internet avec les élèves, 56% des parents utiliseraient Internet pour aider leurs enfants. Dans 80% des cas d'usage, il s'agirait de consulter des contenus éducatifs culturels ou scientifiques.

Si l'on regarde de plus près, c'est-à-dire au niveau de l'enseignement d'une discipline : les mathématiques, du point de vue du type d'usages des TIC et des difficultés qu'elles présentent pour le professeur, les résultats ne sont plus tout à fait les mêmes. Dans une étude comparative menée en Languedoc-Roussillon et en Catalogne, Combes & al. (2005) montrent que, si 90% des professeurs de mathématiques interrogés ont accès à Internet, si 70% estiment en maîtriser l'usage, ils ne sont que 10% à l'utiliser avec les élèves. Des pourcentages du même type se retrouvent quant à l'utilisation d'autres TIC, pourtant prescrites par les programmes, comme les tableurs. Les professeurs interrogés soulignent la *complexité* de l'intégration des TIC dans leur enseignement, et évoquent des problèmes matériels (difficultés d'accès aux ordinateurs) et didactiques (difficultés d'accès à des ressources pédagogiques intégrant les TIC de façon pertinente, difficultés pour ré-organiser l'enseignement dans la classe). Cette question clé des ressources est aussi mise en évidence par une étude de l'IREM de Paris 7 (2005) : les ressources en ligne sont hétérogènes, tirent peu profit des TIC qu'elles requièrent pourtant et donnent peu d'information sur les conditions de leur mise en œuvre.

Cette situation ne paraît pas spécifique aux mathématiques. Dans sa lettre d'octobre 2006 (http://www.inrp.fr/vst/LettreVST/SommaireLettre.htm), la Veille Scientifique et Technologique de l'INRP fait une revue des études sur les Espaces Numériques de Travail en milieu scolaire. Les études approfondies, comme celle menée en Picardie sur les cartables numériques, montrent que *les logiciels les plus utilisés le sont à des fins de production de documents et de recherche d'information (windows, word et navigateur) […]. En revanche, les fonctions de communication, de travail collaboratif, et d'apprentissage s'avèrent peu exploitées*.

La question de l'intégration des TIC *pour l'apprentissage* et *les interactions* dans la classe, en mathématiques comme dans les autres disciplines, reste ainsi, sans doute, largement ouverte.

2) DES RECHERCHES DES ÉQUIPES ASSOCIÉES À L'INRP

Il n'est pas possible bien sûr en quelques lignes de présenter les travaux des 6 équipes associées à l'INRP qui développent leur recherche en relation avec l'intégration des TIC dans la classe[13]. Je choisirai de n'aborder que quelques points, à partir des questions que ces équipes se sont échangées avant ces journées. Le site EducMath avait été mis à profit pour ces interactions : les équipes, associées par deux, devaient s'interroger mutuellement (au moins une question, au moins une piste de réponse par question…), via des forums dédiés.

2.1. Echanges Aplusix-EMULE

Aplusix est un logiciel d'aide à l'apprentissage de l'algèbre formelle. L'équipe, pilotée par Hamid Chaachoua, a pour objectif d'étudier les conditions d'intégration du logiciel dans une classe (Chaachoua & al 2001). EMULE, Enseignement des Mathématiques et Usage en Ligne d'Exercices, équipe pilotée par Ghislaine Gueudet, avait pour objectif de décrire et d'analyser les usages de ressources Internet de type « bases d'exercices de mathématiques » par les enseignants des écoles et des collèges (Cazes & al. 2006).

Ghislaine Gueudet questionne l'équipe Aplusix sur trois points : comment définir, mesurer, *l'autonomie* des élèves ? comment faire vivre les échanges en ligne entre enseignants à partir des usages effectifs (*comptes rendus d'expérimentation*) du logiciel ? quelle *échelle de temps* retenir pour l'analyse des situations ? Chaachoua répond sur les deux premiers points :

– l'autonomie est liée à la possibilité et à la mobilisation effective de *rétroactions* de l'environnement, indépendants de l'intervention du professeur ;

– l'existence d'un *groupe expert* est un élément crucial pour la dynamique des participants du projet, qui savent pouvoir disposer de retours à leurs comptes rendus d'expérimentation.

Hamid Chaachoua questionne EMULE sur deux points : quel est le *suivi* des élèves proposés par les banques d'exercices ? comment observer les *écarts entre les usages prévus* par le concepteur et les *usages effectifs*, si l'on n'a pas participé soi-même à la conception des exercices et de la structure des banques qui les rassemblent ? Gueudet répond sur ces deux points :

– les banques d'exercices proposent un ensemble d'outils pour le suivi des élèves, mais les enseignants n'utilisent en général que les scores numériques ;

– le travail de l'équipe EMULE se fait essentiellement sur Mathenpoche, l'équipe connaît bien les concepteurs de ces exercices, de plus le site de Sésamath propose de plus en plus de conseils d'usage de Mathenpoche (voir en particulier les compléments du manuel Sésamath cinquième). Les usages prévus par les concepteurs sont donc, au moins partiellement, accessibles.

Nous reviendrons dans le § 3 sur ces échanges, mais notons dès maintenant trois articulations clés : l'articulation entre les rétroactions de l'environnement et les interventions du professeur ; l'articulation entre les échanges dans une communauté d'enseignants et l'existence d'un groupe expert ; enfin l'articulation entre les usages pensés par les concepteurs et les usages effectifs par les enseignants.

2.2. Echanges CROME/e-CoLab

CROME (Calculatrices en Réseau, Orchestrations et Mutualisations dans un nouvel Environnement) est une équipe pilotée par Laurent Hivon qui étudie les conditions de viabilité d'un nouvel outil, permettant la mise en réseau des calculatrices d'une classe. E-CoLab (Expérimentation collaborative de Laboratoires mathématiques) projet piloté par Gilles Aldon, Michèle Artigue et Luc Trouche, qui se propose d'étudier les potentialités offertes à l'enseignement et l'apprentissage par une nouvelle plate-forme de calcul, d'étudier les stratégies à mettre en oeuvre pour actualiser ces potentialités dans le contexte de l'enseignement français du lycée, de concevoir des

[13] On peut trouver une présentation des équipes et de leurs problématiques sur EducMath : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/

ressources pédagogiques permettant de supporter ces stratégies, de concevoir enfin un dispositif permettant de mutualiser ces ressources entre les 5 classes impliquées (ce sont les professeurs qui, cette fois, travaillent en réseau).

Jacques Salles, un des animateurs du projet e-CoLab, pose deux questions à CROME : le fonctionnement des calculatrices en réseau dans la classe produit-il des *phénomènes* différents de ceux observés en situation de rétroprojection de la calculatrice du maître ? les *contraintes* techniques du dispositif ont-elles été un frein à *l’instrumentation* des élèves ? Hivon répond :

– le regroupement des élèves par 4, au lieu d’une disposition en classe entière devant un écran demande une gestion didactique particulière, une *orchestration*, qui peut produire des effets très intéressants pour l’activité des élèves et le débat dans la classe ;

– l’assistance aux élèves suppose la conception *d’aides* que l’équipe a dû penser, sous la forme d’aides-mémos aidant les élèves à interpréter les rétroactions de la machine.

Laurent Hivon pose deux questions à e-CoLab : quelle interaction existe-t-il entre les applications disponibles sur la calculatrice et les applications disponibles sur PC ? comment envisager la *mutualisation* des ressources conçues par les élèves, par les enseignants ? Salles répond :

– les intérêts de la plate-forme expérimentée sont son aspect *nomade* (ce sont les mêmes applications qui fonctionnent sur calculatrice et sur PC, et la très forte interactivité entre les différentes applications (par exemple graphique et géométrique), source de *potentialités* nouvelles… et de *complexité* accrue ;

– le choix est fait dans un premier temps de développer la mutualisation entre les professeurs, via une plate-forme dont il faudra penser les *fonctionnalités* pour qu’elle puisse répondre aux besoins qui émergeront de l’expérimentation.

Retenons de ces échanges le jeu complexe entre fonctionnalités, potentialités et contraintes des outils présents dans l’environnement, la nécessité pour le professeur de penser la gestion didactique de ces outils, la nécessité d’une assistance par le maître des processus d’instrumentation, enfin la nécessité ressentie d’une mutualisation des ressources conçues par les enseignants impliqués dans le même projet.

2.3. Echanges SFoDEM-SESAMESmath

Le SFoDEM (Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques), piloté par l’IREM de Montpellier, propose d’assister l’intégration des TICE dans les classes, à partir d’un processus de conception collaborative de ressources pédagogiques. SESAMESmath (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation en math), piloté par Sylvie Coppé, a pour objectif de produire des documents destinés à aider les enseignants dans leur pratique de classe pour l’enseignement de l’algèbre au collège.

François Roux, coordonnateur des 4 équipes SFoDEM, questionne SESAMESmath à propos des *outils TICE* qui sont proposés aux enseignants, et des conséquences en termes de gestion de la classe. S. Coppé répond que son équipe ne s’intéresse pas à (ce qui ne veut pas dire qu’elle l’exclut) l’intégration des TICE dans la classe, mais que les TICE sont exploitées pour la *communication entre enseignants*, en particulier pour la diffusion des *scénarios* de classe.

C’est justement sur cette question des scénarios que Coppé questionne le SFoDEM : les scénarios proposés par le SFoDEM sont-ils une simple description de l’activité proposée au professeur, ou contiennent-ils des documents théoriques permettant une appropriation du scénario et de ses intentions didactiques ? les scénarios sont-ils un objet de recherche ? François Roux répond sur les deux points :

– des documents théoriques sont en effet proposés, ils ne sont pas toujours directement liés aux scénarios, mais apportent un éclairage sur *l’esprit* dans lequel les scénarios sont créés. Ils facilitent la lecture du scénario dans une phase de *l’anticipation de l’utilisation* en classe ;

– l’expérimentation SFoDEM en cours est nécessairement liée à un projet de recherche. Il n’était pas possible en effet de prévoir, a priori, quel devrait être le modèle des ressources à concevoir pour assister l’intégration des TICE dans les classes, faciliter les retours d’usage, permettre la mutualisation. Il a fallu *tâtonner*, *s’inspirer* d’autres expériences, *analyser* les difficultés rencontrées, *réviser* le modèle de ressources et *réguler* le dispositif de mutualisation, bref articuler recherche et développement.

Il s’agit là aussi, nous semble-t-il de questions essentielles : comment documenter l’action de l’enseignant dans la classe ? Comment concevoir des scénarios qui, à la fois, assistent l’action de l’enseignant et se nourrissent de sa propre expérience ? Enfin, à un niveau méta, comment articuler, dans les équipes en partenariat avec l’INRP, recherche et développement ?

3) DES APPUIS THÉORIQUES POSSIBLES

Il n'est finalement pas très étonnant que, dans la phase préparatoire à ces journées, les équipes qui ont dialogué en ligne sur EducMath aient pu trouver un langage commun et des objets de recherche partagés. Depuis une vingtaine d'années, dans le domaine des environnements informatisés pour l'apprentissage des mathématiques, une communauté de recherche a émergé, avec une diversité de *cadres théoriques*, et en même temps des convergences profondes que l'on a pu tester à plusieurs moments : lors du colloque de la Grande-Motte en 1998 sur les calculatrices symboliques et géométriques (Guin 1999), au moment de l'école d'été de didactique en 1999, autour du thème mathématiques et instruments (Rabardel 1999), lors de l'étude du CNCRE (Conseil National de Coordination de la Recherche en Education) en 2000 (Lagrange & al. 2003a), plus récemment encore lors du colloque ITEM (Intégration des Technologies pour l'Enseignement des Mathématiques), en 2003 à Reims (Lagrange & al. 2003b).

3.1. Des recherches qui se développent sur un fond commun

Les recherches qui se sont développées ont saisi, travaillé, des concepts dans différents cadres théoriques, en particulier les concepts fondamentaux de *situation didactique* (Brousseau 1998) et de *praxéologie* (Chevallard 1999), reposant sur une décomposition des organisations mathématiques en types de tâches, techniques, technologie, théorie. Le concept de *schème*, organisation invariante de l'activité pour une classe de situations, est aussi utilisé pour analyser les connaissances qui se construisent dans le cours de l'action. Dans le domaine des TICE, le concept de *transposition informatique*, que Balacheff (1994) décrit comme *ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation* a permis de se déprendre de l'illusion que les environnements informatiques donnaient à voir les objets mathématiques. Entre les situations mathématiques et les TICE, Chevallard (1992) a désigné une absence : un *système d'exploitation didactique* des situations dans un environnement donné, dont la constitution est une condition majeure de *viabilité* des objets informatiques.

A ces références communes pour la communauté de didactique des mathématiques, s'est ajoutée, dans les années 95, une nouvelle approche théorique, importée d'autres champs de recherche, l'ergonomie cognitive ou la didactique professionnelle, approche que l'on a appelée *l'approche instrumentale*. Cette approche intervient à un moment charnière pour l'étude des TICE, de trois points de vue :

– des outils plus complexes (il s'agissait des *calculatrices symboliques*) deviennent disponibles pour les élèves, en classe comme à la maison ;

– les recherches se déplacent du champ de *l'ingénierie didactique* sur le temps court (des professeurs expérimentent dans leurs classes des produits didactiques d'équipes de recherche) vers le champ des classes *ordinaires* ;

– le temps de l'observation se dilate : il ne s'agit plus de regarder ce qui se passe sur quelques séances, mais de suivre le temps long des apprentissages.

L'approche instrumentale a justement comme objet l'étude du développement des instruments sur le *temps long* de l'activité humaine, à partir des artefacts (des outils) qui ont été saisis par le sujet. Les instruments sont ainsi *subjectifs* (Rabardel ibidem), ce sont des entités composées à la fois des artefacts et des schèmes que le sujet a développés pour réaliser un type de tâche. Dans ce développement des instruments, cette approche distingue deux processus : un processus *d'instrumentation* (l'artefact à la fois ouvre de nouvelles possibilités d'action et contraint, de façon relative, l'action) et un processus *d'instrumentalisation* (le sujet met l'artefact à sa main, le personnalise). Cette approche a sans doute été fructueuse de trois points de vue :

– elle a conduit à porter le regard sur les artefacts, à étudier soigneusement ses contraintes, pour comprendre en quoi ils pouvaient pré-structurer, relativement, l'action, en quoi ils pouvaient peser sur la conceptualisation ;

– elle a conduit à des études fines des processus de conceptualisation en cherchant à repérer les schèmes à travers les gestes des élèves, à repérer des régularités, des invariants opératoires, que Vergnaud (ibidem) appelle des *théorèmes-en-acte* ;

– elle a conduit à considérer le caractère *productif* de l'activité des élèves à travers les processus d'instrumentalisation, dans la mesure où ceux-ci n'étaient pas conçus comme un détournement des artefacts, mais comme une contribution à la construction des instruments, comme une participation à l'enseignement, rejoignant ainsi l'idée de co-construction du milieu par les élèves et le professeur (Mercier 1998).

Cette prise en compte de l'aspect *social* de la construction des instruments a conduit, dans un deuxième temps, à interroger le rôle du maître dans la classe et les dispositifs qu'il construit.

3.2. La question cruciale de la *gestion didactique* des artefacts

L'émergence de cette question est, pour partie, le produit d'un approfondissement de l'approche instrumentale. Elle est aussi, sans doute, le produit différé de la prise de conscience, dans la communauté des chercheurs sur les environnements d'apprentissage informatisés, de l'impossibilité de concevoir des tuteurs artificiels intelligents prenant entièrement en charge l'enseignement. Cette question arrive aussi à un moment où, plus généralement, se développe, dans la communauté de didactique des mathématiques, une réflexion sur la figure du professeur.

Sur le plan théorique, le concept *d'orchestration instrumentale* (Guin & Trouche 2002) traduit la prise en compte de la nécessité d'un système d'exploitation didactique (§ 3.1) des situations dans un environnement donné. Gérer didactiquement les artefacts suppose de penser à la fois des *configurations didactiques* (quel agencement des artefacts dans la classe) et *des modes d'exploitation* de ces configurations, en liaison avec les variables de la situation.

Cette réflexion sur les *conditions d'intégration* d'un nouvel artefact apparaît dans de nombreux travaux, par exemple ceux de l'équipe Aplusix (§ 2.1). Plus précisément la réflexion sur les configurations ressort des travaux du SFoDEM (§ 2.3) sur les atouts de la vidéoprojection (Ravier & al. 2006), de CROME (§ 2.2) sur l'orchestration des situations pour un réseau de calculatrices ou de SESAMESmath (§ 2.3) sur la conception de scénarios. De la réflexion sur les scénarios va émerger la notion de ressource pédagogique.

3.3. La *conception* et *l'usage* de *ressources pédagogiques*

La prise en compte du rôle du professeur et la mise en évidence de sa complexité débouche naturellement sur la nécessité de concevoir des documents qui assistent son action dans la classe. La notion de *ressource pédagogique* pour documenter cette action du professeur émerge comme réponse à cette nécessité. Une ressource pédagogique doit fournir d'abord une situation mathématique, mais aussi des éléments permettant de l'exploiter dans un environnement donné, c'est-à-dire d'élaborer un ou plusieurs *scénarios* d'usage. Ces scénarios peuvent être conçus par des experts, dans une problématique d'ingénierie didactique, ou de diffusion large de banques de ressources, dont on peut analyser les usages (cf. EMULE, § 2.1). La mise en évidence de la complexité de l'intégration des TIC conduit à l'idée de l'impossibilité de concevoir des scénarios complets a priori, et donc à la nécessité de concevoir des scénarios adaptables par les professeurs. L'idée émerge aussi de récupérer l'expérience des professeurs pour enrichir la ressource : l'ajout de *comptes rendus d'expérimentation* à une ressource en découle.

L'approche instrumentale permet alors une nouvelle conceptualisation des ressources pédagogiques, conçues comme des *artefacts* proposés aux professeurs, dont ceux-ci vont se saisir, et qu'ils vont transformer en *instruments* de leurs pratiques professionnelles. C'est un nouveau point de vue sur la conception des ressources qui se dessine, étroitement imbriquée avec les usages. L'expérience du SFoDEM (§ 2.3) montre que cette genèse des instruments n'est pas naturelle, elle suppose un engagement commun, un climat de confiance, l'émergence de communautés de pratique (Wenger 1998) qui se construisent sur la durée. L'expérience du SFoDEM comme de Aplusix montre aussi la nécessité d'un groupe d'experts, ou de pilotes, qui assiste le processus de constitution d'un *vivier* de ressources partagées. Cette assistance concerne l'organisation du dispositif, sa régulation, mais aussi la conception d'un *modèle* de ressources permettant la mutualisation (Trouche & Guin 2006). C'est l'un des enjeux du projet e-CoLab qui commence en 2006.

L'expérience du SFoDEM montre que la dynamique de ces communautés engagées dans une conception collaborative de ressources pédagogiques conduit à poser des questions didactiques de fond : quelles sont les variables didactiques sur lesquelles va jouer la flexibilité des scénarios ? Quelles traces de l'activité des élèves récupérer pour transmettre à d'autres des éléments de l'histoire de la ressource ?

4) DES PISTES DE DÉVELOPPEMENT

L'intérêt de journées d'études est qu'elles permettent de faire le point et de dégager de nouvelles pistes de développement.

4.1. Une synergie renforcée

La première piste que je vois est un renforcement nécessaire de la synergie entre les différents projets de recherche menés en relation avec l'INRP. Les échanges préalables à ces journées ont permis de premières interrogations croisées, les échanges noués pendant ces deux jours doivent se prolonger. Pour ne pas être un vœu pieu, cette volonté doit s'appuyer sur des outils spécifiques. Le site EducMath où chaque équipe exposera l'histoire en cours de sa recherche est un des moyens de cet échange. D'autres outils pourront être testés, comme une bibliographie partagée.

La synergie de ces projets suppose aussi des liens renforcés entre les équipes locales et les échéances nationales et internationales de la recherche. La collaboration entre l'équipe de ressources mathématiques de INRP et l'équipe CROME pour une participation à un panel sur la « connectivité » lors de l'étude ICMI Mathématiques et Technologie de Hanoï s'inscrit dans cette perspective.

4.2. Un approfondissement théorique

Dans cette conférence, je n'ai fait qu'effleurer des sujets dont on perçoit sans doute la complexité. Des études en cours permettront d'approfondir ces sujets :

– dans le cadre de la prochaine école d'été de didactique, un des thèmes d'étude (coordonné par Ghislaine Gueudet et moi-même) portera sur la notion de document pour le professeur. Ce sera l'occasion de travailler la notion de ressource pédagogique ;

– une confrontation interdisciplinaire autour de la notion de scénario a été engagée par la mission TICE de l'INRP. Un premier colloque a eu lieu en 2006 (Gueudet 2006). La réflexion se poursuivra en 2007 dans cette communauté de recherche émergente ;

– de façon plus générale, une réflexion est engagée entre des chercheurs de différents champs (didactique des mathématiques, informatique, sciences de l'éducation) sur les environnements informatisés et les ressources numériques, du point de vue de la relation entre la conception et les usages. Un ouvrage, issu de cette réflexion (Baron & al. à paraître) devrait être publié en 2007.

Pour finir, je voudrais rappeler que nous aurons sans doute davantage de possibilités pour développer les échanges avec les équipes de professeurs associés en 2006-2007. Une équipe « de ressources mathématiques » de trois personnes se met en place http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/math_inrp/educmath/. Elle compte développer ses recherches dans le domaine de l'intégration des TICE (Aldon & al. 2006), en relation avec les équipes associées et les services de l'INRP (mission TICE, Veille Scientifique et Technologique). Une journée de formation de formateurs est prévue en 2007, de nouveaux projets de recherche sont en cours de définition, en réponse à des appels d'offres du Ministère. Du grain à moudre pour l'année qui s'ouvre et les prochaines journées mathématiques de l'INRP !

RÉFÉRENCES

ALDON G., TRGALOVA J., TROUCHE L. (2006), Intégration des TICE dans les classes de mathématiques, quelles interactions entre la recherche et les acteurs de cette intégration. *Les dossiers de l'Ingénierie Educative* (à paraître).

BALACHEFF N. (1994), Didactique et intelligence artificielle, *Recherches en didactique des mathématiques* 14, 9-42

BARON M., GUIN D. & TROUCHE L. (Eds.) (à paraître), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage, conception et usages, regards croisés*, Hermès, Paris.

BETTON S., COPPE S. (2005), Favoriser l'activité mathématique dans la classe : ouvrir les problèmes. *Bulletin de l'APMEP* n° 461

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, Grenoble

CAZES C., GUEUDET G., HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2006), Utilisation de bases d'exercices en ligne : quelles conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, IREM Paris 7

CHAACHOUA et al (2001) *Usages éducatifs des technologies de l'information et de la communication : quelles nouvelles compétences pour les enseignants ?,* Rapport de recherche INRP

CHEVALLARD Y. (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques, le problème de l'ingénierie didactique. In B. Cornu (ed.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques,* PUF, « Nouvelle Encyclopédie Diderot », Paris, 183-203.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* 19, 221-266

COMBES, M.-C., GUIN, D., NOGUES, M., TROUCHE, L. (2005), Formation à distance des professeurs de mathématiques, vers de nouvelles pratiques professionnelles. In J. Morego, R. Carles, V. Meritxell (eds.), *TRANSFORMA, Intégration des TIC et formation à distance dans un espace transfrontalier : l'exemple de la Catalogne et du Languedoc-Roussillon*. UOC, Barcelone.

FING, Caisse des dépôts (2004), *Du cartable électronique aux espaces numériques de travail*. Documentation Française, Paris (Les Cahiers pratiques du développement numérique des territoires), 193 p. http://www.ladocfrancaise.gouv.fr/catalogue/9782110056061/index.shtml

GUEUDET G. (2006), Scénarios d'usage de bases d'exercices de mathématiques en ligne, in H. Godinet, J.-P. Pernin (eds.), *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien*, INRP, 43-48, en ligne à l'adresse http://www.inrp.fr/archives/colloques/scenario2006

GUIN D. (ed.) (1999), Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. *Actes du colloque francophone européen de la Grande-Motte*. IREM, Université Montpellier II

GUIN D., TROUCHE L. (2002), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

IREM Paris 7 (2005), *Expérimentation de ressources en ligne*, en ligne à l'adresse http://pcbdirem.math.jussieu.fr/SITEscore/rapportsommaire.php

LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M., LABORDE C., TROUCHE L. (2003a), Technology and mathematics education: a multidimensional overview of recent research and innovation. In A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, F.K.S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 237-270

LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M., GUIN D., LABORDE C., LENNE D., TROUCHE L. (eds.) (2003b), Congrès européen ITEM (*Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques, Ecole, Collège, Lycée, Université)*. IUFM Reims, 20 – 22 juin, en ligne à l'adresse http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/ITEM2003/fr/

MERCIER A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(3), 279-310.

RABARDEL P. (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (ed.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques*. IUFM, Caen, 202-213.

RAVIER J.-M., ROUX F., SALLES J. (2006), La vidéoprojection, des atouts pour apprendre, *Les cahiers de l'ingénierie éducative* 56.

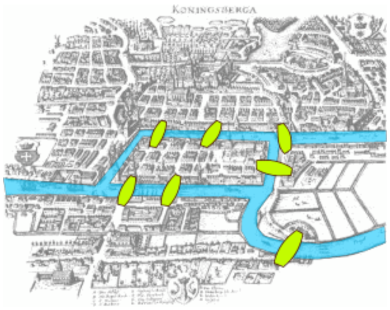
TROUCHE L., GUIN D. (2006), Des scénarios par et pour les usages, in H. Godinet, J.-P. Pernin (eds.), *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien*, INRP, 79-84.

VERGNAUD G. (1996), Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In R. Noirfalise, M.-J. Perrin (eds.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques*, IREM, Université Clermont-Ferrand II, 174-185

WENGER E. (1998), *Communities of practice*, Cambridge University Press, New York.

Synthèse de l'atelier du thème 1

Viviane Durand-Guerrier, à partir de ses notes



L'atelier s'est déroulé en deux temps : d'abord une présentation suivie d'une discussion des travaux des quatre équipes, puis une synthèse visant à dégager des directions communes de travail. Pour en savoir plus sur les projets présentés ci-dessous, on pourra se reporter à la page du site EducMath présentant les équipes associées à l'INRP :

http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees.

1) PRESENTATION ET DISCUSSION DES RECHERCHES EN COURS

1.1. ERMEL Equipe Ressources en Mathématiques pour l'Ecole et le Collège

Présentation à plusieurs voix : Henri-Claude Argaud, Jacques Douaire (responsable), Marie-Paule Dussuc, Claude Fini, Gérard Gerdil-Margueron.

L'équipe ERMEL travaille depuis de nombreuses années au développement de dispositifs d'enseignement et de ressources pour les maîtres, d'abord dans le domaine du numérique, et, depuis six ans, dans le domaine du géométrique, ce qui a abouti à la sortie d'un ouvrage en septembre 2006 : *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes* (Hatier). Cette recherche a conduit à préciser des choix didactiques dans ce domaine et à proposer un ensemble complet pour le cycle 3 de situations d'apprentissage en appui sur la résolution de problèmes amenant, à l'école primaire, des connaissances spatiales initiales vers les connaissances géométriques. Les questions abordées concernent aussi la validation ; le rôle des débats dans la construction des connaissances ; les liens entre argumentation et raisonnement ; l'étude des processus de preuve dans chacun des cycles.

Dans un autre cadre, celui de la recherche interdisciplinaire qui a conduit à la publication de l'ouvrage *Argumentation et disciplines scolaires* (INRP 2004), la confrontation avec les autres disciplines pose la question du vrai/faux, versus possible/nécessaire (voir par exemple les travaux de Christian Orange en didactique de la biologie). Par ailleurs, les observations de classe sur le travail du maître montrent que son rôle dans les mises en commun est difficile ; il n'y a pas toujours de phase de validation ; le plus souvent, il y a seulement des phases de formulation, la validation étant renvoyée au maître. La mise en commun apparaît plus comme une coutume ; il faut s'interroger sur les obstacles à cette mise en commun. Ceci n'est pas spécifique aux mathématiques, mais renvoie à l'épistémologie de la discipline (cf. *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes,* INRP 2003).

Dans le travail géométrique au cycle 3, des questions sur la validation, nouvelles par rapport aux travaux menés dans le domaine numérique, sont soulevées : on peut avoir au cycle 3, lors de la résolution d'un problème géométrique, un résultat correct dû à des compétences dans le tracé et une procédure fausse : un élève peut réaliser le dessin d'un rectangle sans recourir à une de ses propriétés ; ou un résultat faux dû à une mauvaise réalisation pratique bien que l'élève ait fait appel au savoir approprié. La validation fait beaucoup plus appel à des propriétés « théoriques » que dans le numérique, où une procédure erronée conduit, en général, à un résultat faux. Le travail est centré au début du cycle sur les relations, puis les objets sont étudiés plus systématiquement. Pour les trois années du cycle 3, 70 situations ont été conservées. Certaines utilisent le logiciel Cabri, mais de façon ponctuelle. La problématique actuelle du groupe consiste à observer les effets de l'introduction de Cabri sur des progressions complètes, en articulation avec les modalités classiques papier – crayon. Une situation (Patrouille d'avion et plan de vol) a permis d'illustrer les choix et le questionnement.

Les échanges ont porté principalement sur : 1. La question de la dualité possible/nécessaire, qui intervient également en mathématiques ; 2. La question de la nécessaire explicitation du terme validation ; 3. La dévolution et les obstacles liés à la langue et sur le fait que le logiciel rend nécessaire de nommer les objets ; 4. L'équilibre entre complexité et simplicité ; 5. L'intérêt d'entrer par les relations a été souligné par plusieurs participants.

1.2. Résolution collaborative de problèmes ouverts, INRP et IREM de Montpellier. *Responsables : Marie-Claire Combes, Mireille Sauter. Présentation Mireille Sauter.*

Il s'agit d'une équipe en constitution suite à la fin du projet du SFoDEM auquel plusieurs membres de l'équipe ont participé (cf. Guin D., Trouche L. (2004), *Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques*, *Repères-IREM* 55). Il s'agit d'une équipe d'enseignants qui travaillent en réseau via Internet. La question essentielle était : comment faire vivre la résolution de problèmes ouverts en classe. Ce nouveau projet vise à se recentrer davantage sur les élèves. Pour illustrer la problématique de recherche du groupe, le problème des arbres a été présenté (envoyé quelque temps auparavant aux participants de ce thème de travail).

Énoncé du problème : Un arbre mathématique est composé d'un tronc, de branches, de nœuds et de feuilles. Pour en dessiner un, on fait un trait (c'est le tronc) dont on marque l'extrémité (c'est le premier nœud). Puis on continue en traçant de nouvelles branches, nœuds et feuilles. Pour tracer une nouvelle branche ou un nouveau nœud, on fait partir un trait d'un nœud existant vers un endroit libre : l'extrémité du trait sera notre nouveau nœud. Pour tracer une feuille, on dessine un nœud qui part d'une feuille et y revient. Chaque nœud peut ainsi porter une nouvelle feuille, une nouvelle branche ou plusieurs nouvelles branches, chaque nouvelle branche se termine par un nœud. Attention, un nœud qui porte une feuille ne porte rien d'autre.A la fin, tous les nœuds doivent porter quelque chose(branche ou feuille). (exemples de dessin à 10 branches, 1 branche, 2 branches)

Le problème est de compter les arbres qui ont une branche, puis 2 branches, puis 3 branches …. et de trouver une méthode qui permette de les dessiner tous une fois et une seule. Sur cet énoncé, il y a trois problèmes possibles, suivant la façon dont on définit un arbre. C'est un travail de type expérimental, qui met en évidence l'importance de la définition des objets. Cela conduit à un travail important sur les objets, à une généralisation. En fait, on obtient essentiellement des résultats partiels, qui ne conduisent pas encore à une généralisation, excepté pour l'un des trois problèmes.

Le problème a fait l'objet d'un travail collaboratif entre 13 enseignants de collège et de lycée et 21 classes. La recherche a été organisée sur une période de 4 et 5 semaines et les travaux ont été archivés sur une plate-forme. Il s'agit d'un travail très structuré qui s'appuie, en plus du travail de groupe et des débats, sur les *narrations de recherche*. Il en est résulté un corpus très riche. Dans le problème, l'appropriation de la notion d'arbre est nécessaire. L'analyse a priori est encore à construire. De nombreuses questions renvoyant aux objets permis par la définition sont apparues. Est-ce que tous les arbres formés de deux branches consécutives sont identiques ? on dira que oui, car sinon le problème est impossible (l'orientation des branches n'est pas prise en compte) ; est-ce qu'un arbre fermé est possible ? on car il ne répond pas à la définition d'un arbre donnée dans l'énoncé. Sur les positions spatiales en lien avec la symétrie, il y a trois choix possibles qui conduisent à trois problèmes différents : est-ce que les arbres « en miroir » sont identiques ou non ? est-ce que deux arbres obtenus en échangeant la place de deux branches sur un même niveau sont identiques ou non ? Pour la représentation des arbres, on trouve un travail important de construction par niveau, par nœud ; un travail avec des codages (seconde), ou des algorithmes de construction (ramifications, sixième), pour ne pas en oublier. Ceci conduit à un travail important sur les objets : la nécessité de définitions et de notations spécifiques ; un travail de modélisation en seconde conduisant à des essais de recherche de fonctions de degré 3 et des résolutions d'équations. Les copies font apparaître une richesse du travail mathématique : travail sur les définitions d'objets ; recherche de formules ; de conjectures. Comme prolongement, l'équipe est intéressée par des collaborations ; une reprise du problème, sous une forme différente ; éventuellement d'autres problèmes. Cela suppose un travail important d'analyse.

Les échanges ont porté sur : 1. Les aspects très abstraits et les isomorphismes de structure ; 2. Le « risque » d'une conception instrumentale des objets et l'éventualité d'un retour aux mathématiques modernes et au travail sur les ensembles ; 3. La place de l'arbitraire en mathématiques ; la mise en perspective avec les propositions d'ERMEL, moins ouvertes ; 4. Les questions mathématiques qui ont guidé ce choix de problème (numérique, géométrique) ; 5. Ce qui est attendu en termes d'apprentissage par les élèves ; 6. Comment exploiter avec les élèves toutes les pistes ouvertes ; 7. Des demandes d'éclairage sur le travail collaboratif ; 8. Sur l'importance du travail sur la nominalisation et les définitions en mathématiques (ces questions renvoient au travail de thèse de Cécile Ouvrier-Buffet (2003) sur la construction des définitions).

1.3. ECCE-math (Écrire–Chercher–Concevoir–Échanger des mathématiques)

INRP, IREM et IUFM Pays de Loire, Centre François Viète (Nantes), et Centre de Recherche en Éducation Nantais (responsables : Évelyne Barbin, Magali Hersant). Présentation Evelyne Barbin.

Une équipe INRP en Histoire et épistémologie des mathématiques, de 25 à 30 personnes, a fonctionné pendant quatre ans, en lien avec la commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie, ce qui a abouti au colloque de Clermont-Ferrand (*Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements,* Colloque inter IREM-INRP, 16e colloque Inter-IREM, épistémologie et histoire des mathématiques, IREM Clermont-Ferrand, 19-20 mai 2006).

L'équipe s'est intéressée, dans sa manière de travailler, à la façon dont les problèmes interviennent, dans le cadre d'une épistémologie historique (et culturelle). Les questions que l'équipe se pose sont les suivantes : comment trouver le sens ; quelles sont les conditions d'élaboration des problèmes ; dans quel contexte culturel et historique. Les travaux associent : histoire des mathématiques, enseignement supérieur et formation des enseignants. L'équipe s'intéresse aux modifications apportées dans l'enseignement des mathématiques par l'introduction d'une perspective historique : concepts et théories versus problèmes ; les mathématiques comme instrument pour résoudre des problèmes ; constructivisme versus dogmatisme. L'équipe s'intéresse également à l'analyse de l'activité mathématique. Le rôle des problèmes dans la construction des connaissances : conjecture ; erreurs ; évidence ; démonstration. Il s'agit d'intéresser les élèves, plutôt que de les motiver ; de dégager des problématiques et des champs de problèmes. La problématisation participe de la construction de la science et de l'organisation des connaissances. Il s'agit : de trouver du sens (avant d'enseigner) et non pas de donner du sens ; de concevoir « apprendre des mathématiques » comme une activité et non comme la seule assimilation d'un corpus scolaire « inventé » ; de considérer que rien ne va de soi. Ce travail a été conduit au sein de plusieurs équipes : Paris : la multiplicité des points de vue ; Dijon : les problèmes comme manière de travailler l'interdisciplinarité ; Rennes & Nantes : la question de la rigueur ; Lille : la géométrie et l'algèbre. Des questions ont été étudiées sur le point de vue expérimental : ce qui est premier ; le mouvement ; l'identité par superposition ; la démonstration assurant la validité de la construction des savoirs : Euclide, Hilbert, l'axiomatisation. Deux questions d'enseignement en seconde, à la charnière collège-lycée, ont été étudiées. La première concerne les cas d'égalité des triangles et relations d'incidence, la seconde concerne la naissance de l'algèbre classique (un étudiant en thèse travaille sur les textes arabes, dans la perspective d'une anthologie).

La nouvelle équipe ECCE s'est mise en place sur Nantes depuis un an. Dans cette nouvelle recherche, on se propose de confronter des écrits d'élèves, d'étudiants, de mathématiciens, sur la manière dont on écrit des mathématiques en situation de résolution de problèmes, en conjuguant des approches didactiques, épistémologiques, historiques. Dans ce projet, différents types d'écrits seront analysés : pour les élèves, narrations ; pour les mathématiciens : écrits de travail ; correspondances ; mémoires. Ce travail est né de la demande des mathématiciens qui sont venus à l'IREM de Nantes demander des éclaircissements et qui sollicitent un travail sur la liaison lycée-université, qu'il est urgent de conduire. Pour cela, un recueil de traces écrites est conduit : phrases, figures, formules, schémas : étude de la succession des écritures. Pour les analyses, les références théoriques s'appuient sur Bakhtine (1979) *Éloge de la création verbale* : 1. conception dialogique : on écrit en pensant à quelqu'un d'autre. 2. attitude « responsive » du lecteur, faire lire le texte ; 3. la sphère d'échanges qui conduit à des productions d'écrits différents selon les cas : une personne ; un lectorat concernant peu de gens ; un large public ; la postérité.

Les échanges ont porté sur : 1. La typologie des écrits (que fait-on des plaquettes sumériennes) ; 2. Instruments versus outils, le cas des algorithmes devenus objets d'étude ; 3. Quels problèmes pour la liaison lycée-université ; 4. Quels corpus faire lire aux élèves ; 5. Les liens avec la représentation des mathématiques ; la multiplicité des rapports aux mathématiques ; 6. Un travail de recherche sur les écrits de travail de mathématiciens a été cité (Misfeldt M. (2006), *Mathematical Writing*, Ph. D. Danmarks Pædagogiske Universitet).

1.4. Équipe La dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématique

INRP, IUFM, IREM Lyon, LIRDHIST-Lyon 1 (responsable : Viviane Durand-Guerrier). Présentation Gilles Aldon.

L'équipe s'est mise en place à la rentrée 2005-2006 ; ce qui est présenté est un travail en cours. L'une des principales motivations pour ce travail est le constat que, malgré les injonctions institutionnelles, les problèmes de recherche diffusent peu dans les classes. L'équipe fait l'hypothèse que l'une des raisons tient au fait que les notions mathématiques en jeu sont peu ou mal identifiées et que l'accent est mis principalement sur les heuristiques, ceci rentrant en conflit avec la nécessité de remplir un programme chargé sur des durées de plus en plus courtes. Elle se propose donc de retravailler sur les problèmes de recherche analysés et expérimentés, de repérer les notions mathématiques qui sont travaillées et qui pourraient être institutionnalisées, en lien avec le milieu mis en place (objets matériels ou non, état des connaissances, documents et supports de nature variée etc…). Ceci constitue le premier axe de travail. Un des problèmes sur lequel l'équipe travaille en ce moment a été envoyé à tous les participants. Il s'agit du problème des *Urnes de Polya* : « Dans une urne, on place une boule rouge et une boule noire. A chaque étape, on tire une boule au hasard, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur. Que se passe-t-il ? ». Ce problème a été expérimenté avec des moniteurs du CIES (Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur), avec des étudiants de BTS agricole, avec des élèves de seconde. Les notions mathématiques susceptibles d'être mobilisées varient suivant les niveaux : en seconde : fluctuations d'échantillonnage ; en BTS : probabilités, tests, lien entre statistique et probabilités ; au CIES, plusieurs points de vue théoriques apparaissent : par exemple, la théorie des graphes. Cette situation favorise une démarche expérimentale par le va-et-vient entre les aspects empiriques et théoriques. Une question est posée par ce type de situation : quelle fonction remplit la dimension expérimentale de la situation ? permet-elle une meilleure appropriation de la situation ? Le travail comporte deux autres axes, étroitement articulés au premier. L'un consiste à repérer, sur des notions mathématiques clés du programme, un ensemble de problèmes de recherche pertinents pour l'apprentissage de ces notions. L'autre consiste à élaborer des outils pour analyser l'activité des élèves dans un problème de recherche donné. Deux questions vives sont à l'étude : 1. Comment passer d'une « situation mathématique intéressante » à une situation de classe intéressante (les pistes explorées concernent les modalités à mettre en place pour une entrée par une démarche expérimentale et les choix à opérer pour une adaptation de l'énoncé en fonction du niveau) ; 2. Quels dispositifs mettre en place pour favoriser et stimuler les allers et retours entre expérience et théorie.

Les échanges ont porté sur : 1. La question du rôle de l'analyse a priori des situations : les interrogations sur l'équilibre entre prévisibilité et incertitude ; 2. La question de savoir s'il y a une différence entre expérimentation en mathématiques et dans les sciences expérimentales ; les différences entre lois et théories ; nécessité de bien pointer ces différences. 3. Que recouvrent les termes et expressions *démarche expérimentale / expérience / dimension expérimentale ; expérience versus heuristique* ? ; 4. Sur les usages d'un tableau, d'une calculatrice, d'un logiciel de géométrie dynamique ? 5. La géométrie est-elle une physique très appauvrie ? 6. Sur la possibilité de concilier les deux premiers axes (ouverture versus notions bien repérées) ? 7. Sur la nécessité de distinguer notions et concepts.

2) DISCUSSION ET PRÉSENTATION D'UNE SYNTHÈSE

Il ressort des différentes présentations des points de convergences, mais aussi des questions, qui renvoient assez fortement à la double approche épistémologique et didactique, selon celui des pôles qui est en quelque sorte premier dans le questionnement.

2.1. Les mathématiques, ça s'écrit

Les questions concernant ce point sont nombreuses : importance des définitions, de la nominalisation ; de leur place dans le processus de résolution de problèmes. Quand faut-il définir : au début, à la fin, ou sous forme d'allers-retours ? Cela dépend des contextes : formule d'Euler et polyèdres ou axiomatisation de la géométrie. La nécessité des définitions est mise en évidence par les problèmes de communication ; elles peuvent évoluer au cours du travail de recherche. Une place particulière est occupée par la désignation dans les problèmes de recherche. Cependant la question se pose différemment suivant les niveaux. Les enseignants du premier degré ne sont pas toujours aptes à faire les analyses a priori en termes de savoirs mathématiques. Ceci pose problème car, avec les problèmes de recherche, on ne peut pas en faire l'économie. De même la question de la nécessité des définitions ne se pose peut-être pas de la même manière au cycle 3 ou au collège.

2.2. La notion de validation *versus* la légitimation

La validation a à voir avec l'argumentation ; la légitimation renvoie à un corpus constitué. Les liens entre argumentation, démonstration et preuve sont dépendant aussi des destinataires, et liés à la question de l'évaluation. La question de la validité est liée au vrai et au faux, mais aussi à la déduction. Ces questions renvoient aux difficultés de phases de gestion de débat.

2.3. Sur l'activité mathématique des élèves

Une question centrale apparue au cours de nos échanges est celle de savoir ce qui garantit une réelle activité mathématique de l'élève. Ceci renvoie à l'importance de la relation de l'élève au problème : travailler sur les potentialités des situations ne doit pas conduire à occulter le sujet ; importance des écrits, des actions.

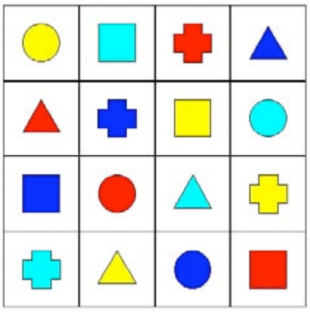
2.4. La légitimation sociale de nos travaux

Nous avons à nous poser la légitimation sociale de ce que l'on fait. Il est nécessaire de préciser les choses. Peut-on dire qu' « un problème ouvert est toujours fermé pour le professeur » ? Ce n'est pas toujours le cas ; on peut proposer des problèmes dont la forme la plus générale est ouverte.

En conclusion, malgré des expériences extrêmement différentes dans les quatre équipes et la diversité des points de vue adoptés, on sent qu'il y a des questionnements communs, que nous pouvons envisager de mutualiser sous une forme à définir (peut-être par le choix d'un problème commun).

Synthèse de l'atelier du thème 2

Claire Margolinas et Alain Mercier



Participants : Joëlle Delattre, Jean-Luc Dorier, Denise Grenier, Claire Margolinas, Yves Matheron, Alain Mercier, Anne Michel-Pajus, Robert Noirfalise, Annie Noirfalise, Marie-Noëlle Racine, Marie-Christine de Redon, Eric Roditi, Floriane Wozniak.
L'atelier réunissait des participants aux recherches de développement CII Didactique et Démathé, auxquels se sont joint des collègues participants à des groupes d'histoire et épistémologie. Etant donné que les différents groupes membres de développement CII Didactique venaient de se réunir pendant deux jours pour s'exposer mutuellement leurs travaux, nous n'avions pas prévu de présentation de chacun des groupes. Notre ambition (sans doute trop optimiste !) avait donc été de travailler directement sur une question de fond qui concernait tous les participants présents à l'atelier.

INTRODUCTION

Quels sont les travaux qu'il faut engager et/ou que nous avons engagés pour transformer des résultats de recherche en savoirs pour le professeur ? Implicitement, cette question soulevait un certain nombre de problèmes. Parler de « résultats de recherche » demande de considérer à la fois certaines recherches et certains résultats, ce qui demande un minimum de « fond commun » permettant de considérer comme légitimes au moins certaines recherches et certains résultats. Parler de « savoirs pour le professeur », là encore, demande d'avoir quelques éléments en commun sur la façon d'envisager la situation du professeur et la façon dont des savoirs – mathématiques ? didactiques ? etc. – y interviennent. De fait, une bonne partie de l'atelier a été consacrée à la recherche – pas toujours facile – de points communs qui auraient permis de rentrer dans le sujet proposé. Ce sont ces questionnements dont nous chercherons maintenant à rendre compte de façon succincte.

1) QUELLE DIFFUSION ?

Un des problèmes qui se pose est la place des « activités » ou « séquences » *clé en main* pour le professeur par rapport à celle de l'explicitation des enjeux mathématiques (qui peut passer par différents filtres : épistémologique et didactique, notamment). Il ne s'agit pas de points de vue contradictoires, mais sans doute complémentaires, par contre, les types de travaux qu'ils impliquent sont fort différents. :

– si l'on vise la diffusion d'activités, alors il faut comprendre, dans des activités expérimentées avec à la satisfaction de professeurs associés à la recherche, ce que l'on peut décrire de leur efficacité, mais aussi qu'est-ce qui permet au professeur de concevoir et de mener une telle activité ;

– si l'on vise la diffusion de savoirs, alors il faut comprendre quels sont les savoirs utiles au professeur et comment les diffuser. C'est l'épistémologie du professeur qui est visée.

Par-delà l'analyse mathématique, quels sont les outils théoriques dont le professeur peut avoir besoin ?

2) UNE OFFRE COHÉRENTE ?

Même à l'intérieur d'un petit groupe comme celui de l'atelier, ce que nous proposons aux professeurs est de nature très différente. Nous pourrions peut-être mettre une cohérence dans ce que nous proposons.

3) QUESTIONS CURRICULAIRES

Une autre question est celle de l'affaiblissement des curriculums. Les réformes de l'enseignement ont déplacé des éléments de savoir, ce qui conduit, dans différents domaines, à disposer de plusieurs techniques, mais sans jamais approfondir ces techniques, qui pourraient devenir objet d'étude. Le fait d'enquêter sur ces difficultés curriculaire et de diffuser les résultats de ces enquêtes fait partie de notre travail.

4) LA PRATIQUE DU PROFESSEUR

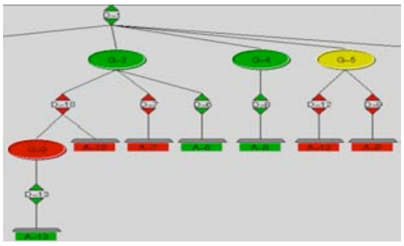
Parallèlement à la formation épistémologique, il y a une pratique du professeur. Ces aspects sont fortement intriqués, il faudrait mieux connaître la nature de ces liens, qui sont abordés par plusieurs approches théoriques. Yves Chevallard décrit le « trou » existant, dans la réalité du professeur, entre « domaine » et « secteur ». D'autres approches observent la même difficulté, pour le professeur, à prendre en compte la dimension épistémologique et mathématique de son travail au-delà du quotidien des activités de classe, c'est-à-dire dans la cohérence et la continuité. Un problème est de trouver des questions qui vont motiver l'enseignement sur des secteurs ou des domaines pour donner du sens aux mathématiques. Cette question est liée aux problèmes curriculaires, le problème c'est de trouver ou de retrouver le lien entre des objets de savoir.

5) QUEL DEVENIR ?

La diffusion des objets peut se faire par des militants, mais le problème qui se pose est celui de l'observation du devenir de ce que l'on propose, qui doit être inclus dans la recherche de développement elle-même.

Synthèse de l'atelier du thème 3

L. Trouche, à partir des notes prise par F. Hérault, O. Viégas et L. Hivon



L'atelier s'est déroulé en deux temps : d'abord une présentation des recherches en cours dans ce domaine (suivie d'une discussion), puis la recherche de grands axes de recherche communs pour 06-07. Pour en savoir plus sur les projets présentés ci-dessous, on pourra se reporter à la page du site EducMath présentant les équipes associées à l'INRP http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees.

1) PRESENTATION ET DISCUSSION DES RECHERCHES EN COURS

1.1. EMULE (Enseignement des Mathématiques et Usage en Ligne d'Exercices)

Equipe composée d'enseignants de l'Académie de Rennes, de l'IUFM de Bretagne et de Basse Normandie. Présentation de Ghislaine Gueudet, responsable de l'équipe

Ces travaux sur les Bases d'Exercices (BE), en particulier la base Mathenpoche, sont en relation avec ceux de Paris 7. Il s'agit de considérer ces logiciels comme des outils pour les enseignants, d'observer les genèses instrumentales de ceux-ci. La notion de scénario d'usage (Trouche et Guin 2006, Pernin et Lejeune 2004) est utilisée pour analyser l'utilisation de la BE par les enseignants. Différents *scénarios* peuvent être envisagés, prédictifs ou descriptifs, avec plus ou moins de contraintes pour les élèves, plus ou moins de différenciation prévue, et de granularité variée (objectifs d'apprentissage à l'échelle d'une séquence, ou d'une séance…). Une *grille d'analyse* de scénario a été conçue.

Evolutions : chez les enseignants du groupe, des évolutions ont été observées. Les scénarios sont plus variés ; ils comportent plus de différenciation et plus de contraintes. Par ailleurs ils sont de plus en plus pensés au niveau de la séquence.

Perspectives de recherche : analyser l'écart entre les intentions des concepteurs et l'utilisation dans les classes (*distance instrumentale* (Haspekian 2005)) ; prendre en compte les critères du *degré d'intégration* (Assude à paraître) ; continuer à observer les évolutions dans les classes des enseignants du groupe, et interroger par questionnaire d'autres enseignants utilisateurs de BE.

Discussion : *Avez-vous travaillé sur les rétroactions ?* Non, c'est plutôt l'équipe de Paris 7 qui travaille sur ce point. *Quelles traces possibles ?* La question des traces est fondamentale : traces écrites demandées par l'enseignant en séance machine, usage par l'enseignant des suivis informatiques des élèves. Nous les analysons en termes de contrat didactique essentiellement. *Quel lien entre la recherche de cette année et l'année prochaine ?* Les enseignants du groupe continueront de décrire leurs pratiques, mais nous essaierons de plus de faire passer des entretiens à des enseignants que nous avons interrogés par questionnaire cette année, et de proposer des questionnaires à un grand nombre d'enseignants (cette année que démarre l'expérimentation académique bretonne de Mathenpoche, qui sera particulièrement suivie par le groupe ECUM avec lequel nous allons nous coordonner). L'idée est d'observer des genèses instrumentales non influencées par l'appartenance au groupe EMULE.

Références :

ASSUDE T. (à paraître), Degré d'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire, *Colloque EMF 2006*, Sherbrooke, Québec.

GUEUDET G. (2006), Scénarios d'usage de bases d'exercices de mathématiques en ligne, in H. Godinet, J.-P. Pernin (eds.), *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien*, INRP, 43-48.

HASPEKIAN M. (2005), *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques : étude du cas des tableurs*, Thèse de doctorat. Université Paris 7.

PERNIN J.-P., LEJEUNE A. (2004), Dispositifs d'apprentissage Instrumentés par les Technologies : vers une ingénierie centrée sur les scénarios, *Colloque TICE 2004*, UTC, Compiègne.

TROUCHE L., GUIN D. (2006), Des scénarios par et pour les usages, in H. Godinet, J.-P. Pernin (eds.), *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage : une nouvelle compétence pour le praticien*, INRP, 79-84.

1.2. SFoDEM (Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques)

Equipe composée d'enseignants de l'IREM de Montpellier. Présentation de François Roux et Jacques Salles, animateurs du SFoDEM

L'objectif du SFoDEM est de concevoir et mettre en œuvre un accompagnement continu des enseignants dans leur effort pour intégrer les TIC, à partir d'une conception collaborative de ressources pédagogiques. Les hypothèses : un suivi continu de la formation des enseignants, un dispositif hybride, en présence et à distance, la conception de ressources pour la classe, un climat de confiance, dans une *communauté de pratique*, des ressources homogènes (un modèle), contenant une description de leur usage, sont de bonnes conditions pour faciliter l'intégration des TICE. Plusieurs thèmes de formation ont été choisis, pour extraire des *invariants* sur la structure des ressources et sur l'organisation de la formation. Des outils ont été conçus pour développer un environnement de confiance mutuelle (des chartes par exemple, précisant les droits et les engagements de chaque acteur), pour organiser le travail de chacun et du groupe (baromètres, mise en place de mémoires de travail, individuelles et collectives). Un modèle de ressources a émergé à travers les expérimentations : au départ une question didactique, un point de programme, un fichier informatique (animation géométrique par exemple), puis la conception d'un document pour l'élève, puis un scénario d'usage, puis des comptes rendus d'expérimentation pour les retours d'usage.

Evolutions : les frontières entre les rôles d'utilisateur et de concepteur se déplacent. Des « groupes de projet » se constituent pour développer des germes de ressources, ils stimulent le processus de conception de ressources. De nouveaux besoins d'informations apparaissent sur les usages (apparition d'une fiche traces de travaux d'élèves) et sur l'évolution des ressources (apparition d'une fiche CV d'une ressource).

Perspectives de recherche : conception d'un guide méthodologique qui serait une aide pour des communautés d'enseignants voulant concevoir et mettre en œuvre un dispositif de conception collaborative de ressources. A partir d'une abstraction de l'expérience du SFoDEM, des outils seront proposés (chartes, baromètres), des exemples seront donnés (ressources, histoires de ressources par exemple), des rubriques théoriques (travail collaboratif, narrations de recherche, vidéoprojection,…) éclaireront les choix réalisés pour la conception des ressources.

Discussion : *Vu le nombre de communautés différentes, peut-on parler de communautés de pratique ?* On ne peut pas dire que les formateurs et les stagiaires sont tout à fait des pairs. Les formateurs se situent plutôt comme personnes ressources, comme « facilitateurs ». Les communautés de pratique sont émergentes.

Référence : GUIN D. JOAB M., TROUCHE L. (2003), *SFoDEM, bilan de la phase expérimentale*, cédérom, IREM, Université Montpellier II.

1.3. Aplusix

Equipe composée d'enseignants et enseignants-chercheurs de l'Académie de Grenoble, (IUFM et MeTAH). Présentation de Hamid Chaachoua, responsable de l'équipe. Le logiciel Aplusix est un micromonde d'algèbre, exerciseur, éditeur d'exercices et de problèmes.

Depuis 2002, trois enseignants utilisent le logiciel, à leur façon, dans leurs classes ($4^{ème}$, $3^{ème}$, seconde et $1^{ère}$ toute l'année), en module, aide individualisée, en séance d'exercices, ou pour préparer un contrôle. Il s'agit d'utilisations dans le cadre des expérimentations, pour tester des ingénieries didactiques. Le contrat passé avec eux suppose qu'ils recueillent des productions d'élèves, qu'ils tiennent un cahier de bord et qu'ils fassent un compte rendu annuel.

Perspectives de recherche : deux enseignants de référence travailleront en équipe avec un nouveau professeur. Objectifs : étudier les conditions d'intégration du logiciel Aplusix dans une classe, les moments d'utilisation, les types d'utilisation des ressources en ligne et la construction de nouvelles situations par les professeurs eux-mêmes. Questions de recherche : évaluer comment les enseignants s'approprient et mettent en place les séquences (les situations, les recommandations de leurs mises en œuvre), leur capacité à modifier les situations données « clés en main ». L'étude s'appuiera sur un réseau de professeurs utilisateurs des ressources (en cours) selon trois groupes : volontaires engagés, volontaires sans engagement, stagiaires de stages de formation continue. Les professeurs auront pour tâche d'utiliser des exercices en ligne, de compléter une fiche d'utilisation, de communiquer les autres exercices « Aplusix » proposés aux élèves, de récupérer des photocopies d'un cahier d'élève.

Discussion : *Quels sont les moyens mis en place pour les échanges ?* Un cahier de bord, un échange régulier sous forme de compte rendu sur l'utilisation des exercices en termes d'évolution (grille à remplir). Les enseignants chercheurs vont analyser les grilles et se demander comment accompagner le produit.

Références :

LABORDE C. (1998) Vers un usage banalisé de Cabri-géomètre avec la TI 92 en classe de Seconde : analyse des facteurs d'intégration. In D. Guin (ed.), *Actes du colloque Européen Francophone, Calculatrices Symboliques et géométriques et géométriques*, La Grande-Motte.

NICAUD J.F., BOUHINEAU D., CHAACHOUA H. (2004). Mixing Microworld and CAS Features for Building Computer Systems that Help Students to Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 169-211.

NICAUD J.F., BITTAR M., CHAACHOUA H., INAMDAR P., MAFFEI L. (2006) Experiments of Aplusix in four countries, *International Journal for Technology in Mathematics Education*.

1.4. CROME (Calculatrices en Réseau : Orchestrations et Mutualisation dans un nouvel Environnement

L'équipe est composée de 6 enseignants de lycée de l'Académie d'Orléans-Tours, dans le cadre de l'IREM et de l'IUFM. Présentation de Laurent Hivon, responsable du projet.

L'équipe étudie les conditions d'intégration et la viabilité d'un dispositif (TI-Navigator), ensemble de matériels et logiciels permettant de faire fonctionner en réseau des calculatrices connectées par 4 à l'aide d'un hub, les hubs étant reliés à un ordinateur et à un vidéoprojecteur (cf. figure 1). Ce type de dispositif n'est pas commercialisé en France. Il l'est en revanche aux Etats-Unis et dans quelques autres pays. L'équipe d'Orléans-Tours a expérimenté ce dispositif en 2005/2006 et poursuit ce travail en 2006/2007 au moins.

Figure 1 : *le dispositif TI-Navigator*

Les hypothèses de recherche sont de deux types : d'une part, l'intégration de ce nouveau dispositif dans la classe suppose un renouvellement profond des situations mathématiques et des *orchestrations* spécifiques et d'autre part la mise en oeuvre raisonnée de ce dispositif pourrait favoriser une modification du rapport entre *l'élève* et le *groupe-classe*, facilitant l'émergence d'un débat entre pairs.

L'équipe a choisi de travailler en modules avec 4 groupes de 4 calculatrices en 2$^{\text{nde}}$, terminales ES et S. La conception des exercices se fait sur ordinateur ; les textes des exercices sont ensuite envoyés sur les calculatrices. L'enseignant peut visualiser sur l'écran de l'ordinateur tous les écrans des calculatrices et peut choisir de vidéoprojeter tout ou une partie de ces écrans selon les objectifs de la séance. Un élève peut également demander à envoyer ses données, cela peut être un contre-exemple, à la classe entière via le hub.

Ce dispositif permet aux élèves d'échanger tous les types de données contenues dans une calculatrice : listes, variables, programmes, courbes, dessins... et de partager un écran commun, sur lequel les données de toute la classe peuvent se superposer (par exemple des points dans un même repère), Il permet au professeur de proposer aux élèves de nombreux types d'exercices ouverts ou fermés, de mettre en place des sondages rapides dans la classe, de concaténer en un seul fichier les données obtenues par l'ensemble des calculatrices (par exemple pour des simulations).

Discussion : *Avez-vous observé des phénomènes d'instrumentalisation ?* Oui, une fois en classe de 2nde, les élèves ont détourné une activité qui consistait à placer dans un espace commun des points selon une contrainte sur abscisse et ordonnée, pour faire une course poursuite avec leurs points, les points de chaque élève étant d'une couleur différente. Les élèves se sont ainsi accordés une petite pause de 5 mn et se sont remis au travail sans difficulté, ce type d'activité les rendant très volontaires. *Les dispositifs particuliers de gestion de classe ont-ils évolué sur l'année ?* Oui, notamment les rythmes de travail. Le débat a toute sa place dans ce type de travail et cela suppose une orchestration de la part du professeur. Il est intéressant d'observer les résultats et fluctuations, en temps réel, d'un débat grâce aux captures d'écran. Ainsi, des temps de pause sont nécessaires pour favoriser les nombreux va-et-vient. Les rétroactions sont apparues très fortes sur le travail individuel des élèves. Le travail en groupes de 4 élèves a été privilégié, la cellule de 4 étant induite par le matériel. *Est-il réaliste pour le prof de suivre simultanément les 16 écrans ?* Non. Mais cela permet de s'assurer que tous les élèves sont bien dans l'activité et qu'il n'y a pas de réponses complètement hors sujet. Le prof peut aussi demander une seule réponse par groupe de 4. *Le comportement des élèves est-il modifié par le fait de savoir qu'il y a un affichage public, anonyme ou non ?* Oui, sans doute. L'élève peut s'exprimer et a vraiment le sentiment d'appartenir à un groupe.

Référence : HIVON L. (2006), Vers une mutualisation de l'usage de la calculatrice, *MathémaTICE*, http://revue.sesamath.net/spip.php?article29.

1.5. e-CoLab (Expérimentation collaborative de laboratoires mathématiques)

Projet piloté par l'INRP et les IREM de Lyon, Montpellier et Paris 7, responsables : Gilles Aldon, Michèle Artigue et Luc Trouche. Il s'agit d'expérimenter une nouvelle plate-forme mathématique, 5 classes de seconde sont impliquées. Jacques Salles, l'un des professeurs expérimentateurs, présente le projet.

Des expérimentations nombreuses ont déjà eu lieu à l'échelle internationale sur les calculatrices symboliques (Guin et Trouche 2002). Une nouvelle expérimentation débutera en septembre 2006, concernant une nouvelle « calculatrice » intégrant une suite d'applications interactives et très intégrées, sur un mode nomade (le logiciel fonctionnant également sur ordinateur et sur calculatrice), un « laboratoire pour faire des mathématiques ». L'archivage des données repose sur une architecture de classeurs structurés, pouvant partager des variables. Il sera ainsi plus facile, en théorie, de partager des documents entre élèves et enseignants ainsi qu'entre différents enseignants. L'expérimentation a pour objectif de concevoir des activités où le dispositif serait pertinent, d'exploiter, de modifier et d'adapter les ressources déjà existantes, notamment sur les thèmes des fonctions et des statistiques, de mutualiser entre les enseignants expérimentant ce matériel par l'intermédiaire d'un forum sur une plate-forme (progression commune des 5 classes de 2nde), de voir en quoi les résultats du SFoDEM pourraient être exploités dans ce nouveau contexte, d'étudier les contraintes de ce nouveau matériel, des conditions de viabilité, son influence sur les apprentissages, d'étudier les interactions papier-crayon / calculatrice.

Discussion : on remarque parfois que des enseignants de collège refusent catégoriquement d'utiliser une calculatrice avec leur classe ; d'où le gouffre qu'il peut exister entre les pratiques de différents enseignants. La question posée est : *Comment prendre en compte la mémoire du travail des élèves ?* Il sera sans doute nécessaire de créer un « cahier calculatrice ». Reste à savoir quelle place lui donner au sein de la classe et à définir son statut et son utilisation.

Référence : GUIN D., TROUCHE L. (2002), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

1.6. SESAMESmath (Situations d'Enseignement Scientifique : Activité de Modélisation, d'Evaluation et de Simulation)

L'équipe (INRP et IUFM de Lyon) est composée de 5 professeurs de collège, d'un chercheur et d'un doctorant. L'équipe est intégrée au sein d'un groupe pluridisciplinaire de recherche et de diffusion de documents pour les professeurs et les formateurs. Présentation de la responsable du groupe, Sylvie Coppé.

L'objectif de l'équipe (Coppé à paraître) est de proposer des outils pour le professeur sur le thème « Enseigner l'algèbre au collège et en 2nde ». Cela répond à un besoin, en effet les élèves ont du mal à utiliser le calcul algébrique au collège et au lycée, ils ont du mal à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas, l'aspect modélisation est peu mis en avant dans l'enseignement actuel de l'algèbre, la puissance de l'outil algébrique est sous-estimée dans les programmes. Il s'agit donc de diffuser des outils pour les professeurs et les formateurs en prenant en compte des résultats de recherche pour améliorer l'enseignement de l'algèbre au collège. Cela passe par la participation à la formation initiale et continue des professeurs : améliorer l'enseignement de l'algèbre, expliciter les choix pour apprentissage/enseignement, proposer des éléments de réflexion didactique pour une meilleure formation professionnelle, proposer des séances à mettre en œuvre dans les classes, donner à voir des éléments concernant l'apprentissage des élèves ou la pratique du professeur (vidéos ou photocopies de copies d'élèves. Des outils sont proposés au professeur : principes explicites qui guident nos choix d'activités à mettre en œuvre dans les classes, écrits théoriques sur des notions en lien avec algèbre, analyse de programmes et de manuels, propositions de séances de classe, éléments concernant la gestion de la classe. Les éléments proposés au professeur intègrent le texte du problème, mais aussi ses buts, objectifs, liens avec les principes généraux de l'algèbre, éléments de mise en œuvre, analyse de cette activité, productions des élèves, prolongements possibles…

La diffusion de ces outils est assurée par un site web dont l'architecture est évolutive. La construction du site n'est pas simple : Comment alimenter ce site, à quel rythme expérimenter des activités ? Quelles évaluations proposer ? Quelle place pour des activités d'entraînement ? Faut-il transformer, adapter, ouvrir les problèmes proposés dans les manuels ? Comment faire connaître ce site ? Quels documents proposer aux professeurs pour les aider dans leur pratique (question de recherche) ? Quels écrits théoriques doit-on donner ? Quel niveau de description des activités, quel détail des consignes, etc. ? Quel lien avec l'évaluation et les contraintes institutionnelles ? Quel détachement par rapport à ce qui est proposé dans les manuels et notamment l'ordre dans lequel on traite les chapitres ? Comment les professeurs s'approprient-ils ces documents (questions sur les pratiques) ? S'agit-il d'un véritable travail d'appropriation ou d'une simple application ? Peut-il y avoir formation seulement à partir du site ? Sinon comment articuler site et formation ?

Discussion *: A-t-on des statistiques sur l'utilisation du site par les professeurs ?* Le site est encore en chantier. Nous aimerions observer si les professeurs qui visitent le site vont chercher ou non les informations théoriques proposées.

Référence : COPPE S. (à paraître), Présentation d'un site sur l'enseignement de l'algèbre pour les professeurs. *Actes du 49ième congrès de l'Association Mathématique du Québec*. Sherbrooke 31 mai-1 juin 2006.

2) DISCUSSION ET PRÉSENTATION D'UNE SYNTHÈSE

Cette synthèse a été présentée aux journées en trois points.

2.1. Plusieurs points ou axes de travail sont communs aux différentes recherches présentées dans l'atelier

Le suivi du travail des élèves : quels *modes de travail* avec l'outil, les outils favorisent-ils la *participation* des élèves à l'enseignement, quel est le *réinvestissement* de ce qui est fait avec l'outil quand on repasse à un environnement papier-crayon, comment *diagnostiquer* les apprentissages réalisés pour prendre des décisions didactiques, à partir de quelles *traces* (copies d'élèves, vidéos, cahier numérique) ?

La gestion didactique des situations et des artefacts : quel *degré d'intégration* des outils dans la classe, quelles *configurations* mettre en place (élèves seuls devant leur poste, 2 par 2, vidéoprojection), quels *modes d'exploitation* de ces configurations (utilisation libre ou non, quels moments d'utilisation, quelles pauses, qui donne le rythme), quelle organisation du temps et de l'espace de la classe pour la mise en œuvre des situations (*scénarios*, *synopsis*, *canevas/modèles* de ressources, quelles variantes des scénarios en relation avec les variables des situations) ;

Les utilisation/évolution des ressources par et pour les professeurs : quelle analyse des ressources (analyse *a priori*, *a posteriori*, grille d'analyse, grille d'observation), quelle *mutualisation* des expériences (comptes rendus d'expérimentation ou d'usage, cahier ou journal de bord), quelle mise en commun des ressources (banque, *vivier*, cartes d'exercices) ;

Les *communautés* d'utilisateurs : quelles *conditions d'émergence*, de vie (niveaux de communautés – formateurs, professeurs volontaires, établissements pilotes), quels facteurs d'aide (présence-distance, site, plate-forme, forums, chartes, modalités de suivi, baromètres).

2.2 D'autres points ne sont pas communs, mais constituent une complémentarité, sont autant de raisons de croiser les regards

Les outils ne sont pas les mêmes (calculatrices, logiciels, plate-forme de mise à disposition de ressources) ;

Certains projets sont plus descriptifs (regarder comment des ressources sont utilisées, comment des communautés se constituent, évoluent), d'autres projets plus prescriptifs (proposer des ressources, analyser les usages, réviser les ressources…) ;

Les projets ne situent pas les résultats de recherche de la même façon : pour certains projets, il s'agit de concevoir des ressources pédagogiques pour aider le travail de l'enseignant (l'analyse du travail de l'enseignant, des effets des ressources, étant alors un objet de recherche), pour d'autres projets, il s'agit d'impliquer les enseignants dans une réflexion didactique (les ressources proposées incluent alors des ressources didactiques issues de la recherche) ;

Certains projets sont en relation directe avec les dispositifs institutionnels de formation initiale ou continue des enseignants, d'autres se situent au niveau des communautés d'enseignants qui se constituent dans le cadre d'un projet défini en commun.

2.3. Des objets de recherche communs ont été plus précisément dégagés pour 2006-2007

Les *traces* de l'activité de l'élève : comment les récupérer et qu'en faire ?

Les *scénarios* : peut-on envisager un modèle commun dont les différents projets tireraient des déclinaisons différentes ?

Les *comptes rendus* d'usage des ressources par les enseignants : quelle structure leur donner, comment les mutualiser, comment les exploiter pour une révision des ressources ?

Les communautés d'enseignants : quels outils concevoir (chartes, objectifs communs, négociation, assistance extérieure, experts…) pour faciliter leur émergence, leur développement ?

De l'avis général des participants, il y a là des éléments pour un programme commun de recherche, l'année 2006-2007 sera l'occasion de les préciser !

Perspectives

Comité scientifique des journées

Les questions que nous posions, à l'entrée de ces journées, étaient vastes. Notant que l'évolution des curriculums (au sujet de l'enseignement de la statistique par exemple), l'évolution des environnements technologiques, la confrontation avec les autres disciplines scientifiques au sein de dispositifs spécifiques, l'évolution enfin des mathématiques elles-mêmes interrogent l'enseignement des mathématiques, en particulier dans la perspective des mathématiques pour tous, nous demandions :

- quels nouveaux *équilibres* constituer entre la *recherche* et *l'étude* ?
- quelle est *la part de l'expérience* dans le cours de mathématique ?
- quelles situations mathématiques concevoir, quels dispositifs construire dans la classe ;
- quelles ressources pédagogiques construire par et pour les enseignants et quelle *mutualisation* ?

Les équipes de professeurs de mathématiques associés à l'INRP développent des recherches très variées, du point de vue des thèmes abordés, des dispositifs mis en place. Ces équipes constituent des cadres dans lesquels interagissent des chercheurs, appartenant par ailleurs à des laboratoires universitaires et des enseignants impliqués dans d'autres structures (IREM, IUFM). Pour favoriser les échanges autour des questions posées, nous avions proposé trois regroupements, autour de trois thèmes :

- la résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique ;
- les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire ;
- les instruments du travail mathématique et dispositifs d'enseignement dans les environnements informatisés.

Au moment de la clôture de ces actes, nous pouvons tenter un bilan de ces journées.

Un premier bilan porte sur la pertinence des questions posées : les trois conférences les ont abordées sous différents points de vue, l'articulation entre recherche et développement, l'articulation entre un point de vue didactique et un point de vue épistémologique, l'articulation entre conception et usages de ressources pédagogiques. Ces points de vue sont bien complémentaires, ils convergent autour de l'intérêt porté à la figure de l'enseignant et à la complexité de son travail. Comme le note Carolyn Kieran dans sa préface, il nous semble que « les directions de recherche mentionnées dans les textes de conférences et les comptes rendus d'ateliers de ces journées d'étude sont très prometteuses », elles reflètent bien les travaux en cours, et en même temps les regards croisés que ces journées ont suscités pourraient en permettre un nouvel approfondissement.

Un deuxième bilan concerne la pertinence des regroupements proposés : il apparaît, à la lecture des synthèses des trois ateliers thématiques, que les échanges de points de vue ont bien eu lieu, et que leur diversité n'a pas été un obstacle à la réflexion commune, bien au contraire. Les groupes qui se sont rencontrés lors de ces journées ont eu cependant des occasions très inégales, jusqu'à présent, de confronter leurs points de vue. Quand des échanges préparatoires ont pu avoir lieu, il a été possible de mieux situer l'enjeu des discussions et d'aller ensuite plus directement à l'essentiel, pour dégager ce qui est commun, ce qui est complémentaire et ce qui relève de divergences plus ou moins profondes. Les interactions possibles permises par le site EducMath peuvent faciliter ces échanges et permettre des prolongements au-delà des journées.

La séance de synthèse finale des journées a été sans doute trop brève pour dégager des éléments communs aux programmes de recherche spécifiques des différentes équipes. Un tel objectif est sans doute prématuré. Autant les échanges ont été faciles à l’intérieur de chaque thème, autant la discussion générale a fait ressortir la diversité des angles d’attaque et des cultures de recherche de chaque équipe. De plus, les stades d’avancement des travaux sont très variables : pour telle équipe, l’on en est à une première réflexion sur la définition d’activités d’étude et de recherche, pour d’autres équipes l’on en est à la dernière étape de réalisation d’un cédérom.

Premières journées d’études mathématiques de l’INRP, des échanges qui en appellent d’autres…

Liste des participants

NOM Prénom	Equipe	Adresse mail
ALDON Gilles	INRP, IREM Lyon	aldon@univ-lyon1.fr
ARGAUD Henri Claude	IUFM Grenoble	henri-claude.argaud@grenoble.iufm.fr
AURAND Catherine	IUFM Versailles	catherine.aurand@versailles.iufm.fr
BARBIN Evelyne	Université de Nantes	evelyne.barbin@wanadoo.fr
BOYE Anne	IREM Nantes	cenub@club-internet.fr
BUTLEN Max	INRP	max.butlen@inrp.fr
CHAACHOUA Hamid	IUFM Grenoble	Hamid.Chaachoua@imag.fr
COMBES Marie-Claire	IREM Montpellier	combes.mc@wanadoo.fr
COMBIER Georges	IUFM Lyon	combier@lyon.iufm.fr
COPPE Sylvie	IUFM Lyon	sylvie.coppe@univ-lyon2.fr
DE REDON Marie-Christine	INRP	mariechristine.dered@free.fr
DELATTRE Joëlle	Université Lille 3	jdelattre@nordnet.fr
DOUAIRE Jacques	IUFM Versailles	jacques.douaire@wanadoo.fr
DURAND-GUERRIER Viviane	IUFM Lyon	vdurand@univ-lyon1.fr
DUSSUC Marie-Paule	IUFM Lyon	dussuc@lyon.iufm.fr
FINI Claude	IUFM Grenoble	claude.fini@free.fr
FRONT Mathias	IUFM Lyon	mathias.front@laposte.net
GARAPON Stéphane	IUFM Lyon	sgarapon@free.fr
GERDIL MARGUERON Gérard	IUFM Grenoble	gerard.gerdil-margueron@wanadoo.fr
GRENIER Denise	CII Didactique	denise.grenier@imag.fr
GUEUDET Ghislaine	IUFM Bretagne	ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr
GUICHARD Yves	IREM Lyon	yguichar@club-internet.fr

HERAULT Françoise	IREM Paris 7	Herault.francoise@wanadoo.fr
HERSANT Magali	IUFM Pays de Loire	magali.hersant@yahoo.com
HIVON Laurent	IREM Orléans	laurent.hivon@ac-orleans-tours.fr
MARGOLINAS Claire	INRP	claire.margolinas@inrp.fr
MATHERON Yves	IUFM Toulouse	yves.matheron@toulouse.iufm.fr
MAZOIT Céline	IREM Lyon	Celine.Mazoit@free.fr
MICHEL-PAJUS Annie	IREM Paris 7	Annie.Michel-pajus@wanadoo.fr
MIZONY Michel	IREM Lyon	mizony@univ-lyon1.fr
MOISAN Jacques	Inspection générale	jacques.moisan@education.gouv.fr
MOUNIER Georges	IREM Lyon	georges.mounier@ac-lyon.fr
NICAUD Jean-François	Université J. Fourier Grenoble	Jean-Francois.Nicaud@imag.fr
NOIRFALISE Annie	IREM Clermont-Ferrand	robert.noirfalise@free.fr
NOIRFALISE Robert	IREM Clermont-Ferrand	robert.noirfalise@free.fr
PERRAUD Claude	IREM Orléans	claude.perraud@wanadoo.fr
RACINE Marie-Noëlle	IREM Dijon	mnracine@wanadoo.fr
RODITI Eric	CII Didactique	eric.roditi@free.fr
ROUX François	IREM Montpellier	francois.roux2@wanadoo.fr
SALLES Jacques	IREM Montpellier	j-salles@wanadoo.fr
SAUMADE Henri	IREM Montpellier	math.saumade@wanadoo.fr
SAUTER Mireille	IREM Montpellier	mireille.sauter@libertysurf.fr
TARDY Claire	IUFM Lyon	claire.tardy@wanadoo.fr
TRGALOVA Jana	INRP	Jana.Trgalova@imag.fr
TROUCHE Luc	INRP	Luc.trouche@inrp.fr
VIEGAS Odile	IREM Paris 7	odile.viegas@neuf.fr
WOZNIAK Floriane	IUFM Lyon	floriane.wozniak@lyon.iufm.fr