Plutôt en collège...

- Inverse de 0 ?

  "$1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car 0 c'est rien"

  "$1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car $\frac{1}{0}$ ça n'existe pas"

- Ecriture décimale d'un rationnel, nombre décimal

  Que faire d'écritures décimales obtenues à la main ?

  Quelles opérations sur les écritures décimales ?
  Qu'est-ce qu'une écriture décimale ?

  Comparaison de travaux sur les décimaux et sur les écritures décimales ?
  Quelle différence dans les manipulations ?
  Qu'est-ce qu'une approximation d'un réel ?

  "Sachant que : $0,3 + 0,2 + 0,5 = 1$, est-ce que : $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$?

  A-t-on : $\frac{1}{3} = 0,3$?" Qu'est-ce qu'on obtient avec la calculatrice ?

  Quelle approximation avec la calculatrice ?

- Somme de rationnels

  "A-t-on : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$? (à la calculatrice $0,9999...$).Comment le prouver ?"

  Puis un travail de preuve : comment prouver avec les fractions ?

- Vers une perception de l'égalité comme équivalence

  "Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens : $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0,5$ d'où une solution au rang supérieur"

- Cadre géométrique : une perception de découpages possibles du segment $[0;1]$

  "$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2}$ est la plus grande fraction de $[0;1]$ différente de 1, donc je ne peux remplacer le deuxième $\frac{1}{2}$ par une autre fraction qui convienne "

  La réalisation de croquis peut permettre de visualiser : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

- Conception sur les opérations

  A propos de $a + b = ab$: "le produit, c'est plus grand que la somme !"

- Décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$

  "Ce n'est pas possible d'obtenir 1 avec deux naturels distincts, car en ajoutant les deux plus grands résultats, on n'obtiendra que : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,833$".

- Possibilité de travailler les compétences en logique avant le symbolisme

  Difficulté pour débattre après l'obtention d'écriture de la forme : $0 = 0$.

suite

Plutôt en lycée...

- Inverse de O ?
- Somme et différence de rationnels

  "A-t-on : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$?(la calculatrice affichant 0,9999...). Comment le prouver ?"

  Transformation de : $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

  Calculs : $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;... ; $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$!
- Décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$

  soit en acte comme au collège

  soit lors de l'étude de : $a=1+\frac{1}{b-1}$.
- Cadre plus géométrique : une perception de découpages possibles du segment $[0;1]$
- Vers une perception de l'égalité comme équivalence

  "$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ est équivalent à $ab=a+b$ ou à $ab=1+1$?"

  "Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=0,5$ d'où une solution au rang supérieur"

suite

- Essais successifs, adéquation des valeurs de deux fonctions.

  Cet aspect est mis particulièrement mis en évidence lors de tests sur des expressions de la forme : $\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b}$ ou $a + b = ab$

  Pour quatre inverses un élève prend $d = 2$ et teste : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c}$

  $ab + ac + bc = abc$

- Travail sur tableur pour trouver une décomposition en une somme de trois fractions

- Travail en logique

  Raisonnement par l'absurde : $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ donc...

  Impasse : $a = f(b)$; $b = f^{-1}(a)$; $a = f(f^{-1}(a)) = a$

  Exemples et contre exemple pour les problèmes existentiels "Que dire aux élèves qui recherche un contre-exemple pour montrer que : $a + b \neq ab$?"

- Conception concernant la recherche

  "Un « algorithme » existe pour les cas 2 et 3 donc il doit exister pour le cas 1."

  "Inutile de passer au cas 2 si on n'a pas trouvé pour le cas 1"

  Compétence travaillée : les phénomènes mathématiques ne sont pas uniformes.

Remarque 1 :

En lycée, un démarrage sans calculatrice et une utilisation rapide de l'algèbre amènent parfois à des blocages en ce qui concerne le problème. Les productions montrent bien évidemment un travail certain des élèves sur ces notions non encore naturalisées. Une mise en commun pour prolonger ces travaux permet de travailler les transformations d'égalité, l'utilité de mettre en oeuvre des essais et de tester l'adéquation des valeurs de deux fonctions ici de deux ou trois variables... Cette piste n'est donc pas à laisser de côté.

Remarque 2 :

Ont été présentées ci-dessus les pistes les plus fréquentes. De très nombreuses autres sont certainement envisageables suivant le contexte (travail sur les propriétés de divisibilité en arithmétique, utilisation de l'équation du second degré pour déterminer a et b de somme égal au produit avec une généralisation éventuelle...). En cherchant vous en trouverez sans doute bien d'autres.