

Présentation des travaux du groupe ECCEMaths Ecrire, Chercher, Concevoir, Echanger des mathématiques

ECCEMaths

INRP, IREM de Nantes, IUFM des Pays de Loire,
Université de Nantes, Centre François Viète (Nantes),
Centre de Recherche en Education Nantais

10-11 juin 2009

Présentation du groupe ECCEMaths (2006-2009)

Ecrire-Chercher-Concevoir-Echanger des mathématiques.

5 professeurs du secondaire, 2 formateurs IUFM, 5 enseignants-chercheurs.
Responsables : E.Barbin (CFV) et M.Hersant (CREN).

Objectifs : conjuguer des approches historiques, épistémologiques et didactiques sur la recherche et l'écriture de résolution de problèmes et analyser et confronter des écrits de résolution de problèmes produits par des élèves, des étudiants et des mathématiciens.

Part importante de la dimension expérimentale des mathématiques (poser des problèmes, établir des conjectures, argumenter, convaincre et prouver), accompagnée ou pas par les TICE, dans l'enseignement au lycée.

- Que savons-nous des connaissances des lycéens sur la résolution de problème ?
- Comment former les élèves à cette dimension expérimentale ?
- Comment aider les enseignants à développer des apprentissages chez leurs élèves à la fois sur la dimension expérimentale et la dimension technique des mathématiques ?

Travaux :

- 06-07 : **3 problèmes** : un problème de chemin minimal sur un cône, un problème de dépassement et un problème de point fixe (analyse de productions en terminale et L1).
- 07-08 : **Correspondance lycéen-étudiant** sur un problème de maximum (étudiants de L1, L2, L3 et M1).
- 08-09 : **Correspondance lycéen-étudiant** sur un problème de maximum (au sein d'un module de L2).

En parallèle avec le groupe IREM Histoire :

- 06-07 : Etude sur l'enquête initiée par Maillet et poursuivie par Claparède et Fournoy. Certaines questions portent sur les méthodes d'investigation ou sur les habitudes de travail. Etude de *l'Essai sur l'invention mathématique* de J.Hadamard.
- 07-08 : Etude de la correspondance de Sophie Germain avec Legendre, Gauss, Poisson et Libri.

Questions vives :

- Qu'est-ce que chercher pour un élève ?
- Quel rôle joue l'écrit dans cette recherche ?
- Quels outils utilisés lors de la recherche ?
Liens avec l'idée d'expérimenter.
- Raisonner sur un cas particulier ou un exemple numérique peut-il fournir une démarche générale ?
- Deux genres d'écrits : explications et démonstrations.

Constat :

L'activité mathématique des élèves (notamment lors de la recherche d'un problème) est biaisée si le produit de cette activité est destiné à l'enseignant.

Certains grands objectifs de formation mathématique visés pas le programme de la série S :

- Acquérir des connaissances et les organiser.
- Mobiliser des notions, des résultats et des méthodes utiles dans le cadre de la résolution d'exercices.
- Prendre des initiatives.
- Comprendre et construire un raisonnement.
- Mettre en forme un raisonnement mathématique, une démonstration.

Double contrainte pour le dispositif :

- Créer une situation qui permette aux élèves de s'investir dans la résolution d'un problème et de déployer une activité mathématique consistante.
- Accéder à cette activité mathématique des élèves.

Écriture, échange et activité mathématique :

- Activité du mathématicien.
- Contexte scolaire.
- Correspondances historiques.

Caractéristique de la correspondance :

- Le choix du problème.
 - Lycéens : pas les connaissances pour résoudre le problème de façon experte mais d'autres moyens.
 - Étudiants : connaissances expertes pour résoudre le problème.
- Les correspondants.
- Une activité à faible contrat didactique.
- Le déroulement de l'échange épistolaire.
- Une séance de rencontre et de restitution.

Le problème

L'expression $\frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ admet-elle un maximum lorsque le point de coordonnées (x, y) décrit le premier quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$) ?
Si oui, le déterminer.

Consignes aux lycéens : Ecrire en détails à votre correspondant(e) les étapes de votre recherche, vos essais, vos réflexions, vos pistes de recherche, vos résultats, même s'ils sont intermédiaires ou partiels.

Consignes aux étudiants : Aider le lycéen à avancer dans sa recherche, le but n'est pas de lui fournir la réponse, ne pas hésiter à demander des précisions.

Problème ouvert : énoncé court et qui n'induit ni la méthode, ni la solution mais problème dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité.

Différentes méthodes de résolution :

- Expérimentation avec tableau de valeurs, conjecture et preuve du résultat.
- Travail sur des inégalités.
- Rechercher le plus petit des majorants.
- Raisonner avec les courbes de niveau.
- Passer en coordonnées polaires et séparer les variables.
- Utiliser les dérivées partielles.

- **Analyse des lettres des lycéens (aspects didactiques)**
 - Activité de résolution du problème par les lycéens.
 - Les lycéens, la validation et la question des extremums.

- **Analyse des échanges épistolaires**
 - La forme de la correspondance.
 - Les aides et les profils des correspondances.

- **Retour sur l'intérêt du dispositif du point de vue des participants**
 - Ce que retiennent les lycéens et les étudiants.
 - Ce qu'apprennent les enseignants.

Axe 1 : résolution du problème par les lycéens

Premières observations :

- Activité mathématique autrement plus riche.
- Véritables questions à propos de leur connaissance (par exemple, sur le domaine de validité d'un théorème).

Objectifs : caractériser la façon dont les lycéens résolvent et questionnent le problème et repérer les conceptualisations du maximum d'une fonction à l'oeuvre dans la résolution du problème.

Profils généraux :

- D'abord utilisation de leurs connaissances sur les fonctions à une variable, identification de la singularité du problème ensuite, tentative pour se ramener à un cas où leurs connaissances sont valables.
- D'emblée constat de la singularité du problème et de la non validité des techniques utilisées pour les fonctions à une variable, recherche pour localiser le maximum de la fonction par des raisonnements «créatifs».

Evolution de la conceptualisation de la notion de maximum.

Continuités et ruptures pour la validation d'énoncés.

Exemples autour de conceptions sur la justification et la démonstration :

- «Je ne sais pas si ma dérivée est vraie ou si elle possible tout simplement.»
- «Tu me fais un peu douter, j'ai essayé et j'ai trouvé un résultat cohérent donc j'ai pensé que c'était peut-être la solution.»
- «En tout cas, même si cela est faux, je continue (oui, c'est pas logique mais bon) !»
- «Mais il est possible que ma justification ne soit pas suffisante ou bonne, auquel cas ma conclusion risque d'être fausse.»
- «Je pense que l'on peut se passer de la résolution complète du système.»
- «Cela semble tout de même un peu long pour expliquer quelque chose d'évident.»

Axe 1 : autour des représentations graphiques

Questions :

- Quels outils pour étudier graphiquement les problèmes d'extremum ?
- Comment communiquer ces études graphiques ?

Remarques :

- Lycéens à l'aise avec l'étude graphique pour une variable.
- Difficulté pour les lycéens à associer une fonction à deux variables et une surface.
- Représentation graphique des surfaces peu outillées.

Questions à approfondir :

- Quels outils peuvent remplacer la tangente à une courbe pour l'étude des surfaces ?
- Est-ce que le graphique peut jouer un rôle autre qu'heuristique ?

Axe 2 : forme de la correspondance

L'adresse au destinataire est fréquente.

- «Ce serait gentil si tu pouvais me dire ce que tu penses de mes calculs et démarches.»

Certaines phrases concernent directement la situation, comme la distance entre les deux locuteurs, proche mais non nulle, ou le problème, familier mais différent, et la désorientation résultant de la situation :

- «Je comprends à chaque fois ce que tu veux dire, mais je ne vois pas du tout où tu veux en venir.»
- «N'ayant jamais vraiment fait cela avant, j'avais peur de ne pas pouvoir démarrer et de ne pas savoir comment faire.»

Expression du doute.

Importance du cheminement.

Mise en place de la démonstration.

Axe 2 : forme de la correspondance

Analyses plus précises :

- Etayage : surtout réduction des degrés de liberté, un peu maintien de l'orientation et démonstration.
- Aides manipulatoires pour certains outils, aides procédurales principalement, peu d'aides constructives.
- Nombreuses fonctions du discours : distribution des tâches, introduction d'une sous-tâche, bilan, justification, structuration, évaluation (fonctions cognitives), engagement, mobilisation de l'attention, encouragement (fonctions d'enrôlement).
- Quels rapports entre argumentation non strictement mathématique et démonstration mathématique ?

Analyse des deux plans sur lesquels se déroulent les textes :

la succession de discours narratifs sur la recherche et de discours sémantiques de recherche.

- Passage d'un genre à l'autre avec notamment des métaphores.
- Métalangage inusuel dans les textes scolaires.

Axe 2 : les aides de l'étudiant

Le travail du problème conduit les lycéens à adresser des questions à leur correspondant. Les questions formulées peuvent concerner

- des aspects techniques,
- la validité d'une démarche ou d'un résultat,
- la validité de ce qu'indique un correspondant,
- la recherche d'une preuve,
- l'identification d'un nouveau problème.

Exemples :

- Un lycéen traduit le problème en coordonnées polaires et se demande «comment étudier cette fonction ?»
- «Pourquoi est-ce que ma première idée était fausse alors que je trouve le même résultat ?»

Axe 2 : les aides de l'étudiant

Différences observées :

- En fonction du niveau de l'étudiant (du L1 au M1).
- En fonction du dispositif (comparaison 1ère et 2e année).
- Plusieurs postures.

Autres observations :

- Progression dans les aides.
- Directivité de l'étudiant.

Questions :

- Quels types d'aide fournir à un lycéen qui propose très peu de choses ?
- Est-ce que l'étudiant peut savoir ce que maîtrise le lycéen ?
- Qu'est-ce qui fait une bonne correspondance ?

Axe 2 : profils des correspondances

- **But de performance (P)**

(désir de mettre en avant ses compétences, ses capacités).

- **Lycéen** : élève travailleur qui manque de confiance ou élève un peu fainéant, un peu trop scolaire.
- **Etudiant** : L2 ou L3 sans recul sur les outils.

- **But de maîtrise (M)**

(désir d'apprendre, de développer ses connaissances).

- **Lycéen** : recherche du sens, prêt à approfondir, fille.
- **Etudiant** : L1 non expert, bon L2, L3 ou M1 qui prend du recul.

Mise en correspondance (lycéen / étudiant) :

- **P-P** : pistes peu explorées, centré sur technique, échanges directifs.
- **M-P** : vu uniquement la 2nde année, échanges directifs non adaptés.
- **P-M** : aides adaptées, possibilité d'évolution pour le lycéen.
- **M-M** : pistes variées, doutes évoqués, nombreuses aides et analyses.

Axe 3 : qu'en retiennent les correspondants ?

Du côté des lycéens :

- «Les rapports étaient plus proches que lorsqu'on fait un devoir pour notre prof, on était entre collègues.»
- «Dans un devoir habituel, on n'écrirait pas *pouvez-vous m'aider pour cette question ou cette démarche ?*»
- «On avait la possibilité de se tromper.»
- «Les dérivées partielles, on commence à voir ce que c'est.»
- «C'est intéressant d'avoir deux esprits qui se confrontent à un problème, l'un avec son expérience l'autre avec plus de recul et d'expériences.»
- «C'est rassurant de pouvoir se projeter, voir qu'on va grandir et acquérir des méthodes.»
- Enthousiasme lors de la séance de restitution. Déception pour ceux qui ne rencontrent pas leur correspondant.

Champs conceptuels du maximum et de la dérivée élargis.
Apprentissages relatifs à des savoirs curriculaires.

Axe 3 : qu'en retiennent les correspondants ?

Du côté des étudiants :

- «C'est intéressant de chercher en se mettant dans l'idée de l'autre.»
- «On a appris l'importance de bien cerner l'utilisation d'un outil.»
- Agréablement surpris sur les méthodes de recherche développées par le lycéen.
- Surpris par le niveau «déplorable» des lycéens.

Les rapports PPE (projet professionnel des étudiants) :

- **But de performance** : présente les différentes techniques de résolution, a du mal à comprendre que les aides n'ont pas fonctionné, peu de recul sur les connaissances du lycéen.
- **But de maîtrise** : souci de s'adapter aux lycéens, satisfait de l'utilité des aides, questionnement sur les ruptures entre lycée et université, regret d'une correspondance courte.

Axe 3 : ce qu'apprennent les enseignants

Impressions générales :

- La correspondance : beaucoup plus riche pour analyser l'activité mathématique des élèves.
- La correspondance la 1ère année : un peu plus riche que la 2nde année. Calendrier plus contraint la 2nde année, période différente dans l'année, évaluation des étudiants au sein d'un module, difficulté à continuer la correspondance après l'évaluation.

Les enseignants apprennent

- **sur leurs élèves.** Plusieurs profils d'activité mathématique. Profil «recherche» surprenant par rapport au profil «habituel».
- **sur la résolution de problème.** Importance des différentes techniques. Connaissance experte ?
- **sur leurs pratiques.** Importance du cheminement dans la recherche. Problème de la validation. Importance du sens.

La participation au groupe de recherche a aussi de nombreux effets sur les enseignants participants.

- Groupe ECCE maths, *Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves de mathématiques à la fin du lycée ?*, en cours de rédaction, publication de l'IREM de Nantes.
- E.Barbin, (2008) *Dialogism in Mathematical Writing : historical, philosophical and pedagogical issues*, in Katz, V., Tzanakis, K., Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education, Proceedings of HPM Mexico, 2008.
- M.Hersant (2009), *Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum*, Actes du séminaire de didactique des mathématiques.
- S.Moulin, *Evolution des conceptions autour du maximum au passage du lycée à l'université*, mémoire de master en cours.

Conception d'une ressource pour l'organisation d'une correspondance par des enseignants en précisant :

- Comment mettre en place le dispositif ? Quel type de problème choisir ? Quel calendrier ?
- Qu'apprend l'enseignant sur ses élèves à partir des correspondances ?
- Peut-il exploiter ce dispositif pour travailler la tension entre l'expérience et la technique ? Comment ?
- Comment favoriser les buts de maîtrise ? Quels travaux préparatoires ?