Groupe ECCE maths (IREM des Pays de la Loire, IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes)

Responsable : Magali HERSANT, IUFM des Pays de la Loire, CREN, Université de Nantes, magali.hersant@univ-nantes.fr

Résumé : Cette contribution de l'équipe ECCE maths à l'**atelier 1** « Ressources, démarches d'investigation et résolution de problèmes » comporte une présentation de l'évolution de la problématique du groupe puis un développement des caractéristiques d'une ressource pour les enseignants dans le domaine de la résolution de problèmes : la correspondance mathématique. Une synthèse des résultats établis depuis 2006 est présentée à la fin de la contribution.

Origine de la recherche et évolution de la problématique

Les travaux du groupe qui ont débuté en 2006 visent à augmenter la connaissance que l'on a de l'activité de résolution de problèmes mathématiques par les élèves, en particulier en ce qui concerne sa dimension expérimentale (au sens de Perrin, 2007a, 2007b). Initialement, ils se situent à l'articulation de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur et sont motivés par des remarques d'enseignants de l'Université qui déplorent que leurs étudiants ne savent pas chercher des problèmes de mathématiques. Interpellés, nous avons souhaité comprendre ce que signifie chercher un problème de mathématiques pour des élèves de la fin du lycée et du début de l'Université.

Pour cela, nous avons d'abord effectué une étude, sous forme d'enquête écrite (résolution de problèmes et questionnaires), réalisée auprès de lycéens et d'étudiants de première année (Université et IUT). Ces productions adressées à des enseignants nous ont permis d'établir des premiers résultats concernant ce que signifie chercher un problème en mathématiques pour des élèves à l'articulation lycée - Université (voir ECCE les maths, 2009) mais elles ont aussi révélé le statut scolaire des écrits des élèves qui limite l'authenticité des productions et introduit un biais dans l'analyse de l'activité de résolution du problème.

Pour dépasser ce biais méthodologique, en référence à l'activité des mathématiciens professionnels et à partir d'un point de vue historique, nous avons imaginé un dispositif de recueil de données inédit : la correspondance mathématique. Ce dispositif s'est révélé un outil très intéressant pour étudier l'activité mathématique des élèves lors de résolution de problèmes à l'articulation du secondaire et du supérieur.

La qualité des informations recueillies avec ce dispositif de recherche et l'intérêt suscité chez les élèves nous ont conduit à envisager de faire de la correspondance mathématique un dispositif pédagogique qui permet, d'une part, aux élèves de développer l'activité de recherche et résolution de problèmes de mathématiques et, d'autre part, à l'enseignant d'apprendre sur les connaissances de ses élèves en mathématiques. Sous cette forme, la correspondance mathématique constitue donc une ressource pour les enseignants dans le domaine de la résolution de problèmes.

Ainsi, les travaux de l'équipe ECCE maths visent à répondre aux questions suivantes : que savons-nous de l'activité des élèves lors de la résolution de problèmes, en particulier pour ce qui concerne la dimension expérimentale de cette activité ? Comment former les élèves à la résolution de problèmes et, en particulier, à la dimension expérimentale des mathématiques ? Comment aider les enseignants à développer ces apprentissages chez leurs élèves ?

Travaux de l'année 2009-2010

Cette année 2009-2010 a été principalement consacrée à préciser les caractéristiques du dispositif « correspondance mathématique » comme ressource pour les enseignants dans le domaine de la résolution de problèmes et à étudier des problèmes qui peuvent faire l'objet d'échanges épistolaires au niveau du secondaire. Une autre partie du travail non achevée encore a concerné l'étude des correspondances recueillies entre 2007 et 2009.

1/ La correspondance mathématique comme dispositif pédagogique ressource dans le domaine de la résolution de problèmes

En France, plusieurs dispositifs pédagogiques ont été développés pour permettre un engagement « plus authentique » des élèves dans une activité mathématique en référence à un type de problème particulier, le « problème ouvert » (Arsac, 2008, p 7-9). La correspondance mathématique présente des spécificités par rapport à ces dispositifs. En particulier, c'est un échange épistolaire entre deux élèves presque pairs, mais non pairs (par exemple Terminale – étudiants de L1 ou L2, 3ème – 2de, 2de-Tale) à propos d'un problème que l'un peut résoudre avec une solution « experte » et l'autre non. Précisons ses caractéristiques et leur motivation.

Un échange entre élèves

La narration de recherche (Chevallier, 1992 ; Sauter, 2000) est un écrit individuel à propos de la résolution d'un problème-ouvert : l'élève ne livre pas sa solution au problème, mais retrace l'histoire de sa résolution, faisant part entre autres de ses impasses. La narration est réalisée le plus souvent en dehors de la classe et un travail collectif en classe sur ces productions est ensuite organisé par l'enseignant. Dans cette situation, deux éléments déterminants permettent à l'élève de s'engager dans l'activité mathématique : les caractéristiques du problème ouvert et la régularité de la pratique de narrations qui permet d'installer un contrat didactique (Brousseau, 1998) particulier. La narration de recherche est adressée à l'enseignant et nous craignons que les élèves ne se livrent pas totalement. C'est pourquoi nous écartons l'enseignant de l'échange épistolaire. Cependant, nous retenons l'idée de narration comme essentielle pour obtenir un écrit différent d'une solution.

La recherche collaborative (Sauter, 2008) permet une résolution collective d'un problème. Les problèmes choisis sont de « véritables problèmes de recherche », « évolutifs, vivants » et nécessitent des échanges entre pairs. La collaboration est d'un certain point de vue une richesse mais ne permet pas d'accéder, comme nous le souhaitons, à l'activité individuelle d'élèves lors de la résolution de problèmes. Nous retenons cependant de ce dispositif l'idée d'échanges entre élèves qui permet une évolution de la recherche.

Ainsi, le dispositif de correspondance mathématique s'apparente par certains aspects à la narration de recherche et à la recherche collaborative mais il en diffère aussi fondamentalement par le choix du destinataire de l'écrit : le destinataire n'est pas le professeur, nous pensons qu'ainsi l'élève livre sans censure son activité, cela permet une sincérité des correspondants. Mais, comment alors motiver un échange épistolaire entre élèves si le but n'est pas une résolution collaborative du problème ?

Une dissymétrie de connaissances entre les correspondants

Notre dispositif repose sur une étude de l'activité des mathématiciens et, en particulier, d'un mode de communication qui se traduit par des échanges épistolaires entre collègues à propos du travail individuel de chacun. L'histoire des mathématiques compte de nombreuses correspondances qui rapportent les avancées, doutes, questions des mathématiciens à propos

de la résolution d'un ou plusieurs problèmes (voir Peiffer, 1998). Les deux correspondants ne travaillent pas forcément de concert à la résolution d'un même problème, il y a souvent une dissymétrie entre eux. Dans le groupe ECCEmaths, nous nous sommes par exemple particulièrement intéressé à la correspondance Germain – Gauss.
Ce mode d'échange, entre presque pairs, à propos d'un problème mathématique est intéressant : le destinataire de l'écrit étant un peu plus avancé en mathématiques, l'auteur livre plus facilement ses pistes de recherches, doutes, questions et impasses ; l'écriture relate l'activité individuelle de l'auteur dans sa résolution de problème ; le destinataire, plus avancé en mathématiques, apporte un regard critique et constructif sur le travail de son collègue, sans toutefois lui livrer la solution. Historiquement, un des moteurs d'une correspondance mathématique est souvent la dissymétrie de connaissances entre les correspondants sur l'objet de la recherche (un autre est bien entendu la publicité des recherches, voir Peiffer, 1998). Nous pensons que cette caractéristique peut aussi constituer une motivation pour une correspondance entre élèves, c'est pourquoi la correspondance est réalisée entre deux élèves qui ne se situent pas au même niveau scolaire.

Une dissymétrie de buts entre les correspondants : une dynamique de recherche et d'aide

Etant donnée la dissymétrie de connaissances entre les élèves et le projet de contribuer aux apprentissages mathématiques de chacun des élèves qui participe au dispositif, il convient de donner aux deux correspondants des consignes différentes. Pour le moins avancé en mathématiques, il s'agit d'adresser en détails à son(sa) correspondant(e) les étapes de sa recherche, ses essais, réflexions, pistes de recherche, résultats, même s'ils sont intermédiaires ou partiels. Tandis que le rôle de l'élève plus avancé en mathématiques est d'aider son correspondant à progresser dans sa recherche en n'hésitant pas à demander des précisions, mais toutefois sans fournir la réponse.

Cette dissymétrie inscrit l'échange dans une relation recherche – aide qui génère un processus dynamique de recherche. Cela incite en particulier l'élève qui cherche à résoudre le problème à formuler ses doutes et questions ce qui, d'une part, participe certainement à sa construction du problème et, d'autre part, apporte des informations intéressantes à l'enseignant comme nous l'illustrons dans le paragraphe suivant.

Un problème qui ouvre des perspectives nouvelles en mathématiques

Cette relation d'aide est une occasion intéressante de faire des mathématiques autrement pour l'élève le plus avancé si le problème choisi peut se résoudre, d'une part, avec une procédure « experte » qu'il maîtrise ou en cours d'apprentissage et, d'autre part, avec des connaissances plus anciennes pour lui et qu'il ne mobilise plus car il dispose d'outils plus puissants. En quelque sorte, la correspondance mathématique est intéressante pour l'élève le plus avancé en mathématiques si elle l'amène à revisiter des savoirs anciens. Nous pensons en effet que dans ce cas, c'est une occasion pour lui de construire ou de redécouvrir des relations entre des connaissances relativement anciennes et des connaissances plus nouvelles. Evidemment, il faut que l'élève le moins avancé ait à sa disposition des connaissances qui lui permettent d'aboutir. Pour cet élève, la procédure « experte » se situera alors dans la filiation de ses connaissances au moment de la correspondance, dans une sorte d'extension, sans pour autant être disponible. Cette condition permet de proposer des problèmes qui résistent mais aussi, et nous y tenons particulièrement, elle place l'élève le moins avancé dans un avenir mathématique qu'il est, le plus souvent, loin d'imaginer mais que son correspondant fréquente.

Ainsi, les problèmes choisis pour être l'objet de correspondances mathématiques répondent aux critères suivants : ils ouvrent des perspectives de nouveaux apprentissages en mathématiques, au-delà du niveau scolaire des élèves ; il y a plusieurs façons de les résoudre ; ils permettent une activité de problématisation (au sens de la théorie de la problématisation développée par Fabre et Orange (1997)).

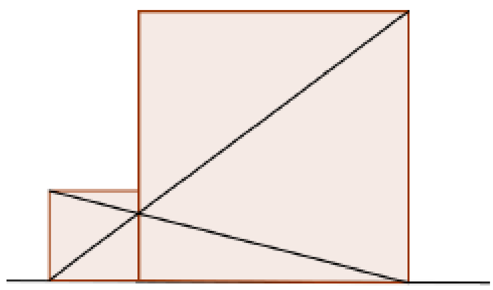
Une restitution

Pour qu'il y ait apprentissage des élèves, il convient d'organiser une phase de travail où les différentes procédures proposées sont analysées (validité, intérêts et limites). Cette phase qui clôt d'une certaine façon la recherche sur le problème est à organiser par les enseignants. Dans les expérimentations que nous avons menées, nous avons associé à cet ultime moment de travail sur le problème une rencontre entre les correspondants et une conférence d'un enseignant-chercheur en mathématiques.

2/ Etude de problèmes

A partir d'une liste d'exercices que nous avons extraits, le plus souvent, de manuels nous avons travaillé à l'adaptation de deux problèmes : modifications de l'énoncé pour permettre aux élèves de débuter l'activité sans trop de difficulté, de ne pas rester « bloqués », formulation d'une consigne qui motive à résoudre le problème. L'exemple ci-dessous illustre ce travail.

Des élèves ont dessiné comme ci-dessous : un carré de côté 1, un autre carré de côté quelconque accolé, deux segments joignant deux sommets « extrêmes ».



Ils affirment que ces deux segments se coupent sur le côté commun des carrés. Ont-ils raison ?
Et s'ils avaient remplacé un carré par un rectangle non carré ? Et s'ils avaient accolé de la même façon deux rectangles non carrés ?

Cet exercice a été testé dans plusieurs classes de 3ème et 2de, dans un dispositif de recherche individuelle, pour connaître les procédures que les élèves de ces deux niveaux mobilisent. Il pourrait être proposé soit à des élèves de 3è/2de en milieu d'année, soit à des 2de / 1ère S en début d'année. L'hétérogénéité des élèves en 2de semble rendre plus difficile une correspondance 2de / 1ère S.

Nous avons recherché un énoncé pour cet exercice qui soit clair, permette une « vraie » recherche sans pour autant décourager les élèves. Par exemple, pour atténuer la difficulté du raisonnement dans le cas général et aider les élèves à raisonner sur un exemple générique, nous avons précisé qu'un des carré est de côté 1 et l'autre de côté quelconque, puis que l'un des rectangles est un rectangle et l'autre quelconque. Cela peut faciliter les raisonnements basés sur des figures. Cela peut aussi faciliter la recherche par analyse - synthèse : on trace un rectangle, on place un point sur [AB] puis on construit le second rectangle qui convient.

Synthèse des résultats de la recherche

Les résultats de la recherche sont de deux types.

1/ Apports de la recherche concernant la question « Que savons-nous de l'activité des élèves lors de la résolution de problèmes ? »

L'analyse des productions et des questionnaires recueillis la première année de la recherche auprès de 135 lycéens et 48 étudiants (L1 ou première année de l'Université) apporte les résultats suivants.

- Pour la majorité des élèves chercher un problème reste une activité scolaire d'une durée courte mais raisonnable (entre 1h et 2h 30 pour la moitié d'entre eux).
- Pour la moitié des élèves, la recherche s'effectue en deux ou trois reprises (deux reprises correspond à la fréquence la plus importante et à 50% des réponses, trois reprises à 25% des réponses) ; cela leur permet d' « avoir de nouvelles idées », de « laisser reposer » le problème, de « prendre du recul », cet intermède étant souvent l'occasion pour les élèves de discuter du problème avec leurs camarades.
- La moitié des élèves explore une seule piste lors de la recherche du problème, les autres n'exploitent pas longtemps d'autres pistes et ne disent pas pourquoi ils les abandonnent.
- L'écriture est présente dès le début de la recherche pour la quasi-totalité des élèves, d'abord au brouillon puis au « propre ».
- Plus de la moitié des élèves n'ont pas écrit au brouillon de choses qu'ils n'ont pas réussi ensuite à mettre au propre, ce qui recoupe le fait qu'ils n'explorent pas, en général, des pistes différentes, ni des pistes au-delà de celles proposées dans le problème.
- Malgré un encouragement de la part des enseignants, les élèves ne rendent pas en général leur brouillon qui semble demeurer un écrit privé.
- La moitié des élèves expriment qu'ils ont eu des difficultés à transcrire certaines idées.
- Le passage par le brouillon semble plus lié à une volonté de rendre un écrit lisible par l'enseignant qu'à une pratique de la recherche.
- Une limite forte du dispositif « problème - questionnaire » apparaît : les élèves nous livrent des écrits scolaires adressés de façon convenue à leur enseignant. Les réponses à notre question initiale sont circonscrites au contexte scolaire et ne nous permettent pas d'envisager pleinement le « potentiel » des élèves dans ce domaine. En particulier, la question suivante se pose : dans quelle mesure l'activité des élèves lors de la recherche du problème s'émancipe-t-elle du contrat didactique (Brousseau, 1998) habituel de la classe ?

L'analyse des correspondances mathématiques recueillies les deux années suivantes montre que lorsqu'ils sont dégagés des contraintes habituelles de la classe, les élèves peuvent déployer une activité mathématique consistante et problématisée (au sens de Fabre et Orange, 1997), beaucoup plus riche que celle qu'ils laissent à voir à leur professeur de mathématiques L'étude (pour des exemples voir Hersant, 2009) montre en particulier que les élèves se posent des problèmes, de différents types (validité des résultats obtenus, validité de la méthode utilisée, raisons d'un résultat) et essaient de les résoudre. Cette activité mathématique des élèves est plurielle dans la mesure où, selon les moments de la résolution, les élèves ont recours à des raisonnements de types algorithmiques et à des raisonnements créatifs (au sens de Lithner, 2008).

2/ Apport de la recherche concernant les questions « Comment former les élèves à la résolution de problème et, en particulier, à la dimension expérimentale des mathématiques ? Comment aider les enseignants à développer ces apprentissages chez leurs élèves ? »

Le résultat principal concerne l'élaboration d'une ressource pour les enseignants dans le domaine de la résolution de problème. Cette ressource est de type « dispositif pédagogique », elle permet, d'une part, aux élèves de développer une activité mathématique consistante (voir Hersant, 2009) et, d'autre part, à l'enseignant d'accéder à cette activité et ainsi d'apprendre sur ses élèves.

Publications associées à la recherche

ECCE maths, 2009, *Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée et au début du supérieur ?*, IREM des Pays de la Loire, ISBN10 2-86300-038-1

Hersant M., 2009, Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009*, p. 351-374

Hersant M., Barbin E. (dir), 2009, *Recherche et résolution de problèmes de mathématiques à l'articulation du lycée et de l'université : deux études*, Rapport de recherche intermédiaire transmis à l'INRP le 19 octobre 2009

Moulin S., 2009, *Evolution des conceptions autour du maximum au passage du lycée à l'université*, Mémoire de Master 2 de didactique des mathématiques, Université Paris 7

Références bibliographiques

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert* (Scéren.). Lyon: CRDP Lyon.

Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM, 39*(5), 365-382. doi:10.1007/s11858-007-0048-x

Chevalier, A. (1993). Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire. *Petit x, 33*, 71-79.

ECCEmaths. (2009). *Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée et au début du supérieur ?* Nantes: IREM de Nantes.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, *24*, 37-57.

Hersant, M. (2009). Etude de l'activité mathématique de lycéens dans une correspondance mathématique à propos d'un problème de maximum. Dans *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 351-374). Paris: IREM Paris 7.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(2), 165-190. doi:10.1023/A:1003956417456

Perrin, D. (2007a). En mathématiques, que cherche-t-on ? Comment cherche-t-on ? (p. 25). Boussy Saint Antoine. Retrouvé de http://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html

Perrin, D. (2007b). L’expérimentation en mathématiques. Dans *Actes du 33è colloque de la Copirelem*. Dourdan.

Peiffer, J. (1998). Faire des mathématiques par lettres. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, *4*, 143-157.

Sauter, M. (2000). Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège. *Repères IREM*, *39*, 7-20.

Sauter, M., Combes, C., De Crozals, A., Droniou, J., Lacage, M., Saumade, H., & Theret, D. (2008). Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. *Repères IREM*, *72*, 25-45.