

Contribution du groupe EXPRIME aux échanges du thème 1 des journées INRP des 9 et 10 juin 2010.

**Résumé** : La ressource « **Expérimenter des problèmes innovants en mathématiques à l'école** » est désormais disponible après publication. Les travaux du groupe EXPRIME se poursuivent. Nous présentons dans ce texte deux axes d'engagement actuels. Dans un premier temps nous présentons quelques éléments illustrant la façon dont les travaux de recherche en cours nourrissent le travail d'élaboration de situation pour la ressource par des va et vient entre situation, travail des élèves, des chercheurs. Nous montrerons ensuite comment la ressource peut participer à la réflexion de stagiaires en formation continue autour de la notion de résolution de problèmes en mathématiques en classe.

La ressource « **Expérimenter des problèmes innovants en mathématiques à l'école** » est désormais disponible après publication sous forme de CD-ROM. Elle a pour but principal d'intégrer des problèmes de recherche dans le cours ordinaire de mathématiques du collège à l'enseignement supérieur. Actuellement, on trouve 7 situations mathématiques présentées chacune selon 4 axes :

- le problème considéré et quelques solutions ;
- les objets mathématiques potentiellement travaillés ;
- des situations d'apprentissage : énoncés pour différents niveaux de classe, scénarios, comptes-rendus d'expérimentation ;
- des situations connexes : prolongements pour l'enseignant.

Les travaux du groupe ExPRIME se poursuivent, notamment avec l'élaboration de nouvelles situations pour enrichir la ressource. Nous allons ainsi expliciter comment des travaux de recherche en cours nourrissent ce travail d'élaboration de situation pour la ressource par des va et vient entre situation, travail des élèves, des formateurs et des chercheurs.

Le groupe travaille sur l'élaboration de plusieurs nouvelles situations mathématiques dont une issue d'une thèse (en cours) de didactique des mathématiques qui étudie les processus de recherche d'élèves, d'étudiants et de chercheurs confrontés à la résolution d'un problème d'arithmétique, qui est ici ouvert pour la communauté mathématique. L'objectif principal de cette recherche est de mettre en évidence des potentialités, pour l'enseignement des mathématiques, d'une résolution de problème ouvert ainsi que la place de la dimension expérimentale dans les processus de recherche mathématique. On retrouve ainsi plusieurs axes de travail du groupe EXPRIME, notamment la place importante de la dimension expérimentale en mathématiques, l'articulation entre la structuration des connaissances mathématiques et la résolution de problème de recherche et enfin l'intégration des problèmes de recherche dans le cours ordinaire de mathématiques.

La situation mathématique étudiée est une conjecture d'Erdős et Straus (Erdős 1950) :

*Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, peut-on trouver trois entiers naturels  $a, b, c$  tels que*

$$4/n = 1/a + 1/b + 1/c ?$$

Pour en faire une situation pour la ressource, plusieurs étapes sont menées. Tout d'abord, nous étudions mathématiquement le problème afin de connaître et de s'approprier les résultats connus actuellement et ceux qu'il resterait à prouver pour démontrer la conjecture. Ce travail de recherche mathématique se fait en collaboration avec un mathématicien qui cherche à

démontrer la conjecture.<sup>1</sup> Ce travail d'appropriation des contenus mathématiques nous permet ensuite de mener une étude didactique : quels sont les objets mathématiques potentiellement travaillés, à quel niveau peut-on proposer la situation, quels résultats et quelles méthodes sont à la portée des élèves, quelles conditions favorisent la dévolution du problème... A l'issue de cette réflexion, nous construisons des scénarios pour la classe, selon les niveaux scolaires. Ces études préalables à toute expérimentation sont donc conduites via des allers et retours entre les chercheurs en didactique et en mathématiques et la situation.

Plusieurs expérimentations ont déjà été menées sur cette situation. La première a eu lieu dans une classe de terminale scientifique. Le scénario était le suivant : une recherche individuelle de 10 minutes sur le problème, une recherche collective par groupe de 3 ou 4 pendant 2h avec production d'un compte-rendu. La dévolution du problème s'est bien effectuée et les élèves ont établis plusieurs résultats intermédiaires. Cependant plusieurs groupes ont eu du mal à rentrer dans le problème. La notion de fraction égyptienne était peut être en cause. Ainsi nous avons voulu modifier le dispositif afin de familiariser les élèves au préalable avec cet objet mathématique. Le second scénario a donc été le suivant : une première séance avec recherche de problème sur les fractions égyptiennes (décomposition de l'unité en fractions égyptiennes) puis une seconde séance sur la recherche de la conjecture d'Erdős-Straus. Il a également été mené dans une classe de terminale scientifique. Les premières analyses montrent que les élèves ont fait appel au premier problème lors de la recherche de la conjecture d'Erdős-Straus. Cependant il semblerait que cela se résume à une simple évocation de l'objet mathématique qui ne les a pas aidée véritablement dans leur recherche. L'analyse détaillée de cette expérimentation nous aidera à améliorer une nouvelle fois notre dispositif. Ces expérimentations nous donnent aussi des éléments sur les conditions dans lesquelles placées les élèves afin qu'ils pratiquent une réelle activité de recherche mathématique. Savoir précisément ce que signifie « mettre l'élève en situation de recherche » est une question centrale des travaux du groupe EXPRIME et du travail de cette thèse. Nous espérons pouvoir apporter des éléments de réponses grâce au travail épistémologique d'investigation du travail du chercheur en mathématiques. Nous pensons en effet qu'il permettrait de dégager et d'identifier certains critères pour définir une situation de recherche mathématique pour un élève. D'autre part, nous espérons que ce travail d'investigation du travail du chercheur, nous permette d'identifier des invariants dans la recherche mathématique professionnelle. Y-a-t'il des méthodes, des liens, des gestes, des actions auxquelles un chercheur fait (presque) systématiquement appel lors d'une nouvelle recherche ? Si c'est le cas, une question centrale sera alors comment transposer l'utilisation de ces invariants identifiés dans la recherche professionnelle pour l'enseignement ?

Lors de nos expérimentations sur la situation de la conjecture d'Erdős-Straus, nous avons pu pointer quelques invariants possibles dans la recherche des mathématiciens sur ce problème. Le premier concerne la réduction de la recherche de solution pour tout  $n$  entier naturel à  $n$  premier. Cette réduction n'est apparue que chez quelques groupes d'élèves et après un certain temps de recherche collective sur le problème alors que chez les mathématiciens, c'est la première étape effectuée. Ainsi nous pensons que la réduction d'un problème à un problème équivalent mais plus facile à traiter peut être un invariant dans la recherche mathématique. Le second invariant qui pourrait être identifié est le questionnement des exemples. Un chercheur examinera particulièrement un exemple afin de comprendre pourquoi il fonctionne. Les élèves se sont rarement posé cette question. Il faudrait mener une étude détaillée afin d'en connaître la raison mais nous pouvons supposer un effet de contrat. En effet, le raisonnement inductif

---

<sup>1</sup> Pour un enseignant qui envisagerait de proposer une telle situation dans sa classe, nous pensons qu'une analyse mathématique du même type est nécessaire afin de s'approprier le problème. Ainsi nous l'encourageons à se mettre dans cette position de chercheur avant de la proposer en classe.

est très peu utilisé dans l'enseignement secondaire. C'est peut être un second invariant de la recherche mathématique. Enfin, un troisième invariant qui pourrait être identifié est le fait de sortir le problème du domaine mathématique initial. Nous n'avons pas encore mené cette étude sur le travail des chercheurs et des élèves, cela reste donc une hypothèse de recherche.

Après avoir reprécisé la démarche suivie pour l'élaboration de nouvelles situations nous revenons sur un exemple d'utilisation de la ressource EXPRIME en formation continue.

Un de nos objectifs est de fournir des apports pour la formation en élaborant des situations de formation à la recherche de problèmes intégrant la ressource dans son état actuel et dans ses évolutions futures.

L'étude de l'intégration de la ressource dans le milieu objectif d'enseignant en formation continue a débuté dès 2008. Gilles Aldon, (Aldon 2008), a montré en particulier, que la ressource, intégrée dans le milieu objectif de l'enseignant, facilitait la mise en place effective de séquence de classe. Il ajoute : « Cependant, les réticences et les difficultés mises en évidence par les professeurs ayant suivi le stage de formation, montrent qu'un long travail de formation est encore nécessaire pour faire que la recherche de problèmes fasse partie de la panoplie habituelle des enseignants au même titre que les exercices de réinvestissement, les cours et leurs applications directes, les évaluations,... Cette étude nous montre l'intérêt, voire la nécessité d'un accompagnement formatif ».

Nos travaux de recherche dans cette direction se sont prolongés avec l'élaboration d'un dispositif de formation, en appui sur les travaux de Peix et Tisseron (Peix et Tisseron 1998) ayant les objectifs suivants :

- Faire vivre une situation de recherche à des professeurs qui devront en faire vivre à leur tour à leurs élèves.
- Concernant la mise en œuvre, aller au-delà de la simple présentation et questionner les compétences professionnelles en jeu. A. Peix : « On peut interpréter d'une part les problèmes et questions soulevés par les stagiaires à propos de la pertinence et des modalités de la mise en œuvre de problèmes ouverts et d'autre part leur faible prise en charge par le dispositif de formation comme des indicateurs de problèmes de "transposition" ... Suite à ce constat, il nous apparaît que pour améliorer la formation, il est nécessaire de pouvoir expliciter les savoirs professionnels en jeu, puis de repenser la formation à ces savoirs.»
- Modifier le rapport des stagiaires à la dimension expérimentale en mathématiques.
- En s'appuyant sur la ressource du groupe EXPRIME, mettre en évidence les apports autres que transversaux, en particulier pointer les notions mathématiques en jeu qui peuvent faire l'objet d'une institutionnalisation.

Le dispositif prévu peut se décrire sommairement ainsi :

- Étape 1 : recherche d'un problème. Il s'agit de faire vivre complètement une recherche de problème : recherche de problème en groupe et production d'une affiche avec débat collectif de validation, avec institutionnalisation sur la situation<sup>2</sup>, et sur la dimension expérimentale.
- Étape 2 : Retour sur le vécu. L'objectif est ici de mettre en évidence les relations entre les éléments de la situation et les effets qu'ils produisent. C'est un retour sur le dispositif, pour mieux en comprendre le fonctionnement, et pouvoir disposer de points d'appui pour la conduite de telles situations en classe, et obtenir les effets attendus.
- Étape 3 : préparation de l'expérimentation en classe. Cette étape se fait en appui sur les situations évoquées pendant le stage et principalement sur la ressource EXPRIME. Un exemplaire de la ressource est fourni aux participants du stage.

---

<sup>2</sup> La situation utilisée était là encore nouvelle, en cours d'élaboration.

Les stagiaires se fixent par ailleurs un objectif personnel de formation par rapport à la conduite de problème de recherche.

- Etape 4 et 5

4 : expérimentation et prise de recul sur une compétence professionnelle associée à la mise en œuvre

5 : en parallèle, échanges pour finaliser la préparation, pour rendre compte des premières expérimentations. Ce temps utilise un espace collaboratif.

- Étape 6 : retour sur l'expérimentation. Un des objectifs est de départager ce qui relève des contraintes externes et ce qui relève des conceptions et également de revenir sur des compétences professionnelles en lien.

A l'issue du stage, les situations proposées par le groupe (ici la détermination de tous les pavages archimédiens du plan) confirment leurs potentialités, non seulement en termes de situation pour la classe, mais également comme support pour les dispositifs de formation continue. La ressource dans sa globalité trouve également toute sa place dans un tel dispositif. Ses rôles de réserve de situations, et de ressources pour un approfondissement mathématique et didactique potentiel apparaissent nettement. Toutefois, l'impact sur la documentation des stagiaires de sa mise à disposition reste à étudier, le format du stage ne permet pas de s'assurer du niveau d'appropriation réel du contenu, rappelons le très volumineux.

## Bibliographie

[Aldon 2008], Aldon, G. (2008). Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques. *Mémoire de Master2-Recherche*, LIRD-HIST-Université Lyon1.

[Erdős 1950] Erdős, P. (1950). On a diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaris), *Mat. Lapok 1*, pp.192-210.

[Gardes 2009], Gardes, ML. (2009). Etude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème ouvert en arithmétique. *Mémoire de Master2-Recherche*, LIRDHIST-Université Lyon1.

[Mizony 2009] Mizony, M. (2009). Sur la conjecture d'Erdős-Straus. <http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/fregErdosdiap.pdf>

[Peix et Tisseron 1998] Peix, A. et Tisseron, C. (1998). Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques. *Petit x*, 48:5 \_ 21.