PROJET DE SOCLE
(objectif : concerne autour des deux tiers de la fourchette 90-110 crédits de Mathématiques que devrait comporter un L de Mathématiques)

Afin d'éviter une trop grande dispersion entre les maquettes de la licence de mathématiques dans les différentes universités, la SMF et la SMAI *(d'autres acteurs peuvent figurer dans cette liste)* proposent un cadre général pour les enseignements de licence. En particulier, elle suggère une liste de notions que **tout étudiant doit maîtriser** lorsqu'il a obtenu une licence, mention mathématiques.

Cette réflexion repose sur les idées force suivantes, qui ont fait consensus dans le groupe de travail.

1 – Une licence de Mathématiques doit comporter au moins 90 crédits de Mathématiques (de tous types)
2 – Une licence de Mathématiques doit comporter au moins 70 crédits de d'autres formation en Sciences, disciplines d'ouverture sur le monde extérieur, outils informatiques, langues, etc…

Cela entraîne que le nombre de crédits de Mathématiques ne peut dépasser 110 dans la Licence. Bien entendu, un bon étudiant motivé peut suivre plus d'unités que les 180 crédits nécessaires pour une licence.

Il n'est pas question de définir un programme strict pour les 90 à 110 crédits de Mathématiques. L'approche retenue est de :
3 – Définir un ensemble de chapitres ou thèmes qui doivent tous être traités, pour un volume correspondant à 60 crédits
4 – Définir des notions dont la connaissance ne doit pas être un pré requis pour les Masters de Mathématiques

Cela n'empêche pas d'aborder ces notions en licence, mais avec prudence. Il y a certainement des moments où l'on peut dire « on pourrait démontrer », puis éventuellement « vous le verrez en Master ».

Ce travail suppose également une réflexion de chacun sur la taille des Unités d'Enseignement en Mathématiques, qui ne doit pas être trop petite, et l'importance de la répartition des enseignements, qui ne doit pas conduire à trop de morcellement. De même, le contrôle des connaissances n'est pas une fin en soi et ne doit pas conduire à une dépense de temps et d'énergie démesurée.

Les enseignants de master, de préparation au CAPES, pourront donc s'appuyer sur ce socle de connaissances en principe acquises quelle que soit l'origine de leurs étudiants.

Il y a plusieurs choix cohérents pour l'ordre dans lequel ces différentes notions sont présentées ainsi que pour la présentation de chacune d'entre elles. La pertinence de ces choix pédagogiques dépend souvent de contraintes locales. Même si quelques hypothèses sur cette organisation figurent ci-dessous, ils sont bien évidemment laissés à l'initiative de chaque université et de chaque équipe pédagogique. À elles de décider dans quelle mesure ces choix seront imposés aux enseignants.

L'existence d'unités indépendantes incite à construire des enseignements partant de résultats admis, ou justifiés heuristiquement, à partir desquels les autres résultats du cours sont démontrés correctement. Par exemple un cours d'intégration peut parfaitement reposer sur le théorème de Lebesgue alors que celui-ci ne sera démontré qu'en maîtrise.

La formation en licence doit permettre à l'étudiant d'améliorer sa perception de la démarche mathématique, en particulier :

- mise en place des "objets mathématiques", la définition d'une notion étant justifiée par des exemples, des motivations liées à son utilisation ... , avant même les théorèmes,
- rôle central de la démonstration , même si tout démontrer n'est pas un objectif en soi,
- organisation du raisonnement, ce qui suppose une certaine familiarisation avec les outils de la logique,
- compréhension des structures (en particulier à l'occasion des cours d'algèbre),
- mise en œuvre informatique des calculs formels, numériques, statistiques quand le sujet s'y prête.

Ce socle vise quatre grands objectifs :

- une bonne appropriation de R, R^2, R^3 du point de vue algébrique, analytique et géométrique.
- la résolution d'équations (linéaires, algébriques, différentielles)
- la notion d'approximation (dans divers cadres)
- l'étude de l'aléatoire (probabilités et statistiques) et du traitement de données

Les notions sont assorties d'un « niveau de compétence ». Pour reprendre une terminologie générale, reprise dans les travaux d'un groupe mis en place sur ce sujet par le Ministère, trois niveaux sont possibles :

(I = initiation) = réalisation de l'activité **<u>avec de l'aide</u>**

(U = utilisation) = réalisation de l'activité **<u>en autonomie</u>**

(M =maîtrise) = capacité à transmettre, voire à former à l'activité et à la faire évoluer.

Le mot « activité » doit se traduire par « exercice/problème/capacité de calcul » dans notre discipline. La compétence (M) est hors de propos pour une simple Licence. Par exemple, « montrer que l'intégrale … vaut $\pi/2$ en faisant une intégration par parties puis le changement de variable $x= \cos^2\theta$ » revient à vérifier une compétence de type (I), « calculer l'intégrale … » une compétence de type (U).

L'objet du socle proposé est d'affirmer fortement la compétence (U) pour un certain nombre de chapitres de base, pour lesquels nous nous contentions souvent d'une compétence (I) dans l'ancien DEUG.

Chacun des neuf grands chapitres fait l'objet d'un court descriptif, dont la rédaction est en cours.

1) Connaissances transversales

a. **Nombres complexes**. Ceux-ci ont été enseignés en terminale. Il ne s'agit pas d'en faire une présentation formelle mais plutôt de les utiliser systématiquement dans tous les chapitres : un étudiant de licence devrait normalement préférer travailler avec les exponentielles imaginaires qu'avec les sinus et cosinus ! Se rappeler que l'introduction en terminale n'est pas suffisante pour entraîner une vraie familiarité.

b. **Langage ensembliste**. La présentation des probabilités peut être un bon moment pour une étude un peu plus systématique.

c. **Logique élémentaire, quantificateurs**. par exemple en liaison avec les manipulations sur les limites.

2) Algèbre linéaire.

a. **Théorie du rang.** Méthode du pivot, calcul matriciel, introduction de la notion d'espace vectoriel, applications linéaires. Exemples d'espaces vectoriel : polynômes, espaces de fonctions.

b. **Déterminants.** Calcul et emploi pour l'indépendance linéaire.

c. **Théorie spectrale.** Valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation. Exemples d'applications : systèmes dynamiques, systèmes différentiels, analyse des données.

d. **Algèbre bilinéaire.** Formes quadratiques espaces euclidiens, espaces de Hilbert. *Applications aux coniques, en mécanique et en physique.*

3) Fonctions d'une variable

a. **Théorie élémentaire.** Etude locale (développements limités), étude globale (théorème des accroissements finis,…), fonctions usuelles.

b. **Equations différentielles.** Equations linéaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants (utilisation des nombres complexes et quelques applications en physique). *Méthodes de résolution numériques. exemples d'équations différentielles plus générales*

c. **Intégrales et primitives.** Quelques méthodes de calcul (en particulier en utilisant des décompositions en éléments simples et le changement de variable). Méthodes de calculs approchés (la construction de l'intégrale de Riemann n'est pas indispensable).

d. **Intégrales généralisées**.

4) Fonctions de plusieurs variables

a. Représentations graphiques. à un paramètre : Courbes paramétrées; à plusieurs paramètres: surfaces, lignes de niveau, champs de vecteurs.

b. Calcul différentiel. Différentielle et plan tangent, recherche d'extrémum, formule de Taylor à l'ordre 2, *utilisation du théorème des fonctions implicites*.

c. Intégrales multiples. Enoncé des théorèmes de Fubini et du changement de variables, calcul d'aires et de volumes.

5) Probabilités et statistiques

a. **Probabilités élémentaires.** Conditionnement, indépendance. Variables aléatoires discrètes et continues dans R et R^2, Convergence (loi faible et théorème central limite), usage pour les approximations. *Simulation aléatoire, principe et applications*.

b. **Statistique descriptive et inférentielle.** Analyse en composantes principales (en liaison avec le point 2.c), notion de qualité. Modélisation aléatoire en statisitique. Estimation et intervalle de confiance, problématique et exemple de tests (proportion, moyenne, χ_2).

6) Arithmétique

Arithmétique de **Z**. Arithmétique des polynômes. **Z**/n**Z** (c'est l'occasion d'introduire la notion d'ensemble quotient). *Corps finis (restreints au cas de Z/pZ). Applications aux codes ou à la cryptographie.*

7) Séries

a. **Séries numériques**. (ce sera l'occasion de faire des révisions sur les suites) Doit être articulé avec le point 3.

b. **Séries de fonctions**. Séries entières, séries de Fourier.

8) Structures de base

Notion de groupe, groupe des permutations, groupes de la géométrie (des déplacements,…, conservant une figure donnée), exemple de structure quotient

9) Analyse numérique *Résolution d'équation f(x) = 0, calcul approché d'intégrales, simulation, utilisation d'un logiciel adapté.*

En outre, la formation devra obligatoirement comprendre :

- l'apprentissage d'un logiciel de calcul formel et l'usage d'un ou plusieurs logiciels
- *la conduite de situation(s) de modélisation*

Tous les chapitres peuvent-doivent avoir des illustrations géométriques et probabilistes, dans la mesure du possible: toutes les sections peuvent donner lieu à des exercices de géométrie (en particulier 2, 3, 4, 7, 8, 9), et plusieurs d'entre elles (en particulier 3, 4, 7) ont des applications en probabilités.

Il est également intéressant que la formation inclue certains problèmes classiques qui ont un fort aspect mathématique : problème de deux corps, rudiments de relativité restreinte, de mécanique quantique pour des problèmes en dimension finie (spin), de propagation de la chaleur...

Ce dont le socle ne parle pas (pour mémoire, et qui pourrait concerner le dernier tiers du volume de mathématiques), et doit avoir comme objectif

soit un approfondissement de notions faisant partie du socle avec compétence (U)

soit l'introduction de nouvelles notions avec la compétence (I), qui peuvent être par exemple (liste tout à fait indicative)

Fonctions de variable complexe : résidus, …
Intégrales de surface, flux, Green-Riemann, …
Topologie (de $\mathbf{R}^n$)
Calcul différentiel dans un Banach …
Mathématiques discrètes : dénombrement, graphes ,…
Equations aux dérivées partielles,
Méthodes numériques (pour l'algèbre linéaire,…)
Théorie de l'intégration : Transformées de Fourier, espaces L^2

soit un mélange d'approfondissement et de nouvelles notions.

Rappelons que la construction de l'intégrale de Lebesgue est explicitement du niveau **M**.