**Faut-il proposer un socle commun pour la licence de mathématiques des universités françaises ? Si oui, quel socle ?**

Marc Rogalski [1]

Avec le soutien de la Commission Inter-IREMs Université (CI2U)

La SMF, avec deux de ses partenaires, a décidé de demander à une commission de réfléchir à la formulation d'un socle commun pour les programmes des licences de mathématiques des universités françaises. Les CA des trois sociétés savantes (SMF, SMAI, SFdS) ont adopté les propositions issues des travaux de la commission. On comprend facilement les motivations d'une telle décision :
(∗) une étude préalable avait montré que l'intersection des programmes des différentes licences était déjà quasi-vide (mais bien sûr pour les changements d'universités seules comptent les intersections deux à deux !) ;
(∗) l'éparpillement en petits modules dû à la mise en place du LMD favorise et ne peut que favoriser encore plus une distribution anarchique des thèmes enseignés en licence ;
(∗) la mise en place de la nouvelle loi sur les universités, si elle avait lieu malgré les nombreuses oppositions qu'elle soulève, favoriserait la concurrence entre les établissements, et l'existence d'un socle commun pourrait atténuer cette concurrence au niveau de la licence.

Mais cette démarche soulève de nombreux problèmes. Je voudrais en pointer deux, qui apparaissent clairement dans les diverses versions de socle proposées par la commission.
(1) La logique de l'élaboration d'un socle donne très souvent lieu à deux dérives perverses et opposées : ou bien une diminution drastique des contenus, ou bien une inflation caractérisée par l'expression “il faut que les étudiants aient vu cela… pour faire ceci…”, avec pilotage par le contenu que devraient avoir vu les futurs étudiants de thèse.
(2) Le deuxième danger dans l'élaboration d'un socle est de favoriser un rabattement systématique des contenus proposés sur la maîtrise des techniques, en abandonnant toute ambition conceptuelle, ou en étant muet sur cette question essentielle.

## I. La course au “toujours moins”

Un survol des propositions adoptées montre que la commission et à sa suite les trois sociétés savantes ont choisi de fortement diminuer le contenu de la licence de mathématiques. Notons $L$ le volume toutes disciplines confondues de la nouvelle licence, $L_m$ son volume mathématique, $L'$ le volume de l'équivalent ancien : $d^1 + d^2 + \ell_m$ (Deug 1 + Deug 2 + ancienne licence - à contenu le plus souvent exclusivement mathématique), et $L'_m = d^1_m + d^2_m + \ell_m$ les anciens contenus mathématiques.

Qu'en était-il dans l'ancien système ? On avait en gros $d^1_m$ un peu inférieur à $\dfrac{1}{2}\,d^1$ et $d^2_m$ un peu supérieur à $\dfrac{1}{2}\,d^2$, de sorte que $d^1_m + d^2_m$ équivalait à peu près à une année complète de mathématiques. Ainsi le bilan était $L'_m = \dfrac{2}{3}\,L'$ dans la pluspart des cas. En crédits actuels, si $L' = 180$, on avait donc $L'_m = 120$.

Que propose le socle ? Première affirmation : la nouvelle licence doit comporter “au moins une moitié - en horaire et crédits - d'enseignements de mathématiques”. Une moitié au lieu

[1] Professeur émérite à l'Université des Sciences et Technologies de Lille

des deux tiers (on connaît le devenir des “au moins” dans les discussions avec nos collègues des autres disciplines...), $L_m = 90$ crédits au lieu de $L'_m = 120$ !

Seconde affirmation : le socle proposé (notons le $S_m$) est “estimé à un tiers environ du volume total de la licence, toutes disciplines confondues”, soit $S_m = \frac{1}{3} L$, ou $S_m = 60$ crédits. Mais un examen attentif du socle révèle qu'il est tout entier inclus dans l'ancien programme des Deugs : $S_m \leq d_m^1 + d_m^2 = \frac{1}{2} L'_m$. Dès lors, que reste-t-il pour enseigner le contenu $\ell_m$ de l'ancienne troisième année (certes divers déjà d'une université à l'autre) ? Exactement 90-60=30 crédits, c'est-à-dire un semestre ! Ainsi, le quart de l'ancien programme $L'_m$ doit disparaître ! Ceci, si l'horaire des trois années reste le même que l'ancien, ce qui n'est pas le cas, le LMD s'étant traduit presque partout par une nette chute des horaires (parfois 4 semaines...).

Suis-je pessimiste quant à l'évaluation quantitative des propositions de socle ? Une version antérieure évoquait un contenu mathématique de la licence se montant à “au maximum 110 crédits”, dont le socle aurait constitué les deux tiers. Tous calculs faits, cela aurait encore entraîné une diminution du contenu de la licence, mais nettement plus faible. Mais ce n'est pas le choix final retenu...

On peut donc conclure que les trois sociétés savantes ont choisi de réduire drastiquement le contenu des mathématiques de la licence de mathématiques. On peut se demander les raisons de ce choix, et surtout les conséquences qu'on peut en attendre.

On pourrait être optimiste, et penser que la SMF et ses partenaires ont pris conscience que l'ancien programme était souvent peu réaliste et rarement assimilé par les étudiants, et qu'ils ont saisi l'occasion pour recentrer celui-ci sur des fondamentaux qui devraient être assimilés en profondeur. L'analyse du socle proposé, que nous ferons plus loin, montre à mon avis qu'il n'en est rien, et que la décision prise s'inscrit parfaitement dans le mouvement entamé depuis 20 ans dans l'enseignement secondaire, qui a décidé que démocratiser voulait dire abaisser le niveau et les exigences, et non pas permettre au plus grand nombre l'accès véritable à une culture qui n'était réservée jadis qu'à une élite, en très grande proportion issue des couches sociales favorisées. La commission et les trois sociétés savantes se sont parfaitement conformées à l'opinion que des collègues affichent souvent dans les couloirs (rarement en public !) : “les étudiants sont nuls, ils sont incapables d'apprécier nos belles mathématiques, y a qu'à leur apprendre quelques techniques utiles, et réserver pour ceux qui iront plus loin dans leurs études les “vraies” mathématiques”. Je dois dire que cette forme de mépris pour les étudiants m'a toujours paru insupportable, et contraire à l'éthique du métier d'enseignant, qui exige de considérer *a priori* que les hommes et les femmes que nous devons former ont la potentialité nécessaire pour comprendre en profondeur les mathématiques. Même si cela exige de nous des efforts particuliers, compte-tenu de l'évolution du public, j'y reviendrai plus loin. Bien sûr, les collègues qui ont décidé de ce socle ne partagent sans doute pas cette opinion péjorative sur les étudiants, mais ils l'entendent sans cesse exprimée par bien des collègues, et il est alors difficile de s'en abstraire.

Quelles peuvent être les conséquences des choix quantitatifs ainsi effectués ? Une première a été parfaitement décrite par André Bellaïche dans le texte accompagnant son courrier d'octobre 2007, je le cite :

“l'effet principal sera de répandre l'idée qu'une licence de mathématique n'est rien d'autre qu'un gros Deug. Pas si gros que cela d'ailleurs.”

“on constatera qu'il est de plus en plus difficile de simplement suivre en master ou en prépa-CAPES ou d'être admis sur titre dans une école, après une licence de maths ; les étudiants comprendront vite que pour être reçu au CAPES ou à l'agrégation, il vaut mieux commencer par deux ans de classe préparatoire".

"Que deviendra l'enseignement français, que deviendra la recherche française (avec tout ce qui en dépend) si l'agrégation et peut-être le CAPES, les masters et les doctorats ne peuvent plus recruter que parmi les anciens élèves des classes préparatoires ? Sachant bien entendu que des carrières beaucoup plus lucratives s'offrent à ces derniers."

Ces critiques, qu'André Bellaïche avait émises avant la publication de la dernière version du projet, me semblent hélas s'appliquer tout autant à cette dernière version. Et j'y ajouterai pour ma part que cet effet sur l'orientation des bacheliers d'une licence appauvrie sera de renforcer encore la sélection sociale entre les université et les classes préparatoires. Et ce n'est pas avec la qualité des contenus proposés par le projet de socle que l'université pourra contribuer à compenser cette sélection : chacun sait bien (l'expérience des ZEP est à cet égard très parlante, voir [P]) que ce n'est pas de moins de mathématiques qu'ont besoin des étudiants "moyens ou faibles", mais de mathématiques faites autrement, plus exigeantes sur la compréhension des concepts et sur les *motivations* justifiant l'introduction des notions ou théories mathématiques. Ceci exige un enseignement en permanence mobilisé contre le "rabattement sur les techniques", tendance permanente des enseignants et des étudiants pour "ne pas être en échec". Il me paraît très clair que les contenus proposés par le projet de socle vont au contraire encourager la réduction des mathématiques à ses aspects uniquement techniques.

## II. Où sont passées les grandes idées mathématiques ?

J'en viens à l'analyse des contenus proposés. Pour cela, je vais partir d'une idée de base : les bacheliers qui nous arrivent ont certes des faiblesses du point de vue de la maîtrise de certaines techniques, voire de certaines notions au programme du secondaire, mais leur problème principal est celui du rapport qu'ils entretiennent aux mathématiques, de l'idée qu'ils se font de ce qu'est l'activité mathématique, sa nature, ses objectifs, les questions auxquelles elle se propose de répondre, les moyens qu'elle construit pour assurer ces réponses.

### II.1 Le rapport aux mathématiques de beaucoup de nos étudiants

Donnons quelques idées sur la nature de ce rapport, à travers des expériences vécues (par des collègues ou par moi-même).

(1) Un collègue de Deug 1 donne un exercice en TD, il laisse les étudiants travailler, en passant dans les rangs ; au bout de cinq minutes, il s'aperçoit que plus de la moitié des étudiants ne fait plus rien. Question :"vous ne cherchez plus ? vous avez trouvé ?". Réponse : "M'sieur, si on n'a pas trouvé en 3 minutes, on sait bien qu'on ne trouvera jamais !"

(2) Séance de préparation à l'agrégation, objectif : réflexions globales sur l'analyse (dans le but de nourrir l'exposé de cinq minutes de présentation d'un sujet de leçon au jury), question à débattre : "décrivez les grands objectifs de l'analyse que vous avez apprise durant vos quatre années d'université". Bilan : sur la trentaine d'étudiants présents, *aucun* n'a réussi à exhiber un seul objectif ; les propositions avancées consistaient toujours en une liste de théorèmes appris (le théorème du point fixe arrivant largement en tête), mais aucun étudiant n'était capable de dire les objectifs de ces théorèmes. Résoudre des équations (numériques, fonctionnelles,. . . ), en approcher des solutions, trouver des extremums, mesurer des grandeurs, en étant conscient des origines de ces problèmes (en mathématiques, en physique, etc. . . ), voilà des idées que quatre années d'enseignement des mathématiques à l'université ne sont pas parvenues à faire saisir

aux meilleurs étudiants (préparant l'agrégation…). Qu'en est-il pour les autres ?

(3) Séance de discussion en amphi, en Deug 1, question : des deux énoncés vrais suivants

(a) "la dérivée de $\int_a^x f(t)\,dt$, quand $f$ est $C^1$, est $f(x)$"

(b) "la dérivée de $\int_a^x f(t)\,dt$, quand $f$ est continue, est $f(x)$"

lequel est-il le plus intéressant à retenir ?

Réponse d'une grande majorité de l'amphi : "le premier". Raison invoquée : l'hypothèse est plus forte, c'est donc plus sûr.

(4) Un enseignant essaye en vain de faire comprendre une question sur les fonctions en utilisant l'algèbre linéaire ; réaction d'étudiants : "M'dame, pour nous, une fonction c'est pas un vecteur !"

(5) Des étudiants essayent de savoir si l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$, donnés par leurs équations, ont une intersection incluse dans un troisième hyperplan donné par une équation. Ils utilisent une méthode du pivot de Gauss, puis ne savent plus continuer. Question de l'enseignant : "Pourquoi avez-vous utilisé la méthode de Gauss ?" Réponse : "Euh… on sait pas… parce qu'on avait des équations…".

(6) Débat en amphi autour d'une "preuve" par récurrence de la proposition : "si dans un amphi il y a une fille, tous les étudiants de l'amphi sont des filles". Vote à l'issue du débat : quasi-unanimité pour affirmer que la preuve est correcte et… que la proposition est fausse !

(7) Débats avec des étudiants de Deug 1, ou bien de l'ancienne licence, ou même de l'ancienne maîtrise, autour de la question : "est-ce que 0,9999… et 1 c'est la même chose ?" Constat *chaque fois* renouvelé (faites l'expérience, c'est très instructif) : grande difficulté à faire comprendre *en quoi* c'est nécessairement la même chose, certains le refusent longtemps.

Les lecteurs trouveront dans leur pratique enseignante bien des exemples allant dans le même sens. Ce qui ressort de ces constats, c'est que ce qui manque le plus à nos étudiants c'est une véritable épistémologie des mathématiques leur permettant de comprendre ce qu'ils sont en train de faire, et dans quel but, quand ils travaillent avec une technique mathématique donnée. Les mathématiques ne sont pas une accumulation de techniques ("un tas"), mais une construction consciente et ordonnée d'outils de résolution de problèmes, outils progressivement développés en théories et en concepts, dont on maîtrise les tenants et aboutissants et qui ne sont pas généraux ou abstraits pour le plaisir. Les exemples précédents mettent en évidence que loin de cette conception des mathématiques, nos étudiants ont spontanément une épistémologie très différente, qui constitue un véritable obstacle à l'apprentissage des mathématiques et à sa pratique "raisonnée" (voir [Ra]).

Des programmes de mathématiques pour la licence qui se limitent à des titres de chapitres, et ne mettent pas en évidence une organistion générale prenant effectivement en compte en quoi ils peuvent contribuer à faire changer les conceptions de nos étudiants, n'ont pas d'intérêt véritable : un tel exercice de rédaction, je l'ai fait de nombreuses fois dans des commissions variées, de nombreux collègues s'y sont souvent employés, les résultats n'ont jamais changé grand chose à l'état de l'enseignement des mathématiques dans nos universités. De ce point de vue, le projet de socle pour la licence ne se distingue pas des exercices du genre. Dans ce qui suit, je me propose d'analyser ce projet à partir du point de vue précédent.

### II.2 Analyse du projet de socle du point de vue de l'épistémologie que pourrait (devrait ?) développer l'enseignement

**(a)** Commençons par une absence notable : bien qu'elle soit annoncée comme l'un des quatre grands objectifs, la *notion générale d'équation* ne figure pas explicitement dans le projet. Certes, on y propose des outils techniques de résolution de certains types d'équations, mais les liens entre ces différents exemples n'apparaissent pas, alors qu'il s'agit de l'un des thèmes épistémologiques motivant une grande partie des mathématiques de la licence (avec la mesure des grandeurs et l'étude des formes géométriques). C'est en particulier la motivation principale pour des notions ensemblistes (bien plus que les probabilités !) : injection, surjection, bijection, fonction réciproque, restriction d'une application, sous-ensemble définis implicitement (par des équations) ou en extension (paramétrage des solutions), toutes notions que l'on va retrouver en géométrie, en algèbre linéaire, en arithmétique élémentaire... (voir par exemple [Ro1]). Par exemple, le chapitre sur l'algèbre linéaire ne met pas en exergue trois faits fondamentaux qui pilotent une bonne partie des applications de l'algèbre linéaire, et qui prennent tout leur sens dans le cadre de la notion d'équations : *la linéarité d'une équation* (dans quelque domaine que ce soit) est un indice de ce que l'on dispose de bonnes méthodes pour peut-être la résoudre ; la *dualité entre le nombre de paramètres dont dépendent des solutions et le nombre d'équations* est une question centrale en mécanique et physique, en géométrie des courbes et surfaces, c'est la notion même de dimension entendue comme nombre de degrés de liberté ; enfin, l'algèbre linéaire est le lieu idéal pour comprendre sous quelles conditions on peut avoir un résultat étonnant, à multiples applications : quand l'unicité des solutions implique leur existence. Ce type de compréhension de l'algèbre linéaire (voir [Ro4]) semble plus important à développer chez les étudiants que les techniques des matrices.

**(b)** Parmi les quatre grands objectifs annoncés par le texte, il en est un autre qui est presque totalement masqué par la présentation faite : *la notion d'approximation*. Il devrait normalement apparaître sous plusieurs rubriques, mais la plus essentielle est reléguée sous la forme d'une *connaissance transversale : celle des nombres réels*. Or il s'agit d'un thème fondamental qui est bien plus que cela, les nombres réels sont les jambes avec lesquelles marchent les mathématiques de la licence. Peut-on avancer en mathématiques avec des jambes chanchelantes ? Pourtant, "une bonne appropriation de $\mathbb{R}$" figure parmi les grands objectifs du projet, mais rien n'est dit sur ce sujet. Avoir compris qu'un nombre réel n'est rien d'autre qu'un processus d'approximation indéfini (à équivalence près) qui ne converge que parce qu'on prend ce processus pour le nombre lui-même paraît indispensable à une bonne compréhension des problèmes et des démarches de l'analyse. En particulier, c'est à cause de ce type de construction des réels que l'on est obligé d'avoir recours si souvent en analyse à un mode de raisonnement très nouveau pour nos étudiants : *le raisonnement à $\varepsilon$ près*. Une rapide présentation axiomatique des réels (comme le font bien des cours et bien des manuels) ne permet absolument pas de comprendre ce fait, elle ne met pas les processus d'approximations au cœur de l'analyse, de surcroît elle coupe l'enseignement de la notion essentielle de mesure des grandeurs (voir [Lb1]). Je pense donc que, sans faire une construction détaillée de $\mathbb{R}$, ce qui est long et fastidieux, *il faut en faire une ébauche en en faisant comprendre les objectifs, la nécessité et les conséquences*. La moindre d'entre-elles n'étant pas une assurance que bon nombre d'équations auront des solutions parce que l'on pourra en construire des approximations convergentes, et que beaucoup de grandeurs de la physique pourront être mesurées, voire définies (à travers des intégrales, par exemple). Un exemple de présentation d'une ébauche de construction de $\mathbb{R}$ (par les développements décimaux) qui essaye d'en montrer les enjeux épistémologiques, peut se trouver dans [Ro1].

**(c)** De ce point de vue, d'ailleurs, le projet insiste peu sur le fait que *le concept de convergence*, qui n'est absolument pas acquis à l'issue du secondaire, est lui aussi une base à dominer parfaitement en analyse, et que c'est la convergence des suites qui, pour les étudiants, peut en fonder d'abord le sens. Il y a là un accent à mettre fortement dans toute éventuelle rédaction d'un socle, alors qu'elle ne figure même pas parmi les grands objectifs du projet adopté. Par ailleurs, l'idée de *convergence et approximations de fonctions*, avec sa généralisation-synthèse essentielle que constitue la topologie d'espaces métriques, n'est pas non plus mise en évidence dans le socle (même la liste indicative des "hors socle" éventuels ne parle que de la topologie de $\mathbb{R}^n$).

De façon générale, ce qui est sous-jacent à la minoration des trois points *équations, approximations, convergence*, c'est l'absence de mise en évidence de l'importance épistémologique, en mathématiques, des problèmes d'existence et des démarches construites par les mathématiciens pour les résoudre. Un autre symptôme en est l'absence complète dans le projet de l'idée même de compacité : pourtant cachée dans bien des titres proposés, son importance unificatrice de nombreuses démarches de recherche d'existence est camouflée par la parcellisation de la présentation.

**(d)** J'en viens à l'un des points centraux de la critique du socle proposé : *la faiblesse de la mise en évidence des liens profonds entre les sciences de la nature, disons la physique pour simplifier, et certains des outils abstraits construits par les mathématiques*. Pourtant, le texte signale que la formation doit obligatoirement développer "la conduite de situations de modélisation". Encore faut-il que les concepts mathématiques développés le permettent. Or ce n'est absolument pas le cas pour ce qui est proposé dans les paragraphes sur *l'intégration et les équations différentielles*. Alors, évoquer à la fin du texte la "relativité restreinte" ou "la mécanique quantique", ce n'est qu'une affiche apparemment ambitieuse mais qui risque de n'être qu'une affiche !

Commençons par un constat. Dans les années 90, j'ai soumis à un échantillon de 114 étudiants en fin de Deug 1, qui avaient tous vu l'intégrale de Riemann classique (définition habituelle, preuves des théorèmes variés la concernant), le petit problème suivant (tiré d'une pratique de *l'introduction* de l'intégrale, due en particulier à Marc Legrand, voir [GLR] et son article dans [CI2U]) :

"Avec quelle force une barre homogène mince de 6m de long et de masse 18kg attire-t-elle une masse ponctuelle de 1kg située sur la droite supportant la barre, à 3m d'une de ses extrémités ?" L'énoncé rappelait la loi de l'attraction newtonienne pour deux masses ponctuelles de masses $m$ et $m'$ : $F = G\dfrac{mm'}{r^2}$.

Seuls 12% des étudiants ont réussi à voir que pour calculer la grandeur proposée il fallait une intégrale. En fait, la grandeur demandée est *définie* par une intégrale, et c'est ce point que de nombreux étudiants n'ont pas su voir, prisonniers d'une problématique de l'intégrale coupée de la mesure des grandeurs, et trop vite rabattue sur la pratique des calculs de primitives (calcul trivial dans notre problème).

Il ne faut pas croire nos collègues de physique quand ils nous disent que ce dont ils ont avant tout besoin, c'est que les étudiants sachent *calculer* des intégrales ou *résoudre explicitement* des équations différentielles. *Avant* cela, il faut que les étudiants sachent *reconnaître* si et comment une modélisation physique va nécessiter une intégrale ou une équation différentielle. Et il ne seront en mesure de le faire que si l'introduction *en mathématiques* de ces notions n'est pas coupée des motivations souvent physiques qui en sont à la base. Croire que les étudiants pourront "conduire des situations de modélisation", si ils n'ont appris que des techniques mathématiques ou si les notions mathématiques leur ont été parachutées sous leur forme abstraite finale, est une illusion, modéliser demande d'avoir compris des concepts mathématiques et leurs motivations. De plus, motiver des concepts par des mises en équation de phénomènes physiques aide à bien mieux les comprendre mathématiquement.

Or ces aspects sont totalement absents du projet. Certes, la dernière mouture du socle admet (du bout des lèvres ?) qu'il faut *définir* l'intégrale ; mais le lien profond avec la mesure des grandeurs est ignoré (on parle bien d'une interprétation comme "aire", mais essayez donc d'interpréter directement comme aire le travail d'une force dont le point d'application décrit une courbe !). Un étudiant qui aurait appris ce qui est proposé sur l'intégrale n'a aucune chance d'en comprendre mieux le sens profond qu'en sortant de terminale, ni de pouvoir l'utiliser en physique, mais on propose en même temps de lui enseigner le "théorème de convergence dominée" : la technique en lieu et place du concept !

Une autre présentation serait bien plus instructive. Lorsqu'une grandeur élémentaire $f$ (une pression, une hauteur, une intensité de courant, une masse volumique. . . ) varie selon les points $\omega$ d'un domaine $\Omega$ (une surface plane, un intervalle de temps, une région de l'espace. . . ), et que la formule bilinéaire définissant la grandeur globale associée (force $F = p \times S$, volume $V = h \times S$, quantité d'électricité $Q = i \times T$, masse $M = \rho \times V$,. . . ) n'a alors plus de sens ($p$, $h$, $i$, $\rho$. . . varient avec le point $\omega \in \Omega$), que faire ? On découpe le domaine en "petits" morceaux $\Omega_i$ qu'on peut *mesurer*, on encadre les valeurs de $f$ entre $m_i$ et $M_i$ sur chaque $\Omega_i$, et les deux sommes $\sum_i m_i\,\mu(\Omega_i)$ et $\sum_i M_i\,\mu(\Omega_i)$ encadrent la grandeur globale cherchée. Et on cherche alors à passer à la limite. . . . Cette problématique de *la procédure intégrale : découpage, encadrement, sommation, passage à la limite*, se motive très bien par une introduction par un problème physique (celui avec la barre, cité plus haut, marche très bien pour faire travailler les étudiants eux-mêmes sur la problématique de l'intégrale, voir [GLR], mais bien d'autres peuvent être aussi utilisés, voir [GLR] et [Ro1]). Elle débouche d'abord sur l'intégrale des fonctions étagées.

Cette présentation a l'avantage, outre d'être centrée sur la mesure des grandeurs et de pouvoir ainsi mettre les étudiants en situation d'agir par eux-mêmes en physique, d'avoir un caractère polysémique du point de vue mathématique, dans le cas d'une variable, où $\Omega$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ : la liberté et l'imagination des mathématiciens travaillant sur un problème initialement physique sont ainsi mises en valeur. En effet, selon le *choix* des $\Omega_i$ et de $\mu$, d'une part : (a) intervalles avec leur longueur, ou (b) ensembles mesurables avec leur mesure de Lebesgue ; et le *choix* du type de convergence envisagé, d'autre part : (1) convergence uniforme des fonctions étagées vers $f$, ou (2) convergence au sens de l'intégrale elle-même, on peut obtenir quatre type d'intégrales, et ainsi comprendre les relations entre ces diverses intégrales.

Dans le cas (a1) on obtient l'intégrale des fonctions réglées ("à la Dieudonné"). Dans le cas (a2) on obtient l'intégrale de Darboux (on découpe en "tranches verticales", et c'est la petitesse de l'intégrale d'une certaine fonction étagée qui donne la convergence). Dans le cas (b1) on obtient l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées (on découpe en "tranches horizontales", exactement comme l'a fait Lebesgue dans sa célèbre note de 1901, voir [Lb2]). Dans le cas (b2) enfin on peut trouver l'intégrale de Lebesgue la plus générale.

C'est ainsi l'intégrale de Darboux qui, dans une première approche, colle le mieux au point de vue de la mesure des grandeurs. Bien sûr, il faut pouvoir intégrer les fonctions simples (continues par morceaux, par exemple, ou monotones, ou réglées. . . ). De ce point de vue, l'insistance du texte (dans ses diverses versions) à exclure une démonstration paraît curieuse. Autant il est raisonnable d'admettre un résultat fondamental quand sa preuve fait appel à une théorie qui ne viendra que plus loin dans l'enseignement, autant il est assez malsain de faire de même quand le résultat est immédiat avec les outils qu'on vient de développer, et qui peuvent être ainsi valorisés. C'est le cas ici avec le théorème des intervalles emboîtés : une fonction $f$ sur $[a, b]$ est Darboux intégrable ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe deux fonctions étagées $h$ et $g$ telles que $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b (h-g)\,dx < \varepsilon\,(b-a)$ ; si deux telles fonctions n'existaient pas, alors soit on n'aurait pas deux telles fonctions définies sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ encadrant $f$ avec différence des intégrales majorée par $\varepsilon\,\frac{b-a}{2}$, soit ce serait la même impossibilité sur l'autre moitié $[\frac{a+b}{2}, b]$. La dichotomie marche alors toute seule et donne la contradiction attendue à son point limite $c$ dès que $f$ a une limite à gauche et une à droite au point $c$ (voir [Ro1] pour les détails). De plus le critère d'intégrabilité a une interprétation géométrique lumineuse : $\forall \varepsilon > 0$ le graphe de $f$ peut être recouvert par un nombre *fini* de boîtes rectangulaires à bases d'intérieurs disjoints et dont la somme des aires est majorée par $\varepsilon$. Ce qui permet d'intégrer très facilement $\sin \dfrac{1}{x}$ si on le désire... et montre immédiatement que $\mathbf{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable.

Mais l'aspect le plus important est que cette approche de l'intégrale permet un lien étroit avec la physique, que ne permet absolument pas la formulation appauvrie proposée par le projet de socle.

Qu'en est-il du paragraphe concernant les équations différentielles ? Il faut d'abord remarquer que l'essentiel de ce qui est proposé figure déjà aux programmes de mathématiques ou de physique de terminale : équations linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants. Le seul prolongement par rapport à la terminale consiste en des "exemples" d'autres équations... Ni l'équation linéaire du premier ordre à coefficients variables, ni les équations à variables séparables ne sont citées ! Par ailleurs, c'est le silence complet sur les problèmes d'existence et unicité, sur les rapports entre ces problèmes et la réalité physique, et sur les liens avec des méthodes numériques.

Considérons par exemple un problème de physique tout simple : un vase cylindrique de base d'aire $S$ contient de l'eau à une hauteur $H$ ; à l'instant zéro on perce un petit trou d'aire $s$ dans sa base ; quelle est la loi de vidange : hauteur $h(t)$ en fonction du temps ? Eh bien, le programme proposé ne permet ni de résoudre ce problème, ni en cas de solution de comprendre le paradoxe qu'elle présente. En effet, l'équation différentielle (simple à établir avec la conservation de l'énergie) est $h' = -2k\sqrt{h}$, qui n'est pas linéaire (eh oui, il y a souvent un carré dans l'énergie cinétique !). Admettons quand même qu'en écrivant $\dfrac{h'}{2\sqrt{h}} = -k$ un étudiant réussisse à la résoudre. Il trouve $h(t) = (\sqrt{H} - kt)^2$... Damnation ! Après s'être vidé en un temps $T_0 = \dfrac{\sqrt{H}}{k}$, le vase se remplit à nouveau, tout seul ! Les mathématiques permettraient-elles donc de dire n'importe quoi sur le monde réel ? Comment résoudre cette question si on n'a jamais entendu parler des conditions de Cauchy-Lipshitz d'existence et unicité locales, et de ce qui peut se passer en des points où la condition de Lipschitz n'est pas vérifiée ? La clef d'un bon rapport des mathématiques avec le monde réel, c'est que lors d'une mise en équation *la* solution physique doit faire partie *des* solutions mathématiques.

Je pense qu'il faut donc absolument donner le théorème de Cauchy-Lipschitz d'emblée dans le chapitre sur les équations différentielles. C'est de plus prudent quand on doit parler de méthodes numériques pour approcher *la* solution d'une équation à donnée initiale. Il faut d'ailleurs se rappeler que le programme de terminale introduisant l'exponentielle par l'équation $y' = y$, et admettant l'existence de la solution vérifiant $y(0) = 1$, la résolution proposée même des seules équations linéaires à coefficients constants exige logiquement ce théorème d'existence... Il paraît alors assez sain de l'aborder franchement. Et il est parfaitement possible, simple et instructif de montrer avec des outils élémentaires d'analyse qu'une fonction $f$ dérivable sur un intervalle $I$ et y vérifiant $|f'| \leq k\,|f|$ est identiquement nulle dès qu'elle s'annule en un point...

Par contre, différer une preuve de l'existence locale de solutions jusqu'à l'étude du théorème du point fixe dans un espace métrique complet est là tout à fait normal, et ce point devrait d'ailleurs être proposé comme incontournable dans la licence en trois ans. Pourtant, ne figurent dans les propositions évoquées au titre des "hors socle" éventuels, ni la topologie des espaces métriques, ni un retour sur les équations différentielles...

De plus, toujours si on se propose d'apprendre aux étudiants des "conduites de modélisations", il faut être un peu plus précis sur celles qui aboutissent à des équations différentielles. Une méthode sans cesse utilisée en physique est "la procédure de l'accroissement différentiel" : voulant déterminer comment varie une variable $y$ (une grandeur physique), en fonction d'une autre $x$, on donne un accroissement $\Delta x$ à la variable $x$, et on essaye d'évaluer l'accroissement $\Delta y$ qui peut en résulter, sous la forme $\Delta y \approx f(x,y)\Delta x$. Mais l'interprétation à donner au sens du symbole $\approx$ est loin d'être la même en mathématiques et en physique. Dans le premier cas il s'agit du symbole d'équivalence mathématique, qui signifie ici $\Delta y = f(x,y)\Delta x + o(\Delta x)$, et la relation de *négligeabilité* qui apparaît est essentielle au concept de dérivée et à celui de différentielle, et permet d'obtenir une équation différentielle $y' = f(x,y)$. Par contre le physicien ne s'embarrasse pas de ces subtilités, il devine que certaines erreurs sont négligeables, les suppose telles, et est très satisfait si le résultat du calcul alors fait confirme la négligeabilité supposée. Ces deux démarches à la fois contradictoires et complémentaires des deux disciplines devraient être expliquées aux étudiants, en même temps que des *mises en équation différentielle* de phénomènes physiques ou de problèmes géométriques doivent être développées avec eux (et mener à des équations différentielles variées). Sur ces questions, voir par exemple [Ro1], [Ro2] et [Ro3].

Signalons enfin qu'un thème d'enseignement sur les équations différentielles qui, d'une part intéresse beaucoup les étudiants, et de l'autre se révèle apte à leur faire comprendre l'aspect "champ de pentes" ou "champ de vecteurs" d'une équation différentielle, est *l'étude qualitative d'équations différentielles*. De plus les liens avec des modélisations dans divers domaines sont faciles à illustrer. Enfin, la *construction* progressive de différents outils d'étude aptes à résoudre les problèmes qu'on veut étudier est particulièrement facile à mettre en évidence auprès des étudiants. On peut voir à ce propos l'article avec Michèle Artigue : *Enseigner autrement les équations différentielles en Deug*, dans [CI2U].

(e) Evoquons enfin un dernier point, classé en "connaissances transversales" par le projet de socle (ce qui est raisonnable) : *la logique élémentaire, les quantificateurs*. Mais la formulation très concise cache l'importance épistémologique de ce thème dans la formation des étudiants. Ce qui est en jeu dans cette question est l'une des méthodes (qui n'est pas propre aux mathématiques, on raisonne logiquement aussi en physique,... ) de validation de la démarche mathématique. Cela ne se réduit ni à des techniques (savoir nier $\forall\,\varepsilon\,\exists\,N$, usage des tables de vérité en calcul propositionnel... ), ni au simple ( !) sens mathématique de ce qui est véhiculé dans une suite d'implications d'un raisonnement, ni à la logique du langage courant et de la vie quotidienne. Tous ces aspects demandent à être confrontés, articulés, analysés du point de vue de ce que l'on cherche à faire en mathématiques. De plus, des études ont montré les grandes difficultés qu'ont les étudiants avec ces questions (voir par exemple [Lg], [RR1], [RR2], [DG1], [DG2]). Ainsi, même si plusieurs expériences semblent montrer qu'un enseignement autonome de logique formelle pour les étudiants débutants est incapable de résoudre ces difficultés, une succession de petites mises au point à telle ou telle occasion mathématique ne suffit pas non plus. Le problème est en fait assez difficile, l'équilibre entre mises au point ponctuelles, interventions plus organisées didactiquement, abord épistémologique voire philosophique, ... est délicat à trouver. En particulier, la question de l'instrument à mettre entre les mains des étudiants pour leur permettre de "contrôler" leurs raisonnements est loin d'être résolue, dans la mesure où le contrôle par le sens mathématique (celui principalement utilisé par les mathématiciens) est difficile quand les connaissances mathématiques sont en cours d'acquisition.

Bref, il est à craindre que la seule ligne consacrée à la question de la logique dans le projet ne soit guère prise en compte par les enseignants qui liront les recommandations du socle. Et c'est pourtant une question importante...

### II.3 Socle, utilitarisme et culture mathématique

Un autre aspect qui ne peut manquer de frapper le lecteur à la lecture du projet de socle, c'est une certaine absence de ce qu'on peut appeler *la culture mathématique*. On sent, à travers la présentation parcellisée en techniques, et à travers le choix des techniques proposées, une préoccupation utilitaire (pour les fameux "débouchés de nos étudiants"). Cette préoccupation n'est pas à rejeter, à condition de ne pas se limiter aux techniques, comme on l'a vu au II.2 (citons de plus, par exemple, les aberrations auxquelles mènent souvent des techniques statistiques mal comprises du point de vue théorique). Mais à condition aussi qu'elle soit harmonieusement articulée avec la spécificité de l'université, qui est de transmettre une certaine culture. C'est particulièrement vrai pour ceux de nos étudiants, sans doute encore les plus nombreux pour longtemps, qui deviendront enseignants : pourront-ils faire découvrir et aimer les mathématiques à leurs élèves si eux mêmes n'ont pas eu accès à une certaine forme de culture mathématique ?

Qu'entendons-nous par culture mathématique ? Une première forme a été évoquée dans ce que nous avons dit plus haut concernant l'insertion des mathématiques dans une volonté de compréhension rationnelle du monde : faire le lien entre l'introduction de concepts mathématiques et leurs motivations et leur rôle pour décrire, mettre en équations, modéliser, abstraire les phénomènes naturels, et donc donner une finalité épistémologique aux techniques, c'est déjà un élément important d'une culture mathématique. Mais il y a aussi autre chose : il faut faire saisir aux étudiants qu'il y a un mouvement interne des mathématiques, que leur évolution s'appuie en permanence sur de grands problèmes, que ceux-ci proviennent du développement même des mathématiques ou qu'ils soient proposés par un questionnement extérieur et historiquement lié à des enjeux, par exemple philosophiques (comme chez les Grecs) ou techniques (état des moyens de calcul, par exemple, voir [K]). Faire comprendre cette réalité des mathématiques par nos étudiants (qui trop souvent en ont une vue fixiste) exige que les concepts que nous introduisons souvent de façon arbitraire soient nourris par des problématiques dont l'histoire ne soit pas exclue. Je ne crois pas que la simple proposition que figure dans les enseignements complémentaires une éventuelle unité d'histoire peut jouer le même rôle : que nos mathématiques ne soient pas des réponses à des questions jamais posées, c'est une préoccupation qui doit nourrir les enseignements de mathématiques eux-mêmes, et c'est un aspect décisif de la culture mathématique.

Par exemple, une ébauche de construction de l'ensemble des nombres réels ne doit-elle pas s'accompagner d'interrogations concernant l'irrationnalité, la transcendance, la constructibilité des nombres, et l'histoire, même sommaire, de ces questions ? Un futur enseignant de mathématiques peut-il n'avoir jamais entendu parler, et par des mathématiciens, des problèmes de la quadrature du cercle, de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ? Faut-il introduire les nombres complexes par des lois bizarres et *a priori* sur les couples de nombres $(a, b)$, ou ne peut-on parler de l'équation du troisième degré, de Bombelli (voir par ex. [Ro1]), puis d'Argand et Wessel, et de Cauchy ? Ne peut-on évoquer Archimède et la méthode d'exhaustion, la méthode des indivisibles de Cavalieri et son devenir, quand on parle de l'intégrale et de mesure des grandeurs ?

### Petite conclusion

Il semble donc clair que le projet de socle de la licence adopté par les trois sociétés savantes cumule les deux inconvénients évoqués au début : réduction drastique des contenus et repliement sur les techniques. Il va en résulter, s'il était effectivement appliqué dans les universités sous la forme selon laquelle il se présente, une impossibilité d'améliorer en profondeur la formation des étudiants de mathématiques.

Il nous semble qu'une toute autre présentation, mettant en avant la nécessité de modifier l'épistémologie spontanée des étudiants, de motiver réellement la démarche mathématique et sa manière de créer des concepts, et situant une part importante des mathématiques dans la volonté de compréhension rationnelle du monde, tout en gardant en tête que les mathématiques sont aussi un aspect de la culture, pourrait intéresser les mathématiciens des universités et passionner nos étudiants. Sur bien des points évoqués dans la partie II, d'ailleurs, des expériences significatives d'enseignement qui marchent ont été effectivement réalisées ces vingt dernières années. Peut-être la commision de la SMF et de ses partenaires aurait-elle mieux fonctionné si elle les avait prises en compte, et avait consulté la Commission Inter-Irems Université, qui réfléchit à ces problèmes depuis plus de vingt ans...

### Petite bibliographie

[AR] Michèle Artigue et Marc Rogalski, *Enseigner autrement les équations différentielles en Deug*, dans [CI2U], p. 113-128.

[CI2U] Commission Inter-Irems Université, *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*, Irem de Lyon, (1990).

[DG1] Viviane Durand-Guerrier, *Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective*, Educational Studies in Mathematics 53 (2003), p. 5-34.

[DG2] Viviane Durand-Guerrier, *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, document de synthèse pour l'HDR (2005), IREM de Lyon.

[GLR] Denise Grenier, Marc Legrand, Françoise Richard, *Une séquence d'enseignement sur* *l'intégrale en Deug A première année*, Cahiers de didactique des mathématiques, 22 (1986), Irem de l'Université Paris VII.

[K] Jean-Pierre Kahane, *Le 13ème problème de Hilbert : un carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie*, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 3 (1982), Université Paris VI et Ecoles des hautes études en sciences sociales p. 1-25.

[Lb1] Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, nouveau tirage (1975), Albert Blanchard.

[Lb2] Henri Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I Math. 132 (1901), p. 1025-1027. Voir aussi la réédition avec commentaires de J.-M. Bony, G. Choquet, G. Lebeau, dans la même publication, 332 (2001), p. 85-90.

[Lg] Marc Legrand, *Circuit, ou les règles du débat mathématique*, dans [CI2U], p. 129-161.

[P] Marie-Lise Peltier, *Dur, dur d'enseigner en ZEP*, La Pensée Sauvage, Grenoble (2003).

[Ra] Jean-Claude Rauscher, *Des étudiants apprécient leur passé scolaire en mathématique : que nous apprennent-ils ?*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol 9 (2004) p. 205-221, Irem de Strasbourg.

[Ro1] Marc Rogalski (avec la collaboration de Nicolas Pouyanne et Aline Robert), *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Editions Ellipses, Paris (2001).

[Ro2] Marc Rogalski, *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères-IREM, 64 (2006), p. 27-48.

[Ro3] Marc Rogalski, *Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique : les procédures de l'accroissement différentiel dans les deux disciplines*, Journée de l'IREM de Lille (2006).

[Ro4] Marc Rogalski, *L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de Deug A*, Gazette des mathématiciens, 60 (1994).

[RR1] Janine Rogalski et Marc Rogalski, *Traitement de la validité de l'implication par des étudiants, corrélations avec leurs performances mathématiques, liens avec diverses questions de psychologie cognitive*, Actes du Séminaire National de Didactique 2003, IREM de Paris VII (2004).

[RR2] Janine Rogalski et Marc Rogalski, *Contributions à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques*, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 9 (2003), Strasbourg.