Présenté au Colloque international atour de la théorie des situations didactiques, Bordeaux, juin 2000. Non publié dans les actes sous prétexte d'être trop long(pourtant cet t article ne prétend pas être complet !).

La théorie des situations comme ouverture sur l'expérience et l'expérimentation dans le domaine des connaissances et savoirs numériques à l'école primaire.

1. Introduction

En 1991, sous la direction de J. Bideaud, Cl. Meljac et J. P. Fischer, paraît aux presses universitaires de Lille, un livre intitulé : Les Chemins du Nombre. En deuxième page de couverture, les éditeurs nous disent que c'est un hommage à l'occasion du 50ème anniversaire de la parution du fameux livre de Jean Piaget et Alina Szeminska : La Genèse du Nombre chez l'Enfant. (Piaget 41), et que leur objectif est de « répondre aux questions suivantes : Quels sont les progrès réalisés depuis La *Genèse du Nombre* ? Quels nouveaux chemins a-t-on défrichés ? en réunissant, en un seul « lieu », les contributions de spécialistes internationaux les plus compétents et les plus connus dans ce domaine, sans aucune exclusive d'école » . Peut-être me suis-je mal informé, mais il me semble que 10 ans plus tard, il n'y ait eu que peu de changements sur ce « front » de la recherche. Elle semble marquer le pas. Certes, il y a eu cet ouvrage intéressant de B. Vilette (Vilette 96). Mais cela reste encore très circonscrit. Certes il y a eu les manifestations de plus en plus claironnantes de chercheurs se frottant aux techniques à la mode en neuropsychologie (je pense entre autre à Dehaene 97), mais cela n'apporte quasi rien de neuf en ce qui concerne l'enseignant des mathématiques à l'école primaire. Je ne vois donc pas l'intérêt qu'il y aurait à dresser ici une n-ième recension, et si il est bon de dresser de temps en temps un bilan, je laisse à d'autres le soin de s'en charger.

Si je cite Les Chemins du Nombre, c'est que le simple lecture de titres peut-être extrêmement instructive. En 1941, on annonce ***La** Genèse **du** Nombre*. En 1991, nuance, si *Nombre* est toujours au singulier, on parle maintenant de ses accès au pluriel *: **Les** Chemins **du** Nombre*. Tandis que les organisateurs du présent colloque ont intitulé cette session : *Cercle **des** Nombres*. Serait ce anecdotique ? Je ne le pense pas et vais essayer de vous en convaincre. Revenons à l'ouvrage de 1991. Si l'on se réfère à l'objectif que les éditeurs disent poursuivre, on comprend le pluriel à « Chemins ». La lecture de ce livre montre aussi que les éditeurs jouent sur une certaine ambivalence : il s'agit certes des chemins qu'empruntent les chercheurs, mais aussi, peut-être, des chemins d'accès des enfants, ou des élèves aux nombres, que ce soient ceux que leur « développement intellectuel » leur dicte ou ceux que leurs enseignants leur ménagent. Le pluriel adopté dénote une approche qui se veut éclectique du problème, et l'ouvrage réalise bien ce projet. Il le réalise si bien qu'il va jusqu'à inclure un texte qui a pour titre : *Les multiples racines des nombres naturels et leurs multiples interprétations* par R. Droz. Ce texte est si singulier (sic) que, je le tiens de Claire Meljac elle-même, les éditeurs de la version américaine de cet ouvrage ont rechigné à le voir publié dans leur langue ! Bien que je ne sois sans doute pas impartial lorsqu'il s'agit de Rémy Droz que je connais bien, je pense que son texte est celui de l'ouvrage qui rend le mieux justice à l'entreprise de Piaget, mais qu'au delà, c'est aussi texte qui a bien situé l'impasse où la recherche se trouve actuellement. Je me propose donc ici de relater les points saillants du propos de Droz, dire comment je m'en inspire, en me référant aux recherches de didactique des mathématiques que j'ai menées jusqu'en 1991 environ à propos des « connaissances numériques » élémentaires. Ce faisant, je me référerais essentiellement à un objet qui me préoccupe depuis fort longue date, à savoir la notion de situation et je m'attacherai plus particulièrement au milieu, tel que l'a défini G. Brousseau (G. Brousseau 88), je cite : **Le milieu dans ce modèle** (p. 320) **:**

«Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, nous devons adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminés alternativement par le joueur et un SYSTEME antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système, nous l'avons déjà signalé, est pour l'observateur une modélisation de l'environnement et de ses réponses pertinentes pour l'apprentissage en cours. Il n'est qu'une partie de la situation.

Car la situation n'est pas seulement le cadre de l'action du sujet, elle en est la condition, elle est donc étroitement associée aux connaissances en jeu. De ce fait, une partie de la situation va devoir entrer comme partie intégrante des savoirs correspondants. Cette partie, cachée peut-être, mais essentielle, sert de référence aux savoirs et d'objet à la connaissance. […]

C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler milieu. Il joue donc un rôle central dans l'apprentissage comme cause des adaptations et dans l'enseignement comme référence et objet épistémique. (Définition: le milieu est un jeu ou une partie de jeu qui se comporte comme un système non finalisé).

Il a un caractère relatif […]»

2. Les multiples racines des nombres naturels et leurs multiples interprétations.

En guise d'hommage, Droz retient essentiellement de la contribution de Piaget & Szeminska, le fait qu'ils ont ouvert une brèche qu'il serait fâcheux de refermer. (ibid. p. 286-287) *"L'intérêt des expériences de Szeminska et de Piaget, et leur fécondité heuristique incroyable, réside dans le fait qu'ils démontrent, expériences à l'appui, d'une part que le champ du quantitatif n'est pas étroitement lié au domaine du nombre* *et au comptage (d'où la séduction de ces expériences qui portent sur la conservation des quantités continues et discontinues, la compréhension des correspondances bijectives et leur invariance spatiale, etc.) D'autre part, ils montrent de manière brillante que la pratique du nombre n'est pas nécessairement liée au comptage, comme le pensaient tous les chercheurs et beaucoup d'enfants avant eux."*

Ses conclusions, qui portent sur les recherches qui ont suivi, sont bien plus critiques. *"En raison de telles considérations, je pense que la recherche sur la psychogenèse des notions relatives aux nombres et aux idées plus ou moins informes qui les précèdent restera nécessairement pointilliste et trahit, selon toute vraisemblance, tant du point de vue qualitatif que quantitatif, la générosité, l'originalité et la richesse des pensées et des activités enfantines dans ce domaine."*

Quelles sont donc ces raisons évoquées par Droz? Je les cite:

"1) Ni les philosophes, ni les mathématiciens n'ont pu nous dire de manière univoque ce que sont les nombres, d'où ils viennent et à quoi ils servent parce que les nombres sont multiples et parce qu'on peut les asservir à des fins multiples.

2) Les enfants ne construisent ni ***une*** *notion du nombre, ni* ***une*** *pratique du nombre, mais des notions et des pratiques multiples des nombres multiples qui s'ignorent et qui se reconnaissent, qui interagissent, qui se chevauchent et qui s'interpénètrent, qui se complètent et qui s'excluent mutuellement.*

3) Les chercheurs psychogénéticiens réduisent cette richesse à une perspective (fréquemment très) congrue qui leur paraît convenir à un moment donné pour des raisons qu'ils sont seuls à connaître. Leur perspective n'est jamais complètement indépendante de ce que les enfants ***savent*** *aussi faire si on le leur demande gentiment, mais ce n'est pas* ***la*** *seule perspective qu'ils ont, et à plus forte raison, ce n'est pas la seule qu'ils sont capables d'avoir.*

4) Finalement les chercheurs psychogénéticiens explicitent mal les finalités de leurs projets - s'agit-il de mettre en lumière les performances enfantines en les comparant aux performances adultes; s'agit-il de savoir comment il faut s'y prendre pour enseigner les mathématiques (ou ce qui en tient lieu, compte tenu de l'âge opératoirement tendre des enfants concernés); ou s'agit-il de poursuivre le projet de Piaget et Szeminska, à savoir l'analyse psychogénétique d'une genèse spontanée dans *les formes multiples qu'elle peut revêtir?"*

Revenons donc au titre de cet article de Droz: *Les multiples racines des nombres naturels et leurs multiples interprétations*. Je soulignerai alors deux choses. La première c'est qu'il est ici question des racines des nombres naturels (et déjà d'eux, et d'eux seuls !), donc de ce qui concerne les jeunes enfants. La seconde c'est que Droz insiste sur la multiplicité des formes que peut prendre cette "idée" de nombre, et il conclut d'ailleurs son texte ainsi:

"Personnellement je suis convaincu que le nombre doit être une idée platonicienne à la fois très simple et incroyablement formidable. C'est la possibilité de continuellement étendre les interprétations du nombre et les sémantisations de ces interprétations du nombre et des nombres qui doit fasciner beaucoup d'enfants comme elle fascine leurs parents". Il déclare dans un autre passage tout aussi important que le nombre est polymorphe et polysémique, je cite p. 294:

"A vrai dire ce que les enfants parviennent à faire avec des nombres et avec des idées qui pourraient devenir des nombres, si elles étaient achevées, ressemble à s'y méprendre à ce que fabriquent les mathématiciens et autres penseurs patentés que je viens de citer. Ils font n'importe quoi des nombres et de ce qui leur ressemble. Ils en font surtout ce dont ils ont besoin à un moment donné. Il est certain qu'ils ne sont pas aussi adroits que les adultes dans leur maniement des mots et des pensées et que parfois, ils ne savent pas très bien ce qu'ils veulent. Mais ce qu'il faut surtout voir comme étant semblable, c'est leur profond intérêt pour une structure générale qu'on peut interpréter selon ses besoins et qui permet de dénombrer, d'ordonner, de composer, de compter, de quantifier, et ainsi de suite.
D'emblée, me semble-t-il, les enfants traitent les nombres et ce qui leur ressemble comme étant des expressions d'une structure polymorphe et polysémique qu'on peut mettre en œuvre chaque fois que cela paraît convenir sans en questionner les fondements. Les enfants seraient aussi étonnés que Monsieur Jourdain le jour où il a appris qu'il parlait couramment la prose sans en avoir fait un apprentissage particulier, si on leur expliquait leurs pratiques des nombres et les structures hypothétiquement sous-jacentes à ces pratiques."

Et en effet, depuis que l'on s'intéresse à l'enfant pour répondre aux mystères des nombres, il semble que la philosophie relayée par les études de la cognition se livrent à une formidable joute d'effets Jourdain dans ce qu'elles cherchent à attribuer au sujet (pour un avertissement allant dans ce sens on peut aussi se référer au livre de Varela 89).

Il apparaît donc que certains auteurs parlent du nombre au singulier et que d'autres, dont les organisateurs de ce cercle, parlent des nombres, au pluriel. Je ne veux pas ici entrer dans des considérations oiseuses du type de celles que l'on aura pu lire au sujet du singulier ou du pluriel à mettre au vocable mathématique, et je sais que tout le monde semble d'accord pour dire qu'à partir d'un certain moment dans la construction des savoirs, le pluriel est de mise. Mais voilà cet accord laisserait entendre que le singulier serait peut-être pertinent quant au "préconcept" de nombre, ou comme les désigne J. Rogalski: "Des notions, comme le nombre, la grandeur, l'espace et les déplacements, qui organisent une connaissance sur le monde, fonctionnent comme des précurseurs de notions mathématiques." (J. Rogalski, 85 ?) alors que ce que dit précisément Droz, c'est que même là, il y a pluralité: il parle bien des **multiples racines des nombres**. Ce point est très important dans une perspective piagétienne qui entend rendre compte du fait qu'à quelque moment qu'on les étudie dans leur développement, les sujets présenteront la même potentialité cognitive. Et c'est dans cette perspective très fidèle à la pensée de Piaget que Droz, que l'on ne peut pourtant pas accuser de complaisance envers son maître, insiste sur ce point. En liant en effet dans son titre: les multiples racines des nombres naturels et **leurs multiples interprétations**, il reste bien dans l'idée princeps de Piaget selon laquelle il y aurait continuité entre les connaissances enfantines et les développement ultimes de la science et de l'épistémologie. Car ce qui étonne à juste titre Droz ce n'est pas tant la multiplicité des nombres que le fait que tant d'auteurs, mathématiciens, philosophes, et psychogénéticiens en cherchent encore **une** interprétation, et que, ce faisant, ils feignent d'ignorer qu'ils les multiplient. Dit autrement, c'est bien cette multiplicité cognitive "du" nombre qui produit la multiplicité des interprétations épistémologiques.

Il semble hélas, que cela ne soit pas la leçon retenue par les chercheurs cognitivistes, au contraire même. Ces derniers paraissent ne pas faire autre chose que de reprendre sempiternellement la même quête, souvent sur d’autres bases, comme si

Piaget & Szemniska ne s'étaient trompés que dans les moyens d'atteindre cette cible qui serait LA genèse DU nombre. Nous les voyons donc poursuivre avec beaucoup d'imagination et de subtilité, leur recherche d'une interprétation à l'exclusion de toute autre. Ainsi la question du nombre devient l'objet des bagarres théoriques qui la dépassent, et dont l'enjeu semble être de savoir qui détiendra LA théorie de LA cognition ou de L'esprit, (et j'en passe). Ce n'est pas mon affaire.

3. Renversement de perspective.

En général, les chercheurs psychologues et autres cognitivistes et leurs émules n'en restent pas à l'exposé de données sur le développement de la (ou les) notion(s) de nombre chez l'enfant, mais sont friands d'une sorte de validation pragmatique de leurs thèses en montrant comment elles peuvent se prolonger par des propositions didactiques efficaces, tant dans la définition de programmes pour tous que dans des propositions de remédiations diverses. La perspective déjà très congrue qui les caractérisait en tant que chercheurs en psychologie cognitive, se trouve alors en effet encore plus réduite. Par dessus le marché la recherche se trouve mal contrôlée, par suite de leur ignorance de dimensions plus proprement didactiques, comme, par exemple, ce qui a trait à la transposition didactique. Bref, disons-le clairement, je ne suis pas du tout intéressé par les doctrines que l'on peut développer à partir des résultats de ces recherches en psychologie cognitive. Je crois que nous avons meilleur parti à tirer de ces travaux, c'est-à-dire en nous informant des champs d'expertise dans lesquels leurs auteurs sont experts, c'est-à-dire le travail théorique et expérimental en psychologie.

Il y a certes la voie que propose par exemple G. Vergnaud (Vergnaud 85, 90) qui mise tout sur le rapprochement de l'idée générale (et fonctionnelle) de schème avec celle des contenus (les régularités des conduites tenant à l'organisation des schèmes et s'exprimant par invariants et théorèmes-en-actes, correspondants cognitifs miraculeux des propriétés mathématiques), en invoquant la conceptualisation et la nécessité, quant aux contenus, de ne pas s'enfermer dans des cadres trop étroits mais de raisonner à partir de « champs conceptuels ». Il argue du fait qu'un concept se trouve toujours impliqué dans une multitude de « situations » et qu'il ne s'y trouve jamais seul. Il y aurait donc deux réseaux en étroite relations : un réseau conceptuel (les champs conceptuels) et un réseau de situations réelles.

Cette réponse ne me suffit pas. Premièrement parce que la référence que Vergnaud fait aux situations, ne va guère plus loin que l'invocation d'une idée. C'est bien trop vague pour moi. D'ailleurs, se contenter de s'en tenir à un tel degré de généralité suppose que l'on saurait exactement ce qu'est une situation. Dans ce cas à quoi bon essayer d'en faire la théorie et les étudier ? Secondement et surtout parce que j'estime, même si cela est fort classique de sa part, que Vergnaud plaque et confond finalement trois ordres distincts, les concepts, les idéalités mathématiques (ou objets mathématiques que l'on confond souvent avec les premiers en parlant de « concepts mathématiques ») et les savoirs. Si cet auteur a raison d'insister sur la multiplicité des sources de savoir et de connaissance dans l'expérience, et que cette multiplicité est celle de champs de concepts interconnectés, dans les faits, il ne nous décrit quasiment jamais ces « champs » mais se borne généralement à citer quelques réseaux de concepts mathématiques, laissant à l'évocation des situations de référence le soin de nous suggérer les autres concepts en lice, qui sont tout autant les concepts non mathématiques en jeu que la part conceptuelle non retenue dans les définitions mathématiques elles-mêmes. Il ne suffit pas non plus d'appeler Vigotsky à la rescousse et sa fameuse distinction entre *concepts naturels* et *concepts scientifiques* pour régler l'affaire. Considérer, comme il le fait, les savoirs, les objets et les concepts mathématiques comme désignant la même chose revient au bout du compte à épouser sans trop la questionner la norme du savoir scolaire institué. Ce danger est particulièrement grand en ce qui concerne l'enseignement élémentaire, sur lequel la vigilance épistémologique des mathématiciens s'exerce plutôt faiblement. En 1982, j'ai déjà soulevé des questions allant dans ce sens (Conne 82). La théorie des champs conceptuels n'arrive pas à intégrer la transposition didactique, ce n'est pourtant pas faute d'en avoir eu le temps ! Ce que, en tant que didacticien des mathématiques, j'attends de la psychologie n'est pas de m'expliquer ce que les mathématiques font déjà fort bien : non pas me dire comment la genèse réaliserait au plan du développement cognitif ce que sur un plan formel on obtient par la dérivation d'une base axiomatique donnée, mais plutôt comment un sujet pensant peut se débrouiller avec une mathématique déjà pensée avant lui, et qui aussi, d'une certaine manière, « pense toute seule » ; comment surtout, les sujets enrichissent, chacun à son niveau, les mathématiques de leurs propres pensées sur le monde tout autant que sur les mathématiques elles-mêmes ; et comment enfin cet enrichissement peut être fécond pour passer des mathématiques qu'un sujet sait, à celles qu'il découvre pour lui-même.

Revenons au propos de Droz, il montre que « selon » les sensibilités de chacun, on a vu fleurir différents systèmes tendant de rendre compte de l'existence des nombres naturels. On aurait pu croire un moment que les recherches portant sur la genèse de ces notions chez l'enfant arriveraient à trancher entre ces **reconstitutions formelles** des fondements des mathématiques. Mais il n'en est rien, ou plutôt cela n'aura pu être fait que très incomplètement. Il reste encore en lice certaines interprétations formalisées différentes, sans doutes les plus solides, pour lesquelles on aura réussi à trouver des « racines » génétiques. Et je gage que la liste n'est pas close. Lorsque l'on s'en rend compte, alors pour l'épistémologue ou pour le psychologue, il s'agit effectivement de se demander avec Droz comment « *ne pas* (trop) *trahir, tant du point de vue qualitatif que quantitatif, la générosité, l'originalité et la richesse des pensées et activités enfantines en ce domaine.* »

Et pour le didacticien ? Ce dernier ne peut pas ne pas prendre en compte le projet scolaire et son côté normatif. Car les savoirs sont réducteurs, telle est une de leurs fonctions, ils sont réducteurs avant tout de savoirs, c'est-à-dire de leurs concurrents, en nous dispensant de savoir certaines choses autrement qu'à leur façon. Et de ce point de vue, les situations didactiques, ont un rôle de filtre (Conne 95), une sélection doit s'opérer. Et tel est bien le propos de la théorie des situations, plus que d'éviter les impasses et dédales de la construction historique des savoirs, idée défendue en particulier par H. Freudenthal (83). Cette sélection est bien sûr aussi opérée au niveau de la transposition didactique. L'école ne s'occupe pas de tout faire connaître à ses élèves et encore moins de promouvoir tout savoir. Pas besoin donc du secours d'explications naturalisées et s'appuyant sur une injonction quasi métaphysique faite à je ne sais quel constructivisme qui voudrait que les connaissances en développement convergent vers les concepts et savoirs mathématiques ! Pas besoin non plus de *zones proximales de développement* pour expliquer cela. Et ce, d'autant plus que si convergence il y a, celle-ci ne se fera que sur une *interprétation formelle* de ces objets ou concepts, une parmi d'autres. Les mathématiques ne se laissent pas enfermer dans une seule (re)construction, qu'on se le dise une bonne fois pour toutes.

A tout prendre, je trouve que l'école et la culture réalisent fort bien cette réduction aux normes. Cela a son prix (fort) et provoque pas mal de dégâts. A être trop rivé sur des formes étriquées de savoir, on s'interdit toute une gamme d'accès aux savoirs mathématiques, toute possibilité aussi de rattraper le temps perdu par ceux qui ont pris, pour une raison ou une autre trop de retard. Réduire les savoirs d'accord, mais comment faire pour limiter la part d'exclusions que cela produit immanquablement ? S'il est sensible à cette question, le didacticien des mathématiques ne pourra alors que faire sien le souci exprimé par Droz, et pas seulement pour le domaine des savoirs numériques élémentaires.

Je n'attends pas grand chose des discours de la psychologie (entendez moi bien, je dis des discours, pas de leurs théories ni de leurs travaux), et encore moins des doctrines pédagogiques qui s'en réclament. Nous disposons désormais d'autres moyens. En particulier ceux que nous procure le fait de nous être intéressés un tant soit peu sérieusement à étudier des situations. Je dis étudier, car pour ce qui est d'invoquer les situations, cela ne date pas d'hier et dans *Savoir et Connaissance dans la perspective de la Transposition didactique* (Conne 92, par la suite cet article sera désigné par *S & C*), j'avais d'ailleurs à ce propos rappelé une fort belle citation de H. Wallon datant de 1942 ! Et toute autre chose encore est d'en avoir fait un objet de théorie ! Ce que nous savons maintenant des situations, nous pouvons en profiter pour examiner celles que les psychologues, souvent très astucieux, ont mis au point pour leurs expérimentations. Cette voie a été déjà empruntée avec brio par J. Pérès (je vous renvoie à l'ensemble de ses travaux au COREM). Et c'est exactement ce que reprend à son tour Rouchier ici même lorsqu'il écrit : " *(...) En effet, si ces dispositifs, (ceux que les psychologues élaborent pour leurs expérimentations), ont des propriétés leur permettant d'interroger les sujets, les élèves, ils ont aussi celles de pouvoir interroger et (faire) mettre en marche la connaissance. Ils ont aussi les propriétés de faire acquérir les connaissances. Toutefois ces propriétés ne sont pas intrinsèques, elle ne s'actualisent que lors de l'insertion de ces dispositifs dans d'autres dispositifs qui ont* *vocation à assurer la communication didactique, ce sont les situations didactiques. Ainsi se réalise la détermination de la sphère du didactique, ce qui rend possible sa mise à l'étude."*

De tels travaux n'ont pas pour seul but de mieux comprendre ce que peut être une situation, comme objet et au delà d'une simple référence à une idée. J'ai soutenu dans *S & C* qu'on ne pouvait étudier la connaissance qu'à partir du savoir, mais je n'ai jamais dit que le travail était fini pour autant. Au contraire, on ne peut pas éviter une sorte de va et vient entre savoir et connaissances, toutes nos recherches sur les erreurs le montrent puisque les erreurs, qui parce qu'elle se produisent à l'insu du sujet sont des expressions cognitives, ne se manifestent à l'observateur qu'en regard d'une procédure de référence, qui, elle, bien entendu est un savoir. Je dis aussi que cela ne se fait pas circulairement et qu'il est plutôt rare que, parti d'un savoir pour étudier la connaissance, on retombe sur le savoir de départ, voire seulement sur celui-ci. Ainsi en étudiant les manières de calculer par écrit des enfants, on trouve immanquablement des enfants qui « inventent » des algorithmes (Madell 78, Labinowicz 89), voire produisent des erreurs qui, si on les extrapole, donnent un algorithme, par exemple, cette manière de soustraction, oubliée par l'école du XXème siècle, mais à laquelle Condorcet donnait sa préférence (Condorcet, 89). Je dis aussi que c'est tant mieux car cela nous élargit l'esprit en matière de savoir, ce que par d'autres voies Y. Chevallard ne se lasse jamais de faire pour mieux nous *déconcerter* (Chevallard 91). *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, tel est le titre complet de mon article, car telle est bien la fonction de ma réflexion, augmenter nos moyens transpositifs. Une voie possible, une parmi d'autres, est celle des études de la cognition. C'est aussi comme cela que j'interprète ce que Rouchier écrit à propos des expérimentations psychologiques classiques : *« Supposons que ces mises en rapport correspondent à de véritables situations d'autonomie cognitive, il n'en reste pas moins vrai qu'elles ne sont pas forcément représentatives de toutes les situations de mise en rapport avec le savoir, situations dans lesquelles le sujet est en plus ou moins grande autonomie cognitive. (... ne faudrait-il pas) explorer le cognitif à partir d'autres références d'activité mathématique : pratique mathématicienne (ou pratique mathématique), étude d'une question,, participation à des projets collectifs. Il s'agit de prendre en* *considération les dimensions du travail mathématique qui ne l'ont pas été dans les approches classiques. »* (Rouchier 99, p. 184-185).

4.Nos recherches sur les connaissances numériques.

4.1. Projet.

On l'aura compris, je n'ai cessé depuis 1981 à accorder un rôle central à la transposition didactique dans mes recherches en ddm. Il serait trop long ici de développer ce point que je me contenterai de mentionner succinctement plus loin.

De 1989 à 1991, avec J. Brun et J. Retchitzki, nous nous sommes engagés sur un projet intitulé: L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. A l'origine, et pour ce thème là, nous étions intéressés à deux questions essentielles en didactique des mathématiques. La première est l'étude de l'appareil symbolique auquel recourt l'enseignement élémentaire. La pratique des mathématiques fait un grand usage de tels systèmes, et la pratique d'enseignement surenchérit encore (Conne 87-88). Une de ces idées était reprise d'une thèse exposée par M. Gardner (64) qui consiste à considérer les diagrammes logiques comme des machines (de calcul) logique. En la reprenant à mon compte, je l'ai généralisée à l'ensemble des algorithmes de calcul. Je soutiens, dès lors, que le diagramme d'un algorithme est un symbole du calcul pris dans son entier déroulement. Cette idée n'a de sens que si on la rattache à un cadre plus général qui stipule que les symboles mathématiques peuvent être considérés, dans certains cas, comme des objets, extrêmement concrets quoique non matériels. On peut identifier parmi eux des niveaux d'élaboration symbolique. On dira alors par exemple qu'un diagramme est un symbole d'un niveau supérieur à celui des chiffres et des nombres qui viennent s'y inscrire. Du point de vue des diagrammes, il y a une la filiation entre la disposition en colonne d'une addition, celle d'une soustraction, celle d'une division. Les aspects réglés et admis pour les premiers sont repris pour les suivants. Nous avons d'emblée affaire avec les diagrammes à quelque chose qui se généralise et ce, bien au delà des 4 opérations arithmétiques (‡ ce propos, J. Bernouilly propose en 1713 un diagramme analogue à celui d'une multiplication à l'italienne pour résoudre un fameux problème de distribution des sommes de points obtenus par le jet de plusieurs dés, c.f. Charrière 1995, problème pour lequel, selon Y. Chevallard, De Moivre fournira une formule générale, en ayant l'idée de fonction génératrice, c.f. Chevallard 1980). Ceci est important, car c'est un des aspects qui permet de lier algorithmes et schèmes comme le propose Vergnaud, même si ce rapprochement demande à être discuté car il pose la très délicate question de la distinction entre objet et schème. J'y reviendrai. La seconde préoccupation était plus directement mathématique et liée aux questions posées par Vergnaud et surtout Y. Chevallard concernant l'algèbre, et en particulier le pas entre numérique et algébrique, (pour plus de détails, c.f.. Conne, Chevallard et Guiet, 89). Pour ce faire, il fallait mieux comprendre comment les connaissances numériques se constituaient et en particulier comment, dans le contexte numérique, les systèmes symboliques étaient utilisés. Car c'est dans la filiation et la rupture avec ces usages symboliques que viennent s'inscrire les débuts de l'algèbre à l'école obligatoire.

Nous nous sommes engagés dans une large enquête sur les connaissances et les savoirs numériques en prenant comme point d'entrée la question des calculs écrits en colonnes à l'école primaire et pour cette recherche en particulier, la division écrite. On voit bien la démarche bouclée qui part de savoirs et de leur version scolaire pour enquêter sur les connaissances, mettant en évidence au passage d'autres savoirs, retrouvés en partie chez Gardner, tels ces diagrammes (proches de ce que Vergnaud appelle avec moins de bonheur *scripts algorithmes*), nouveaux savoirs qui nous indiquent de nouvelles pistes d'étude du cognitif.

Je n'insisterai jamais assez pour dire combien nous sommes encore empruntés pour décrire et nous faire une représentation correcte de tout ce qu'implique ce terme de connaissances numériques. Soit dit en passant le nombre de béotiens qui encore aujourd'hui prétendent pouvoir les « évaluer » montre combien l'illusion de tout pouvoir réduire à certains savoirs de base est encore répandue. Et bien entendu, la richesse que Droz évoquait pour les seules racines des nombres entiers naturels se voit ici décuplée !

4.2 La voie empruntée par Jean Brun : observer la connaissance en développement.

Collaborer avec J. Brun a ceci d'exceptionnel que ce travail s'effectue avec une grande liberté d'esprit, ce qui aboutit à ce que les uns et les autres ne suivent finalement pas les mêmes pistes et que celles-ci viennent à diverger. Tel est le regard rétrospectif que je porte en considérant ces travaux vieux de 10 ans et les développements qu'ils ont connus. Il y a donc deux volets aux résultats et développements de nos investigations des connaissances numériques. Jean Brun a proposé une classification des erreurs de division écrite en se fondant sur la notion de schème développée par J. Piaget, puis l'équipe de B. Inhelder et enfin la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (Brun & Conne 92 ; Brun, Conne & alii 94). C'est peut-être la partie de ces recherches qui est la plus connue. Brun a poursuivi ses recherches en proposant aux élèves les algorithmes comme occasion et support au développement de leurs connaissances numériques, ce qui, en retour, rend visible au chercheur ces connaissances et ce développement à l'œuvre (Tièche-Christinat, 97). Je dirais que ce qui a retenu Brun c'est cet aspect de développement provoqué. Sous sa direction, A. Flückiger (Flückiger 00) a proposé pour son travail de thèse un prolongement de cette piste en établissant un lien entre théorie des champs conceptuels et ingénierie didactique inspirée de la théorie des situations. Pour sa réalisation, elle a posé à des élèves le problème de trouver un moyen de noter un calcul de division. De cette manière, la reconstitution par une classe d'élèves d'un algorithme de division a été réalisée par une situation référant essentiellement à la réalité numérique et numérale. Cette démonstration est importante car elle confirme la « réalité » de ces appareils symboliques que j'évoquais ci-dessus, réalité suffisamment prégnante pour que vienne s'y appuyer une élaboration d'algorithmes. Rien d'étonnant à cela, bien entendu, puisque c'est bien ainsi qu'ont procédé les mathématiciens. Mais il était bon de montrer qu'on pouvait s'en inspirer pour induire artificiellement une telle « genèse » en classe. Dans ce projet, que je qualifierais volontiers, si on me permet une telle analogie, de recherche en *histoire artificielle* sur la division en colonnes, c'est la théorie des situations qui aura supporté cette réalisation. L'autre aspect intéressant de cette thèse est que ce faisant, son auteur y aura réalisé expérimentalement un rapprochement entre théorie des situations et théorie des champs conceptuels, affermissant du coup les analyses théoriques de Brun (Brun & Conne à paraître, Brun 97, Brun 94). Le prix (sciemment) consenti pour la recherche est la réduction de l'enseignement de l'algorithme de division à sa seule réalité numérale. Une telle réduction est à première vue surprenante de la part de gens qui en appellent à des champs conceptuels larges et variés. Ce fait confirme cependant la critique que je faisais de cette théorie, généreuse sur le plan de la connaissance, mais ne se distançant pas suffisamment des formes et des normes du savoir scolaire.

4.3 La voie que j'ai empruntée : algorithmes et situations.

Pour ma part, c'est un autre aspect de ces recherches qui m'aura retenu, relié autrement à la théorie des situations et aux questions de transposition didactique, et me portant à m'intéresser de plus près à *l'objet situation*, à l'interaction élève-milieu en situation didactique et par là en cherchant d'autres voies expérimentales. L'amorce de cette nouvelle problématique est exposée dans deux communications qui concernent la question générale de *l'algorithmisation dans l'enseignement,* qui imprime à l'enseignement une organisation calquée sur celle de son objet : l'enseignement d'un objet se dote de l'organisation de l'objet lui-même (Conne & Brun 90, Conne & Brun 91). Dans le premier article (90), j'ai comparé deux figures de cette algorithmisation, le manuel de Condorcet (<u>Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.</u>), et les manuels suisses romands en vigueur en 1985. De telles organisations (selon un algorithme) de l'enseignement seraient sans effet si l'on n'avait pas idée qu'elles puissent convenir au sujet. Sur ce point, Condorcet est très clair et ses commentaires reposent explicitement sur des considérations à propos de l'évidence en mathématique ou à propos des différentes manières d'adhérer à la vérité d'une proposition, ou encore sur la manière dont la connaissance se développe sans qu'il soit besoin de faire appel à l'habitude et à la routine, etc. Il en va de même pour les méthodologies romandes. Dans le second article (91 - que je désignerai par la suite par *Routines*), je me suis appuyé sur un article de M. Saada-Robert (Saada-Robert, 89), pour discuter de l'éventualité d'organiser l'enseignement non plus comme son objet, mais, si l'on peut dire, comme son sujet. Les rapports entre algorithmes et schèmes sont bien plus subtils que ne laisse entendre l'assimilation des premiers au derniers, comme le propose Vergnaud, car s'il y a une analogie certaine entre les modèles que nous nous faisons des schèmes ou des algorithmes, ce rapprochement oublie un peu vite que les objets étudiés ne se situent pas au même niveau de réalité. Mon analyse a relevé les impasses auxquelles pouvait mener l'idée de penser que l'enseignement puisse se dérouler selon le modèle du développement, même microgénétique, de la connaissance de l'élève. L'idée que l'organisation de l'enseignement d'un objet puisse se calquer sur celle de ce dernier paraît surprenante, voire saugrenue. Par contre l'idée que l'enseignement progresse de manière conforme aux processus d'organisations des connaissances des élèves paraît plus naturelle et beaucoup de gens y croient encore. Or, il s'agit là de deux facettes d'un même phénomène didactique lié à la transposition des savoirs. Par exemple, une des figures particulières que peut prendre la transposition didactique en ce domaine, est l'algorithmisation didactique. Celle-ci n'est envisageable que si on suppose une correspondance (généralement implicite) entre organisation du sujet et organisation de l'objet. Remarquez que les fameuses *méthodes* d'enseignement (en maths, mais aussi en musique, etc.) sont les formes que prend cette algorithmisation.

Le texte *Routine* ne s'arrête pas à ces considérations mais poursuit en montrant comment elles rejoignent finalement certaines préoccupations de Chevallard (85) dans ses études sur la transposition didactique, en particulier le problème du préconstruit et celui des questions (point repris et renouvelé par l'approche *tâches, techniques, technologie, théorie*). Le point de la discussion était et reste crucial car il montre combien les idées que se fait Vergnaud sur les situations diffèrent de celles de Brousseau et Chevallard. Alors que Chevallard, suivant en cela la critique de Brousseau à la mode de l'heuristique (Brousseau 86), opposerait enseignement par situations, tablant sur l'expérience des sujets, et enseignement algorithmisé, tablant sur le préconstruit, Vergnaud interprète une définition mathématique des algorithmes pour dire qu'ils se réfèrent à toute une classe de situations. Le glissement interprétatif de cet auteur réside justement dans le fait qu'il parle de *classe de situations*, alors qu'il faut entendre, du point de vue mathématique : *classe de calculs*, et, du point de vue de l'expérience des élève apprenant le calcul : *classe de situations de calculs*, tout autant situation de l'effectuation d'un tel calcul que situation pour lesquelles il est requis de calculer un quotient (et/ou un reste, ou certaines décimales). Les unes et les autres sont des situations tout à fait particulières, qui outre la réalité évoquée dans chacune d'elles, comportent, comme autre substrat « réel », celui des symboles numériques et diagrammes en jeu. La conclusion de mon article disait que, pour le moins, ces classes de situations d'usage et de références à l'algorithme devaient, elles aussi, être construites. En reconsidérant les choses aujourd'hui, j'y vois quelque chose de ternaire, mais à l'époque c'était une dualité qui se dégageait plutôt de nos premières observations.

4.4 Construction d'un algorithme de calcul et constitution de classes de situations de référence à l'opération correspondante.

Ces observations montraient, en effet, que les savoirs acquis lors de séquences didactiques très élaborées et longues, en étaient comme dégagés : il y avait comme une amnésie des élèves quant aux conditions de leur acquisition, et une non permanence du sens des savoirs acquis. Nous remarquions aussi que, privés d'indices suffisants, les élèves qui étaient pourtant d'un assez bon niveau en division écrite, recouraient à des recherches par essai/erreur de l'inversion d'un produit. Mais comme la recherche des multiples partiels constitue un moment central de l'effectuation d'une division écrite, nous nous demandions comment nous pourrions induire une telle reconnaissance de la part des élèves. Ces premières observations ont été amplement confirmées par la suite et Flückiger (Flückiger 00) les a retrouvées par d'autres voies. Il y avait donc dissociation entre situation d'effectuation de calcul et problème numérique que cet algorithme résout, et ce, tant dans la mémoire des élèves que dans les significations attribuées à ces savoirs.

Cette non reconnaissance se manifeste à la faveur d'une simple inversion qui a trait à ce que j'ai appelé, ailleurs, le *caractère modulable des algorithmes* (encore un savoir resté à l'ombre des évidences préconstruites). Présentons le problème que pose le calcul d'un quotient comme étant équivalent à celui d'approcher le dividende par une suite de multiples du diviseur. Le plus élémentaire est d'essayer un de ces multiples (les élèves aiment prendre le carré du diviseur), de calculer l'écart entre le dividende et ce produit et de réessayer pour réduire cet écart. C'est déjà un peu plus subtil de se rendre compte qu'on pourrait aller plus vite en divisant à son tour cet écart par le diviseur. Lorsqu'ils s'embarquent dans une telle recherche, de nombreux élèves, sachant par ailleurs diviser par écrit, « régressent » sur de tels traitements d'essais/erreurs. Bien entendu la propriété en jeu est celle de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Voilà un théorème-en-acte qui semble soudain absent ou s'il est présent - allez savoir - il est pour le moins déconnecté du *milieu* ! Dans le cas de cette procédure élémentaire (pourrait-on la qualifier d'heuristique ? pas sûr), la décomposition additive du dividende (et de là, la composition additive du quotient) se fait au gré des approximations tentées. Elle n'est organisée que par la volonté de réduire l'écart entre le multiple du diviseur et le dividende. Par contre, l'algorithme de division en colonne procède à une inversion. On y décompose **a priori** le dividende en suivant, dans l'ordre décroissant, les ordres de grandeurs de la numération, pour trouver dans le même ordre, les composants du quotient. Certes, on peut encore y voir une « approximation », mais en différé en quelque sorte, parce que pré-organisée selon le canevas de la numération. La décomposition n'est pas dictée par ce que l'on cherche, mais est simplement une analyse des données. On comprend aisément que, du point de vue du sens, ce ne soit pas tout à fait la même chose. Remarquons au passage que cette inversion se trouve de manière tout à fait analogue entre la méthode préconisée par Euler et ses diagrammes logiques et celles promues par Venn puis Carroll et leurs propres diagrammes (Conne 81).

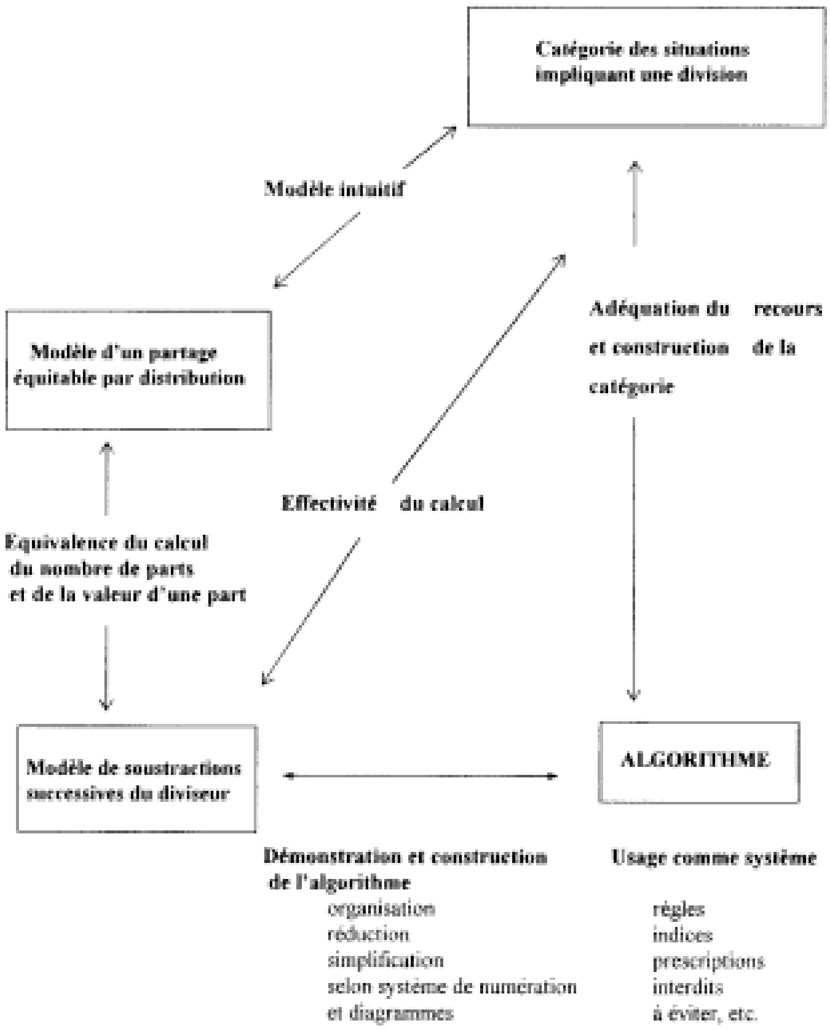
Les manuels suisses romands, en vigueur dans les années 75-99, proposaient une série de situations propres à présenter une telle inversion de manière justifiée. L'idée était que si la division était l'inverse de la multiplication, cette inversion devait remonter jusqu'aux sources de la multiplication elle-même : en particulier que si la multiplication était une addition itérée, la division serait elle une soustraction itérée. Ce faisant, l'inversion cherchée était d'emblée atteinte. La recherche des multiples viendrait alors « tout naturellement » après la décomposition du dividende, comme une simple mesure permettant d'accélérer la suite de soustractions du diviseur. Mais les manuels ne se contentaient pas de cela, et pour bien ancrer la division, ils donnaient une référence « réaliste » à la question de la soustraction. Partant d'une référence « concrète », ils accompagnaient les élèves dans la construction de l'algorithme (diagrammes compris) pour finir par proposer aux élèves d'en faire usage dans la résolution de « problèmes concrets ». Ce que nous constations, c'est la vanité de tels efforts pour lier situations et algorithmes !

Nous avions donc observé que d'avoir passé par toutes ces étapes ne garantissait pas aux élèves des clés de reconnaissance des situations divisives. C'est d'ailleurs un des aspects déjà discuté par Brousseau (Brousseau 87). Rouchier (Rouchier 99, p. 190-191) reprend ce problème et de manière à illustrer ce qu'il appelle *: « les enjeux cognitifs de l'institutionnalisation en didactique des mathématiques*. Il le rapporte à la fameuse « course à vingt ». Il y voit donc un problème d'institutionnalisation et nous renvoie au modèle proposé dans sa thèse (Rouchier 91). Sa proposition est de faire intervenir *« une situation agie dans laquelle l'élève est amené à déployer des connaissances sur un mode explicite autant qu'implicite afin de produire une réponse et une situation instituante qui va consister à construire une image de la situation agie qui soit en rapport avec le projet didactique, c'est-à-dire qui puisse être retravaillée du point de vue du savoir à acquérir ... »*. Dit en ces termes, ce que nous avions observé est que si nous arrivons sans trop d'efforts à identifier les *situations agies* de l'enseignement en Suisse romande, leurs descriptions étant données par les manuels, il en allait tout autrement des *situations instituantes* effectivement mises en œuvre. Rouchier ajoutait : *« La situation agie ne va pas être seulement mesurée à sa capacité à de favoriser (appeler) une certaine forme de mise en œuvre de la connaissance, mais aussi à sa capacité de permettre un traitement qui se place du côté du savoir. »*

Une chose était certaine, et tel était le propos central de l'article : Cet enseignement se proposait de « fait construire » l'algorithme et le diagramme d'une division écrite à la classe. L'expérience que les élèves devaient en retirer n'était pourtant pas retenue comme donnant sens à ce savoir (c'était une signification transitoire). Par conséquent, pour y arrêter un sens, cet enseignement devait ensuite faire constituer un ensemble de situations de référence, et ce, à partir d'autres moules (et éventuellement par le truchement d'un après coup comme le suggérait Y. Chevallard dans le 8ème chapitre de son ouvrage sur la transposition didactique, c.f. Chevallard 85).

4.5 Proposition de schéma pour une série de situations d'enseignement de la division écrite.

Tout à l'heure, j'ai volontairement parlé de série de situations plutôt que de suite. En effet pour moi, *série* suggère métaphoriquement un ordre et un cumul des expériences que l'école procure aux élèves. Voici un schéma représentant la série de situations prévue par les manuels de suisse romande des années 75-99



Ce schéma a été présenté au congrès PME XV (Brun & Conne 91). Une première version se trouve dans *Routines*. Il rend compte de la manière dont le savoir est censé être travaillé en classe de 4P et de 5P, tel que le manuel du maître l'explicite et le définit jusque dans l'organisation même des activités proposées. On peut le lire comme un parcours entre divers aspects du ***savoir diviser***. S'il y a une certaine vection, elle n'exclut pas pour autant d'éventuels retours. On voit comment les différents aspects du savoir sont référenciés les uns aux autres. Quitte à provoquer quelques redites, parcourons-le comme le fait le projet d'enseigner la division. On commence par évoquer, voire jouer, une situation de *division* (qui est telle à nos yeux) : les manuels suisses romands évoquent la distribution des jetons dans le jeu de *fan tan*, puis aussi très vite des situations de *partage par distribution*. Cela va être le modèle sur lequel viendra se construire l'algorithme. En considérant que le calcul de la *valeur d'une part* peut être ramené au calcul du *nombre de parts*, on reporte le traitement de cette situation à un traitement purement numérique de soustractions successives. On établit ainsi la pertinence du traitement numérique appliqué à la situation de référence. Cela est de toute première importance pour ce que j'ai appelé l'adéquation de l'usage et la construction de la catégorie des *situations de division*.

Ce qui aura été établi à propos d'une situation de partage par distribution sera valable a fortiori pour toute situation de partage et de là pour toute situation de division.

A la faveur de ces soustractions successives, effectivement faites, ou bien seulement évoquées, on va proposer d'inscrire la suite de calculs dans un diagramme en colonne. Notons au passage que les manuels romands jouent encore à ce stade sur un doublage par des écritures en ligne enchaînées, dans l'idée de dégager l'aspect récursif du calcul (et dans un souci de cohérence interne dans l'usage des symbolismes à l'école). Vient maintenant ce que j'ai appelé l'effectivité du calcul, c'est-à-dire le fait que ce traitement soustractif n'est pas seulement pertinent, mais qu'il est effectif et commode. On peut voir cela comme une sorte de preuve pragmatique. C'est alors que l'on met à profit la disposition en colonne et les propriétés de la numération écrite pour abréger les calculs. Vient alors l'étape où l'*on écrit tous les zéros*. La suivante sera de trouver la forme que nous connaissons (et qui en Suisse romande est moins concise qu'en France). Ce dernier passage s'effectue soit en considérant le modèle des échanges (comme si les nombres étaient de la monnaie) soit en s'appuyant sur les dénominations en unités, dizaines, centaines, etc. Puis on exerce les élèves au maniement de cet outil. On explique les règles à respecter autant qu'il sera nécessaire.

On peut lire une organisation très voisine dans le texte de Condorcet. Mais dans son ouvrage, cet auteur reste cantonné au niveau de l'organisation du discours et il laisse aux instituteurs le soin de réaliser des situations correspondantes. Dans la version des manuels suisses romands de 1975 et de 1983, on a prévu de faire passer l'élève par toutes ces étapes, et on lui a préparé des activités qui les mettent en scène. Les enseignants se sont très vite heurtés à la lourdeur d'un tel dispositif. D'où un changement de cap, officialisé dans les manuels dès 1984, qui ont tenté de découper ces trop grandes unités selon une conception modulaire (Conne & Brun 90). Traduit sur mon schéma, cette nouvelle option cherche à court-circuiter les choses (i. e. la flèche horizontale de mon schéma) en effectuant plus fréquemment le va et vient avec les problèmes (sur la flèche verticale à gauche du schéma). Il en a résulté quelques inversions de termes dans la série ainsi que le fait de ne pas attendre d'avoir épuisé un aspect pour passer à un autre, quitte à opérer ultérieurement les retours nécessaires.

4.6 Ecritures et règles.

Cette manière de procéder met, en fait, plus l'accent sur les situations d'effectuation du calcul que sur celles de recours à l'opération. A ce titre, deux remarques. La première est l'importance qu'elle accorde aux écritures. En effet, en convoquant ainsi l'action de l'élève tout au long du processus de présentation de l'algorithme, on fait des symboles numériques les objets mêmes sur lesquels portent ces actions. Ce sont eux que l'on va *placer, déplacer, ou plutôt reporter en les réécrivant, transformer*, etc. Les instruments qui contrôlent ces actions sont la numération et ses propriétés qui sont justement dénotées dans les symboles numériques, ceux-là même sur lesquels on agit. Ce dédoublement de niveau des symboles se marque alors par le dédoublement de l'activité d'une part en une activité numérale : l'action de premier niveau, et d'autre part, une activité numérique : l'action de contrôle de second niveau. Le concret que l'on a gagné en recourant à des modèles d'action plutôt qu'à des modèles discursifs (comme chez Condorcet), on le paie en introduisant une double dénotation, une double référence. Comment donc l'élève va-t-il s'en sortir? Dans le discours (Condorcet), on se situe d'emblée à l'extérieur, on est dans le commentaire : de ce fait le problème peut être évité (par celui qui tient ce discours, bien sûr). Dans l'enseignement moderne, on peut retrouver cette esquive dans le discursif, lorsqu'on accompagne les actions des élèves de verbalisations justificatrices, prononcées par le maître ou l'élève, peu importe. Mais alors on n'aura fait que de supplanter un discours par un autre! Est-il possible de procéder autrement? Difficile à dire. Cela marque peut-être les limites des situations d'action et la nécessité d'organiser des situations de formulation, comme le stipule la théorie des situations de Brousseau. Dans cet ordre d'idées, apparaît aussi la nécessité dans laquelle se trouve Condorcet, forcé de reformuler son propos en une sorte de succession de paraphrases. Cette démarche correspond dans les manuels romands, à une multiplicité de références à divers modèles symboliques.

La seconde remarque concerne la manière dont les élèves s'y prennent. C'est par là, nous situer au niveau de ces règles d'usage que j'ai notées en bas à gauche de mon schéma. Je parle ici d'un système, car il s'agit en effet de quelque chose d'assez complexe, l'élève se donnant des buts, des règles, des contraintes, des interdits, des indices de toutes sortes et de tous ordres. La variété des formes qu'on lui aura soumises n'est pas non plus là pour l'aider. Par exemple, on a vu des erreurs qui combinent les règles prescrites à une étape de l'élaboration avec les règles prescrites à une autre étape, des *hybrides* comme nous les avons nommées. Or il peut s'établir des contradictions si, par malheur, l'élève en vient à mettre en relation des choses qu'il vaudrait mieux maintenir séparées. Par exemple, ce qui motive la retenue dans l'addition, c'est que l'on veut éviter d'inscrire un nombre à deux chiffres dans une colonne. Or c'est justement cela qu'on demande aux élèves de faire dans la soustraction et dans la division (à une étape donnée de la présentation). Nos recherches (Brun & Conne 91) nous ont permis d'observer le même obstacle entre deux versions de l'algorithme de division à propos de l'écriture des zéros : Si on inscrit les zéros terminaux des multiples partiels et des quotients partiels, on n'aura pas à comptabiliser les quotients nuls. Si l'on n'inscrit plus les zéro terminaux, alors, il faudra inscrire les quotients nuls! Ce qui est prescrit dans un système est superflu dans l'autre et vice et versa. Pas facile de s'y retrouver! Deux moyens d'y remédier: le compartimentage des apprentissages, mais on perd la référence et le sens, ou la prise en compte de la variation des notations en tant que niveaux d'élaboration. Par exemple, admettre qu'il y a une véritable recherche pour abréger les calculs. Cet obstacle se manifeste en effet dans des contradictions qui s'installent dans le système des règles d'usage, dès lors que l'on mélange les niveaux d'élaboration de l'algorithme. Par “on”, je veux dire l'élève, ou bien le maître, ou encore le manuel. **En ce sens, je dis que les actions et les règles de l'action sur des résumés, sur des notations abrégées, ne sont ni des actions, ni des règles abrégées**. C'est en effet ici que les choses se révèlent non cumulatives : ces abréviations sont la marque d'une élaboration et du passage d'un niveau à un autre. En classe, la mise en place du système d'usage et l'apprentissage des règles de calcul est quelque chose de plutôt mouvementé (pour le maître comme pour l'élève).

4.7 Fenêtre sur systèmes.

Si je cite et commente abondamment ce schéma c'est qu'il a été et reste directeur pour l'organisation de mes recherches ultérieures et ce, sur deux points. Tout d'abord parce qu'il essaye de penser ces relations entre enseignement par et en situation, et / ou enseignement algorithmisé. Je dirais aujourd'hui entre références pragmatiques et/ou formelles d'un enseignement. Ensuite parce que j'ai utilisé ce schéma comme canevas d'entretiens semi dirigées et interactifs réalisés en 1991 et qui, pour la plupart, sont restés non analysés faute de moyens de recherche. Enfin, et pour en revenir au travail théorique, par le fait que ce à quoi nous avons essentiellement accès dans nos observations sont les manifestations d'un système. Il en est déjà ainsi lorsque nous regardons les erreurs des élèves et en inférons des règles, ou encore lorsque nous observons les échanges maître / élèves à leurs propos. Nous avons affaire à un système complexe d'interactions et si nous pouvons tenter de nous en représenter des parties en les reconstituant autour de règles inférées, cette manière de faire se heurtera inévitablement aux difficultés qu'a brillamment mise en évidence Wittgenstein, justement à propos des règles et de leur application.

Nous avons affaire à des systèmes, nous pouvons nous donner des petits modèles réglés (formels) sortes de fenêtres sur systèmes, mais nous ne saurons pas rendre compte exhaustivement de ces derniers. Nous en sommes réduits à des reconstitutions partielles et - si vous me permettez cet abus de langage - partiales parce que procédant de choix interprétatifs. Je considère que cette remarque rejoint exactement ce que Droz a écrit. Nous revoilà donc à la case départ !

5. La surprise comme défi.

Comme je l'ai décrit ci-dessus, le problème sur lequel m'ont laissé ces recherches sur la division était celui du rapport entre situations de référence à un enseignement et les savoirs appris et retenus au bout de ce processus. Ce problème peut être abordé sous l'angle de l'institutionnalisation, pour autant que l'on retienne les propositions de la thèse de Rouchier dont celles-ci : il s'agit d'un processus continu ; il n'est pas le seul fait du maître ; il est lié structurellement à la dévolution selon les conversions connaissance → savoir et savoir → connaissance (Rouchier 91, 99, Conne 93, 94). La convergence entre nos thèses, Rouchier et moi-même est forte, en ce sens que nous montrons, l'un à propos des processus de dévolution / institutionnalisation et l'autre à propos des processus transpositifs, qu'ils sont à l'œuvre y compris localement, et sans discontinuer. Ce qui nous a amené à de tels constats, c'est le souci d'examiner ce qui se passe in situ, c'est-à-dire effectivement au niveau des situations didactiques, de leurs évolutions propres et de leurs enchaînements (provoqués ou non).

J'ai déjà dit qu'il y avait un monde entre la simple idée de situation et une tentative de définition(s) pour lui donner un véritable statut de concept, et que, à nouveau, il y a un monde entre ce concept et l'objet d'étude et de théorie que l'on sera amené à en faire. C'est Rouchier qui, à ma connaissance, a le plus cherché à expliciter ce constat. En guise d'illustration, voici 2 citations parmi plusieurs autres possibles. La première est une définition, la seconde est un commentaire. On y distingue les trois statuts de ce terme

Situation : *Mise en rapport d'un individu avec un problème (défi) dans un contexte déterminé et pour la résolution duquel il mettra en oeuvre une connaissance (articulée sur des savoirs) traduite (sur le plan de l'action propre à la situation) par des conduites et stratégies (observables).* (A. Rouchier 91)

" A ce titre, un système didactique se caractérise justement par le fait que le savoir qui est en jeu dans le système y est aussi placé en situation d'enjeu. L'instrument de cette mise en jeu est l'injonction didactique, qui sollicite l'individu selon un mode qui le constitue en élève (l'institue comme tel dans le système didactique). Une partie du travail du professeur est d'assurer cette mise en position du savoir comme enjeu, en s'assurant qu'il est jouable pour l'élève, dans un certain nombre de situations, sous des formes spécifiques au système didactique. Dans d'autres institutions, où le savoir est en jeu, il ne sera placé en position d'enjeu que rarement. En effet, la vocation première de ces institutions, qui ne sont pas des institutions didactique, n'est pas uniquement d'enseigner aux individus qui en sont les sujets. Elles n'assurent pas une normativité élevée. Le contraire faisant courir le risque de mettre les sujets de ces institutions dans une situation difficile, celle d'avoir à justifier à tout moment, autrement que sur le plan instrumental, de leur capacité à mettre en oeuvre ce savoir." (Rouchier,95).

Mais je n'ai pas choisi ces citations seulement pour relever la difficulté que nous avons encore avec le terme de « situation », mais encore et surtout pour souligner un aspect que Rouchier ne cesse de relever : cette affaire d'injonction par défi représente le premier moment des interactions qui se nouent dans une situation didactique. « *Contrat didactique* » me direz-vous ! A quoi je vous répondrais : « certes, mais n'allons pas trop vite en besogne ! ».

Evitons, en effet, de n'y voir qu'une affaire de systèmes, de places et positions des acteurs de ce système, car nous risquons alors d'évacuer complètement le savoir et les aspects transpositifs en jeu. Je tiens donc aussi à pouvoir parler de cet aspect de « défi » sans le **noyer** dans des considérations de *contrat didactique*. Et, à nouveau, mon cheminement rencontre celui de Rouchier qui commente longuement l'interaction didactique. Il se place ici dans la perspective d'un défi de réussir quelque chose : « *Il est nécessaire de connaître et de reconnaître ses propres connaissances afin de pouvoir repérer les performances qui correspondent à leur manifestation. Nous revenons ici à la régularité et à la nécessité d'indications venues de l'extérieur pour favoriser l'identification des instruments de la réussite afin d'assurer un transport dans le temps et dans l'espace. Il s'agit de passer du niveau de l'action, donc des connaissances, au niveau d'un instrument d'une autre nature, en l'occurrence le savoir. Nous voyons bien s'inscrire ici la nécessité de la distinction savoirs-connaissances du point de vue du modèle : identifier deux instances différentes comme moyen de saisie et de réalisation de la connaissance, de la fonction générale de connaissance, tout particulièrement dans le domaine des mathématiques. »* (Rouchier 96, p. 190).

Or c'est cette manière de considérer le défi que j'ai commencé à questionner à partir de nos recherches sur les calculs et les erreurs, en particulier en ce qui concerne la division écrite. Si j'en reviens à la manière classique (et fortement marquée culturellement) dont chercheurs comme enseignants jouent de ces défis pour y assujettir les sujets de leurs expérimentations ou de leur enseignement, je constate le quasi monopole des *défis à la réussite*. Certes, pour observer les bébés, on a depuis un certain temps découvert les vertus de la surprise (pour un commentaire, cf. Conne 94). Néanmoins la majorité des chercheurs a toutes les peines du monde à concevoir ses observations autrement qu'en soumettant des *tâches à accomplir* aux sujets, puis en examinant des niveaux de performance etc. Cette insistance est bien la marque d'une polarisation excessive entre, d'un côté, des sujets plus ou moins compétents, et de l'autre, des savoirs à même de les rendre plus ou moins performants. Je voudrais tenter de dépasser ce clivage et l'impasse qu'il représente non seulement pour bien des élèves, professeurs, et classes dites difficiles, mais encore pour la recherche, car on ne peut pas réduire les pratiques mathématiciennes à des joutes, ou à des « jeux mathématiques et logiques », etc. J'essaye donc tout simplement de penser directement les interactions qui se nouent dans une situation. La théorie des situations, sa proposition de modélisation en référence à la théorie des jeux, et tout particulièrement sa définition du milieu comme *antagoniste du sujet* me semblent de bons supports pour le faire. Par exemple, et toujours dans le souci de remonter jusqu'à ce qui se passe localement, je me suis demandé comment on pourrait faire du *défi* non pas seulement une clause d'engagement dans l'activité, qui alors ressemble à s'y méprendre à un *contrat*, mais la considérer plus largement comme une manière de penser la reconduction de l'enjeu de savoir tout au long d'une situation. On peut dire aussi que je me demande comment les interactions dans la situation traduisent localement et sans discontinuer les enjeux qu'on y aura mis. « Traduisent » ou « peuvent traduire », car, en ce qui les concerne, les enseignants perdent souvent de vue tout enjeu et ne se sentent défiés en rien. Et les institutions scolaires sont bien complaisantes qui le leur permettent sans sourciller. Soit dit en passant, une telle complaisance ne peut que rendre très fastidieux l'enseignement des mathématiques. Je me propose donc d'élargir le regard et de tenter d'englober l'ensemble des rapports entre situations et savoirs sous l'angle des « interactions » en jeu, ou, si on me permet cette métaphore, d'envisager les interactions situations / savoirs.

Dans la suite, je n'examinerai qu'un aspect de cette tentative. Reprenons la célèbre métaphore de la fourmi de H. A. Simon (Simon 74) : elle soutient en substance que l'observation de la déambulation d'une fourmi nous renseigne tout autant , si ce n'est plus, sur la topographie du terrain où elle se déplace que sur elle-même. Je dis, après tant d'autres, que ce que nous décrivons du travail mathématique des élèves est surtout une interaction (Conne 93). Dans le même ordre d'idées, Rouchier écrit : *« De même, et il est bien évident qu'il s'agit d'une confrontation nécessaire, on peut soutenir que les connaissances permettent de délimiter et de rendre visible ce terme particulier de l'interaction qu'est le* milieu*. La manifestation des connaissances accompagne la délimitation de ce qui est du milieu et de ce qui n'en est pas. »* (Rouchier 96, p.190). Mais qui s'intéresse ainsi à pouvoir délimiter le milieu, si ce n'est l'observateur (que ce soit le maître ou l'expérimentateur) ? On observe donc une interaction sujet-milieu. Viennent alors deux remarques. La première est qu'on observe de telles interactions en diverses circonstances qui sont souvent liées. Je ne m'arrêterai donc pas aux seules interactions d'un sujet avec le milieu objectif, mais je regarde aussi et surtout comment enchaîner ces interactions, les relancer etc. Par exemple, pour moi, le schéma donné ci-dessus est un cadre qui me permet de penser toutes ces articulations, et ce, au moins à deux échelles. Comme je l'ai introduit ci-dessus, c'est un cadre pour l'analyse de l'intégralité d'une séquence d'enseignement, au niveau du programme de maths allant de la 4P à la 6P, en Suisse romande. En particulier, ce schéma permet de rendre compte des « effets d'amnésie » que nous avions observées et que j'ai relatés dans *Routines*. Mais ce schéma peut aussi bien servir de cadre pour penser diverses articulations de tâches à proposer à des élèves ou des classes, non seulement comme « batterie » organisée de tâches à proposer sur ce thème, ou comme « plan d'expérience », mais encore comme aide au pilotage d'entretiens « semi-dirigés » à avoir avec des élèves ou groupes d'élèves. La seconde est que de telles observations nous amènent, que nous soyons chercheur ou enseignant, à interagir avec ce système sujet-milieu, qui devient notre milieu. Pour bien jouer il faut connaître son adversaire, pour interagir avec un milieu, quel qu'il soit, il est utile d'étudier ce que ce milieu peut bien avoir à nous dire, ou plutôt à nous répondre. Et en ce qui me concerne, j'aime particulièrement les jeux à rebondissements. Comme je l'ai expliqué ailleurs (Conne 97, 99), j'ai donc pensé que, dans ce second temps d'analyse, je pouvais suivre cette autre proposition de la théorie des situations selon laquelle, *« le maître, (l'expérimentateur) joue avec le jeu de l'élève »* (Brousseau 88). Dans ce cas, le milieu est constitué du couple élève-milieu. Plus précisément, et en recourant volontairement à une analogie commune pour décrire le travail expérimental en sciences, le maître (l'expérimentateur) joue avec la manière dont l'élève fait « parler » le milieu en se basant sur ce qu'il entend ou ce qu'ils entendent, du milieu. A ce propos, on peut examiner et se questionner sur le fait que les élèves font surtout dire ceci au milieu et pas cela, etc. Mais Il en découle que l'élève joue, lui aussi avec le couple milieu-enseignant, ce qui est facile à observer.

O peut, dans cette perspective, prendre toute production d'élève, en particulier leurs erreurs, comme "réponse du milieu". Par exemple on peut prendre les erreurs des élèves en calcul, en transcodage, etc., comme autant de "réponses" du diagramme et des règles de l'algorithme. Ainsi, pour citer une autre de mes recherches sur les connaissances numériques élémentaires (Conne 89), un milieu d'écritures lacunaires d'égalités numériques ne comportant *que des signes égal en position finale* ne parle pas comme un milieu comportant *ces signes placés en position initiale*, ou avec un milieu qui comporterait des *égalités avec deux lacunes*, etc. Le lecteur se référera à cet article où je montre comment le support écrit dirige les calculs et interprétations des élèves, mais surtout comment ces jeux de milieux révèlent chez des enfants de CP des potentialités d'interprétation insoupçonnées et insoupçonnables au seul examen de l'enseignement reçu ! Bien entendu je ne suis pas le seul chercheur, et de loin, à jouer de la sorte et c'est aussi exactement le principe du jeu informatique qu'avaient imaginé Brown & Burton (Brown & Burton 78), pour le quel le logiciel informatique simulait, aux yeux de celui qui jouait contre lui, un milieu sujet - diagramme.

L'intérêt de la chose, outre de dépersonnaliser les réponses des élèves, puis de chercher des "schémas" qui permettraient de penser ensemble le tout, donc d'établir des relations etc., c'est qu'en procédant de la sorte, on inscrit l'ensemble des interactions se nouant dans la situation (d'enseignement ou expérimentale) dans un "schéma de jeu" donc dans quelque chose qui pourra se jouer en plusieurs coups. Et là encore, pour que le jeu se déroule de manière optimale, nous serons amenés à essayer d'imaginer un milieu qui permette de « longs échanges de balle » (comme on dit en volley ou au tennis). Par exemple, les psychologues et orthophonistes qui, à partir de problématiques liées à des cas d'aphasie, se sont intéressés aux questions d'écriture de nombres se contentent, dans des tests, d'exercices de codages variés (dictée de nombre, lecture de nom de nombres, ou de leurs codages chiffrés, etc.). Les tests représentent un simple jeu question - réponse, donc une partie à « un coup ». Mais on peut facilement faire beaucoup mieux. Une relance évidente est de demander au sujet, par exemple, suite à une dictée de nombre, de bien vouloir relire ce qu'il a écrit (je passe les détails de manières de faire pour contrôler les effets de mémoire). Une surprise du milieu (je parle en connaissance de cause puisque j'ai collaboré à la confection des items d'un test dyscalculie et que j'ai pu essayer la batterie avec des élèves - F. Gaillard 00) est que souvent le sujet n'arrive pas à retrouver ce qu'on lui avait dicté. Et cela le surprend. Cette manière de faire permet de mettre en évidence ce qui se passe en fait déjà au cours de la transcription, où on voit très fréquemment les élèves hésiter, c'est-à-dire anticiper une relecture. On y gagne une explication possible du fait que les élèves produisent plus souvent 6037 que 6600307 lorsqu'on leur dicte *six cent trente sept*, ou plutôt que ce que les élèves nous donnent à lire de leur inscription soit plus souvent 6037 que 600307. Un autre exemple, sera de constater que lors d'un calcul élémentaire, sur ses doigts, avec des jetons, sur un boulier, ou encore avec une calculette, les élèves n'entendent pas les mêmes choses du milieu selon qu'ils recourent à l'un ou l'autre de ces supports. Et par là, ces élèves ne font pas l'expérience de l'addition de la même manière selon le support choisi. Par exemple, le milieu boulier permet de créer une jolie surprise lorsque, par un simple retournement de l'appareil, ce qui avait pu être opéré comme une addition, donnera le résultat d'une soustraction. Cet exemple est moins banal quîl n'y paraît.

Ce que j'ai observé au travers de leurs réactions, chaque fois que je l'ai tenté avec des élèves, ce sont des informations sur ce qu'ils comprennent d'une opération mathématique. Dit autrement, la surprise ne vaut que par ce qu'elle est à même d'interroger, chez l'élève et/ou l'enseignant. C'est tout bête, mais **cultiver** ainsi les effets de surprise a une toute autre **valeur** que de cultiver les effets de réussite. Réussir, tout comme échouer, sont des issues, marquent des « rounds » (comme on le dit à la boxe). La surprise et les intrigues sont des relances, ramènent les sujets dans la situation, agissent au niveau du moteur de la situation. Ce ne sont pas des effets de prestidigitateurs qui eux ne sont que la réussite de l'illusionniste, jamais une relance mais une chute. Le maître sera facilement aussi surpris que ses élèves, alors que c'est tout même beaucoup lui demander de s'émouvoir toujours autant devant la réussite des élèves à effectuer correctement une soustraction en colonnes ! Enseigner devient alors moins frustrant.

Une telle mobilité renforce le mouvement de va et vient savoir/connaissance. Pour l'illustrer, revenons sur l'étude des erreurs. Pour étudier les erreurs, il faut disposer d'un savoir de référence, ici une procédure standard de calcul, diagramme y compris. A partir de là, on observe, ou confectionne dans un modèle informatique, des procédures qui s'en écartent, dites procédures erronées. Jusque là, les erreurs renvoient toujours à la procédure standard, et ce lien trop fort avec la procédure standard rend très peu aisé le jeu de l'expérimentateur ou du maître avec le jeu de l'élève. Le travail consistant à décrire, voire classer, l'ensemble des erreurs observées ou envisagées théoriquement permet de mettre en relations ces erreurs (j'ai décrit sur des objets précis des méthodes pour le faire dans Conne 84 et 89).

On le voit, la notion de milieu est fort utile pour dépasser le constat que les activités en classe, et encore plus pour les devoirs à la maison, n'offriraient pas de feed-back suffisants pour y voir des situations didactiques, d'action par exemple. Comme souvent en didactique, il ne faut pas prendre les choses trop absolument, ontologiquement, et chercher des situations qui seraient intrinsèquement d'action, de formulation etc. Car ces caractéristiques qualifient tout autant une manière de « jouer » avec. Par exemple, bien que dans leur recherche sur les *structures additives,* Vergnaud & Durand (76) aient fait recours à des problèmes d'arithmétiques traditionnels, scolairement parlant, on peut en tirer parti dans un véritable schéma d'interaction. Il suffit pour ce faire de **prendre à son compte dans l'échange, comme milieu, les jeux de formulation des énoncés de ces problèmes**. Non pas chercher à caractériser l'effet des énoncés et de leur formulation dans l'espoir de trouver l'interprétation correcte des réponses des élèves, comme l'ont fait tant de psycho-pédagogues dans une vision expérimentaliste étriquée, mais jouer de ces énoncés, ou plutôt des relations nombreuses qui les lient, pour provoquer des jeux au niveau des réponses des élèves eux-mêmes. Non pas les laisser devant la seule sanction (évaluation didactique) de leur réponse, mais leur faire des « contre suggestions » etc., techniques bien connue des psychologues. Le milieu avec lequel l'expérimentateur va jouer est celui de **l'ensemble structuré des énoncés**. On propose un énoncé, on obtient telle ou telle réponse, on propose un autre énoncé à peine différent et on essaye de confronter l'élève aux réponses soit distinctes, soit identiques qu'il donnera. Par exemple, très souvent dans mes cours, en collectif, j'engage un échange avec mes interlocuteurs de la manière suivante. Je propose de répondre au problème suivant : *Jacques joue deux parties de billes, à la première, il perd 5 billes. Après avoir joué la seconde, il s'aperçoit qu'il a perdu en tout 8 billes. Que s'est il passé à la seconde partie ?* Je recueille les réponses, par oral, sans les commenter. Puis je propose un deuxième énoncé : *Olivier joue deux parties de billes. A la première il gagne 2 billes. Après avoir joué la seconde partie, il s'aperçoit qu'il a perdu en tout 7 billes. Que s'est il passé à la seconde partie ?* Je recueille les réponses. En général, la salle donne une réponse standard au premier problème, *Jacques a perdu 3 billes*. Pour une majorité d'adultes son énoncé est « transparent ». Par contre non seulement on observe un éventail de réponses plus étendu pour le problème *Olivier*, mais encore, la plupart du temps quelques personnes demandent des éclaircissements sur le sens de l'énoncé, en particulier sur ce que veut dire : *il a perdu en tout.* Par le seul jeu sur les nombres donnés, l'expérimentateur est à même de provoquer des changements notables dans l'interprétation de l'énoncé en entier. L'expérience est très convaincante et ne demande pas d'autre commentaire. Actuellement, je n'en suis plus guère surpris, mais la première fois je dois dire que je ne m'attendais pas à obtenir aussi facilement un tel effet. Le lecteur n'aura pas de difficulté à imaginer que le jeu peut se poursuivre avec d'autres énoncés. Ainsi entre-t-on en jeu avec les **glissements de sens** que j'ai mis en évidence dans ma recherche sur ces problèmes (Conne 84), en montrant que les élèves pouvaient fort bien résoudre un problème de transformations en plaquant un schéma d'états, et trouver par cette méthode la réponse attendue (pour l'évocation de ces jeux d'énoncés, voir aussi Conne & Pauli 89). Voilà qui est bien plus intelligent que d'en rester à la comptabilité des réussites et des échecs des élèves selon le niveau de développement ou de scolarité !

Dans tous les exemples précédents, on prenait comme milieu celui d'une tâche bien précise, en ne faisant varier que des paramètres relatifs à celle-ci. Dans une seconde série d'interviews pour notre recherche sur la division écrite, j'avais tenté une technique plus souple encore, et, me basant justement sur le schéma que je vous ai proposé, je pouvais imaginer un « milieu multi-tâches » me permettant d'interrompre et de réorienter de manière très rapide et souple l'entretien. Dans la recherche sur la division, nous cherchions ainsi à « intervenir » dans l'interaction sujet-diagramme, en proposant par exemple des aides pour les opérations intermédiaires de calcul, ou en mettant à disposition des sujets, à tel ou tel moment de l'entretien, des tables de multiples, ou une calculette. Bref en systématisant un tant soit peu le genre d'intervention que pourrait effectuer un maître ou un expérimentateur dans le pilotage de la situation. J'ai poursuivi dans l'exploration de ces voies d'interaction avec les élèves, parce que, justement, ce passage d'une tâche à une autre, ces « brusques revirements » de la demande de l'expérimentateur, me permettent de dépasser les situation de défi à la réussite afin de provoquer plus sûrement la dévolution d'un problème (au risque assumé de noyer l'élève ou les élèves sous une avalanche de défis). La dévolution réussie d'un problème à l'élève se manifeste alors par l'entrée de ce dernier dans un processus d'enchaînement de problèmes voisins soit par leur formulation, soit parce que logiquement liés. De telles grappes de problèmes ne sont-elles pas les chapelets du mathématicien ?

6. Conclusion.

Ces descriptions montrent, je l'espère, comment la théorie des situations est à même de jeter un regard nouveau sur les recherches portant sur les connaissances et savoirs numériques élémentaires. Si j'ai ouvert cet article en me référant aux cadres piagétiens qui m'ont tant inspiré et m'inspirent encore, j'ai tenu à terminer sur des questions d'expérimentation. Les progrès de la didactique des mathématiques, et ceux de la théorie des situations en particulier, nous permettent en effet d'enrichir substantiellement nos moyens d'investigation. On ne dira jamais assez combien Piaget a renouvelé la psychologie avec sa manière d'interroger les enfants, ce qu'il a appelé tantôt sa *méthode clinique*, tantôt sa *méthode critique* et dont l'idée de base résidait dans la conduite d'entretiens dits *semi-dirigés*, bien plus souples et féconds que les méthodes admises à son époque. Pour ma part, et comme toujours fort intrigué de ce qu'est une situation, je me suis attaché à décrire les limites d'une situation, c'est à dire justement à explorer le modelage de l'expérience des élèves par les situations qu'on leur propose. C'est à ce titre que les multiples expérimentations piagétiennes, et les plus astucieuses d'entre elles, m'intéressent. J'ai donc profité de l'invitation qui m'a été faite ici pour prendre à mon tour prétexte des nombres afin d'indiquer comment la théorie des situations me permettait d'envisager de poursuivre ce travail d'ouverture à l'expérience et à l'expérimentation qui fut sans aucun doute un des apports majeurs de Piaget et de ses très nombreux collaborateurs.

Bibliographie

Bideaud J, Cl. Meljac C. et J. P. Fischer J-P, 1991, Les Chemins du Nombre, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires de Lille.

Brousseau G., 1988, Le contrat didactique, le milieu, RDM ; n° 9-3, 1988, pp. 309-336.

Brousseau G., 1987, Représentations et didactique du sens de la division. In Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres. Mai 1987. 47-64. La Pensée sauvage 1988.

Brousseau G., 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 7.2, pp.

Brown J. S., Burton R. R., 1978, Diagnostic models for procedural bugs in Basic mathematical Skills, Cognitive Science, n°2, pp. 155-192.

Brun J., 1997, De l'adaptation au jeu : la théorie des situations et les rapports enseignement/apprentissage, Conférence aux Premières journées de didactique des mathématiques de Montréal.

Brun J., 1994, Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France., M. Artigue, R.Gras, C. Laborde & P. Tavignot éds., La Pensée Sauvage, Grenoble 1994.

Brun J. & Conne F., à paraître, Equilibres des systèmes didactiques et contrôles internes et externes des sous-systèmes cognitifs le constituant, Colloque: "Qu'est-ce que la pensée? Compétences complexes dans l'éducation et le travail." Suresnes, juin 1998

Brun J., Conne F. & Flückiger A., à paraître, Algorithme de division et schèmes numériques**,** Colloque: "Qu'est-ce que la pensée? Compétences complexes dans l'éducation et le travail." Suresnes, juin 1998

Brun J., Conne F., Lemoyne G. & Portugais J., 1994, La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit, Cahiers de la recherche en éducation, vol 1 n° 1 1994, Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, p. 117 à 132.

Brun J., Conne F. & alii, 1994, Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes, in Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France., M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P.Tavignot éds., La Pensée Sauvage, Grenoble 1994.

Brun J. & Conne F., 1991, Analyse de brouillons de calculs d'élèves confrontés à des items de division écrites. Proceedings of PME XV. International group for psychology of mathematics education, Assisi, Italy, 29 juin - 4 juillet 1991.

Charrière G., 1995, L'Algèbre Mode d'Emploi., Fournitures et éditions scolaires du canton de Vaud. Lausanne

Chevallard Y., 1991, La déconcertation cognitive, pp. 27-52, Journée du COED, Marseille 1990. Cahier Interactions didactiques n° 12, mai 1991, pp. 53 - 88, Equipe de didactique des

mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'université de Neuchâtel.
Chevallard Y., 1985, La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné, 1ère éd., Grenoble, la Pensée Sauvage.
Chevallard Y., 1980, Mathématiques, Langage, Enseignement : la réforme des années soixante, in La politique de l'ignorance, recherches, n° 41, Paris.
Condorcet, 1989, Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Paris, A.C.L. - éditions.
Conne F, 1999: Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne, chapitre I. in G. Lemoyne & F. Conne, eds., Le cognitif en didactique des mathématiques, Presses de l'Université de Montréal.
Conne F., 1998, L'activité dans le couple enseignant / enseigné. Actes de la IXè école d'été de Didactique des Mathématiques, sept. 97, Houlgate, ARDM ed.
Conne F., 1997, A propos des recherches entreprises par l'équipe de didactique des mathématiques de la fapse sur la question des algorithmes de calcul en colonnes à l'école primaire, in Approche des algorithmes dans la nouvelle collection des moyens d'enseignement de mathématiques, Actes du séminaire organisé les 30 et 31 janvier 1997 à Chaumont (NE) sous l'égide de COROME, J-L Gürtner, ed., IRDP ; Recherches, 97.107, nov. 1997
Conne F., 1995, Trois Pas de deux entre savoirs et connaissances, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien, eds, Différents types de savoirs et leur articulation p. 253 à 278, Grenoble, La Pensée Sauvage.
Conne F., 1994, Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, in Actes du XXIè congrès colloque INTER-IREM de la COPIRELEM, p. 3 à 35, Chantilly 1994, IREM Picardie INSSET St Quentin
Conne F.,1993, Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie,: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, In Sens des didactiques, didactiques du sens, Ph. Jonnaert & Y. Lenoir Eds., (actes des Troisièmes rencontres internationales du REF - réseau international de recherche en éducation et formation), 1993, Editions du CRP Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke, p. 205 à 261.
Conne F.,1992, Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, Recherches en didactique des mathématiques, 1992, n° 12 / 2-3, pp. 221-270, et in J. Brun ed., Didactique des mathématiques de la collection *Textes de base en Pédagogie*, pp 275-338, sous la direction de J. Brun, Lausanne, Paris, Delachaux et Niestlé, 1996.
Conne F., 1989, Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. Recherches en Didactique des Mathématiques, no 9.1, p. 71-115.
Conne F., 1987-88 Des dénombrements à la division euclidienne. Série de 5 articles consacrés aux activités numériques élémentaires à l'école primaire. Math-Ecole.

- Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire (1er épisode). Math-Ecole. 1987, no 128, p. 2-12.
- Entre comptage et calcul (2ème épisode). Math-Ecole. 1987, no 130, p. 11-23.
- Numérisation de la suite des nombres et faits numériques (3ème

épisode).Math-Ecole. 1988, no 132, p. 26-31, et no 133, p. 20-23.

- Calculs numériques (4ème épisode). Math Ecole. 1988, no 135, p23-36.

Conne F., 1984, Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique. Recherches en Didactique des Mathématiques, no 5.3, p.269- 332.

Conne F., 1982, Compte rendu de lecture du livre de G. Vergnaud: L'enfant, la mathématique et la réalité. (P. Lang 1980). Recherches en Didactique des Mathématiques, no 3.2, p. 241-249.

Conne F.,1981, La Transposition Didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz. 462 pages

Conne F., Brun J., & alii, 1993, Erreurs, erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de divisions en colonne, communication au colloque Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France. Non publié.

Conne F. & Brun J., 1991, Les débuts d'un apprentissage : où placer les routines ? Journée du COED, Marseille 1990. Cahier Interactions didactiques n° 12, mai 1991, pp. 53 - 88, Equipe de didactique des mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'université de Neuchâtel.

Conne F. & Brun J., 1990, Content and Process: the case of teaching written calculation at primary school. Actes du Symposium on Effective and Responsible Teaching, Fribourg.

Conne F., Chevallard Y. & Guiet J., 1989, Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques. Actes de la Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique de Plestin-les-Grèves, p. 51-57.

Conne F., Pauli L., 1989 Invitation à une rÈflexion sur le rôle du langage dans l'enseignement des mathématiques. Petit "x", no 20, p. 67-83, Grenoble.

Dehaene S., 1997, La bosse des maths, Paris, O. Jacob.

Droz R., 1991, Les multiples racines des nombres naturels et leurs multiples interprétations, in Les Chemins du Nombre, pp. , J. Bideaud, Cl. Meljac, J-P Fischer, eds., Villeneuve d'Ascq, Presses universitaires de Lille.

Flückiger A., 2000, Genèse expérimentale d'une notion mathématique : la notion de division comme modèle de connaissance numérique, thèse de doctorat, fpse, université de Genève.

Freudenthal H., 1983, Didactical phenomenology of mathematical structures, D. Reidel, Dordrecht.

Gaillard F., 2000, Numerical, Actualités psychologiques, Lausanne, Université de Lausanne.

Gaillard F. Tièche Ch. & Conne F., 1995, Number processing in language-impaired schoolchildren, in Approches Neuropsychologiques des Apprentissages chez l'Enfant (ANAE), hors série, janvier 1995, p. 52-57.

Gardner M., 1967, L'étonnante histoire des machines logiques., Paris, Dunod.

Labinowicz E., 1985, Learning from children, Addison_Wesley, Menlo Park.

Madell R., 1978, Addition and subtraction - What do children naturally do ?, paper presented at the National Council of techaers of mathematics annual meeting, San Diego.

Piaget J. & Szeminska A., 1941 : La Genèse du Nombre chez l'Enfant, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Rogalski J., 1985 ? *Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques*, 1985, Paris, cahier Didirem n°2, p. 12.

Rouchier, A., 2000, Cercles des nombres, colloque en l'honneur de Guy Brousseau, Bordeaux.

Rouchier A., 1999, La prise en compte du cognitif : jalons pour une évolution, in, G. Lemoyne & F. Conne, eds, Le cognitif en didactique des mathématiques, Presses de l'Université de Montréal.

Rouchier A., 1996, Connaissance et savoirs dans le système didactique, Recherches en Didactique des mathématiques, n° 16/2, pp. 177-196.

Rouchier A., 1995, Sur quelques oppositions et mises en relations dans les études didactiques. pp. 278-285 Par. 1. Savoirs en jeu et enjeux de savoirs. (p. 280) in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien, eds, Différents types de savoirs et leur articulation, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Rouchier, A., 1991, L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques, in Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans, pp. 26-71.

Saada Robert M., 1989, La microgenèse de la représentation d'un problème. , in Psychologie Française n° 34 2 / 3 , Septembre 1989 , pp. 193-206 .

Simon H. A., 1974, La science des systèmes, Paris, Epi.

Tièche Christinat C., 1997, Algorithmes ..., in Approche des algorithmes dans la nouvelle collection des moyens d'enseignement de mathématiques, Actes du séminaire organisé les 30 et 31 janvier 1997 à Chaumont (NE) sous l'égide de COROME, J-L Gürtner, ed., IRDP ; Recherches, 97.107, nov. 1997

Varela F., 1989, Connaître les sciences cognitives : tendances et perspectives, Paris, Seuil.

Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 9-3, 1990, pp. 133-170, Grenoble, La PensÈe Sauvage.

Vergnaud G., 1985, Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, Psychologie française, n° 30-3/4, pp. 245-252, Paris, Armand Colin.

Vergnaud G. & Durand C., 1976, Structures additives et complexité psychogénétique, Revue Française de Pédagogie, n° 36, pp. 28-43.

Vilette B., 1996 Le Développement de la Quantification chez l'Enfant : comparer, transformer et conserver, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.

Wallon H., 1942, De l'acte à la pensée, Paris, Flammarion.

.