

# RECURSOS PARA PROCESAR, APRENDER Y ENSEÑAR EL CÁLCULO: NUEVOS MODOS DE CONCEPCIÓN Y DE DIFUSIÓN



Luc Trouche

Institut National de Recherche  
Pédagogique, France

[Luc.Trouche@inrp.fr](mailto:Luc.Trouche@inrp.fr)

# Problemas de traducción...

...siempre complejos para trasladar las matices de conceptos en proceso de desarrollo...



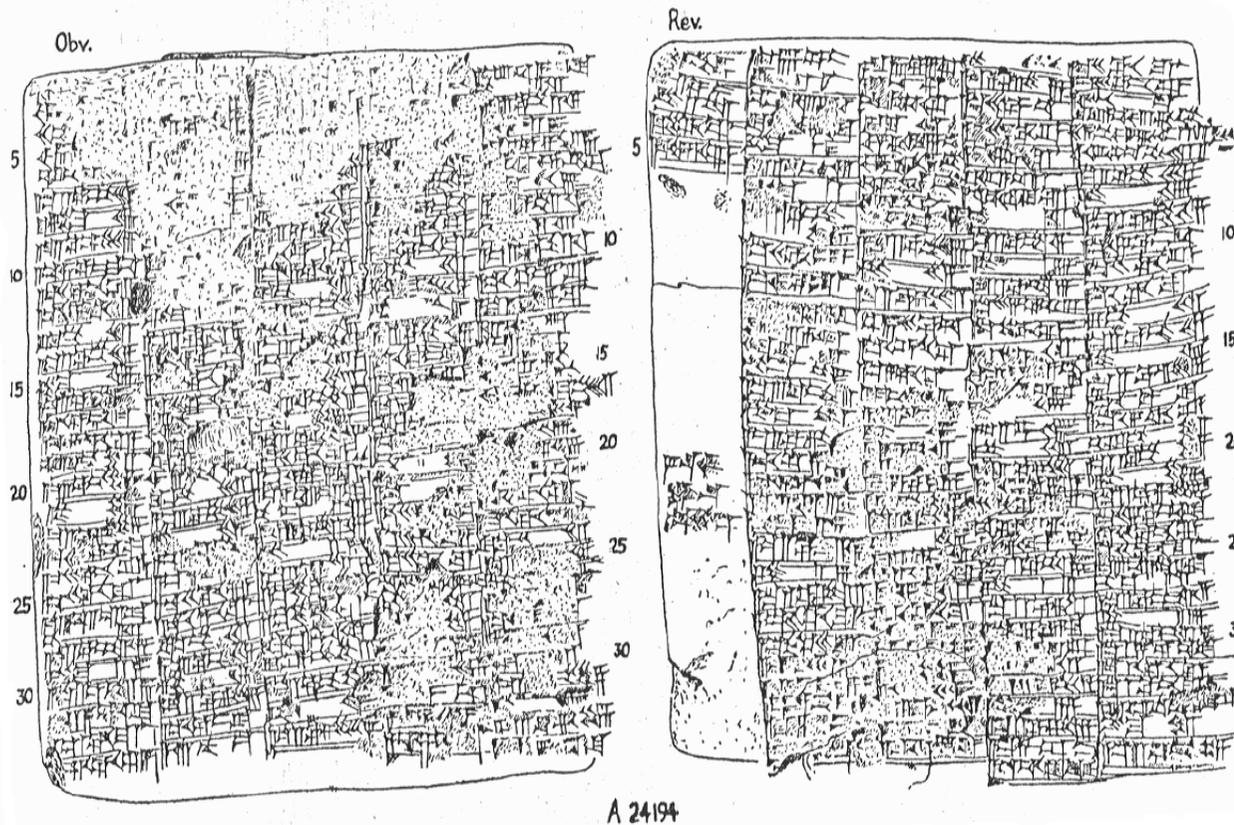
<b>English</b>	Professor <i>Calculus</i>
<b>Français</b>	Professeur <i>Tryphon Tournesol</i>
<b>Español</b>	Profesor <i>Silvestre Girasol</i>

¡A François Pluinage le agradezco su ayuda, y a la asistencia su comprensión!

# RECURSOS PARA PROCESAR, APRENDER Y ENSEÑAR EL CÁLCULO: NUEVOS MODOS DE CONCEPCIÓN Y DE DIFUSIÓN

1. Nuevos contextos tecnológicos: de las *herramientas* matemáticas individuales a *redes de utensilios* multifuncionales
2. Nuevos contextos curriculares: del *salón de clase* a la *metáfora del laboratorio*
3. Nuevos contextos de desarrollo profesional: de la temática de las *tecnologías* a la temática de los *recursos*

# 1. Nuevos contextos tecnológicos



Una tableta de 10cm x 10 cm conteniendo 250 problemas (Nippur, - 2000)

Desde siempre, una práctica de los cálculos asistida por un conjunto de herramientas

Herramientas del matemático:  
estructurados,  
cargando  
conocimientos

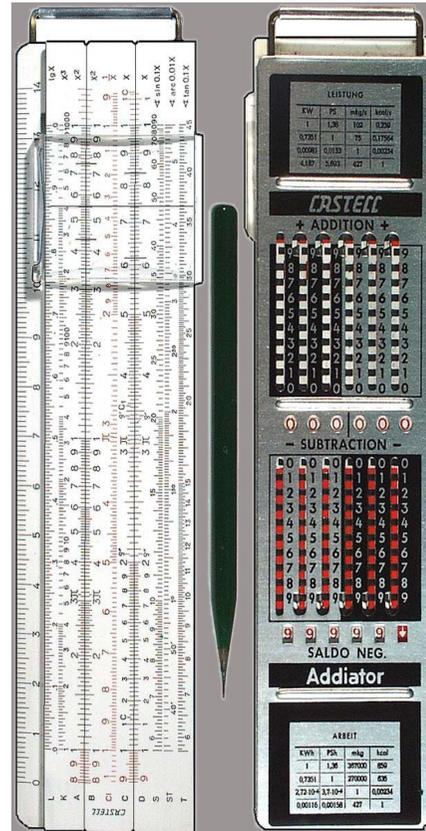
(Trouche 2004)

# 1. Nuevos contextos tecnológicos



L'allégorie « TYPUS ARITHMETICAE », BM de Rouen

Cálculo con dígitos / con ábaco (1400)



Regla de cálculo por un lado, calculadora por el otro lado (1970)

Una evolución conjunta de las herramientas y de las matemáticas

La combinación de herramientas antiguos y novedosos, otra característica de la labor matemática

# 1. Nuevos contextos tecnológicos



Las calculadoras, culminación de un proceso de miniaturización y de reunión de herramientas en la misma envoltura

La aparición de las pantallas y de las imágenes animadas, un elemento importante para la visualización de un conjunto de representaciones de los objetos matemáticos



Efectos sobre la práctica de las matemáticas (zapping) y la conceptualización (Guin *et al.* 2005)

# 1. Nuevos contextos tecnológicos



Red calculadora/computadora

Un hecho de suma importancia, el desarrollo de redes

Red de uso individual, constituida por un conjunto de herramientas: se implementa el mismo software en diferentes aparatos que se comunican (Aldon *et al.* 2008)



Red de clase

Red de uso colectivo, entre un conjunto de herramientas para el tratamiento de un problema dado

Herramientas que se comunican (pizarrón blanco interactivo, Internet)

Complejidad de las partituras que hay que concebir (Drijvers et Trouche 2008)

# 1. Nuevos contextos tecnológicos

Un primer ejemplo

El contexto: una clase equipada de un pizarrón blanco interactivo y de conexión Internet ; obtener el producto de dos números decimales

Primer reflejo: usar Google para encontrar el resultado

La técnica es la misma para buscar el resultado de una operación aritmética o la capital de la Osetia del Sur o...



3,35\*5,7 - Recherche Google

Web [Images](#) [Maps](#) [Actualités](#) [Vidéo](#) [Gmail](#) [plus](#) ▼

**Google**™   [Recherche avancée](#)  
[Préférences](#)

Rechercher dans :  Web  Pages francophones  Pages : France

---

Web

 **3,35 \* 5,7 = 19,09500**

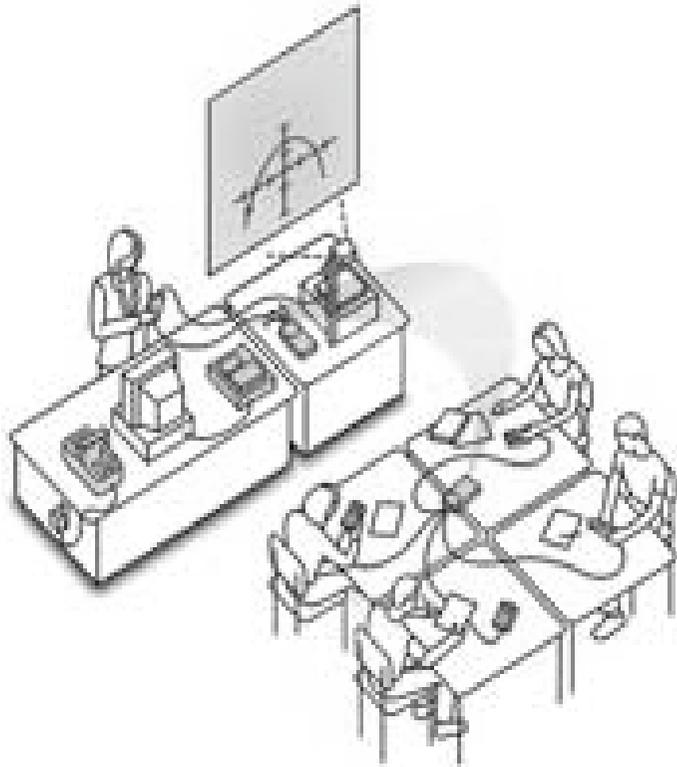
[Plus d'infos sur la fonction calculatrice.](#)

Rechercher les documents contenant les expressions [3,35\\*5,7.](#)

---

[Accueil Google](#) - [Programmes de publicité](#) - [Solutions d'entreprise](#) -

# 1. Nuevos contextos tecnológicos



Un segundo ejemplo

Nuevos recursos para alimentar los debates colectivos en la clase

TI-Navigator, red de calculadoras

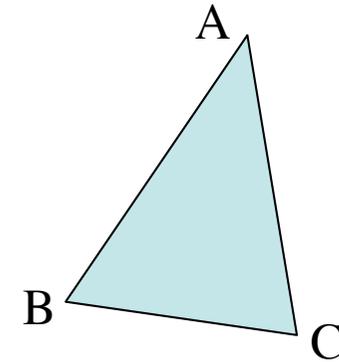
Gestión de los datos et de las pantallas de los alumnos por el profesor

Varias configuraciones posibles :

- ✓ mosaica de pantallas;
- ✓ sistema de ejes común;
- ✓ consulta rápida...

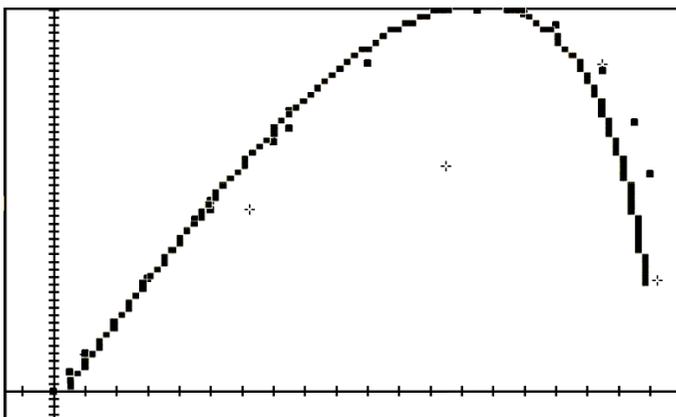
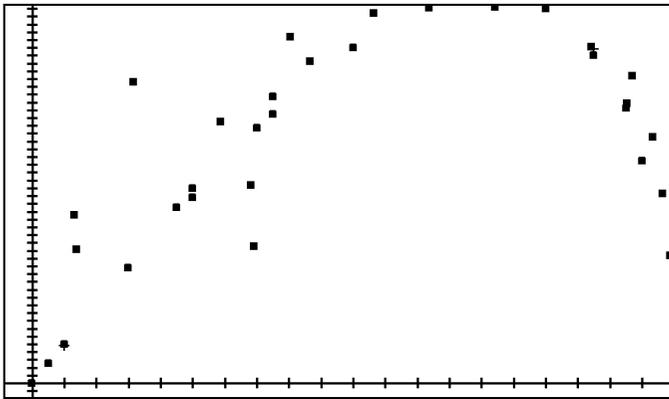
Explotación posible en física o biología (censores), o en matemáticas

# 1. Nuevos contextos tecnológicos

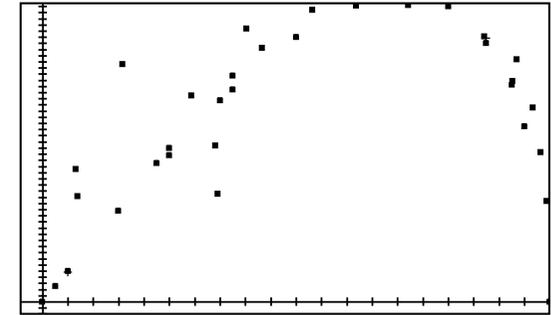


ABC es un triángulo isósceles, con  $AB = AC = 10$  cm, ¿cuál es su área?

- objetivo: el concepto de función
- manipulación con herramientas “antiguas” (regla, compás), medición
- envío de los datos a la pantalla
- un objeto se constituye, creación personal pero separada de uno mismo;
- búsqueda de una fórmula, co-elaboración de un objeto matemático que modela un problema dado;
- muchos problemas se plantean (incertidumbres de medición o errores de cálculo, curva o nube de puntos, etcétera)



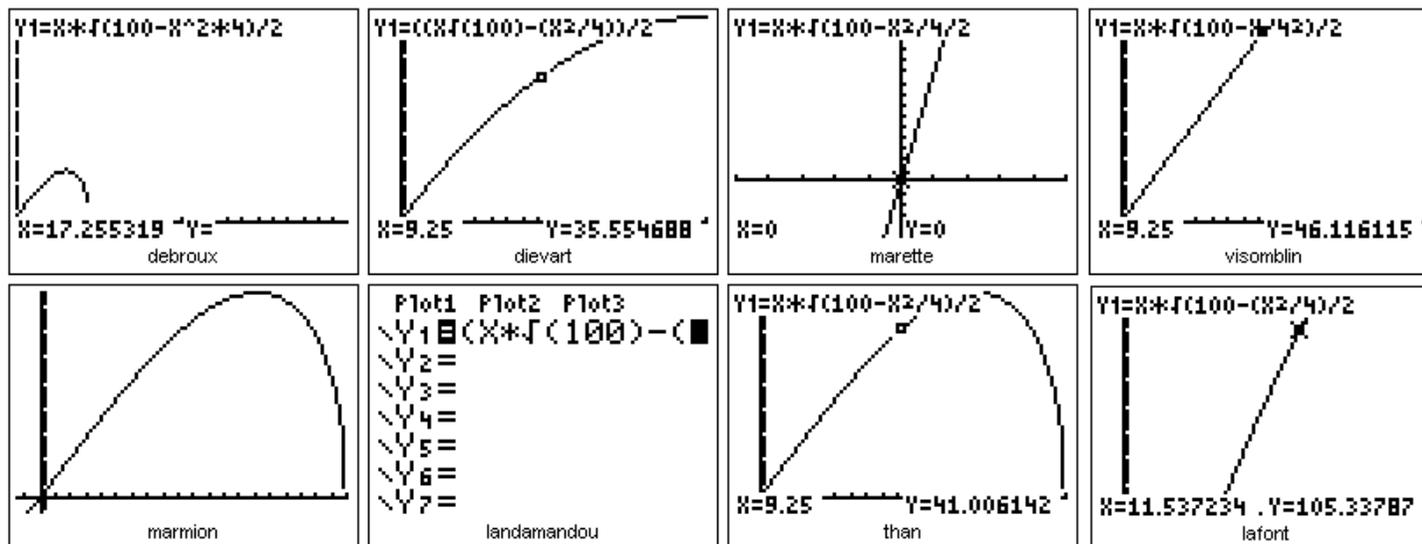
# 1. Nuevos contextos tecnológicos



Selecciones didácticas complejas para profesor, desde el punto de vista:

- ✓ de la “*partitura*” (enseñar o no enseñar los nombres de los alumnos autores, compartir la misma gráfica o usar una mosaica de pantallas);
- ✓ más general de la gestión de la situación (¿Cómo organizar el debate científico? ¿Cuándo y cómo destacar significados?)

Una viabilidad asegurada por un *interés institucional* y por el *trabajo colaborativo* dentro de un grupo (Hoyles *et al.*, 2009)



## 2. Nuevos contextos curriculares

La metáfora de los laboratorios matemáticos para la práctica, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, una metáfora frecuentemente visitada desde 1908 (Maschietto & Trouche, en línea)

“Los *lycées* (los establecimientos franceses de nivel medio superior) podrían albergar laboratorios de ciencias matemáticas al lado de los laboratorios de física. Ahí estudiantes y profesores encontrarían documentación, material de computación, software [...] Momentos específicos se podrían reservar a los profesores para su actualización” (traducido de Kahane 2000)

En los nuevos programas curriculares franceses de matemáticas (2009), extensa presencia de las temáticas de experimentación:

“El uso de software (calculadoras o computadoras), de herramienta de visualización y de representación, de cálculo numérico o formal, de simulación, de programación, amplía las posibilidades de experimentar, abre la dialéctica entre observación y prueba y cambia de manera profunda la naturaleza de la enseñanza”

[http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/20/1/pgm2nde2009\\_109201.pdf](http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/20/1/pgm2nde2009_109201.pdf)

## 2. Nuevos contextos curriculares

Un ejemplo: la prueba práctica de matemáticas del bachillerato francés, experimentada desde el año 2007

“La prueba tiene como objeto de evaluar las competencias de los estudiantes en el uso de las calculadoras y de software específico de matemáticas. Se trata de evaluar la habilidad en movilizar las tecnologías de información y comunicación en la enseñanza (TICE) para la resolución de un problema matemático.

Se proponen a los candidatos ejercicios matemáticos en los que el uso de las TICE (calculadora graficadora programable, computadoras y software específico, libre por preferencia, hoja de cálculo, graficador, geometría dinámica, cálculo formal) interviene en forma significativa para la resolución del problema planteado.”

<http://eduscol.education.fr/cid47793/epreuve-pratique-de-mathematiques-du-baccalaureat-serie-s.html>

## 2. Nuevos contextos curriculares

Un ejemplo: **enunciado**

Sea  $f$  la función definida sobre  $\mathbb{R}$  por:  $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$

Se denota por  $C$  su gráfica en un sistema de ejes ortogonales.

Sea  $a$  un número real cualquiera,  $M$  y  $N$  los puntos de  $C$  de abscisas respectivas  $a$  y  $-a$ .

1) Construir la figura ayudandose de software a su gusto

**Llamar al examinador para revisar la figura**

2) Hacer variar  $a$  y expresar conjeturas sobre la recta  $(MN)$  y sobre el punto  $I$  de intersección de las tangentes a  $C$  en  $M$  y  $N$ .

**Llamar al examinador para revisar las conjeturas**

3) Determinar en función de  $a$  las coordenadas de los puntos  $M$  y  $N$ . Justificar las conjeturas propuestas en la pregunta 2.

**Producción solicitada**

- Visualización en la pantalla del lugar geométrico del punto  $I$
- Respuestas argumentadas a la pregunta 3

## 2. Nuevos contextos curriculares

### Un primera examen institucional

Estas novedades tienen varias consecuencias:

- Cambian la relación de los estudiantes con las matemáticas
- Incitan a una práctica diferente de la enseñanza
- Ponen en juego otras prácticas de evaluación

- elles induisent un rapport différent des élèves aux mathématiques, parce que :
  - cette épreuve fait une place à ce qui peut s'assimiler à une activité expérimentale par le fait que l'élève est susceptible de faire divers essais en utilisant les TICE dans le cadre imparti par le sujet,
  - l'évaluation met l'accent sur la démarche, elle favorise des formulations analogues à celle des « questions ouvertes », puisque ordinairement, l'observation amène l'élève à proposer une conjecture, ce qui n'est pas trop souvent le cas,
  - le candidat est accompagné par l'examineur au cours de l'épreuve ;
- elles incitent à des pratiques d'enseignement différentes, laissant la possibilité de faire une place plus importante à la démarche d'investigation ;
- elles mettent en jeu des pratiques d'évaluation différentes : il s'agit d'évaluer le candidat lorsqu'il est en activité, d'apprécier ses démarches, ses qualités pour expérimenter, sa persévérance ou son goût à chercher, à prendre des initiatives.

<http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/rapportep>

## 2. Nuevos contextos curriculares

El reporte sigue así (traducimos):

“La generalización de esta prueba, que no sale del marco de la currícula, debería generar una evolución de la enseñanza de las matemáticas hacia más coherencia con sus objetivos: ¿Cómo las matemáticas, con las herramientas que tienen a su disposición, permiten resolver problemas, desarrollar la experimentación, el gusto y la práctica de la indagación?”

Sin embargo... ¡Ninguna generalización prevista antes del 2013!

La evaluación es la clave del sistema, “jala” las evoluciones de la enseñanza. La dificultad en mover la evaluación es un síntoma de la complejidad que presenta la puesta en marcha controlada de los métodos experimentales en la enseñanza de las matemáticas...

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional



Por la plétora de herramientas de diferentes niveles (pizarra, pizarrón blanco interactivo, software, calculadoras, Internet...) se necesita una redefinición de lo que es una “tecnología”

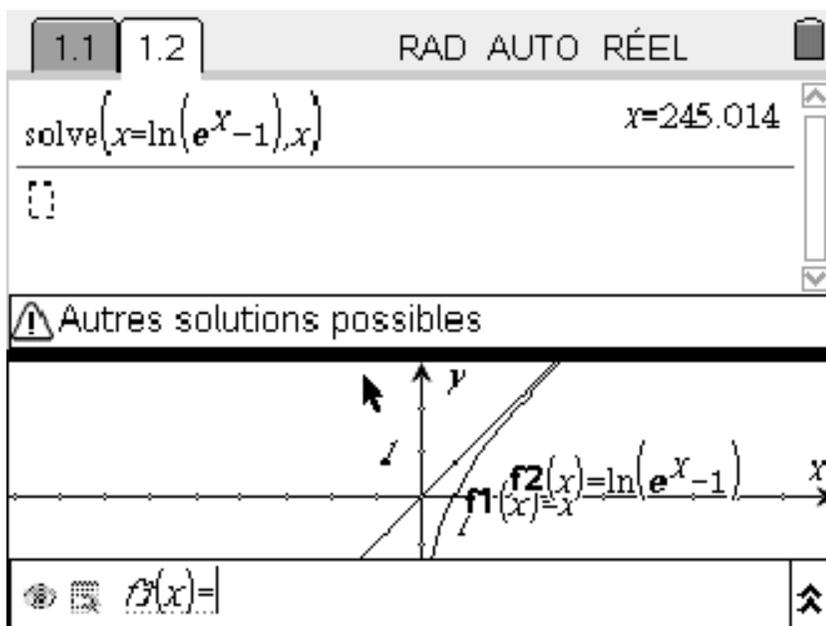
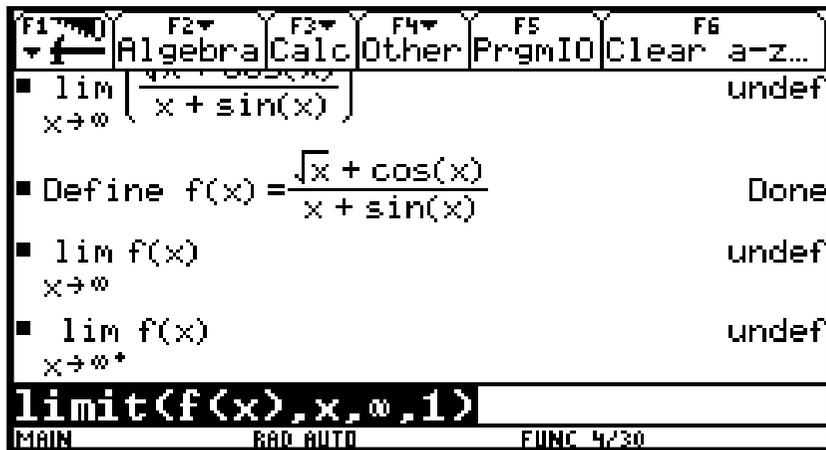


Emergencia de la temática de los “recursos”, para una mirada amplia sobre la labor docente (Gueudet et Trouche 2009)

Lo que rejuvenece la actividad del profesor



### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional



Recursos esenciales: las herramientas de cálculo, y los resultados que proponen.

El control de los resultados, una actitud y conocimientos que desarrollar, tanto en los estudiantes como en los docentes, en particular al combinar diferentes registros de representación :

- ¿Es verdadero que esta función no tiene límite?

- ¿Es verdadero que esta ecuación tiene una solución?

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Noción esencial: el control de la *calidad* de los recursos, que extiende el control de un resultado dado por un medio de cálculo

¿Dónde estarán, dentro de las 2,600,000 referencias propuestas, los “recursos adecuados” para enseñar la derivada de una función?

Web [Images](#) [Vidéos](#) [Maps](#) [Actualités](#) [Groupes](#) [Gmail](#) [plus](#) ▼

[Paramètres de recherche](#) | [Connexion](#)



introduction de la notion de dérivée

Rechercher

[Recherche avancée](#)

Rechercher dans :  Web  Pages francophones  Pages : France

Web

Résultats 1 à 10 sur un total d'environ 2 600 000 pour introduction de la notion de dérivée (0,39 secondes)

[TP: Introduction à la notion de dérivée d'une fonction. Lien avec ...](#)

Nombre **dérivé**. **DÉRivée** d'une fonction et étude du sens de variation. Mathématique, première ES ou S.

[yallouz.arie.free.fr/premiere\\_tp/derivee.php](http://yallouz.arie.free.fr/premiere_tp/derivee.php) - [En cache](#) - [Pages similaires](#)

[Mac for Math - Introduction à la notion de dérivée](#)

30 mar 2006 ... **Introduction** à la **notion de dérivée**. P est un point quelconque de la fonction f. On considère la sécante à la fonction f passant par les ...

[www.macpoweruser.net/.../introderivee/index.html](http://www.macpoweruser.net/.../introderivee/index.html) - [En cache](#) - [Pages similaires](#)

[Introduction au nombre dérivé en première non scientifique](#)

INTRODUCTION AU NOMBRE DERIVE EN PREMIERE NON SCIENTIFIQUE ... il est donc

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Éducnet  
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

EDU'bases  
Documentation

Educnet > Site de la discipline > EDU'bases documentation

- Dernières parutions depuis le 02-10-09

Aide ?

Critères de recherche

Académie	choix indifférent
Établissement	Lycée
Niveau	Première
Cadre pédagogique	choix indifférent
Type d'activité	Collaborer
Utilisation des TICE	<input checked="" type="checkbox"/>
Logiciels RIP utilisés	choix indifférent
Outils TIC utilisés	Logiciel disciplinaire
Domaines de compétences du B2i	Communiquer, échanger
Compétences documentaires	choix indifférent
Disciplines impliquées	Mathématiques

¿Cómo asegurar la calidad de los recursos?

1) Repertorios garantizados: Educnet en Francia (Ministerio de la Educación)

Sitios poco alimentados, poco consultados, recursos poco evolutivos...

Rappel de la requête :

Établissement: Lycée Niveau: Première Type d'activité: Collaborer Outils TIC utilisés: Logiciel disciplinaire Utilisation des TICE: oui Domaines de compétences du B2i: Communiquer, échanger Disciplines impliquées: Mathématiques

Aucune fiche ne correspond à ces critères

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

¿Cómo asegurar la calidad de los recursos?

2) Por procedimientos colaborativos...

Sésamath, una asociación para intercambiar, elaborar, compartir, hacer evolucionar recursos para la enseñanza de las matemáticas

Mucha actividad sobre el sitio: 100 socios; 7,000 miembros de grupos de proyectos; 70,000 conexiones cada día...

The screenshot shows the Sésamath website header with the logo and the tagline "Les Mathématiques pour tous". A navigation menu includes "Accueil", "L'association", "Vie de l'association", "Documentation-presse", "Nous aider", and "Partena". Below the menu, there is a "Contact" section with the email "contact@sesamath.net". To the right, a section titled "Travailler ensemble, s'entraider ... communiquer !" features two boxes: "SésaPROF" (described as "Sesamath pour les profs : les mathématiques ensemble (6999 inscrits, accès réservé).") and "SésaBlog" (described as "Un regard sur l'enseignement actuel des Mathématiques.").

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Uno de los proyectos emblemáticos de la asociación: *Mathenpoche* (Matemáticas en la bolsa), centenas de ejercicios descargables en línea, que se pueden comentar o enriquecer.



The screenshot shows the header and main content area of the Mathenpoche website. The header is dark blue with a logo on the left and navigation links on the right. The main content area is white with a blue sidebar on the right.

**Accès directs :** [6<sup>e</sup>](#) | [5<sup>e</sup>](#) | [4<sup>e</sup>](#) | [3<sup>e</sup>](#) | [CAP](#) | [2<sup>nde</sup>](#)

**Mathenpoche**

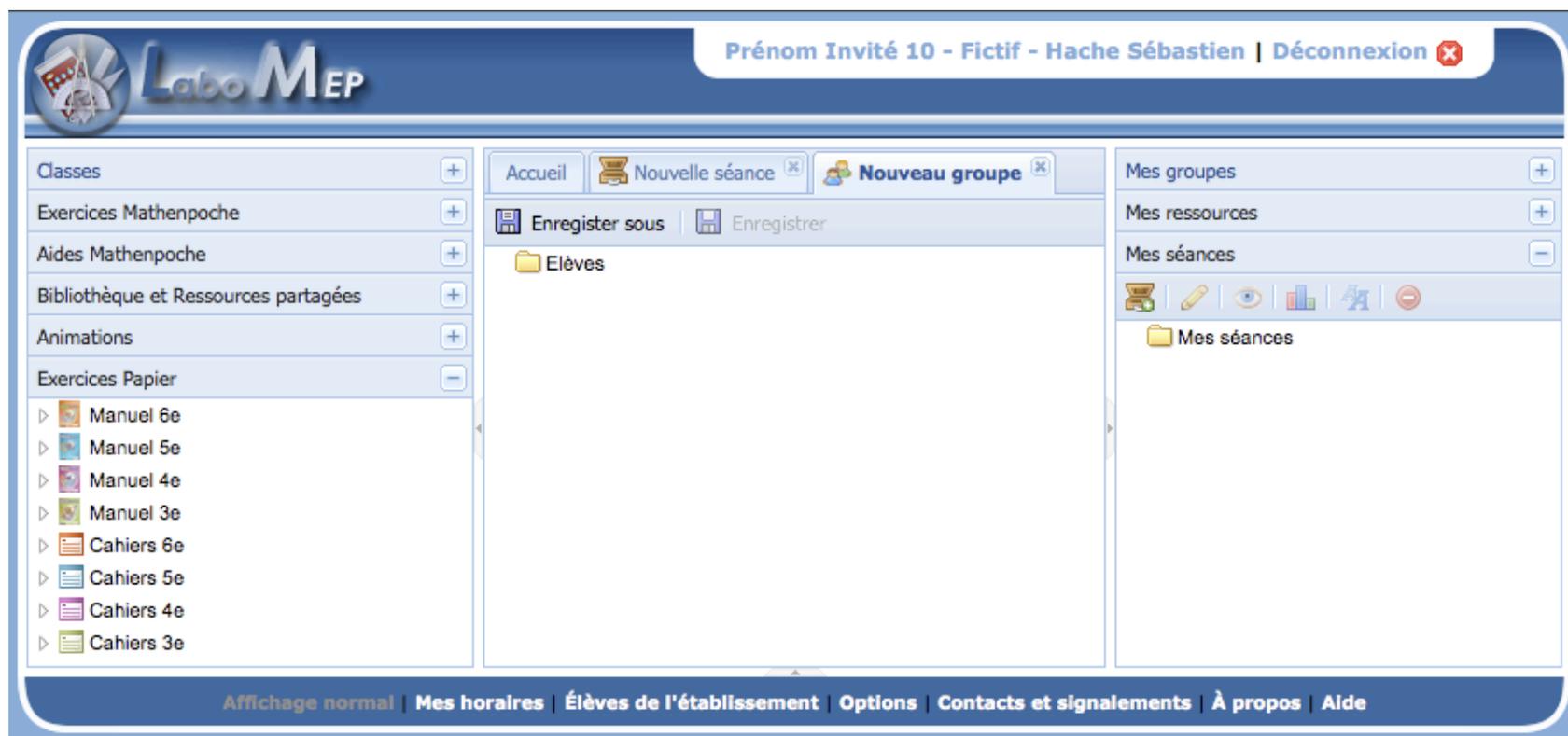
Je soutiens Sésamath :

Mathenpoche est un logiciel gratuit composé de centaines d'exercices de mathématiques : activités de découverte, de démonstration, exercices d'application, travaux de synthèse... Il est développé par des professeurs de mathématiques en exercice et diffusé par [l'association Sésamath](#).

[Accueil](#)  
[Utiliser en ligne](#)  
[Téléchargements](#)  
[Version réseau](#)

### 3. Nouveaux contextes de développement professionnel

LaboMep : une interface “laboratoire” de conception, de expérimentation et de puesto en comùn de recursos, a partir del vivero inicial de Mep (Mathenpoche), una versión adaptada al trabajo en red de clase.



### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

¿Cómo asegurar la calidad de los recursos?

- 1) Por repertorios garantizados
- 2) Por procedimientos colaborativos...
- 3) Por una combinación de ambos...



➤ Bienvenue sur le portail du programme Pairform@nce !

Vous êtes ici sur le **portail** du programme Pairform@nce, programme d'enrichissement et développement des pratiques personnelles des enseignants en matière de TICE, basé sur une participation collaborative aux parcours de formation. Vous y trouverez les informations concernant le programme mais également la synthèse de l'offre de formation (catalogue).

Le projet Pairform@nce en France  
(Gueudet et Trouche 2009)



Le projet Enciclopedia au Mexique  
(Trigeros et Lozano, en cours)

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Un resultado de suma importancia: Uno no se puede apropiarse los recursos sin cambiar, sin traer su piedra.

Una nueva mirada, para la investigación, con la que se considera la labor del profesor como un hecho total (no solamente en clase, no solamente su labor individual), y en la que necesariamente se toman en cuenta tres génesis imbricadas:

- 1) Génesis de recursos
- 2) Génesis de comunidades de docentes
- 3) Génesis profesional

Resultados de una encuesta dirigida a los miembros de una asociación de docentes, ¿De qué forma se les beneficia?

“Una nueva mirada sobre las matemáticas, más dinámicas”

“Me vengo una profesora que dialoga constantemente con millares de colegas”,

“El don, la gratuidad, el compartir, la apertura sobre el trabajo de los demás”,

“Esta comunidad gigante, este inmenso salón de los profesores, esta base de datos donde servirse...”

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Los resultados de los procedimientos no son dados de antemano.  
Internet también puede ser:

- individualismo en red;
- recursos llave en mano, completamente empacados;
- un juego de copiar/pegar;
- preguntas de elección múltiple.

Un reto que sobrepasa las matemáticas...

Pero, para las matemáticas, aperturas conjuntas: apertura de los problemas, apertura de los recursos, apertura de las prácticas dentro y fuera de la clase.

La metáfora de los laboratorios de matemáticas no sólo vale para los estudiantes en la clase, también es válida para la labor de los profesores, juntos, de forma presencial o a distancia.

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Una pregunta de Dr Armando Cuevas: quel futur pour la technologie dans l'éducation mathématique?

Une question complexe...

Un premier niveau de réponse, très général: associer, très en amont de la conception, les utilisateurs finaux des ressources

[http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche\\_documentaire](http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire)

Un deuxième niveau de réponse : penser des ressources *réutilisables* et *interopérables*

Trouche, L., Drijvers, P. (to be published in 2011), Handheld technology for mathematics education: flashback to the future, in C. Bardini, P. Drijvers and H.G. Weigand, *Handheld technology for learning and teaching mathematics*, Special issue of ZDM

### 3. Nuevos contextos de desarrollo profesional

Le *bricoleur* doit « s'arranger avec les moyens du bord », pratiquer le remploi, détourner de leur usage premier les matériaux, les emplois qui sont à sa disposition. *L'ingénieur* conçoit et construit les éléments de son œuvre en fonction d'un plan et d'une visée préalablement définis. Il est du côté de l'ouverture, le bricoleur du côté de la réorganisation...

Sur Claude Levi-Strauss (1908-30 oct. 2009)



[http://www.college-de-france.fr/media/college/UPL12800\\_lettre\\_LStrauss.pdf](http://www.college-de-france.fr/media/college/UPL12800_lettre_LStrauss.pdf)

# Bibliografía

- Aldon G. *et al.* (2008), Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab, *Repères-IREM* 72, French and English version at [http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/lecture/dossier\\_mutualisation/](http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/lecture/dossier_mutualisation/)
- CAME, le site de la communauté scientifique internationale Computer Algebra in Mathematics Education <http://www.lkl.ac.uk/research/came/index.html> , actes du colloque 2003 Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment <http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims/>
- Drijvers, P., Trouche, L. (2008), From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 363-392), *Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives*
- Gueudet, G., Trouche, L. (2009), Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218, <http://springerlink.metapress.com/content/6600hx1254664n74/>
- Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (eds.) (2005), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, Springer, New York
- Hoyles, C., Kalas, I., Trouche, L., Hivon, L., Noss, R., Wilensky, U. (2009), Connectivity and Virtual Networks for Learning, in J.-B. Lagrange, C. Hoyles (eds.), *Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain, Proceedings of the 17th ICMI studies*, Springer, New York.
- Kahane, J.-P. (dir.) (2000), *Informatique et enseignement des mathématiques*, en ligne <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportInfoMath/RapportInfoMath.pdf>
- Kuntz, G. (dir.) (2007), Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques, in *Dossiers de la VST*, en ligne [http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche\\_experimentale/sommaire.htm](http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm)
- Maschietto, M., Trouche, L. (online), Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. <http://www.springerlink.com/content/48045470220u4073/>
- Trigueros, M., Lozano, D. (in progress), Teachers teaching mathematics with Enciclomedia, in G. Gueudet, B. Pepin, L. Trouche (eds.), *Mathematics curriculum material and teacher documentation: from textbooks to shared living resources*
- Trouche, L. (2004), Managing Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process Through Instrumental Orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281-307

# RECURSOS PARA PROCESAR, APRENDER Y ENSEÑAR EL CÁLCULO: NUEVOS MODOS DE CONCEPCIÓN Y DE DIFUSIÓN



Luc Trouche

Institut National de Recherche  
Pédagogique, France

[Luc.Trouche@inrp.fr](mailto:Luc.Trouche@inrp.fr)

[http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche\\_documentaire](http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire)

**INRP**

[www.inrp.fr](http://www.inrp.fr)

  
EducMath