Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Matemática Educativa

Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior.

Tesis que presenta:

Yani Betancourt Gonzalez

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

En la especialidad de:

Matemática Educativa

Director de Tesis: Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

México, Distrito Federal Noviembre, 2009

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico proporcionado para la realización de mis estudios de maestría.

Becario 204627

Dedico este trabajo a todas las personas que me han brindado su apoyo incondicional y que nunca dejaron de creer en mí.

A quienes siempre llevo en mi corazón: Karla, Carlos Adrián, Jorge y Sergio Emiliano.

A quienes me formaron: Jorge y Carmen.

A mis hermanos: Mauricio y Saira.

A ti amigo: Mauricio.

A mi profesor y amigo: Dr. Cuevas.

A mis profesores y compañeros del departamento de matemática educativa del Cinvestav.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales son: “el problema central del álgebra lineal” (Strang, 1982, p.1). En efecto, los conceptos formales del álgebra lineal, como independencia y dependencia lineal, requieren de la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Estos últimos, además, tienen aplicación en distintas áreas de conocimiento, como la ingeniería o la computación; y desde luego, en áreas de la matemática, como la geometría analítica o la investigación de operaciones.

En consecuencia, el estudio y la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales son esenciales y necesarios en la formación de estudiantes. De hecho, a partir de la educación secundaria, los sistemas de ecuaciones lineales forman parte del currículum. Y es, en la educación superior (Ver capítulo 1, apartado 1.1.2), donde el método de resolución propuesto para ser enseñado es: el método de Gauss.

Ahora bien, una de las dificultades por las que atraviesan profesores y alumnos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando Gauss, está relacionada con los cálculos aritméticos (Gómez, 2006). Esta situación, por un lado hace tedioso, repetitivo e insignificante el método resolución. Y por el otro, inhibe y desorienta el análisis y la reflexión del proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, en donde se encuentran conceptos fundamentales como sistema equivalente y solución. Además, difícilmente se plantean en clase problemas reales que impliquen la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, de tal manera que al alumno le sea significativo el contenido matemático.

Es así, como establecemos la necesidad de una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales que tome en cuenta el proceso de resolución, para realizar un análisis y reflexión del mismo; así como, la posibilidad de plantear problemas reales que involucren sistemas de ecuaciones lineales.

En este sentido, nuestra propuesta consiste en el desarrollo de un ambiente computacional que apoye la enseñanza en la educación superior de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; permitiendo el análisis, discusión y reflexión del proceso de resolución paso a paso, con el propósito de construir los conceptos inherentes a dicho proceso, como sistema de ecuaciones lineales equivalente. Y en un futuro, esta misma herramienta ayude en la construcción de conceptos formales del álgebra lineal.

El producto (aún en desarrollo) derivado de este trabajo de investigación es el ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones que denominamos ALSEL (**Á**lgebra **L**ineal: **S**istemas de **E**cuaciones **L**ineales). Ambiente provisto de las herramientas necesarias para que el alumno enfoque su atención en el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

Para dar evidencia de lo anterior, se ha organizado la exposición de este trabajo de investigación en cinco capítulos. En el capítulo 1, denominado **planteamiento del problema y antecedentes**, describimos el problema de investigación y planteamos la respectiva pregunta de investigación, en consecuencia, proponemos una respuesta parcial al problema, que resulta ser la propuesta didáctica antes mencionada. En este mismo capítulo, revisamos y exponemos brevemente algunas investigaciones relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal (Dorier et al, 2000; Sierpinska, 2000). También, revisamos y describimos someramente algunas tesis de maestría y doctorado en matemática educativa relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales (Vázquez, 1992; Mora, 2001; Cutz, 2005; Gómez, 2006; Pérez, 2007).

En el capítulo 2, inicialmente ofrecemos una revisión breve del contenido matemático del tema de interés para este trabajo: los sistemas de ecuaciones lineales. Después exponemos algunas teorías, perspectivas y propuestas en didáctica de las matemáticas (Duval, 1998; Brousseau, 2000; Cuevas & Pluvinage, 2003). Y en la última parte, exponemos una breve visión de la computadora como herramienta de apoyo en la enseñanza de las matemáticas (Cuevas, 1998). También, presentamos algunos elementos didácticos y parámetros de usabilidad que el desarrollo de un ambiente computacional debe contemplar (Nielsen, 2003; Mochón, 2006). Este capítulo ha sido denominado **consideraciones matemáticas, teóricas y didácticas**.

El capítulo 3, denominado **descripción del ambiente computacional ALSEL**, está conformado por la exposición del diseño didáctico de ALSEL y su correspondiente desarrollo computacional. Para esto último, se utilizó el lenguaje de programación *C Sharp*.

Una vez, desarrollado el primer prototipo de ALSEL, se procedió a la implementación del mismo en el nivel educativo apropiado con el propósito de explorar defectos y virtudes, y su efecto en la enseñanza y aprendizaje. Para esto, tuvimos la fortuna de contar con el apoyo del CU-UAEM Valle de Chalco (Centro Universitario-Universidad Autónoma del Estado de México) para llevar a cabo la validación del ambiente computacional. De esto trata el capítulo 4, denominado **validación de ALSEL**.

Cerramos este trabajo de investigación, con la exposición de las conclusiones relacionadas tanto con el desarrollo del ambiente como con la etapa de validación. Además de incluir, lo que consideramos sería un proyecto de investigación apropiado para estudios de doctorado. El capítulo 5 habla de lo anterior y lo denominamos **conclusiones e investigaciones a futuro.**

CAPÍTULO 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ANTECEDENTES

No es posible decir cuál es la mejor forma de enseñar, pero sí, cuál no es la mejor.
Cuevas

Este primer capítulo presenta las causas que originaron este trabajo de investigación concerniente a la creación de un ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) a nivel superior (licenciatura e ingeniería). La primera parte, inicia con una descripción general de la importancia de los SEL en el desarrollo tecnológico y científico; posteriormente se revisa el currículum educativo en México desde la educación secundaria hasta la educación superior con la intención de delinear un panorama relacionado con: cómo se propone abordar el estudio de los SEL y, qué contenido se propone enseñar en cada nivel educativo; hasta llegar al planteamiento del problema de investigación. Se concluye el apartado exponiendo la pregunta de investigación, y una respuesta parcial a la pregunta: la creación de un ambiente computacional.

En la segunda parte, se revisan algunas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal (Dorier *et al*, 2000; Sierpinska, 2000), y particularmente de los sistemas de ecuaciones lineales (Vázquez, 1992; Mora, 2001; Cutz, 2005; Gómez, 2006; Pérez, 2007) con la finalidad de mostrar los problemas y dificultades de los estudiantes de nivel superior para comprender y entender los conceptos intrínsecos a los sistemas de ecuaciones lineales. Los errores conceptuales derivados de un proceso de resolución mecanizado. Las dificultades en la interpretación algebraica y geométrica de la solución de un SEL. El obstáculo conceptual generado por una enseñanza orientada y preocupada por los cálculos aritméticos involucrados en el proceso de resolución, sin la reflexión del mismo y por lo tanto de los conceptos inherentes. Así como el uso de la herramienta computacional para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.1 Planteamiento del problema.

1.1.1 La importancia de los sistemas de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones lineales son importantes por:

a) Su aplicación a problemas en distintas disciplinas como la ingeniería: flujo vehicular y circuitos eléctricos (Lay, 1994); la economía: curva de oferta-demanda y el modelo económico de Leontief (Lay, 1994); la computación: los motores de búsqueda, e. g. *Google* (Page y Brin, 2000) o la restauración de imágenes digitales (Mery y López, 2003).

b) Su aplicación a otras áreas de la matemática: la geometría analítica, el cálculo de varias variables, ecuaciones diferenciales, estadística, etc.

c) Y desde luego, porque originan el desarrollo de la teoría en álgebra lineal.

Por esto, estudiar los sistemas de ecuaciones lineales tiene sentido, y sobre todo estudiar las ideas y argumentos matemáticos propios del proceso resolución.

De acuerdo con Strang (1982) “el problema central del álgebra lineal es la solución de ecuaciones lineales simultáneas.”(p.1); efectivamente, porque para determinar la inversa de una matriz o su rango; determinar si un conjunto de vectores son linealmente independientes, o la base de un espacio vectorial es necesaria la resolución de un sistema de ecuaciones lineales asociado a cada situación. Además, por medio de los sistemas de ecuaciones lineales es posible introducir de forma natural, la notación matricial y su álgebra.

Dado que el interés de nuestro trabajo es la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, concebimos conveniente revisar la situación curricular de este contenido matemático para conformar un panorama del mismo.

1.1.2 Los sistemas de ecuaciones lineales en el currículum educativo.

En México la resolución de SEL se enseña desde la educación secundaria; evidencia de ello se encuentra en la última reforma a la educación básica, nivel secundaria, donde el plan de estudios[1] estructurado por *bloques temáticos* contiene en el bloque número cinco del segundo grado, el subtema denominado *Representar con literales los valores desconocidos de un problema y usarlas para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros*; donde se sugiere enseñar a utilizar los procesos de simplificación algebraica (suma y resta de ecuaciones, despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones lineales y sustituirla en la otra) para resolver SEL. En el tercer grado, se retoma el tema de la resolución de sistemas con la condición de plantear y resolver SEL a partir de "problemas reales". Tanto en el segundo y tercer grado, los sistemas están formados por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y coeficientes enteros.

A pesar, de la simplificación de resolver sistemas con dos ecuaciones con dos incógnitas y coeficientes enteros, los estudiantes tienen problemas con los cálculos aritméticos y el manejo de los signos en el proceso de resolución (Rosainz, 2005).

[1] Información consultada en la página Web:
http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa/programa.pdf

Para el caso de la educación media superior, se ha tomado el plan de estudios de las preparatorias de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades[2] de la Universidad Nacional Autónoma de México para exhibir la continuidad de la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y cómo se propone abordar el contenido.

Son el primer y tercer semestre en donde se ubica el tema de la resolución de SEL. En el primer semestre se propone enseñar a resolver SEL de $2x2$ (dos ecuaciones con dos incógnitas) por medio de su gráfica (método gráfico), y por métodos algebraicos como los denominados suma y resta, sustitución e igualación. La variante para el tercer semestre según el plan de estudios es la enseñanza de SEL de $2x2$ y $3x3$ (tres ecuaciones con tres incógnitas), con la opción de presentar a los alumnos la representación gráfica de SEL de $3x3$. En este nivel educativo se tratan también los casos en que un sistema no tiene solución o tiene más de una solución.

Para el caso de la educación superior, tomamos como ejemplo a la ingeniería en energía de la división de ciencias básicas e ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa (UAMI). En el plan de estudios[3] aparece la asignatura denominada “Algebra Lineal” en el cuarto trimestre. El primer tema a enseñar es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss o eliminación gaussiana.

De todo lo anterior, en la formación escolar de un individuo, los sistemas de ecuaciones lineales son un tema recurrente y medular; sin embargo, la experiencia y las investigaciones (Cutz, 2005; Mora, 2001; Gómez, 2006) muestran que aún en el nivel superior persisten las dificultades con los cálculos aritméticos, e interpretaciones erróneas sobre conceptos como solución o sistema de

[2] Información consultada en la página Web:
http://www.cch.unam.mx/plandeestudios/index.php
[3] Información consultada en la página Web de la UAMI:
http://cbi.izt.uam.mx/transform.php?xml=datos_materia&licenciatura_id=5&clave=213255

ecuaciones lineales. Además del escaso o nulo análisis del funcionamiento del método de resolución utilizado; el cual regularmente se enseña como una receta para ser aplicada mecánicamente.

En resumen, el interés de este trabajo está centrado en la enseñanza conceptual de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior. En lo que sigue se formula el problema de investigación de este trabajo.

1.1.3 El problema de investigación.

Para Gómez (2006) “es un hecho conocido por los profesores de ingeniería, que los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales aparecen constantemente en las diferentes asignaturas. La eliminación gaussiana constituye la solución estándar de tales sistemas, que sin embargo ofrece dificultad a algunos alumnos por la aritmética fraccionaria que habitualmente resulta en su desarrollo.”; esta dificultad relacionada con los cálculos aritméticos en el proceso de resolución tiene efectos indeseables. Por un lado, hacen tedioso, repetitivo e insignificante al método de resolución. Y por otro, desvían la atención del estudiante sobre los conceptos inherentes al proceso de resolución como el de **sistemas equivalentes**. Además, los cálculos aritméticos se pueden considerar una barrera para plantear SEL por medio de aplicaciones reales (ver apartado 1.1.1) que sean significativas al alumno y motiven su estudio.

Dado que los cálculos aritméticos provocan dificultades a los alumnos, e inhiben al profesor a plantear SEL derivados de problemas reales evitando una enseñanza significativa y conceptual, conviene preguntarse qué podemos hacer al respecto. Evidentemente, existen otros problemas y dificultades en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, por el momento nuestro interés se centra en cómo apoyar la enseñanza de los SEL.

1.1.4 Pregunta de investigación.

De la problemática planteada surge la siguiente pregunta:

¿Cómo apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior aplicando el método de Gauss de tal forma que el cálculo aritmético no sea un obstáculo para la reflexión y análisis de los conceptos inherentes al proceso de resolución, así como para el planteamiento y resolución de SEL derivados de situaciones reales?

Una propuesta que responde parcialmente a la pregunta es precisamente apoyar la enseñanza por medio de la implementación de la tecnología en el aula; en este trabajo, el objetivo primordial es usarla para resolver SEL donde los cálculos aritméticos no causen problemas o dificultades tanto a profesores como a estudiantes en el proceso de resolución.

En este sentido, aprovechar las virtudes de la tecnología, como la reducción del tiempo; en nuestro caso, eliminar de la actividad del profesor y el alumno los cálculos aritméticos y su revisión en el proceso de resolución de un SEL, nos permitiría ganar tiempo, y desarrollar una enseñanza conceptual basada en la reflexión y el análisis del proceso de resolución de un SEL, que, en la enseñanza tradicional puede resultar una tarea compleja (e. g., plantear un SEL con coeficientes decimales o que se deriven de problemas reales). En este contexto, Pérez (2007) menciona: “es innegable que cada vez es mayor la disponibilidad de las calculadoras graficadoras, e incluso de las computadoras, por lo que actualmente son muchos los maestros que utilizan las representaciones gráficas y numéricas de las calculadoras con el fin de mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas…” (p. 5).

Ahora bien, el término tecnología representa a un conjunto de artefactos que facilitan algunas actividades de los humanos, por eso es conveniente acotar.

En este sentido, nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Qué herramienta tecnológica coadyuvaría a minimizar en la actividad de profesores y estudiantes los cálculos aritméticos en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales al aplicar el método de Gauss?

En el contexto educativo, las calculadoras y la computadora son herramientas tecnológicas a las que se recurren con frecuencia para apoyar la enseñanza de algún contenido matemático (Basurto, 2007; Mirón, 2000) y (Sánchez, 2008; Martínez, 2005; Moreno, 2003; Cuevas, 1994). Nosotros hemos elegido a la computadora como una herramienta potencial para atacar el problema educativo antes mencionado (ver apartado anterior).

Ahora bien, la interacción entre un humano y la computadora se da por medio de programas computacionales denominados *software*.

En el mercado existen cualquier cantidad de software para apoyar diferentes actividades profesionales: ingeniería, administración, contabilidad, etc., y desde luego, software de matemáticas como *Derive, Matlab, Maple, Mathematica*. La característica principal de éstos últimos es su capacidad para resolver distintos problemas casi de forma súbita, por ejemplo, determinar la derivada de $e^x senx$ ó resolver un SEL.

En matemáticas aplicadas dichos software son de gran ayuda. En la enseñanza de las matemáticas también lo pueden ser, sin embargo es necesario adecuarse a las propiedades, características y funciones del software, según sea el caso, para implementar su uso en el aula, tomando en cuenta que su propósito es el de resolver, no el de mostrar el proceso de resolución, elemento indispensable en este trabajo. Al respecto Pérez (2007) dice: “Si bien, existen programas profesionales de matemáticas que brindan oportunidades de hacer exploraciones matemáticas, estos fueron diseñados para realizar matemáticas y no con fines didácticos.”(p. 15).

También existe el denominado software libre, por ejemplo *Linear Algebra Toolkit*; este, en particular, se enfoca al proceso de resolución utilizando un objeto matemático más formal dentro de la teoría del álgebra lineal, me refiero a matriz. Objeto matemático, al que se puede llegar por medio de los sistemas de ecuaciones lineales de forma, digamos, natural. Lo anterior, no demerita este ambiente computacional, por el contrario, estimo la posibilidad de usarlo en una etapa posterior, después de trabajar y estudiar los SEL.

Es así como llegamos a la pregunta de investigación de este trabajo:

¿Es posible crear un ambiente computacional que se dirija al proceso de resolución de un SEL y no a la solución, que supervise el proceso utilizando el método de Gauss, facilitando los cálculos aritméticos?

1.1.5 Una propuesta didáctica.

Considero que, en la medida en que provea de una herramienta que facilite los cálculos aritméticos en el proceso de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales será posible lo siguiente:

a) Implementar una secuencia didáctica que plantee de inicio problemas de aplicación que se puedan modelar a través de SEL, sin preocuparse en los engorrosos y en algunos casos complejos cálculos aritméticos.

b) Enseñar a resolver SEL mediante el método de Gauss, revisando paso a paso las operaciones realizadas por el estudiante; lo cual le permitiría reflexionar sobre el proceso de resolución, y en consecuencia, abordar conceptos formales del álgebra lineal.

c) Proporcionar una herramienta que facilite la construcción de conceptos del álgebra lineal como independencia lineal, cambio de base, rango, etc.

Por otra parte, no existe en el mercado una herramienta que encierre estas características. Esto es, la creación de un ambiente computacional que se dirija al proceso y no a la solución, además de supervisar el proceso de resolución utilizando el método de Gauss, facilitando los cálculos aritméticos.

Por lo que nuestra propuesta es desarrollar y diseñar un ambiente computacional que parta de la premisa anterior; es decir, que sea una herramienta de apoyo para al profesor en su labor, donde los cálculos aritméticos no sean restricción para abordar distintos problemas que en una enseñanza tradicional no serían posibles de abordar. Donde el alumno enfoque su atención en la reflexión del método de Gauss, por lo tanto en el proceso de resolución; utilizar el tiempo para la reflexión y análisis de los conceptos inherentes a los sistemas de ecuaciones lineales y construir su conocimiento. Y en un segundo momento, iniciar la reflexión sobre los conceptos formales del álgebra lineal como matriz, determinante e inversa de una matriz, vector, dependencia e independencia lineal, combinación lineal y espacio vectorial.

Vale la pena mencionar, que principalmente hemos pensado principalmente en la enseñanza de SEL cuadrados, sin embargo, y adelantándome un poco, el ambiente computacional desarrollado en este trabajo no se restringe a este tipo de sistemas de ecuaciones lineales; es decir, se pueden resolver SEL rectangulares.

1.2 Antecedentes.

En las últimas cuatro décadas surgieron y consolidaron en el mundo grupos de investigación o instituciones dedicadas a estudiar los fenómenos y problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; como ejemplos tenemos al PME (*The International Group for the Psychology of Mathematics*

Education, DME (*Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav*), NCTM (National Council of Teacher of Mathematics), IREM (*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*), ILAS (*International Linear Algebra Society*), etc.

Es claro que esta problemática no sólo concierne a la matemática, pero es probablemente en esta donde más se acentúa, en cierta medida por la carga curricular en todos los niveles educativos del contenido matemático. Además, no hay ningún contexto de la vida que escape en mayor o menor medida a una aplicación de las matemáticas.

El álgebra lineal es uno de los contenidos matemáticos fundamentales que forman parte de la base de esta ciencia. A este campo de la matemática también le aquejan problemas derivados de la enseñanza-aprendizaje.

Diversas investigaciones muestran lo anterior; por ejemplo, en 1997 sale a la luz una recopilación de los trabajos más representativos sobre La enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal, la publicación es intitulada *L'enseigment de L'algèbre linéare en question*. Tres años después, se edita una versión en inglés intitulada *On the Teaching of Linear Algebra*.

Dicho texto se divide en dos partes; la primera, titulada "Análisis epistemológico de la génesis de la teoría de los espacios vectoriales" (Dorier, 2000). Y la segunda parte es llamada "Casos de enseñanza y aprendizaje". Esta segunda parte es en donde se recopilan investigaciones (en algunos casos estudios longitudinales) que datan de finales de los 80s, y ofrecen evidencia de las dificultades que estudiantes de licenciatura enfrentan con la teoría del álgebra lineal; así como de los problemas en su enseñanza.

1.2.1 El formalismo en el álgebra lineal.

Dentro del texto mencionado hay un trabajo denominado: "El obstáculo del formalismo en álgebra lineal" (Dorier *et al*, 2000). En términos generales se expondrán algunos detalles de esta investigación.

El trabajo es una investigación de tipo longitudinal, ya que se realizó desde 1987 hasta 1995. Los resultados de esta investigación se derivan de los análisis de *test* aplicados a estudiantes franceses en su primer año de universidad en diversas circunstancias; por ejemplo, haber tomado el curso de álgebra lineal o no. La principal conclusión del trabajo es que una enseñanza basada en definiciones, teoremas y la simbología inherente del álgebra lineal no permite a los alumnos acceder a los conceptos fundamentales del álgebra lineal y mucho menos comprenderlos.

Lo anterior me permite establecer que la introducción en un primer curso de álgebra lineal, didácticamente hablando, debería partir del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales tanto por su aplicación como por su conexión con ideas y conceptos básicos y fundamentales del álgebra lineal; sin embargo, tanto en cursos a nivel licenciatura como en libros especializados en la materia (Lang, 1976), se puede observar al estudio de los SEL como un tema relegado o ajeno a la teoría del álgebra lineal.

1.2.2 Una caracterización del pensamiento en álgebra lineal.

Otro trabajo interesante dentro de la publicación antes mencionada es el que lleva por título "Sobre algunos aspectos del pensamiento de estudiantes en álgebra lineal" (Sierpinska, 2000). En este trabajo la investigadora ofrece una caracterización del pensamiento del estudiante en álgebra lineal en tres modos: el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural.

En las palabras de Sierpinska:

> Si alguien está pensando sobre la posible solución de un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables por visualización de la posible posición relativa de tres planos en el espacio, él o ella esté en el modo sintético-geométrico. Si pensamos sobre el mismo problema en términos del posible resultado de una reducción por fila de una matriz 3x4, estamos en el modo analítico-aritmético. Pensando en términos de matrices singulares y no singulares podría ser un síntoma del modo analítico-estructural.

El ejemplo puede ser muy sugestivo; ya que, por un lado ejemplifica los tres modos de pensamiento en los que un estudiante puede estar inmerso dentro de un problema particular; pero por el otro, considero difícil que un estudiante comprenda los conceptos del álgebra lineal a partir del modo analítico-estructural sin antes haber formado los otros dos.

Esto también implica armonía entre los tres modos de pensar, es decir, una "coexistencia" como Sierpinska le llama. En este orden de ideas, se puede decir que en el estudio de los SEL es necesario formar y fortalecer en los estudiantes los dos primeros modos de pensamiento en el inicio del estudio del álgebra lineal.

Otros trabajos muestran (los cuales se detallan en el siguiente apartado) que en un primer curso de álgebra lineal es difícil encontrar propuestas donde se encuentren los tres modos de pensamiento, y por lo regular el más afortunado de los tres es el analítico-aritmético.

1.2.3 La enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales.

Las investigaciones anteriores ofrecen un panorama de los problemas inherentes a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, y en algunos casos a la creación de nueva teoría dentro de la didáctica de las matemáticas; como es el caso del trabajo de Sierpinska. Además, el álgebra lineal es un contenido matemático lo bastante amplio como para querer atacar o investigar todos los problemas relacionados con su enseñanza y aprendizaje. Por lo que es necesario partir de algún punto; en este sentido y de acuerdo con nuestro trabajo de investigación, revisamos algunos trabajos relacionados con los SEL.

En mayo de 1992 en la entonces sección de matemática educativa se presentó la tesis intitulada “Programa de apoyo para un curso de algebra lineal (Software de Apoyo en la Educación)” (Vázquez, 1992). Esta tesis se caracterizó por la creación de un software educativo para apoyar a estudiantes de ingeniería en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación del método de Gauss a la matriz aumentada del sistema.

Es necesario mencionar que la tesis se realizó en una época en donde no había amplia investigación en el campo de la enseñanza del álgebra lineal. En este sentido, puede denominarse a este trabajo, con sus reservas, pionero en el campo de la enseñanza del álgebra lineal con el uso de tecnología en México. La idea principal del trabajo gira en torno a eliminar las operaciones aritméticas entre los coeficientes de las ecuaciones en el proceso de resolución; sin embargo, parte de un objeto del álgebra lineal un tanto más formal: matriz.

Unos años más tarde. Se presenta una tesis que aborda la problemática en torno al estudio de los SEL, que lleva por título “Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas” (Mora, 2001). En el trabajo se establece una secuencia didáctica en torno al concepto de solución de los SEL; su marco teórico en gran medida se sustenta en la caracterización de Sierpinska de los modos de pensamiento del estudiante en álgebra lineal.

Para llevar a cabo el diseño de la secuencia, parte de una fase exploratoria, en la que, presupone que en la enseñanza tradicional de los SEL se fortalece el pensamiento analítico-aritmético y en tal caso, dicha fase exploratoria le permitiría conocer las habilidades y estrategias de los estudiantes dentro este modo de pensamiento.

La hipótesis central de este trabajo se basa en lograr que el estudiante identifique el objeto matemático en por lo menos dos de los tres modos de razonamiento (analítico y geométrico), y así, transitar conscientemente entre ellos para lograr una mejor comprensión del concepto.

Una conclusión de este trabajo, es que, efectivamente en la enseñanza tradicional de los SEL se beneficia el modo aritmético-analítico. Así como, la necesidad de fomentar el modo sintético-geométrico; sin embargo, considero que en el estudio de los SEL este último modo de pensamiento puede verse agotado, en relación a las representaciones geométricas de SEL con más de tres incógnitas. Resulta importante buscar o diseñar alternativas didácticas que fomenten cada uno de los modos de pensamiento pero también, si llegase a darse la carencia de alguno de ellos, ésta no deberá ser un obstáculo en la reflexión y comprensión de los SEL.

En diciembre de 2005 se presentó la tesis de maestría intitulada “Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones lineales” (Cutz, 2005). El propósito de este trabajo fue la observación de los fenómenos relacionados con la representación geométrica del concepto solución por parte de alumnos de licenciatura; en particular, los SEL de dos y tres variables. Así como el pasaje entre ambos registros de representación, el geométrico y el analítico. Este trabajo también se basa en la caracterización del pensamiento del estudiante en álgebra lineal de Sierpinska.

La tesis es muy ilustrativa en las dificultades que los alumnos tienen en pasar del registro geométrico al analítico y viceversa en los SEL. Así como las dificultades por parte de los estudiantes con los SEL de dimensión 2x3 y 3x3 para interpretar su representación geométrica en los tres casos posibles en que un SEL puede caer; es decir, cuando el SEL tiene una única solución; cuando no tiene solución; y cuando tiene infinitas soluciones.

Lo anterior, según Cutz se debe a que el estudiante aún no tiene claro el concepto de sistema y su solución. Comparto esta conclusión, pero no sólo por el deficiente pasaje entre los tres modos de pensamiento de los estudiantes, sino también, por una deficiencia en la reflexión relacionada con el proceso de resolución de los SEL, originada, desde mi punto de vista, por la falta de comprensión del método de resolución.

Desde mi punto de vista, los SEL son una estructura de conceptos de difícil asimilación. Contrario a la visión que mucha gente tiene acerca de los SEL, se requiere un estudio detallado de éstos.

Revisamos también una tesis de doctorado denominada “Representación de conceptos de análisis estructural con álgebra lineal” (Gómez, 2006). En este trabajo se propone un método de resolución alternativo al método Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales planteados a través del análisis de estructuras que son “un mecanismo diseñado y construido para soportar cargas y resistir fuerzas, como puentes, edificios, muros, presas, torres, etcétera y deben cumplir con requisitos de funcionalidad y seguridad” (Gómez, 2006, p.3).

El método alternativo, denominado DGO, surge debido a la dificultad que los estudiantes tienen con la aritmética fraccionaria al resolver un SEL utilizando el método de Gauss. El método DGO maneja la aritmética entera por medio del uso de determinantes de segundo orden para llevar a cabo el proceso de eliminación.

Lo anterior es la principal aportación del método, y que desde luego resuelve la dificultad de trabajar con la aritmética fraccionaria. Para efectos prácticos, el método DGO es una buena herramienta para el estudiante que pretende resolver un problema real. Para efectos didácticos, es una alternativa que debe coexistir con el método de Gauss, en ningún momento sustituirlo; finalmente el sustento y justificación del método DGO es el método de Gauss.

Para concluir este capítulo, revisamos someramente la tesis de maestría titulada: “Nuevas tecnologías y diseño de ambientes virtuales” (Pérez, 2007). El trabajo de investigación que se reporta en esta tesis, ofrece un panorama general del estado que guarda el uso de las nuevas tecnologías en la educación; sobre todo el uso de la computadora como herramienta que ayuda generar aprendizaje. De acuerdo con el autor, el objetivo de su investigación se centra en el diseño de programas y actividades en la computadora basándose tanto en las investigaciones como en las perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas.

Desde mi punto de vista, lo anterior es una característica importante en el desarrollo de ambientes computacionales. El diseño de un ambiente computacional debe tomar en cuenta las aportaciones de las investigaciones relacionadas con los problemas en la enseñanza y aprendizaje del tema de interés, así como sustentar su diseño en una perspectiva didáctica. Vale la pena señalar que el autor desarrollo actividades para mejorar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales a partir de la perspectiva teórica de Sierpinska (2000) sobre los tres modos de pensamiento, sin embargo, su propuesta está limitada a SEL de 2×2, lo que de ninguna manera demerita su valor.

En este apartado se pueden observar diferentes trabajos de investigación relacionados con los SEL, desde las interpretaciones erróneas de estudiantes en conceptos como sistema de ecuaciones lineales y solución, pasando por propuestas alternativas basadas en el diseño y creación de ambientes computacionales, hasta la elaboración de un método alternativo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Con esta información, queda claro que la propuesta del presente trabajo será una aportación más que resuelva parcialmente el problema de la enseñanza y aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales, cuyo propósito es aportar elementos didácticos para como en el desarrollo de una enseñanza conceptual, y particularmente rescatar uno de los conceptos más importantes en el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales: sistemas equivalentes.

CAPÍTULO 2 CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS, TEÓRICAS Y DIDÁCTICAS

> Lo propio del método filosófico está en que avanza en contrastes para ir desde lo general a lo particular; el método matemático en cambio avanza desde los conceptos más simples hacia los más complejos, adquiriendo mediante el enlace de lo particular, nuevos conceptos más generales.
>
> Hermann Grassmann

En este capítulo se presenta una breve revisión del contenido matemático relacionado con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss. Así como, una breve descripción de la relación entre las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales. Por otra parte, se revisan y describen algunas teorías, enfoques y propuestas didácticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, como las aportaciones teóricas de Brousseau (2000) en didáctica de las matemáticas, la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1998) y se concluye esta parte del capítulo con la descripción de una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas de Cuevas & Pluvinage (2003). Por último, revisamos algunos trabajos relacionadas con la implementación y uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas, particularmente la creación y uso del *software* educativo (Cuevas, 1998; Mochón, 2006; Nielsen, 2003).

2.1 Los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

El propósito de este trabajo es diseñar y desarrollar un software educativo que apoye a la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss (o eliminación gaussiana). Para que de esta manera, promueva una mejor comprensión y entendimiento de los conceptos matemáticos implícitos al resolver un SEL en alumnos de nivel superior (licenciatura o ingeniería), que es donde se ubica el primer curso de álgebra lineal. A continuación inicio este capítulo presentando una breve revisión del contenido matemático relacionado con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

2.1.1 Definición de sistemas de ecuaciones lineales y solución.

En el libro *Elements of Algebra* de Euler (edición traducida por John Hewlett, 1984), se considera a una ecuación de primer grado como:

> Aquella donde las cantidades desconocidas no tienen potencias mayores que la primera y no hay productos de dos o más cantidades desconocidas y estas ecuaciones tienen la forma:
>
> $$ax + by + cz = d$$
>
> Donde a, b, c, d son números conocidos y x, y, z las cantidades desconocidas. (p. 206)

Actualmente a este tipo de ecuación se le denomina *ecuación lineal*. La “definición” de Euler permanece hasta nuestros días vigente, con pequeños cambios como llamar variable o incógnita a la cantidad desconocida y coeficientes a los números conocidos, además de extenderlos a elementos de cualquier *campo* (Johnson, 1969).

La expresión algebraica general de una ecuación lineal en n variables $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ es de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$$

Se denomina *conjunto solución* de una ecuación lineal a la colección de todos los valores de las variables que satisfagan a la ecuación y lo representamos por $S = \{(s_1, s_2, ..., s_n) \mid a_1s_1 + a_2s_2 + ... + a_ns_n = b\}$.

Si multiplicamos un escalar $\lambda \neq 0$ a la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$ obtenemos la ecuación:

$$\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \cdots + \lambda a_{n-1}x_{n-1} + \lambda a_nx_n = \lambda b$$

Cuyo conjunto solución es el mismo de la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b$.

Un número finito de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ forman un *Sistema de Ecuaciones Lineales* (SEL). Usualmente, se dice que m ecuaciones lineales de n variables forman un sistema de ecuaciones lineales de *orden* $m \times n$ y es expresado algebraicamente como:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} S_{m\times n}$$

Donde los a_{ij} y b_i (con $i = 1...m$ y $j = 1...n$) son elementos de $\mathbb{R}$ (números reales).

Esta notación la introdujo el matemático alemán del siglo XVII Gottfried Leibniz (Bashmakova *et al*, 2000), en donde el subíndice del coeficiente, visto como un par de números, identifica al coeficiente tanto con el número de ecuación como con el número de incógnita.

Uno de los propósitos (hay que recordar que su estudio también nos permite construir conceptos formales del álgebra lineal) de estudiar a los SEL es: hallar su *solución*; es decir, resolver el sistema. La resolución de un SEL es el proceso por el cual encontramos el valor o los valores de las variables que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones del sistema. De esta forma llegamos a la siguiente definición:

Definición 1: Se dice que $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ es solución del sistema S_{mxn}

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} S_{m\times n}$$

cuando cada ecuación del sistema se verifica al sustituir x_i por s_i con $i = 1,..,n$.

Esta definición implícitamente establece que al no haber valores de las variables que satisfagan simultáneamente a todas y cada una de las ecuaciones del sistema, entonces no tiene solución. Otro caso es cuando existe más de una solución para el sistema; entonces el sistema tiene múltiples soluciones, en realidad una infinidad de soluciones. En este sentido, al resolver un SEL se cumple alguno de los siguientes tres casos:

i) Tiene una única solución.
ii) No tiene solución.
iii) Tiene un número infinito de soluciones.

Examinando el sistema de ecuaciones lineales más elemental, cuyo orden es 1×1 y tiene la forma: $ax = b$; surge alguno de los tres casos mencionados anteriormente para ciertos valores de a y b, como se muestra a continuación:

i) Una solución, cuando $a \neq 0$ y b es cualquier valor.
ii) Sin solución, cuando $a = 0$ y $b \neq 0$.
iii) Infinitas soluciones, cuando $a = 0$ y $b = 0$.

Ahora bien, los sistemas que tienen el mismo número de ecuaciones y de incógnitas (como el anterior) son llamados comúnmente *cuadrados*. Cabe señalar que en este trabajo principalmente se abordará la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de orden $n \times n$ (o cuadrados) como una introducción al estudio de los SEL y en una etapa posterior se extenderá a sistemas rectangulares en general.

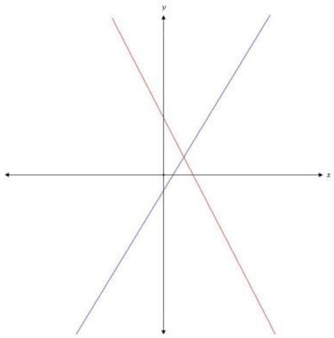
Geométricamente la ecuación $ax = b$ se puede representar como un punto sobre la recta numérica (cuando tiene una solución) o por la misma recta numérica (cuando tiene una infinidad de soluciones). Las ecuaciones lineales de dos y tres variables tienen por gráfica a una recta y un plano respectivamente; aquellas ecuaciones lineales de más de tres variables, no se pueden representar geométricamente y usualmente se les denota con el nombre genérico de *hiperplanos*.

En este sentido, el SEL de orden 2×2:

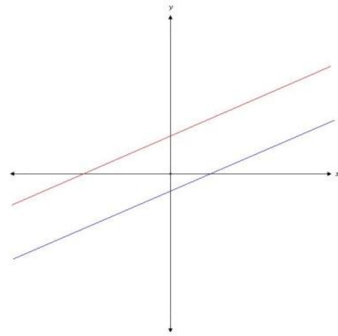
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\} S_{2\times 2}$$

Tiene cierta representación geométrica según sea el caso; es decir, cuando $S_{2\times 2}$ a) tiene una única solución tenemos dos rectas que se intersecan en un sólo punto llamado *punto de intersección*; b) cuando no tiene solución tenemos dos rectas que no se intersecan; es decir, son paralelas; y c) cuando tiene infinitas soluciones tenemos dos rectas que se intersecan en todos sus puntos; es decir, tenemos únicamente una recta.

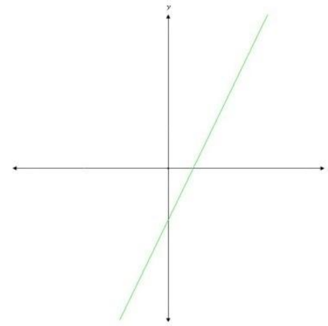
A continuación se muestran las diferentes representaciones geométricas de $S_{2\times 2}$:



a) Una solución.



b) Sin solución.

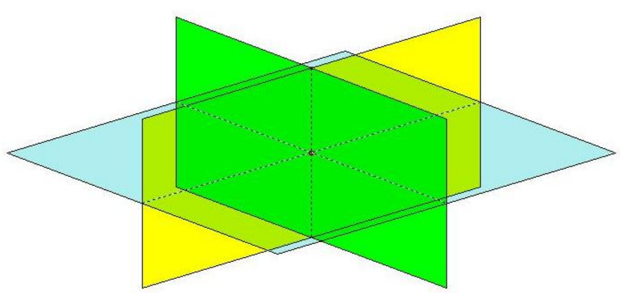


c) Infinidad de soluciones.

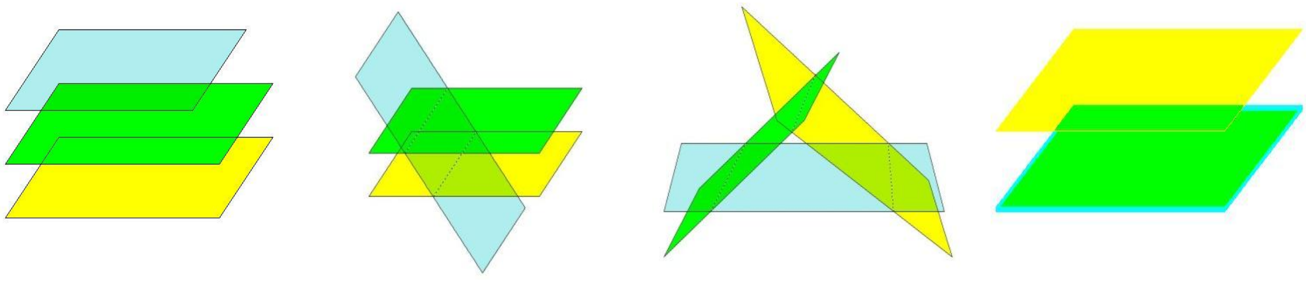
Algo parecido sucede con el SEL de orden 3×3:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\} S_{3\times 3}$$

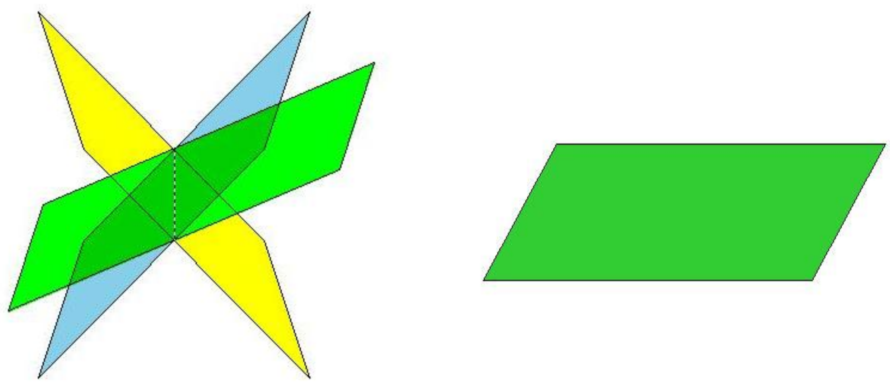
Pero ahora, la representación geométrica del sistema la conforman tres planos en diferentes posiciones en el espacio tridimensional según sea el caso; es decir, cuando $S_{3\times 3}$ a) tiene una solución los tres planos se intersecan de tal forma que tienen únicamente un punto en común; b) cuando no tiene solución los tres planos no tienen una intersección común; y c) cuando tiene infinitas soluciones tenemos tres planos que se intersecan en una recta o son un mismo plano. Estas son las diferentes representaciones geométricas:



a) Una solución.



b) Sin solución.



c) Infinitas soluciones.

Con relación a los tres casos en donde un sistema de ecuaciones lineales puede ubicarse, Cutz (2005) menciona “En la enseñanza tradicional… se ha favorecido la enseñanza de sistemas de ecuaciones que presentan solución única y se abandonan aquellos sistemas cuya solución es infinita o aquellos que no tienen solución, y si se abordan, se hace de manera limitada o superficial.” (p. 6). Desde mi punto vista, también es necesario que la enseñanza de los SEL promueva la reflexión sobre el método de resolución que será utilizado y en particular, aporte los suficientes elementos que permitan comprender aquellas ideas y conceptos matemáticos que constituyen la base del método; pasa después, convencerse del por qué funciona el método y bajo qué circunstancias parece no funcionar.

Ya que el propósito de estudiar a los sistemas de ecuaciones lineales es determinar su solución; para cumplirlo, es necesario establecer un método eficiente y sistemático para resolverlos, basado en la idea de la transformación de un sistema dado, en otro sistema en donde sea más fácil determinar el valor o los valores de las variables. Esta idea de transformar el sistema en otro, es la que se aplica en los métodos tradicionales (e. g., el método de suma y resta) que se enseña a partir del segundo año de educación secundaria para resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden 2×2 y 3×3, pero muy pocas veces se analiza y valida esta idea.

2.1.2 Sistemas equivalentes.

Para validar y sustentar la posibilidad de transformar un SEL en otro, requerimos de la siguiente definición sobre sistemas *equivalentes*:

Definición 2: Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen equivalentes, si toda solución del primer sistema satisface al segundo sistema y viceversa. También se consideran equivalentes dos sistemas con las mismas incógnitas que no tienen solución.

El principal objetivo del método de Gauss es transformar un SEL dado en otro equivalente, y que de este último, sea más fácil determinar el valor o los valores de las variables como incógnitas. Específicamente, transformar un SEL en otro de forma escalonada.

Un SEL en las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ de forma escalonada es aquel en donde la primera ecuación está en términos de $x_1, x_2, ..., x_n$ y las ecuaciones restantes deberán cumplir que:

i) El coeficiente de x_1 es cero.

ii) Si la ecuación i está en términos de $x_k, ..., x_n$ entonces la ecuación j está al menos en términos de alguna de las variables $x_{k+1}, ..., x_n$ con $i > j$

Por ejemplo, el siguiente sistema de orden 3×3 tiene forma escalonada:

$$\begin{array}{rrr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{33}x_3 = b_3 \end{array}$$

Comúnmente el sistema de ecuaciones lineales anterior es llamado SEL de *forma escalonada triangular*. Observen que resolver este sistema es una tarea sencilla; ya que, basta con resolver la última ecuación para encontrar el valor de tercera variable y si no hay indeterminación, en una sustitución regresiva la solución del sistema. Más adelante se dará una explicación detallada de lo anterior.

Retomando la idea de transformar un sistema en otro equivalente de forma escalonada, es natural preguntarse ¿cómo hacerlo? y para esto necesitamos de las *Operaciones Elementales*, que son el alma del método:

1ª operación: Intercambio (o permutación) de ecuaciones: $Ecu.i \leftrightarrow Ecu.j$.

2ª operación: Multiplicación de una ecuación por un escalar $\lambda \neq 0$ (ver pág. 23): $Ecu.i \rightarrow \lambda(Ecu.i)$.

3ª operación: Sumar a una ecuación un múltiplo de otra: $Ecu.i \rightarrow Ecu.i + k(Ecu.j)$.

La principal característica de las operaciones elementales es que su aplicación asegura la transformación de un SEL en otro equivalente. Esto se resume en el siguiente teorema:

Teorema: La aplicación de cualquiera de las operaciones elementales transforma un SEL en otro equivalente.

Para demostrarlo, redefinimos la solución de un SEL en términos de los conjuntos solución de las ecuaciones del sistema; la nueva definición es equivalente a la dada anteriormente y queda así:

Definición 3: Sean $S_1, S_2, ..., S_m$ los respectivos conjuntos solución de las ecuaciones de un SEL de orden $m \times n$. El conjunto intersección $S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_m$ es el conjunto solución del sistema y cumple con alguno de los siguientes tres casos:

i) Contiene un único elemento que es la solución del sistema.
ii) Es el conjunto vacío y por lo tanto el sistema no tiene solución.
iii) Contiene un número infinito de elementos que son solución del sistema.

Demostración del teorema:

Sin pérdida de generalidad, tomamos al SEL $S_{2\times 2}$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad ......Ecuación\, 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad ......Ecuación\, 2 \end{aligned}$$

Y se aplicarán por separado cada una de las operaciones elementales al sistema para probar que el SEL en que se transforma es equivalente.

Sean $X_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = b_1\}$ y $X_2 = \{(\beta_1, \beta_2) \mid a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 = b_2\}$ los respectivos conjuntos soluciones de las ecuaciones 1 y 2 de $S_{2\times 2}$, por lo tanto $X_1 \cap X_2$ es el conjunto solución del sistema.

a) Aplicamos la primera operación elemental (permutar dos ecuaciones) al sistema; es decir, permutamos las ecuaciones 1 y 2 de $S_{2\times 2}$, y obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \end{aligned}\right\} S'_{2\times 2}$$

El conjunto solución de este sistema es $X_2 \cap X_1$. De acuerdo con la ley conmutativa del álgebra de conjuntos $X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_1$; entonces, toda solución de $S_{2\times 2}$, es solución de $S'_{2\times 2}$ y viceversa, por lo tanto, concluimos que $S_{2\times 2}$ y $S'_{2\times 2}$ son equivalentes.

b) Aplicamos la segunda operación (multiplicar por un escalar $\lambda \neq 0$ cualquier ecuación) al sistema $S_{2\times 2}$. Sin pérdida de generalidad, multiplicamos por λ a la ecuación 2 del sistema $S_{2\times 2}$ y obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 &= b_1 \\ \lambda a_{21}x_1 + \lambda a_{22}x_2 &= \lambda b_2 \end{aligned}\right\} S''_{2\times 2}$$

Sea $X_1 \cap X''_2$ el conjunto solución del sistema $S''_{2\times 2}$ donde $X''_2 = \{(\beta''_1, \beta''_2) \mid \lambda a_{21}\beta''_1 + \lambda a_{22}\beta''_2 = \lambda b_2\}$. Entonces, debemos demostrar que $X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X''_2$ para probar que $S_{2\times 2}$ y $S''_{2\times 2}$ son equivalentes; para ello, basta probar que $X_2 = X''_2$.

Sea $(\beta_1, \beta_2) \in X_2$, luego $a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 = b_2$. Al sustituir (β_1, β_2) en la ecuación 2 de $S''_{2\times 2}$ se tiene que:

$$\lambda a_{21}\beta_1 + \lambda a_{22}\beta_2 = \lambda b_2$$

Factorizando λ del miembro izquierdo de la ecuación tenemos que:
$\lambda\left(a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2\right) = \lambda b_2$ entonces $\lambda(b_2) = \lambda b_2$; por lo tanto $(\beta_1, \beta_2) \in X''_2$ y de esta manera $X_2 \subset X''_2$.

Ahora, sea $(\beta''_1, \beta''_2) \in X''_2$ entonces $\lambda a_{21}\beta''_1 + \lambda a_{22}\beta''_2 = \lambda b_2$. Factorizando λ del miembro izquierdo de la ecuación anterior y después, cancelándola obtenemos que: $a_{21}\beta_1'' + a_{22}\beta_2'' = b_2$; por lo tanto $(\beta_1'', \beta_2'') \in X_2$ entonces $X_2'' \subset X_2$. En consecuencia $X_2 = X_2''$ por lo tanto $S_{2\times 2}$ y $S_{2\times 2}''$ son equivalentes.

c) Aplicamos la tercera operación (sumar a una ecuación un múltiplo de otra) al sistema. Sin pérdida de generalidad, sumamos el producto por k de la ecuación 1 a la ecuación 2 y obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \qquad\qquad a_{12}x_2 = b_1 \\ (a_{21}+ka_{11})x_1 + (a_{22}+ka_{12})x_2 = b_2 + kb_1 \end{array}\right\} S_{2\times 2}^{\circ}$$

Sea $X_1 \cap X_2^{\circ}$ el conjunto solución del sistema $S_{2\times 2}^{\circ}$ donde $X_2^{\circ} = \{(\beta_1^{\circ}, \beta_2^{\circ}) \mid (a_{21}+ka_{11})\beta_1^{\circ} + (a_{22}+ka_{12})\beta_2^{\circ} = b_2 + kb_1\}$. Por demostrar que $X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_2^{\circ}$.

Sea $(\alpha_1, \alpha_2) \in X_1 \cap X_2$ y lo sustituimos en la ecuación 2 de $S_{2\times 2}^{\circ}$ para obtener que:

$$(a_{21}+ka_{11})\alpha_1 + (a_{22}+ka_{12})\alpha_2 = b_2 + kb_1$$

Se rescribe la ecuación como sigue:

$$(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2) + k(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2) = b_2 + kb_1$$

Ya que $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = b_2$ y $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = b_1$ entonces $(b_2) + k(b_1) = b_2 + kb_1$ por lo tanto $(\alpha_1, \alpha_2) \in X_1 \cap X_2^{\circ}$.

Ahora, sea $(\beta_1^{\circ}, \beta_2^{\circ}) \in X_1 \cap X_2^{\circ}$ entonces $(a_{21}+ka_{11})\beta_1^{\circ} + (a_{22}+ka_{12})\beta_2^{\circ} = b_2 + kb_1$. Se rescribe la ecuación anterior como sigue:

$$a_{21}\beta_1^{\circ} + a_{22}\beta_2^{\circ} + k(a_{11}\beta_1^{\circ} + a_{12}\beta_2^{\circ}) = b_2 + kb_1$$

Y como $(\beta_1^{\circ}, \beta_2^{\circ}) \in X_1$ entonces $a_{11}\beta_1^{\circ} + a_{12}\beta_2^{\circ} = b_1$; por lo tanto:

$$a_{21}\beta_1^{\circ} + a_{22}\beta_2^{\circ} + kb_1 = b_2 + kb_1$$

Transponemos el término kb_1 y obtenemos que $a_{21}\beta_1^\circ + a_{22}\beta_2^\circ = b_2$; por lo tanto $(\beta_1^\circ, \beta_2^\circ) \in X_2$ entonces $(\beta_1^\circ, \beta_2^\circ) \in X_1 \cap X_2$. En consecuencia, $X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_2^\circ$ por lo tanto $S_{2\times 2}$ y $S_{2\times 2}^\circ$ son equivalentes.■

Otra forma de establecer la equivalencia entre sistemas es por medio de la *combinación lineal de las ecuaciones* del sistema original (e. g., Filloy, 1970, pp. 32-34) y de donde las operaciones elementales parecen surgir de una forma más natural. La prueba del teorema anterior es la misma.

Con base en las operaciones elementales y su relación con la equivalencia entre sistemas, estamos en condiciones de exponer someramente en qué consiste el método de Gauss para resolver sistema de ecuaciones lineales; en términos generales consiste en una aplicación sucesiva de las operaciones elementales para transformar el SEL inicial en otro sistema equivalente con forma escalonada, para después, utilizar una sustitución regresiva y obtener el valor o los valores de las variables correspondientes. De esta forma, la solución del sistema escalonado será a la vez, la solución del sistema original, de acuerdo con el teorema anterior.

2.1.3 Método de Gauss y sus variantes.

En lugar de definir el método de Gauss, lo ejemplificaremos y posteriormente discutiremos las posibles variantes.

Ejemplo 1: Resolver el SEL de orden 3×3 (al sistema inicial se le denomina *Sistema Original*):

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 &= -9 \end{aligned}\right\} SO_{3\times 3}$$

Paso 1. Examinar si el primer coeficiente de la ecuación 1 es distinto de cero. De ser así, se elige y se le denomina *pivote* (el caso contrario será examinado después). En este caso su valor es 2.

Paso 2. Eliminar la variable x_1 de las ecuaciones que están debajo de la ecuación que contiene el pivote. Primero, eliminamos a x_1 de la ecuación 2 del sistema original $SO_{3\times3}$. Se hace lo siguiente: multiplicamos a la ecuación 1 por $-\left(-3/2\right)$ y el resultado lo sumamos a la ecuación 2; es decir, aplicamos la tercera operación elemental a $SO_{3\times3}$ con $k = 3/2$ y obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3 \\ 0x_1 - 7/2\, x_2 - 1/2\, x_3 &= -9/2 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Que es igual a:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3 \\ - 7/2\, x_2 - 1/2\, x_3 &= -9/2 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 &= -9 \end{aligned}\right\} SE_1$$

Ahora, eliminamos a x_1 de la ecuación 3 de SE_1 aplicando la tercera operación elemental de la siguiente manera: $Ecu3 \to Ecu3 + k(Ecu1)$ con $k = -5/2$. Y se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3 \\ - 7/2\, x_2 - 1/2\, x_3 &= -9/2 \\ 11/2\, x_2 - 7/2\, x_3 &= -3/2 \end{aligned}\right\} SE_2$$

Nos olvidamos momentáneamente de la ecuación 1 de SE_2 para fijarnos únicamente en las ecuaciones 2 y 3, que forman, digamos, un sistema de orden 2×2:

$$\begin{aligned} -\tfrac{7}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -\tfrac{9}{2} \\ \tfrac{11}{2}x_2 - \tfrac{7}{2}x_3 &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Y procedemos a aplicar los pasos 1 y 2. Primero, examinamos el coeficiente de x_2 en la ecuación 2 y como es igual a $-\tfrac{7}{2}$, se elige como pivote y eliminamos a x_2 de la ecuación 3; de esta manera obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3 \\ -\tfrac{7}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -\tfrac{9}{2} \\ -\tfrac{60}{14}x_3 &= -\tfrac{120}{14} \end{aligned}\right\} SE_3$$

Observamos que éste sistema equivalente al sistema original $SO_{3\times 3}$ tiene una forma escalonada triangular, en consecuencia, finaliza el proceso de eliminación y lo siguiente, es determinar los valores de x_1, x_2, x_3.

Paso 3. Aplicar la sustitución regresiva al sistema escalonado para obtener el valor o los valores de las variables. Primero, resolvemos la ecuación 3 del sistema SE_3, la cual es más fácil de resolver y se hace despejando a x_3. De esta manera obtenemos que $x_3 = 2$.

Ahora, sustituimos el valor de x_3 en la ecuación 2 de SE_3 para encontrar el valor de x_2:

$$-\tfrac{7}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}(2) = -\tfrac{9}{2} \;\rightarrow\; -7x_2 = -7$$

De la ecuación $-7x_2 = -7$ se concluye que $x_2 = 1$. Por último, sustituimos los valores de x_3 y x_2 en la ecuación 1 de SE_3. De esta manera, obtenemos que $x_1 = -1$.

La terna $(x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2)$ es la solución del sistema $SO_{3\times 3}$ y es única. De esta manera finaliza este paso y en general el proceso de resolución, ya que se ha encontrado la solución del sistema.

Ahora, para comprobar que la solución encontrada es solución del sistema original (por la posibilidad de una equivocación aritmética), verificaremos que efectivamente $(x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2)$ es solución del sistema; aunque, como se dijo anteriormente, el método de Gauss garantiza que el valor o los valores encontrados, para el sistema escalonado, son solución del sistema original. Para verificar, basta con sustituir a $(x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2)$ en cada una de las ecuaciones de $SO_{3\times 3}$, tal como se muestra a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2(-1)-3(1)+\ (2)=-3 \\ -3(-1)+\ (1)-2(2)=0 \\ 5(-1)-2(1)-\ (2)=-9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2-3+2=-3 \\ 3+1-4=0 \\ -5-2-2=-9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3=-3 \\ 0=0 \\ -9=-9 \end{array}\right\}$$

Efectivamente, se comprueba que $(x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2)$ satisface a cada ecuación del sistema $SO_{3\times 3}$; es lo que esperábamos.

El ejemplo anterior nos permite observar la eficacia y eficiencia del pivote en el proceso de resolución de un SEL. Con el afán de no perder la línea discursiva, se dice que un pivote es aquel coeficiente $a_{ij} \neq 0$ de un SEL de orden $m \times n$, por medio del cual y junto con la aplicación sucesiva de la tercera operación elemental es posible eliminar la variable x_j de las $m-i$ ecuaciones debajo de la $Ecu.i$.

La estructura del método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales es la propia de un *algoritmo* formado únicamente por tres pasos; donde el segundo paso está enfocado a la eliminación de variables y el último, totalmente enfocado a resolver el sistema por medio de una sustitución regresiva. Además el método de Gauss ilustrado, es el algoritmo que menos operaciones aritméticas requiere para obtener la solución de un SEL (Strang, 1982, p.4). En lo siguiente abordaremos algunas de las posibles variantes del método.

Recordemos que el propósito de la eliminación es transformar un SEL en otro con forma escalonada. Sin embargo, en el proceso pueden resultar algunas variantes como las siguientes: Si al examinar el primer coeficiente de la primera ecuación, resulta ser cero; en tal caso, remediamos la situación aplicando la primera operación elemental; es decir, permutamos la ecuación con otra donde el primer coeficiente (de x_1) sea diferente de cero. Pero como el proceso de eliminación es iterativo, esta situación puede presentarse en momentos subsecuentes, en tal caso, se procederá a permutar bajo las condiciones antes mencionadas.

A manera de ejemplo resolvamos el sistema:

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

De acuerdo con el método, si el coeficiente de x_1 de la ecuación 1 es igual a 0 entonces no puede ser pivote. Debido a esta imposibilidad, procedemos a aplicar el criterio anterior; primero buscamos una ecuación en el sistema donde el coeficiente de x_1 sea distinto de cero.

Al examinar las ecuaciones 2 y 3 determinamos que ambas son candidatas para ser permutadas con la ecuación 1, ya que, el coeficiente de x_1 en la ecuación 2 es 1 y en la ecuación 3 es 2. Sin ninguna razón más que la anterior, elegimos a la ecuación 2 como también pudiéramos haber elegido a la ecuación 3 para permutarla con la ecuación 1. Así que, aplicando la primera operación elemental entre las ecuaciones 1 y 2, obtenemos el sistema equivalente:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}\right\} S_2$$

Continuando con el proceso de eliminación, procedemos a eliminar a x_1 de las ecuaciones 2 y 3; en realidad, sólo hay que eliminarla de la ecuación 3. Para esto, aplicamos la tercera operación elemental de la siguiente manera:

$$Ecu3 \to Ecu3 + k(Ecu1) \text{ con } k = -2$$

Y se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

El proceso de eliminación finaliza aquí, ya que, los coeficientes de la ecuación 3 son todos cero. De esta manera el sistema queda así:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} S_3$$

Hay que señalar que el sistema equivalente tiene una forma escalonada no triangular. Ahora el enigma es, cómo aplicar la sustitución regresiva a este sistema si tan sólo consta de dos ecuaciones lineales y ninguna de ellas tiene la forma $ax = b$.

Esta situación provoca otra variante en el método y lo que procede es asignar a una o a más de una variable, valores arbitrarios; es decir, una o varias variables serán *variables libres*. Para el sistema equivalente anterior, elegimos a x_3 como la variable libre que tomará valores en los números reales (más adelante veremos el caso en que más de una variable es libre); esto implica que el sistema tiene una infinidad de soluciones. Desde luego, que lo sigue es determinar la forma de las soluciones.

Siendo x_3 la variable libre, procedemos a despejar a x_2 de la ecuación $x_2 - 3x_3 = 4$. De esta manera obtenemos que $x_2 = 3x_3 + 4$. Este valor lo sustituimos en la ecuación 1 y obtenemos que $x_1 = x_3 + 3$. Se observa que la solución general del sistema está en términos de x_3, cuya forma es: $(x_3 + 3, 3x_3 + 4, x_3)$ con x_3 un número real.

A manera de ejemplo tomamos $x_3 = 0$, luego $(3,4,0)$ es una solución del sistema. Otra solución del sistema es $(0,-5,-3)$ cuando $x_3 = -3$.

Otra variante del método es cuando debajo del pivote tenemos ceros, por lo tanto no hay nada que eliminar y en consecuencia, no es necesario pasar al paso 2 del método y lo que sigue, es repetir el paso 1 partiendo de la siguiente ecuación, tomando en cuenta que está situación puede repetirse. Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 5x_2 - x_3 &= 9 \\ x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

El pivote es 2 y debajo de él tenemos únicamente coeficientes igual a cero. Por consiguiente, no hay nada que eliminar y repetimos el paso 1 con la siguiente ecuación; donde 5 es el pivote y el coeficiente debajo de él es 1; por lo tanto el proceso de resolución sigue su curso normal.

Ahora veamos un ejemplo en donde más de una variable es libre. Aplicamos el método al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 12 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 20 \end{aligned}$$

El pivote es 2. Para eliminar a x_1 de la ecuación 2 se emplea la operación $Ecu2 \rightarrow Ecu2 + k(Ecu1)$ con $k = -3/2$ y para eliminar a x_1 de la ecuación 3 se emplea $Ecu3 \rightarrow Ecu3 + k(Ecu1)$. El sistema equivalente que resulta es:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

El proceso de eliminación finaliza. Observen que las dos últimas ecuaciones tienen coeficientes y términos independientes igual a cero; cualquier valor de las variables es solución de estas ecuaciones. Esto es importante, ya que nos dice que el sistema tiene infinitas soluciones.

Ya sabemos que el sistema tiene infinitas soluciones pero ¿cómo son? Para esto tomamos a x_2 y x_3 como variables libres; así, las soluciones del sistema tienen la forma: $(4 - 2x_2 - 3x_3,\ x_2,\ x_3)$ con x_2 y x_3 números reales.

Strang (1982) dice que "En la mayoría de los casos el método de eliminación funciona sin dificultades o modificaciones… En algunos casos excepcionales falla. Queremos comprender cómo es que, en el momento en que falla, el proceso de eliminación identifica cada una de estas posibilidades" (p. 2), él se refiere a las dificultades o modificaciones a las variantes del método antes mencionadas y a las posibilidades, a los casos cuando un sistema tiene infinitas soluciones o no tiene solución. El caso relacionado con los sistemas que tienen infinitas soluciones ya lo abordamos en dos de los ejemplos anteriores.

Hace falta identificar el caso en que un sistema no tiene solución. Con el deseo de que sea claro que el proceso de eliminación identifica a los sistemas que no tienen solución; primero daré la condición y después un ejemplo. Cuando en algún momento del proceso de resolución de un sistema de orden $m \times n$, una de las ecuaciones resultará ser de la forma $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = c$ con $c \neq 0$ entonces el sistema no tiene solución, debido a que no hay valores de $x_1, x_2, ..., x_n$ que satisfagan a esta ecuación. A manera de ejemplo, resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aplicamos el método. El pivote es -2 y aplicamos la tercera operación para eliminar a x_1 de la ecuación 2. El sistema equivalente que resulta es:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que la ecuación $0x_1 + 0x_2 = 1$ no se puede satisfacer entonces el sistema no tiene solución. Geométricamente son dos rectas paralelas.

En resumen, los sistemas de ecuaciones lineales pueden tener una única solución o una infinidad de soluciones, o simplemente, no tener solución. Y el método de Gauss identifica estas tres posibilidades. Entonces, el método de Gauss es una herramienta consistente, eficiente y eficaz, por lo tanto, sumamente poderosa para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, en la enseñanza tradicional pocas veces, se analizan y discuten las bases del método; como son, la equivalencia entre sistemas y las operaciones elementales. La equivalencia en la enseñanza tradicional es tan sólo un término que acompaña a otra (sistema) y las operaciones elementales surgen de forma espontánea y sin ninguna explicación, provocando una serie de dudas y confusiones.

Por otra parte, en una enseñanza tradicional, la dificultad a la que nos enfrentamos al resolver un SEL es del tipo numérico; es decir, errores al realizar cálculos entre los coeficientes provocando una mayor atención en esto y marginando las ideas y conceptos más importantes al estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.

Aunado a lo anterior, también existe desinterés en mostrar la importancia de los SEL en el desarrollo y comprensión de las ideas y los conceptos fundamentales del álgebra lineal.

2.2. Los sistemas de ecuaciones lineales y las matrices.

La resolución e interpretación de los sistemas de ecuaciones lineales son consideradas el problema central del álgebra lineal (Strang, 1982; Noble, 1988). Por un lado, son de carácter aplicativo; esto es, los sistemas de ecuaciones lineales son el modelo matemático para muchos problemas o fenómenos reales en distintas áreas de conocimiento (Física, Biología, Química, Economía, etc.). Por el otro, son sumamente importantes para el desarrollo e interpretación de muchos conceptos importantes en álgebra lineal; como matriz, determinante, inversa de una matriz, rango, independencia lineal, cambio de bases, etc. En este apartado, daremos una breve descripción de la importancia de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales en la teoría de matrices y transformación lineal. Con el objetivo de mostrar que su resolución no sólo es el problema central del álgebra lineal, sino el corazón mismo del álgebra lineal.

2.2.1 Matriz aumentada.

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones lineales *arrastramos* con todos los elementos simbólicos que conforman al sistema, como son, las variables, los signos (+, –, =) y los coeficientes. Y en realidad, sólo ocupamos a los coeficientes. Tan es así, que la solución de un sistema se expresa en términos de éstos; por ejemplo, un sistema de orden 2×2:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Tiene como solución general a: $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$ y $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$.

En este sentido, resulta conveniente y adecuado, quitar algunos elementos simbólicos de la representación algebraica de un sistema hasta obtener una representación sólo en términos de los coeficientes; por ejemplo, para nuestro sistema de orden 2×2, tenemos la siguiente representación del sistema sólo en términos de los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

No es difícil darse cuenta que en esta representación del sistema, el arreglo de los coeficientes conserva la forma del sistema de ecuaciones lineales. A esta representación del sistema se le denomina “matriz aumentada”. Para mí, este sería el primer contacto del estudiante con el objeto matemático denominado *matriz*, y el punto de partida son los sistemas de ecuaciones lineales. Cabe señalar, que las operaciones elementales se aplican tal cual en esta representación. A manera de ejemplo, resolvamos el siguiente sistema en términos de la matriz aumentada:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + \quad 5x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - \quad 3x_3 &= 2 \\ -4x_1 + \ x_2 - {}^{3}\!/_{2}\, x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Cuya matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & -{}^{3}\!/_{2} & 0 \end{array}\right)$$

La matriz anterior está formada por 4 columnas y 3 reglones; los renglones representan a cada ecuación del sistema. Por esta razón las operaciones elementales sufren una ligera modificación, ya que las ecuaciones se remplazan por los renglones de la matriz:

1ª operación: Intercambio (o permutación) de renglones: $r_i \leftrightarrow r_j$.

2ª operación: Multiplicación de un renglón por un escalar $\lambda \neq 0$: $r_i \rightarrow \lambda(r_i)$.

3ª operación: Sumar a un renglón un múltiplo de otro: $r_i \rightarrow r_i + k(r_j)$.

Donde r_i es el renglón i y r_j es el renglón j. El método de Gauss sigue siendo el mismo y con las mismas variantes.

Aplicamos el método e iniciamos con la elección de -2 como el pivote. Para hacer cero los elementos que están por debajo del pivote aplicamos la tercera operación de la siguiente forma: $r_2 \rightarrow r_2 + \left(1/2\right) r_1$ y $r_3 \rightarrow r_3 - (2) r_1$. De esta manera, obtenemos la siguiente matriz aumentada equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -1/2 & 9/2 \\ 0 & -7 & -23/2 & -10 \end{array}\right)$$

Repetimos los pasos 1 y 2 del método, y obtenemos la siguiente matriz aumentada equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -1/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -23/2 & -17/8 \end{array}\right)$$

El sistema tiene una solución única que es ($x_1 = 2/9$, $x_2 = 227/198$, $x_3 = 17/99$).

2.2.2 Operaciones entre matrices.

Nos olvidamos por un momento de los SEL y simplemente veamos a una matriz como un arreglo de números ordenados en m renglones o filas y n columnas, representada así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y el tamaño de la matriz es $m \times n$. Otra forma de representar a la matriz A es: $A = (a_{ij})$ con $i = 1,..,m$ y $j = 1,...,n$. Una matriz muy peculiar es la de tamaño $m \times 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

A esta matriz también se les denomina *vector* columna. Aunque, como dice Hoffmann (1975) “para definir un vector hace falta agregar cosas” (p. 1). Así que simplemente llamémosle matriz columna.

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de $m \times n$. Definimos la suma entre las matrices A y B como la matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. La suma entre matrices sólo se puede efectuar si ambas tienen la misma dimensión (el mismo tamaño). A manera de ejemplo, sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 11 \\ 13 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 & 1+3 \\ 2+5 & 1+7 & 2+11 \\ 1+13 & 2+17 & 1+19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 13 \\ 14 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

No es difícil observar que $A+B=B+A$. Ahora pasemos a la multiplicación entre matrices.

Sean $A=(a_{ij})$ una matriz de $m\times n$ y $B=(b_{jk})$ una matriz de $n\times s$ con $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ y $k=1,\ldots,s$. Definimos la multiplicación entre las matrices A y B como la matriz producto $C=AB$ de $m\times s$ donde la componente c_{ik} de C es igual a $\sum_{j}^{n} a_{ij}b_{jk}$. A manera de ejemplo, multiplicamos a las matrices del ejemplo anterior:

$$AB=\begin{pmatrix}1+10+13 & 2+14+17 & 3+22+19\\ 2+5+26 & 4+7+34 & 6+11+38\\ 1+10+13 & 2+14+17 & 3+22+19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 33 & 44\\ 33 & 45 & 55\\ 24 & 33 & 44\end{pmatrix}$$

También, multiplicamos B por A:

$$BA=\begin{pmatrix}8 & 10 & 8\\ 30 & 39 & 30\\ 66 & 81 & 66\end{pmatrix}$$

Puede suceder, como con estas matrices, que $AB\neq BA$; por lo que se debe estar consciente que el orden en que se multiplican dos matrices es importante. También vale la pena insistir que dos matrices se pueden multiplicar siempre y cuando, el número de columnas de la primera y el número de filas de la segunda sea el mismo, de lo contrario, la multiplicación es imposible de realizar.

Por último, dos matrices A y B de $m\times n$ son iguales si $a_{ij}=b_{ij}$.

Con la igualdad y multiplicación entre matrices es posible representar un SEL matricialmente. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales de orden 2×2 queda representado así:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

Ahora bien, existe una gran diferencia entre está representación y la matriz aumentada de un SEL. En el caso de esta última, se llevan a cabo operaciones dentro de la matriz con el fin de resolver el sistema.

Mientras que en la representación matricial, el sistema de ecuaciones lineales es expresando por más de una matriz; esto es, hay una matriz de coeficientes, una matriz columna de variables y una matriz columna de términos independientes (aquí lo independiente se refiere a que el coeficiente no está asociado a variable alguna) y es por medio del producto matricial y la igualdad entre matrices que podemos establecer esta representación. En consecuencia, resolver el sistema estará en términos de las operaciones y propiedades de las matrices (e. g., ya no se habla de operación elemental, sino de *matriz elemental*).

De acuerdo con las propiedades y operaciones de las matrices, tenemos el siguiente esquema que muestra como a partir de la representación matricial se llega a la representación usual del sistema de ecuaciones lineales y viceversa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(a) Representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(b) Se realiza el producto matricial.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

(c) Representación en términos de las ecuaciones lineales.

Ahora bien, se ha expuesto una relación entre sistemas y matrices, como una forma alternativa de representación con sus respectivas reglas de operación y tratamiento. Pero qué puede aportar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el desarrollo y construcción de conceptos en la teoría de matrices.

En lo siguiente, trataremos de ofrecer una evidencia de la importancia de saber resolver sistemas de ecuaciones lineales en la teoría de matrices.

2.2.3 Inversa de una matriz.

Por ejemplo, se dice que, para una matriz A de $n \times n$, existe una matriz $n \times n$ denotada por A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ entonces A^{-1} es la matriz inversa de A. Cabe señalar que I es la matriz identidad de $n \times n$.

La definición indica que dada una matriz cuadrada puede existir su inversa, pero ¿Cuál es la condición para que exista la inversa de una matriz? y ¿cómo la encontramos? Constaremos ambas preguntas para un caso particular, una matriz 2×2, aunque el procedimiento utilizado se puede aplicar a una matriz $n \times n$. Primero contestamos la última pregunta. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ son número reales conocidos. Supongamos que la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa de A donde x_1, x_2, x_3, x_4 son cantidades que desconocemos.

Por la definición,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_3 = 1 & a_{11}x_2 + a_{12}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_3 = 0 & a_{21}x_2 + a_{22}x_4 = 1 \end{pmatrix}$$

Se han generado ecuaciones lineales, en realidad, dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_3 = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{matrix} a_{11}x_2 + a_{12}x_4 = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_4 = 1 \end{matrix} \right\}$$

Los cuales se resuelven muy fácilmente por el método de Gauss. De esta manera encontramos que los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 son:

$$x_1 = a_{22} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})$$

$$x_2 = -a_{12} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})$$

$$x_3 = -a_{21} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})$$

$$x_4 = a_{11} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})$$

Entonces la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) & -a_{12} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) \\ -a_{21} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) & a_{11} / (a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}) \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Siempre y cuando $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} \neq 0$. Y esto último responde a la primera pregunta.

Con respecto a lo anterior concluimos que la presencia del método de Gauss en el desarrollo y construcción de ideas y conceptos en la teoría de matrices existe y es muy importante. Esto quiere decir, que de ninguna manera el estudio del método de Gauss puede ser marginado simplemente a la idea de algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sin duda lo es; sin embargo, quedarse con esa concepción nos llevaría al fracaso en la comprensión de las ideas y conceptos fundamentales del álgebra lineal.

De esta manera, aunque superficial, se hace justicia a la importancia de entender y comprender desde sus bases al método de Gauss. Si bien lo expuesto es insuficiente para generar esta visión, por lo menos se ha tratado de ofrecer una evidencia de la importancia del método de Gauss y de su justa connotación como “el alma del álgebra lineal”.

2.3. Didáctica de las matemáticas.

Se ha titulado así este apartado, ya que, como Brousseau (2000) dice: “hoy en día el término didáctica abarca la actividad misma de la enseñanza de las matemáticas, el arte y conocimiento necesarios para hacerlo, el arte de preparar y de producir recursos para esta actividad, el estudio de la enseñanza y de todo aquello que se manifiesta en ella, en tanto proyecto social, hecho socio-histórico o como fenómeno.”(p.29). En este sentido, iniciaremos describiendo la teoría de los registros de representación semiótica (Duval, 1998 & 1999).

2.3.1 Registros de representación semiótica.

La matemática es una ciencia formada por objetos intangibles. La única manera de acceder a ellos y comunicarlos es por medio de alguna de sus representaciones. Por ejemplo, la representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$ es:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (1)$$

Según la Real Academia Española (RAE) una representación “es una figura, imagen o idea que sustituye a la realidad” entonces la representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales no es el objeto matemático en sí mismo. Esto quiere decir que no hay que confundir el objeto matemático con su representación (Duval, 1998, p.174). En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas esta aserción es muy importante; ya que es muy común confundir el objeto con su representante.

Como se dijo anteriormente, cualquier pensamiento necesita de una representación para su comunicación. Más aún, la representación nos permite construir conocimiento, esto es, son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento (Duval, 1998, p.175). En este sentido, la única forma de acceder a los objetos matemáticos, es por medio de alguna de sus representaciones. De hecho, la actividad en matemáticas está basada en gran medida en la manipulación y abstracción de las representaciones de los objetos matemáticos.

Por otra parte, las representaciones se construyen y desarrollan por medio de reglas propias, inherentes a un sistema estructurado de signos, símbolos, íconos, etc. Entonces las representaciones no son simples figuras, imágenes o ideas que sustituyen a la realidad, sino algo mucho más complejo y aunque este argumento se queda muy corto en comparación con la explicación que se ofrece en el capítulo 1 del libro Semiosis y Pensamiento Humano de Duval (1999), me permite aclarar lo conveniente de, no sólo hablar de representación sino de *representación semiótica*.

Ahora bien, entre más representaciones semióticas de un objeto matemático se conozcan y coordinen entre sí, habrá más posibilidades de entenderlo, comprenderlo y hacerlo parte de nuestro pensamiento (Duval, 1998, p.186). En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales tenemos al menos tres *registros de representación semiótica*: el algebraico, el geométrico y el matricial (Ver apartados I y II de este capítulo). Sin embargo, cuando el sistema de ecuaciones lineales depende de más de tres incógnitas, el registro de representación geométrico simplemente se anula, por nuestra imposibilidad de graficar en $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$.

Pero ¿qué es un registro de representación semiótica? De acuerdo con Duval (1998) "para que un sistema semiótico pueda ser registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la sémiosis. 1. La formación…2. El tratamiento…3. La conversión…"(pp. 177-178). En donde la formación de una representación semiótica en un registro dado debe respetar las reglas de formación que son propias al sistema empleado y más que reglas de producción son reglas de conformidad, ya que, la función de éstas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como la posibilidad de su utilización para los tratamientos (Duval, 1998, p. 177).

Las reglas de conformidad son las que definen a un sistema de representación, y se refieren a la determinación de unidades elementales como símbolos, vocabulario, etcétera; así como a las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior; y a las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa (Duval, 1999, pp. 41-42).

Es claro que la formación de una representación semiótica no es una tarea sencilla y regularmente, al menos en la enseñanza tradicional, no es una actividad importante; tan es así, que en muchos de los casos, los alumnos simplemente al reproducir una representación lo hacen mal; esto se debe a que no se tienen claras las reglas de conformidad del registro de representación. En consecuencia, se producen concepciones erróneas o confusiones en los alumnos de los objetos matemáticos en torno a las representaciones semióticas de los mismos.

Por otra parte, el tratamiento de una representación semiótica es la transformación de esta representación en el mismo registro donde ha sido formada respetando las reglas propias del registro de representación (Duval, 1998, pp.177-178). Por ejemplo, en el caso de un sistema de ecuaciones lineales, el proceso de resolución podría decirse que es el tratamiento de la representación semiótica del SEL dentro del mismo registro algebraico. En donde, algunas de las reglas para llevar a cabo dicho tratamiento son las operaciones elementales entre ecuaciones lineales.

Por último, la conversión de una representación es la transformación de ésta en otro registro de representación (Duval, 1998, p.178). Para mí esta es la actividad cognitiva más difícil, ya que se necesita en un primer momento detectar o en su caso, construir (lo cual es muy complicado) un registro de representación distinto al inicial. Y a diferencia del tratamiento, no existen reglas de transformación entre registros o al menos no claras, que permitan una cómoda conversión de una representación a otra.

Sin embargo, hay casos en que la conversión es casi directa, como sucede, desde mi punto de vista, con la conversión entre la representación algebraica y la matricial de un sistema de ecuaciones lineales (Ver apartado II de este capítulo). Pero en la mayoría de los casos la conversión es bastante complicada de hacer. Y esto se debe, a la incongruencia que puede existir entre dos registros de representación (Duval, 1998, p. 188).

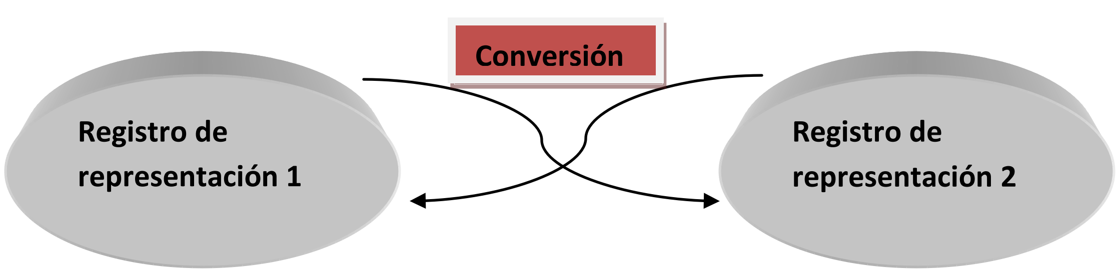
En fin, la teoría de los registro de representación es desde mi punto de vista bastante amplia y un análisis concienzudo de la misma no es mi propósito, sino simplemente una descripción de lo que considero los aspectos más importantes de la teoría. En este sentido, concluyo esta descripción de la teoría con una breve explicación de la propuesta didáctica de Duval (1998) basada en la coordinación de registros de representación.

Para hablar de la coordinación de registros de representación como una actividad cognitiva preponderante en la enseñanza de las matemáticas, Duval (1998, pp.184-185) primero ofrece una explicación respecto al surgimiento de varias representaciones semióticas para un mismo objeto matemático. Lo atribuye a la economía del tratamiento y a la complementariedad de los registros.

Con la economía del tratamiento, se refiere a que el tratamiento de una representación en cierto registro resulta ser menos costoso que en otro registro. Por ejemplo, cuando resolvemos un SEL en términos de su matriz aumentada es menos laborioso el proceso de resolución que en términos de las ecuaciones lineales. Sin embargo, esto no quiere decir que haya mejores representaciones de un objeto matemático (siempre y cuando se encuentren bien fundamentadas y establecidas) y esto se debe a que mientras una representación ofrece ciertas ventajas descuida otras.

En este sentido, la complementariedad de los registros alude al hecho de que toda representación de un objeto matemático muestra sólo algunos aspectos del mismo con base a la estructura del registro de representación; es decir, toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a otra (Duval, 1998, p.185). Por ejemplo, la representación geométrica de un SEL de orden 2×2 nos permite casi de inmediato por medio de la observación determinar si el sistema tiene solución, no tiene solución o tiene una infinidad de soluciones. Lo que en el registro algebraico no sucede, sin embargo, obtener explícitamente del registro geométrico los valores de las incógnitas que sean solución del sistema es, por lo general imposible; lo que en el registro algebraico, aunque laborioso, siempre es posible.

Ahora sí, aclarado la importancia de la diversidad de representaciones de un mismo objeto matemático en términos de la economía del tratamiento y la complementariedad entre registros, Duval (1998, p. 185-187) establece que la conceptualización implica una coordinación de registros de representación. Esto es, para la comprensión y aprehensión conceptual del objeto matemático es necesaria la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación no puede ser otra que la conversión de una representación de un registro a otro en ambas direcciones, como se muestra en la siguiente figura:



Desde luego, que la conversión entre registros no es algo sencillo de llevar a cabo, ya que, no sólo es presentar al alumno las distintas representaciones de un objeto matemático sino hacerlo consiente de las ventajas y desventajas de una y otra representación, que puede transitar entre una y otra sin confundirse. Y en la medida de lo posible, determinar las características que una u otra representación ofrece del objeto matemático que representa.

En conclusión, por ser la matemática la ciencia en donde la actividad misma está basada en la formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas y que la aprehensión de los objetos matemáticos es por medio de sus representantes, es conveniente, al menos reflexionar sobre la pertinencia de integrar en la medida de los posible esta visión en la enseñanza de las matemáticas.

2.3.2 Didáctica Cuevas-Pluvinage.

En términos generales, la propuesta didáctica de Cuevas & Pluvinage (2003) para la enseñanza de las matemáticas a nivel post-elemental (medio superior y superior) se basa en la adecuación y secuenciación de algunos principios teóricos de:

- La escuela activa;
- La psicología de la inteligencia de Piaget y el programa didáctico elaborado por Aebli;
- Y la teoría de los registros de representación semiótica.

En total, son nueve principios los que conforman a esta propuesta didáctica, los cuales, posteriormente serán expuestos. En principio, vale la pena señalar las causales que desde mi punto de vista originan la creación de dicha propuesta didáctica.

Se sabe, que la enseñanza tradicional ha causado una serie de dificultades debido a la estructura de la misma; es decir, se pretende enseñar por medio del método expositivo un contenido y más aún, se pretende que el alumno comprenda y aprenda por medio de la imitación y repetición, el contenido así se enseñado. Desde luego que durante años hemos observado el fracaso de este tipo de enseñanza, al menos en la adquisición conceptual.

Las cosas se complican cuando se pretende transmitir el contenido matemático bajo este tipo enseñanza (esto no quiere decir que en otras propuestas para enseñar el contenido matemático no haya dificultades); ya que, la matemática es un cúmulo de conceptos e ideas que necesitan de la reflexión y el análisis. Los autores señalan tres dificultades inherentes a la enseñanza tradicional: “Las dificultades de extensión de los tratamientos a situaciones que se apartan de las presentadas durante la enseñanza, las dificultades de llegar a la adquisición conceptual y el carácter a menudo muy volátil del conocimiento así aprendido.” (p. 274). En otras palabras, debido a que la enseñanza tradicional es expositiva, el alumno, regularmente “aprende” tal cual se le ha presentado el contenido matemático y en cuanto se le presenta una situación sobre el mismo contenido, pero que en apariencia es distinta a las expuestas por el profesor, regularmente no sabe qué hacer.

Por otra parte, el contenido matemático simplemente expuesto, sin realizar por lo menos, una reflexión y análisis de las ideas y de los conceptos matemáticos, implica por un lado, el desinterés del alumno y por el otro, una mecanización. Además, dado que el contenido matemático así enseñando no es, en su mayoría, significativo al estudiante, tiende a ser olvidado en muy poco tiempo, reforzando una memorización de corto plazo.

Pero ¿cómo eliminar estas dificultades derivadas de la enseñanza tradicional? La respuesta a este pregunta se encuentra en términos de los estudios y de las teorías psicologías, pedagógicas, epistemológicas, filosóficas, etc. Para los autores de esta propuesta didáctica una respuesta a la pregunta anterior se encuentra en la aplicación de una enseñanza activa, ellos dicen “En reacción [a las tres dificultades derivadas de una enseñanza tradicional], la enseñanza activa alude a proporcionar los medios para superar unas y otras.” (p. 274). Las características fundamentales de este tipo de enseñanza son la motivación y la actividad que el alumno debe realizar dentro de su propia enseñanza. Es decir, en este tipo de enseñanza se concibe al alumno como un elemento importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, un individuo que piensa y actúa de acuerdo a sus necesidades y propósitos; caso contrario se da en la enseñanza tradicional, donde el alumno se concibe como un individuo pasivo.

Ahora el asunto es ¿cómo lograr que el alumno sea un agente activo dentro del proceso de enseñanza? Y ¿cómo lograr la adquisición de conceptos e ideas a partir de la actividad misma del alumno? De acuerdo con los autores tenemos los siguientes tres puntos que ofrecen una respuesta a las preguntas anteriores:

- Inducir constantemente a los alumnos a resolver o intentar resolver problemas. Es esencial que el alumno este siempre efectuando una acción. Es en efecto él mismo quien, por medio de la resolución de problemas específicos gradualmente dosificados, construya y llegue los conceptos deseados. (p. 275)

- Para cada introducción de un concepto o de una noción matemática, partir de un problema general que se pose en un contexto susceptible de presentar interés por el alumno. Proponer ejercicios que generen problemas o sub-problemas cuya solución, bajo una forma estructurada y coordinada, llegue a expresar o designar el concepto matemático deseado. (p. 275)

- Inducir al estudiante, una vez resuelto el problema planteado, a validar sus resultados, verificando que ellos tengan un sentido lógico y estén de acuerdo con el problema. (p. 276)

Desde mi punto de vista, una dificultad que vislumbro es la elección del problema o los problemas a plantear a los alumnos. Considero que esto depende por un lado del conocimiento que el profesor tenga del contenido matemático y sus posibles aplicaciones, y por el otro, de su capacidad para detectar los conceptos y nociones matemáticas que resultarán de resolver el problema por parte del alumno.

Por otra parte, la coherencia de los resultados obtenidos por el alumno al resolver el problema planteado con el problema mismo, implica una revisión y análisis del proceso de resolución del problema; esto es, validar que efectivamente lo hecho es correcto. Considero sumamente importante la validación, ya que los errores que se comentan pueden resultar en errores conceptuales. Además que para mí, la validación no sólo es una actividad individual, sino también, como una actividad grupal.

Ahora bien, el objetivo general de esta propuesta didáctica es proporcionar los elementos didácticos suficientes para propiciar la adquisición de conceptos matemáticos. Los tres puntos anteriores, muestran un avance en este sentido, sin embargo, como los autores lo mencionan "La acción material no engendra necesariamente en si misma las operaciones intelectuales cuya coordinación conduce a la comprensión de conceptos". Es en este sentido que surgen los siguientes cuatro puntos, tomando en cuenta a las operaciones intelectuales como la suma de operaciones parciales y la operación intelectual inversa.

- Cuando se trate de enseñar cierto tema o concepto matemático complejo, por medio de la resolución de un problema establecido, descomponer o dividir el problema en sub-problemas que representen las operaciones parciales constitutivas; anotando todas las operaciones y/o conceptos que resulten de este análisis y que son necesarias para que el estudiante resuelva el problema inicial. Generar así, un plan de acción, el cual, por medio de ejercicios gradualmente dosificados, lleve de manera coordinada y coherente a conseguir el objetivo. (p. 277)

- Cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, emplear en la medida de lo posible la operación inversa. (p. 277)

- Cuando una forma o un método de resolución del problema es mostrado, intentar dar una forma de solución alternativa. En ningún caso imponer una forma de solución. (p. 277)

- Construir problemas donde el concepto recientemente adquirido sea un elemento de análisis para un tema más avanzado o complejo, o construir problemas que requieren el concepto fuera del contexto didáctico en el que fue enseñado. Eso significa pensar en problemas donde el concepto enseñado forme parte de la estructura con la que el alumno debe analizar y resolver la cuestión planteada. (p. 278)

De acuerdo con los autores es el punto anterior el que permitirá una adquisición conceptual completa. Vale la pena señalar, que en términos de la psicología de la inteligencia de Piaget, el punto anterior está asociado a la concepción de que a través del desequilibrio de las estructuras cognitivas existentes en el alumno se provoca un forcejeo entre la asimilación (la resistencia al cambio) y la acomodación (la necesidad del cambio) que resulta en un equilibrio, formado así una nueva estructura cognitiva en el alumno.

Por último, la propuesta didáctica recoge de la teoría de representaciones semióticas los siguientes dos puntos:

- Cada vez que un concepto matemático se presente en cierto registro de representación semiótica, trabajar (si el concepto lo permite) en otros registros de representación apropiados. (p. 280)

- Si un concepto matemático está presente en más de un registro de representación semiótica, instrumentar operaciones directas e inversas que favorezcan la articulación (la transferencia) entre los diferentes registros. (p. 280)

De acuerdo con los autores, estos dos últimos puntos tienen como objetivo comprender mejor la noción o concepto matemático, por un lado reconociendo el concepto en más de un registro de representación. Y por el otro, movilizando el concepto de un registro a otro.

En la didáctica se encuentra fuertemente arraigada la idea de construir. Es decir, es el alumno quien debe construir su propio conocimiento y el papel del profesor es el del guía. Aunque, cabe señalar que corresponde al profesor la constricción del plan de acción que comprenda cada uno de los puntos que sea han mencionado en la didáctica, que como ya dijimos, no es una tarea fácil.

Quizá la didáctica requiera de un análisis más exhaustivo en términos de la teoría, pero particularmente estoy interesado más, en pensar en una aplicación de la didáctica acompañada del uso de la computadora y a partir de allí criticar a la didáctica.

De acuerdo a estos principios didácticos, instrumentar una didáctica como la de Cuevas & Pluvinage, resulta una tarea compleja para el docente con los instrumentos usuales de la enseñanza. Y es precisamente en este aspecto que la computación adquiere relevancia, puesto que es un medio que permitiría instrumentar de manera eficiente. Por ejemplo, plantear de inicio un proyecto de acción, que puede ser el cálculo de las corrientes eléctricas en un circuito, la posición de un objeto mediante el uso del GPS, la optimización de la producción de una fábrica que elabora varios productos en competencia de producción, problemas de dieta, etc. Son francamente complejos por la aritmética que conlleva el método de Gauss. Además ilustrar a los SEL dentro de varios registros en forma simultánea también es una tarea difícil para un profesor.

Como ya se ha mencionado, el propósito de este trabajo es la creación de un ambiente computacional que apoye la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales donde los cálculos aritméticos no sean un problema o dificultad. Por es conveniente hablar tanto de lo que se denomina software educativo, así como de los aspectos relacionados con el diseño y desarrollo de software.

2.4 Sobre el Software Educativo.

El uso de la tecnología es inevitable en el proceso educativo, particularmente de la computadora. El diseño, desarrollo y uso de Ambientes Computacionales para la Enseñanza de las Matemáticas (ACEM) ha ido acrecentándose a partir de los 60's y con ello, el esfuerzo por clasificar su uso de acuerdo con las características del ambiente computacional.

2.4.1 Una clasificación de los ambientes computacionales para la enseñanza de las matemáticas.

De acuerdo con Cuevas (1998) "…la computadora en la enseñanza de las matemáticas es en este contexto, un medio y no un fin, por ende la computadora, es una herramienta que nos auxilia a realizar diversas tareas dentro del complejo mundo de la enseñanza de las matemáticas."(p.274). Efectivamente, la computadora tiene ciertas características que le hacen un aparato sofisticado con un fuerte impacto en el quehacer educativo; con su uso, en el contexto educativo, no se pretende delegar a la computadora la "responsabilidad" de enseñar o generar aprendizaje por el simple uso, sino que, por medio de su uso contemplado en un modelo didáctico apoye a la enseñanza de las matemáticas y desde luego al aprendizaje de las mismas.

Con la acotación anterior y de acuerdo con algunas características de la computadora, particularmente de los denominados ambientes computacionales, Cuevas (1998) clasifica los ACEM en tres categorías:

1) La computadora como herramienta sofisticada para propósitos específicos;
2) La computadora como herramienta de propósitos generales; y
3) La computadora como una herramienta capaz de generar matemáticas.

La primera categoría se refiere a los ambientes computacionales creados específicamente para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; esta categoría se subdivide en:

1.1) Enseñanza de las matemáticas vía enseñanza de la computación.
1.2) Elaboración de Lecciones Tutoriales por Computadora.
1.3) Sistemas Tutoriales Inteligentes.
1.4) Ambientes de Aprendizaje Inteligentes.

De acuerdo con Cuevas, uno de los ambiente computacionales más representativos en la subdivisión 1.1) es LOGO (Feurzeig & Papert, 1967), cuya característica principal es precisamente que mediante la programación computacional el usuario construye ideas y conceptos matemáticos.

En el caso de 1.2) Cuevas dice: “Uno de los primeros intentos al utilizar la computadora en la educación, fue precisamente, producir material educativo a través de lecciones tutoriales en la computadora como auxilio en los cursos de matemáticas e idiomas.”(p.277). En este caso, el autor no es muy claro respecto a qué es una lección tutorial; nuestra interpretación es que hay una organización y presentación del contenido matemático en la computadora, de tal forma que el estudiante mediante la realización de ciertas actividades o juegos propuestos en el ambiente aprenda matemáticas. En este sentido, la creación de este tipo de ambientes computacionales tiene un único propósito: apoyar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Un sistema tutorial inteligente (ITS: Intelligent Tutoring System), que corresponde al caso 1.3) es aquel que: "…se puede contemplar como un extensión de las lecciones tutoriales, es decir, un sistema que contenga una o varias lecciones tutoriales implementadas en una computadora o microcomputadora las cuales al interactuar con el estudiante, tengan un cierto comportamiento inteligente." (Cuevas, 1997, p.279). El mismo autor señala la falta de una definición clara. De hecho, un ITS tiene, desde mi punto de vista una composición compleja; además, de nacer en el seno de la ciencia denominada Inteligencia Artificial definida por McCarthy (2007) como "la ciencia e ingeniería de creación de máquinas inteligentes, particularmente programas informáticos inteligentes."

Consideramos que un STI basa su estructura a las interrogantes ¿Qué?, ¿Quién? y ¿Cómo?; es decir, en términos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, qué contenido matemático se pretende enseñar, a quién será enseñado y cómo será enseñado. De allí que las componentes de un STI sean: un módulo experto, el cual contiene el conocimiento del tema. El modelo del estudiante, el cual diagnostica lo que el estudiante sabe. El módulo tutor, identifica cuál deficiencia hay para luego enfocar y seleccionar la estrategia para presentar ese conocimiento. El ambiente instruccional, nos define las características de la presentación y la interface humano-maquina, la comunicación (Cuevas, 1996, p. 151).

Una pretensión de los STI es en algunos casos la sustitución del maestro; sin embargo, trabajos como LIREC (Cuevas, 1994) y CalcVisual (Cuevas, 1995) marcan una diferencia sustancial, no pretenden sustituir al profesor; por el contrario promueven al profesor como un elemento vital para un buen desarrollo en la implementación de este tipo de ambientes computacionales. Debemos observar que en el fondo se trata de cumplir el mismo propósito de las dos subdivisiones anteriores: apoyar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la subdivisión 1.4) de acuerdo con Cuevas (1998) "…lo constituye el uso de la computadora como fabricante o constructor de "herramientas" para el aprendizaje y desarrollo de conceptos matemáticos."(p.281). Un ejemplo de este tipo de ambientes es el conocido Cabri-géomètre (Laborde *et al*, 1988); un ambiente computacional regularmente denominado *software de geometría dinámica*.

La segunda categoría se divide en:

2.1) La Computadora como auxiliar del profesor al elaborar y presentar material didáctico.
2.2) La Computadora como apoyo al trabajo docente y de investigación en la enseñanza de las matemáticas o materias afines.

En el caso de 2.1) se habla del uso de la computadora por medio de software comercial que ayude a desarrollar adecuadamente la actividad docente, por ejemplo, el uso de *Microsoft Power Point* para la presentación de cierto contenido matemático o bien, *Microsoft Excel* para la elaboración de listas de calificación, o *Microsoft Word* para la elaboración de notas de clase o problemarios.

En el caso de 2.1) tenemos un uso de la computadora enfocado a la enseñanza de contenido matemático por medio de software comercial como: Maple, Mathematica, Derive, Matlab, Microsoft Excel, etcétera. Considero, que en el caso de la enseñanza de las matemáticas el uso de este tipo de programas computacionales es muy recurrido; hay propuestas didácticas basadas en el uso de alguno de estos programas para desarrollar algún contenido matemático o para el análisis de algún concepto matemático, por ejemplo, el uso de *Derive* para visualizar gráficamente la derivada en un punto de alguna función matemática.

La última categoría, se refiere en términos generales a la generación de nueva matemática a partir del uso de la computadora, ya sea por el uso de ambientes computacionales existentes o bien, por el desarrollo de ambientes computacionales. El autor da como ejemplo el caso de la denomina Teoría del Caos. Desde mi punto de vista, las dos categorías anteriores pueden caer en un momento dado en esta última categoría.

2.4.2 Características de un buen software educativo.

En este trabajo nosotros consideramos un software educativo como aquel software o ambiente computacional creado con un propósito educativo.

Mochón (2006), menciona que un buen software educativo debe poseer ciertas características: Dinámico, Interactivo, Exploratorio, Abierto, Universal, No denso, Concentrado, Social, Didáctico y guiado. Hay que señalar que estas características, como el mismo autor lo señala, nacen a partir de un modelo pedagógico del que no daremos detalles, ya que consideramos que independientemente del modelo pedagógico la mayoría del software educativo debe considerar y satisfacer en la medida de lo posible las características mencionadas.

Mochón se refiere con **dinámico** a la acción, movimiento y cambio; **interactivo** a que el ambiente no sólo proporcione información, sino que también la reciba; **exploratorio** a la capacidad de procesar la información y devolver una respuesta; **abierto** a la capacidad del ambiente de ser utilizado en distintos modelos didácticos; **universal** a la independencia de un periodo o grupo especifico; **no denso** a lo conciso de los textos (ayuda, información, etcétera) y a la presentación de pocos componentes (los necesarios) en la interfaz; **concentrado** al tratamiento desde varias perspectivas de una o dos ideas; **social** a la capacidad de fomentar la interacción entre los estudiantes; **didáctico** al cumplimiento de un propósito didáctico definido centrado en el desarrollo conceptual; y **guiado** a dirigir a los estudiantes hacia un objetivo didáctico.

Por otra parte, existen otras características a considerar en la creación de software con un propósito educativo. En el siguiente apartado se describen estas características que aplican para el diseño y desarrollo de software en general.

2.4.3 Usabilidad.

La (Usability) Usabilidad (Nielsen, 2003), es un “atributo de calidad” de la interfaz que un software debe poseer y se conforma por las siguientes parámetros: cualidad de aprender (learnability), eficiencia (efficiency), cualidad de memoria (memorability), errores (Errors) y satisfacción (satisfaction).

Para explicar cada parámetro, Nielsen establece en cada uno ciertas preguntas:

Cualidad de aprender: ¿Cuán fácil es para el usuario acoplarse a las tareas básicas del diseño, la primera vez que se enfrenta a él?

Eficiencia: Los usuarios tienen que entender el diseño ¿cuán rápido pueden realizar las tareas?

Cualidad de memoria: Cuando los usuarios regresan al diseño después de un periodo de no usarlo ¿cuán fácil pueden restablecer su destreza?

Errores: ¿Cuántos errores comenten los usuarios?, ¿cuán severos son los errores? y ¿con cuánta facilidad se recuperan del error?

Satisfacción: ¿cuán agradable es el uso del diseño?

La usabilidad es a la vez un parámetro de evaluación de un software y un método para el diseño de interfaz. Así, podemos considerar que reuniendo las características de un buen software educativo y la usabilidad es posible formar un panorama más robusto tanto para la creación de un ambiente computacional como para la evaluación del mismo.

CAPÍTULO 3 DESCRIPCIÓN DEL AMBIENTE COMPUTACIONAL ALSEL

Este capítulo resume la esencia de este trabajo: la creación de un ambiente computacional para la enseñanza de las matemáticas (ACEM), el cual, ha sido denominado *ALSEL* (**Á**lgebra **L**ineal: **S**istemas de **E**cuaciones **L**ineales). El ambiente está diseñado para apoyar al profesor en la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal a nivel superior; así como para guiar y ayudar al estudiante en el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Con el propósito de lograr una reflexión conceptual de los SEL.

En el primer apartado (Diseño didáctico de ALSEL) iniciamos con una breve exposición del proceso de desarrollo de un ACEM a partir de nuestra experiencia con ALSEL; proseguimos con la descripción del diseño didáctico del ACEM y su papel dentro del modelo didáctico Cuevas & Pluvinage (ver capítulo 2, apartado 2.3.2). En el segundo apartado (Desarrollo computacional de ALSEL) se describe brevemente el leguaje de programación utilizado (*Visual C#*) para desarrollar las subrutinas que conforman al ambiente, así como la exposición de algunas de ellas y su aspecto en la interfaz gráfica.

3.1 Diseño didáctico de ALSEL.

Para adentrarnos en la descripción del diseño didáctico de ALSEL conviene explicar brevemente la concepción generada a partir de nuestra experiencia sobre la creación de un ambiente computacional para la enseñanza de las matemáticas.

La creación de un ACEM es una actividad en la que intervienen, por lo menos, tres áreas de conocimiento: matemática, didáctica y computación. Por lo tanto, el estudio y reflexión de cada conocimiento es esencial e ineludible; en nuestro caso, por ejemplo, fue necesario asistir a un par de seminarios relacionados con el contenido matemático de interés (el álgebra lineal y la importancia de los sistemas de ecuaciones lineales), además de un constante estudio, análisis y reflexión del mismo.

Ahora bien, un ACEM es un producto y como tal, su creación gira en torno a cubrir una necesidad, en este caso de índole educativa y social. En este sentido, un ACEM habrá de cumplir con un propósito didáctico específico a fin de cubrir dicha necesidad educativa; este propósito además habrá de ser un eje director en el proceso de creación del ambiente. Por ejemplo, a raíz de la detección de una seria dificultad con los cálculos aritméticos y consecuentemente con los conceptos asociados, del álgebra lineal, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en alumnos de educación superior (ver capítulo 1, p. 9) surge la necesidad de apoyarse en la computadora como una herramienta potencial para solventar esta dificultad como parte de una propuesta didáctica (ver capítulo 1, pp. 12-13) para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, en la que se propone mejorar no sólo el aprendizaje operacional sino también promover el aprendizaje conceptual en los estudiantes. Es así como establecemos el propósito didáctico de ALSEL:

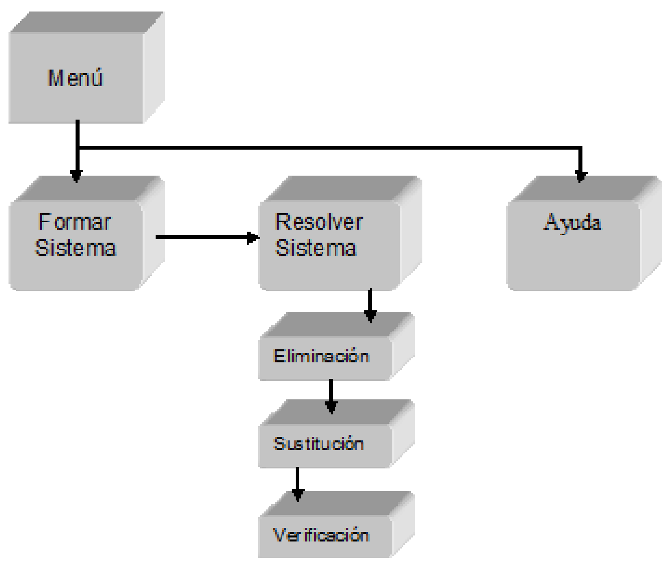
Desarrollar un ACEM para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss, proporcionado las herramientas necesarias para que dicha actividad se realice paso a paso, y con ello ayudar a fomentar la reflexión intelectual, sobre conceptos como: sistemas equivalentes, espacio vectorial, linealidad, etc.

Con la culminación del planteamiento del propósito didáctico entramos en otra etapa en el proceso de creación: el diseño didáctico del ACEM. Nos referimos a la elección de un modelo didáctico y a la implementación de dicho modelo, para la elaboración del ambiente, que permita alcanzar el propósito de este trabajo. Hemos elegido el modelo didáctico Cuevas & Pluvinage (ver capítulo 2, pp. 55-61), porque en él se encuentran la mayoría de los elementos didácticos necesarios para cubrir nuestro objetivo. Por ejemplo, nosotros deseamos que el estudiante construya su propio conocimiento. En este sentido, la didáctica C&P (Cuevas & Pluvinage) propone estimular constantemente al alumno a resolver problemas con la finalidad de mantenerlo en un estado de acción, y que sea él, en la medida de lo posible, quien construya y llegue al conocimiento deseado. En este sentido, un elemento importante del diseño, lo constituye la propuesta de ir hacia el proceso y no a la solución y en este sentido en el ambiente, el usuario siempre está en acción.

También el modelo C&P cubre otro aspecto didáctico de interés: los registros de representación semiótica (ver capitulo 2, pp. 50-55). Por ejemplo, nos sugiere trabajar un concepto (si lo permite) en otros registros de representación, con el propósito de que el alumno tenga un mejor dominio del concepto. Por ello, otro elemento del diseño didáctico del ambiente es intentar, en la medida de lo posible, desarrollar actividades en cada registro de representación semiótica. Esta parte añade una complejidad considerable en el trabajo de cómputo.

En fin, en los siguientes apartados se abordará detalladamente el diseño didáctico de ALSEL. Por otra parte, también se han considerado algunas características relacionadas con la calidad de un ambiente computacional, particularmente la visión que Nielsen (ver capítulo 2, p. 66) denomina “usabilidad”, de esto también daremos detalle más adelante.

Ahora bien, se dijo que el diseño didáctico, consiste en la implementación de un modelo didáctico para la elaboración del ACEM en aras a cumplir un propósito. En este sentido, el ACEM no proporciona la solución del problema planteado, sino que le facilita al estudiante las herramientas necesarias para resolver el problema. En nuestro caso, para apoyar la enseñanza y aprendizaje de la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Por tal motivo, con base en el contenido matemático, el propósito didáctico y el diseño didáctico, la interfaz de ALSEL está constituida por cinco elementos: *formar sistema*; *eliminación*, *sustitución* y *verificación,* las cuales constituyen el apoyo a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales; la siguiente ilustración representa la conformación de ALSEL:

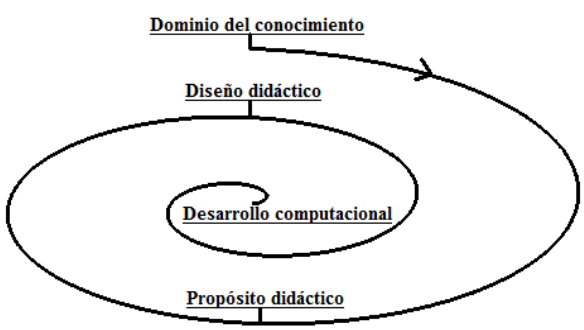


La componente formar sistema, es aquella en donde el usuario introducirá el SEL al ambiente computacional. La componente eliminación es donde el usuario, por medio de la aplicación sucesiva de las operaciones elementales, generará sistemas de ecuaciones lineales equivalentes hasta obtener uno, de forma escalonada. La componente sustitución se refiere al proceso de sustitución regresiva, para determinar el valor de las incógnitas. La verificación, válida el resultado. Adicionalmente se diseña la ayuda, con ventanas de información sintáctica y semántica para guiar al usuario.

Después de este diseño previo, inicia el desarrollo computacional; es decir, la programación en cierto lenguaje de alto nivel y acorde al sistema operativo vigente (en nuestro caso *Visual Studio. Net 2005*).

Hay que señalar algunos inconvenientes relacionados con el desarrollo computacional que deben ser considerados. Por ejemplo, el tiempo de desarrollo es acotado, ya que debido a los cambios vertiginosos en el ámbito computacional, de sistema operativo y lenguaje, se corre el riesgo de producir un sistema obsoleto; Asimismo, dependiendo del leguaje de programación, el desarrollo de objetos computacionales ofrece verdaderas dificultades, por lo cual, para la producción de sistemas que abarquen un contenido considerable, es necesario un equipo de programadores de alto nivel, que produzcan y compartan bibliotecas computacionales.

En resumen, el proceso de desarrollo de un ACEM es una actividad conformada por cuatro etapas: dominio del conocimiento, propósito didáctico, selección de un modelo didáctico, y desarrollo computacional. El siguiente esquema ilustra este proceso:



Representamos el proceso de creación en términos de una espiral en donde el inicio es el dominio del conocimiento, conforme avanzamos la amplitud de la espiral se reduce, ya que cada etapa abona elementos indispensables en la creación del ACEM, así hasta concluir con el desarrollo computacional, en donde convergen las etapas anteriores.

Por último, debido a la complejidad computacional y de diseño, un ambiente como ALSEL debería ser la tarea de un equipo interdisciplinario; por tal motivo este es un trabajo en desarrollo y al que se agregaría en el futuro, una componente gráfica para cumplir con un par de elementos didácticos del modelo C&P (ver capitulo 2, pp. 59-60) relacionados con el tratamiento y articulación de los registros de representación semiótica. Tomando en cuenta el tiempo y a la dificultad que implica desarrollar una interfaz gráfica en dos y tres dimensiones en un leguaje de computación.

Un acontecimiento que hace del programador un eterno estudiante del medio computacional se debe a la evolución tan acelerada de la tecnología, ya que suele suceder que una vez entendido el entorno de desarrollo computacional, aparece en el mercado una nueva versión de dicho entorno y en muchas ocasiones, versiones con diferencias irreconciliables. En consecuencia, esta situación afecta directamente cualquier desarrollo de un ACEM, al que además es necesario validar, y esto desde luego, conlleva a la evolución del mismo; por eso consideremos pertinente hablar, en todo caso, de un ACEM en *desarrollo*.

En el siguiente apartado explicaremos el diseño didáctico de cada uno de los elementos de ALSEL, pero antes de cerrar este apartado, dejemos claramente asentado que este tipo de ambientes computacionales se dirigen más al proceso que a la solución. De ahí su gran diferencia con el software comercial como Derive, Matlab, etc. Y que además impone un considerable trabajo de programación, adicional a la elaboración.

3.1.1 Formar un sistema de ecuaciones lineales.

En la didáctica C&P se propone inducir constantemente a los alumnos a resolver problemas (ver capitulo 2, pp. 55) e introducir los conceptos matemáticos con modelación de situaciones reales. En este caso, sí, de la modelación matemática resulta un sistema de ecuaciones lineales, una de las principales dificultades en la enseñanza de este tipo de sistemas, es la manipulación aritmética de los coeficientes, dado que sus valores pueden combinar enteros con decimales pequeños, como el caso de la modelación de circuitos eléctricos. El resolver manualmente este tipo de problemas, resulta ser una tarea demasiado laboriosa que en general evade el docente (esto además termina por sepultar los conceptos inherentes al proceso de resolución). Así por lo general, el docente, utiliza un SEL con coeficientes enteros para explicar el método de resolución. El poder facilitar la laboriosa tarea de resolución es una de las herramientas que ALSEL ofrece al docente y alumno.

Por tal motivo, un primer elemento en el diseño didáctico de la componente **formar sistema** es dar la posibilidad al usuario de introducir sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros, fraccionarios o decimales.

Esto representa un verdadero reto computacional, puesto que la aritmética de las computadoras, no lo permiten; y las aproximaciones que ingresan pueden conducir a graves errores conceptuales. Este tema será posteriormente abordado con detalle en el desarrollo computacional de ALSEL. Por otra parte, la definición de sistema de ecuaciones lineales, obliga a ALSEL, permitir la introducción de:

Un número finito de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ o bien de m ecuaciones lineales de n variables y que regularmente es expresado algebraicamente como:

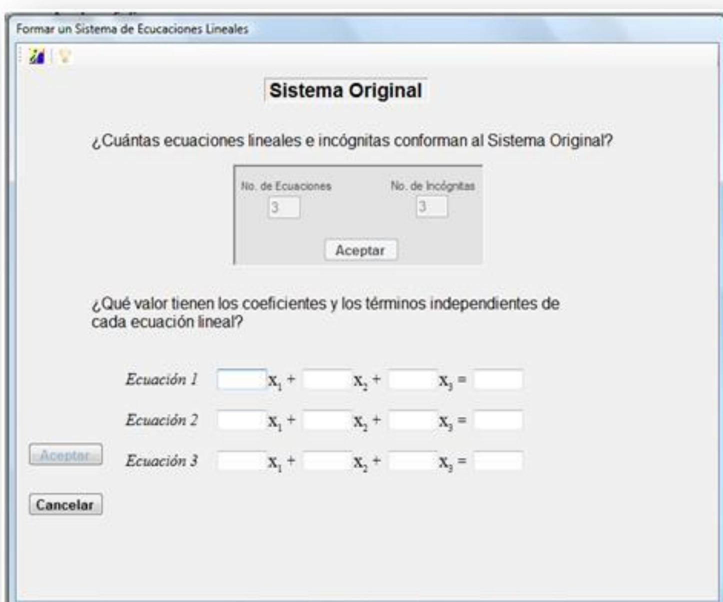
$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} S_{m\times n}$$

Para nosotros, es importante que ALSEL simule el trabajo realizado por un estudiante en lápiz y papel, y se apegue lo más posible a la formación en un registro de representación semiótica, en el sentido de Duval (ver capítulo 2, p. 50).

En este caso, requerimos la comprensión en la representación algebraica de un SEL.

En este sentido, la interfaz de ALSEL permite formar el sistema introduciendo, primero el número de ecuaciones y de incógnitas que lo conforman. Con esta información, el ambiente generará la representación algebraica del SEL, adecuada al rango solicitado, en donde el usuario introducirá cada uno de los coeficientes.

La siguiente imagen muestra el aspecto de la interfaz gráfica de la componente Formar Sistema con base en el diseño didáctico; se puede observar que la primera etapa es la introducción del número de ecuaciones y de incógnitas, una vez realizada esta acción, aparece el SEL con las dimensiones dadas, en el que se habrá de introducir cada coeficiente:



En este proceso el usuario puede cometer algún error sintáctico. Por ejemplo, olvidar la introducción del número de ecuaciones. Recordemos que uno de los parámetros de la usabilidad (ver capitulo 2, p. 66) es la identificación del error y la recuperación, en este sentido hemos enlistado algunos errores posibles que el usuario puede cometer en la formación del SEL, y que son tomados en consideración en el desarrollo computacional de esta componente:

1. Olvidar introducir el número de ecuaciones o de incógnitas, o algún coeficiente.
2. Introducir expresiones en el lugar de los coeficientes que no tengan sentido como: $^{-}/_{2}$; -+, etc.
3. Introducir expresiones en el lugar de los coeficientes como: $^{3}/_{0}$

Si estos errores surgen, el ambiente deberá acompañarlos con información que oriente al usuario a remediar el error. Así tenemos el último elemento del diseño didáctico de esta componente:

Si el usuario comete algún error sintáctico durante el proceso de formación del SEL, el ambiente habrá de informarle en todo momento, por medio de ventanas de mensajes que lo orienten sobre el error cometido.

Es importante señalar que inicialmente se había previsto en el ambiente el manejo de sistemas de ecuaciones lineales de $1\,x\,1$, $2\,x\,2$ y $3\,x\,3$, sin embargo, para cumplir totalmente el primer elemento didáctico del diseño (sistemas de ecuaciones lineales que se generen de problemas o situaciones reales) se incluyó la posibilidad de formar SEL $m\,x\,n$ con $1 \leq m \leq 9$ y $1 \leq n \leq 9$. Suficiente para el propósito de enseñanza; puesto que para sistemas mayores se utilizaría un software de aplicación.

Nuevamente hago hincapié sobre la trascendencia de ofrecer una herramienta que apoye al profesor a proponer y resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios o decimales, generados a partir del planteamiento de problemas reales. Por eso ALSEL admite la posibilidad de proponer sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes distintos a los enteros, y cuya resolución en el modo tradicional resulta sumamente complicada y tediosa en una clase. Ahora bien, ya que hemos conformado el diseño de la formación de un sistema de ecuaciones lineales, el siguiente paso es su resolución, y en nuestro caso, hacerlo por medio del método de Gauss (ver capítulo 2, pp. 33-36). En el siguiente apartado se exponen las tres componentes relacionadas con el proceso de resolución utilizando Gauss.

3.1.2 Eliminación.

Con **eliminación** nos referimos a la aplicación sucesiva de las operaciones elementales con el propósito de transformar el SEL original en un SEL equivalente de donde sea más fácil determinar el valor de las incógnitas (ver capítulo 2, pp. 28-36). El algoritmo o proceso de resolución de un SEL, utilizando el método Gauss, es recurrente. La aplicación de las operaciones elementales, se repite en cada SEL equivalente. El ambiente computacional realizará estos cálculos, sin embargo, el estudiante es quien debe tomar la decisión de qué operación elemental utilizar y cómo; por ejemplo, dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + \ \ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

El usuario puede elegir aplicar la tercera operación elemental, con el propósito de eliminar, de la segunda ecuación, a x_1; su actividad intelectual se centrará, en proveer al ambiente computacional, el escalar que multiplicado a la primera ecuación de como resultado una ecuación donde el coeficiente de x_1 sea -2 y por tanto, al sumar esta ecuación a la segunda ecuación lineal del sistema, de como resultado una ecuación en donde el coeficiente de x_1 sea cero. Es decir, el pivote.

Los cálculos aritméticos, relacionados con este proceso, los realizará el ambiente computacional, pero será el usuario quien formule el pivote y elija la operación adecuada. Desde luego, el estudiante puede elegir eliminar la otra variable.

En la aclaración anterior ya estamos tomando en cuenta dos elementos didácticos del modelo C&P: que el alumno siempre este efectuando una acción y en ningún caso imponer una forma de solución. En este sentido el primer elemento del diseño didáctico de esta componente de ALSEL es:

Ofrecer al usuario las tres operaciones elementales para que el mismo las seleccione y aplique con libertad.

Ahora bien, en el proceso de eliminación se generan sistemas equivalentes, estos, deben aparecer y mantenerse en la interfaz, junto con la explicación textual, de cómo aplicaron la operación elemental, en otras palabras, guiamos al usuario durante el proceso de resolución (ver capítulo 2, p. 65). De esta manera el segundo elemento tutorial de esta componente es:

Guiar al usuario durante el proceso de resolución mostrando en todo momento los SEL equivalentes generados por la aplicación de alguna de las operaciones elementales, así como una explicación textual de lo realizado.

Por ejemplo, si tenemos el SEL:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + \ \ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Y aplicamos la primera operación elemental así: permutamos la primera ecuación con la segunda en el ambiente habrá de aparecer:

Sistema original $3x_1 - 2x_2 = 1$ $2x_1 + \ x_2 = 0$	
Sistema equivalente $2x_1 + \ x_2 = 0$ $3x_1 - 2x_2 = 1$	Se aplicó la primera operación elemental: se permutó la ecuación 1 con la ecuación 2.

Ahora, si aplicamos la segunda operación así: multiplicamos $1/2$ a la primera ecuación. En el ambiente habrá de aparecer:

Sistema original $3x_1 - 2x_2 = 1$ $2x_1 + \ x_2 = 0$	
Sistema equivalente $2x_1 + \ x_2 = 0$ $3x_1 - 2x_2 = 1$	Se aplicó la primera operación elemental: se permutó la ecuación 1 con la ecuación 2.
Sistema equivalente $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$ $3x_1 - 2x_2 = 1$	Se aplicó la segunda operación elemental: se multiplicó $1/2$ a la ecuación 1.

Ahora bien, en el caso de la segunda y tercera operación elemental, en donde hay que multiplicar por un escalar a una ecuación, ALSEL habrá de aceptar la introducción de números enteros, fracciones y decimales. Entonces otro elemento en el diseño es:

El usuario podrá utilizar la segunda y tercera operación elemental introduciendo escalares de tipo entero, fracción o decimal.

Por otra parte, el ambiente habrá de facilitar al usuario, la decisión de cuándo, al resolver un sistema de ecuaciones lineales, la solución se encuentre en alguno de los tres casos posibles: solución única, infinitas soluciones y sin solución. Por ejemplo, si el sistema no tiene solución, en algún momento del proceso de resolución habrá un sistema equivalente que tenga una ecuación de la forma $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = c$ con $c \neq 0$, entonces el ambiente dará información, por medio de una ventana de mensaje, que hay una ecuación con la forma anterior y por lo tanto, el usuario tomará la decisión de si el sistema tiene o no tiene solución. Así tenemos otro elemento del diseño didáctico:

Una vez triangulado el SEL, el estudiante optará, por medio de una ventana de mensaje, si el SEL obtenido, tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

Al llegar a la situación anterior, el siguiente paso, es determinar la solución o la forma de las soluciones, si el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única o infinitas soluciones, con esto nos referimos a la componente **sustitución**.

Después de determinar la solución o soluciones se sugiere, de acuerdo al modelo didáctico C&P: validar los resultados obtenidos, es decir, sustituir en el sistema de ecuaciones lineales original los valores de las incógnitas encontrados, con el objetivo de verificar que satisfagan a dicho sistema, con esto nos referimos a la componente **verificación**.

Como ya mencionamos estos dos elementos no fueron desarrolladas debido al tiempo de una tesis de maestría. Aún así, en el capítulo 4, mostramos la manera en cómo se abordaron en un curso de álgebra lineal.

En el desarrollo posterior, en un trabajo doctoral, terminaremos el prototipo, con todas sus variantes.

3.1.3 Ayuda.

La componente denominada **ayuda,** sólo aparece a solicitud del usuario y tiene como propósito proporcionar al estudiante-usuario información correspondiente para navegar en el ambiente, así como informar sobre el objetivo del ACEM. La ayuda es un elemento importante dentro del diseño didáctico de un ambiente computacional, ya que acompaña al usuario durante la interacción con éste.

Además, la ayuda es un elemento en el ambiente computacional que mejora la usabilidad (ver capítulo 2, p. 66) en dos cualidades: la cualidad de aprender y la eficiencia. Es decir, cuando se interactúe por primera vez con el ambiente, éste habrá de ofrecer la suficiente información al usuario con el propósito de permitirle entender y acoplarse al diseño del ambiente, y después, a realizar cada una de las tareas del diseño. Por tal motivo, se ha pensado en tres tipos de ayuda: técnica, sintáctica y semántica.

Con técnica, nos referimos a la información relacionada con cómo navegar en el sistema y qué tipo de actividad requiere el ambiente. Sintáctica a la ayuda de orden sintáctico matemático y con semántica a la información breve y relativa al contenido matemático del problema en cuestión. Para aclarar lo anterior, expondremos la ayuda que hemos considerado habrá de acompañar a cada componente.

Ayuda en formar sistema:

Ayuda técnica

Formar sistema

1. Introduce el número de ecuaciones y de incógnitas en donde se indica. Los números que puedes introducir son enteros entre 1 y 9. Si estás seguro acepta.

2. Introduce cada uno de los coeficientes. Puedes introducir números enteros, fracciones o decimales, por ejemplo: 5, 70, $1/2$, $5/23$, 1.3 ó 0.4. Si estás seguro acepta.

3. Si deseas formar un sistema de ecuaciones lineales distinto cancela y elige nuevamente la opción **formar sistema**.

Ayuda semántica

Formar sistema

Un sistema de ecuaciones lineales está formado por un número de ecuaciones lineales y un número de incógnitas. Por ejemplo, el siguiente sistema de ecuaciones lineales está formado por tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Donde las incógnitas son x_1, x_2 y x_3. Los números que anteceden a las incógnitas se les denomina **coeficientes** y los números a la derecha del signo igual se les denomina **términos independientes**.

Ayuda en la componente eliminación:

Ayuda técnica

Eliminación

1. Selecciona alguna de las operaciones elementales.

2. Si elegiste la primera operación elemental, introduce en donde se indica los números en relación a que ecuaciones deseas permutar. Por ejemplo, si tienes un sistema de tres ecuaciones lineales los números que puedes introducir son los enteros 1, 2, y 3. Si estás seguro acepta.

3. Si elegiste la segunda operación elemental, introduce en donde se indica el escalar y el número de la ecuación. El escalar puede ser un número entero o fracción. Si estás seguro acepta.

4. Si elegiste la tercera operación elemental, primero introduce en donde se indica, el número de la ecuación a la que sumaras un múltiplo de otra ecuación. Segundo introduce en donde se indica el escalar y el número de la ecuación que quieres sumar a la ecuación anterior. El escalar puede ser un número entero o fracción. Si estás seguro acepta.

5. Si deseas salir, únicamente cancela.

Ayuda semántica

Eliminación

Las operaciones elementales son tres:

1ª Intercambio (o permutación) de ecuaciones: $Ecu.i \leftrightarrow Ecu.j$.

2ª Multiplicación de una ecuación por un escalar $\lambda \neq 0$: $Ecu.i \to \lambda(Ecu.i)$.

3ª Sumar a una ecuación un múltiplo de otra: $Ecu.i \to Ecu.i + k(Ecu.j)$.

Por ejemplo, dado el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - \ 9x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Si aplicas la primera operación así: $Ecu.1 \leftrightarrow Ecu.2$, generamos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 - \ 9x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Si aplicas la segunda operación al sistema anterior así: $Ecu.2 \rightarrow \frac{1}{2}(Ecu.2)$, generamos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &= 0 \\ x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \ 2x_3 &= \tfrac{3}{2} \\ x_1 + 3x_2 - \ 9x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Y si aplicas la tercera operación elemental al sistema anterior así: $Ecu.3 \rightarrow Ecu.3 + (-1)(Ecu.2)$, generamos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + 2x_3 &= \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{3}{2}x_2 - 7x_3 &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Se puede observar como la ayuda técnica se dirige a orientar al usuario en el uso del ALSEL. Por otro lado, la ayuda semántica ofrece información del contenido matemático por medio de ejemplos.

Con esto finalizamos el diseño de ALSEL; lo que sigue es desarrollar computacionalmente este diseño, las siguientes líneas están dedicadas a describir la programación de cada una de las componentes de ALSEL.

3.2 Desarrollo computacional de ALSEL.

La programación es un oficio semejante al arte, por ejemplo, un guitarrista pasa horas ensayando la misma pieza musical hasta obtener un cierto grado de perfección, al menos para él. En el caso de la programación hay que pasar horas desarrollando un programa hasta obtener el resultado deseado. Es una actividad en donde se requiere constancia, habilidad y conocimiento en el lenguaje de programación (esto último nos hace eternos estudiantes debido a los cambios vertiginosos en el ámbito computacional), al igual que el guitarrista debe tener constancia, habilidad y conocimiento del instrumento musical que toca.

He iniciado este apartado con una analogía parca, con la intención de mostrar el arduo trabajo de producir un ambiente computacional, y que al final, gran parte del trabajo no se puede observar. En fin, en este apartado describiremos el desarrollo computacional del diseño didáctico de ALSEL, para esto expondremos cada una de las aplicaciones construidas mostrando el código utilizado con su respectiva explicación, además de apoyar con imágenes del aspecto visual en la interfaz (monitor).

Para empezar, hablaremos brevemente del entorno de desarrollo donde construimos el ambiente computacional.

3.1.1 Ambiente de programación: *Visual Studio.NET 2005*.

De acuerdo con Ceballos (2006, p. 13) “Visual estudio es un conjunto completo de herramientas de desarrollo para construir aplicaciones Web, servicios Web, aplicaciones Windows o de escritorio, y aplicaciones para dispositivos móviles”.

Esencialmente, una aplicación es el programa computacional construido en cierto lenguaje; Visual Studio.Net ofrece un entorno en donde es posible construir una aplicación en los lenguajes Visual Basic, C#, C++ y JScript, que como Ceballos (2006, p. 6) menciona “Lo más atractivo quizás de todo esto es la capacidad de escribir, por ejemplo, parte de una aplicación en Visual Basic y el resto en C#.”, para nosotros también resulta atractivo la posibilidad de construir aplicaciones para la Web o para dispositivos móviles, imaginemos a un estudiante que pueda interactuar con una aplicación en su celular; un artefacto que en la actualidad en los alumnos está de moda.

Ahora bien, para desarrollar una aplicación utilizamos un formulario o forma-Windows que es una interfaz gráfica acompañada de una caja de herramientas cuyo contenido son controles (objetos) como un botón, una caja de texto o un menú, por mencionar alguno. Éstos pueden ser colocados en la forma-Windows.

Cada control tiene propiedades o atributos y métodos; las propiedades son características como el tamaño, color, fuente del texto, etcétera, y los métodos son rutinas que permiten realizar acciones como por ejemplo, minimizar o maximizar una ventana. El programa funciona, interactuando con los objetos. Lo anterior resume lo que se denomina programación orientada a objetos.

En términos generales, este es el entorno computacional de desarrollo utilizado para construir ALSEL. Para la escritura del código utilizamos el lenguaje de programación denominado C# o *C Sharp* del que hablaremos a continuación.

3.2.2 Lenguaje de programación: *C Sharp*.

Según Ceballos (2006, prólogo) "C# es un lenguaje orientado a objetos seguro y elegante que permite a los desarrolladores construir un amplio rango de aplicaciones seguras y robustas". Para realizar un programa en C# contamos con el uso de caracteres alfanuméricos.

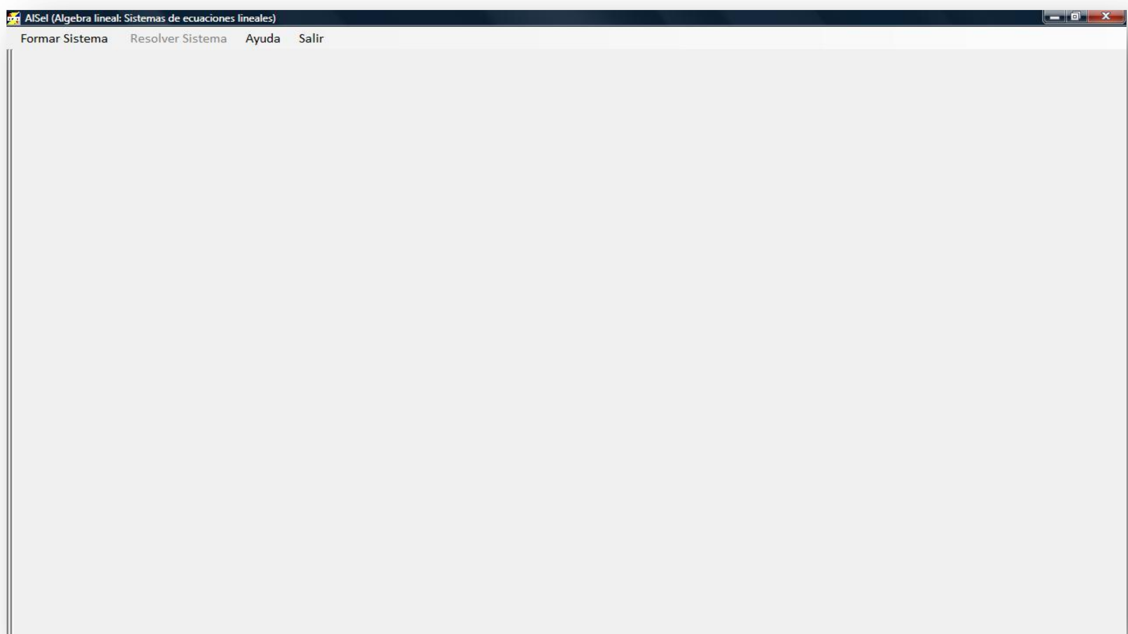
También contamos con operadores aritméticos, de relación, lógicos, unitarios, a nivel de bits, de asignación y condicionales; en términos generales los operadores son símbolos que indican cómo son manipulados los datos (Ceballos, 2006, p. 43), por ejemplo, los operadores aritméticos son: +, –, *, / y %. Por otra parte, también tenemos sentencias de control de ciclo, como *if*, *switch*, *while*, *do…While*, *for*, *foreach*, *break*, *continue* y *try…catch*, que nos permiten tomar decisiones y realizar un proceso repetidas veces (Ceballos, 2006, p. 56).

Por último, tenemos lo que se denomina *clase* que es "la representación simbólica de un objeto" (Ceballos, 2006, p. 71), por medio de una clase podemos construir un objeto; es decir, creamos sus atributos y métodos.

De manera resumida este es el lenguaje de programación con el que hemos creado ALSEL; será más claro en el siguiente apartado dedicado a exponer la programación de cada una de las componentes de ALSEL.

3.2.3 Programación de las componentes de ALSEL.

ALSEL es un proyecto Visual C# como aplicación Windows (Windows Application). La forma-Windows inicial la denominamos *FrmPrincipal*, en ella se encuentra un menú con las siguientes opciones: Formar Sistema, Resolver Sistema, Ayuda y Salir. La siguiente imagen muestra el aspecto de la ventana principal en el monitor:



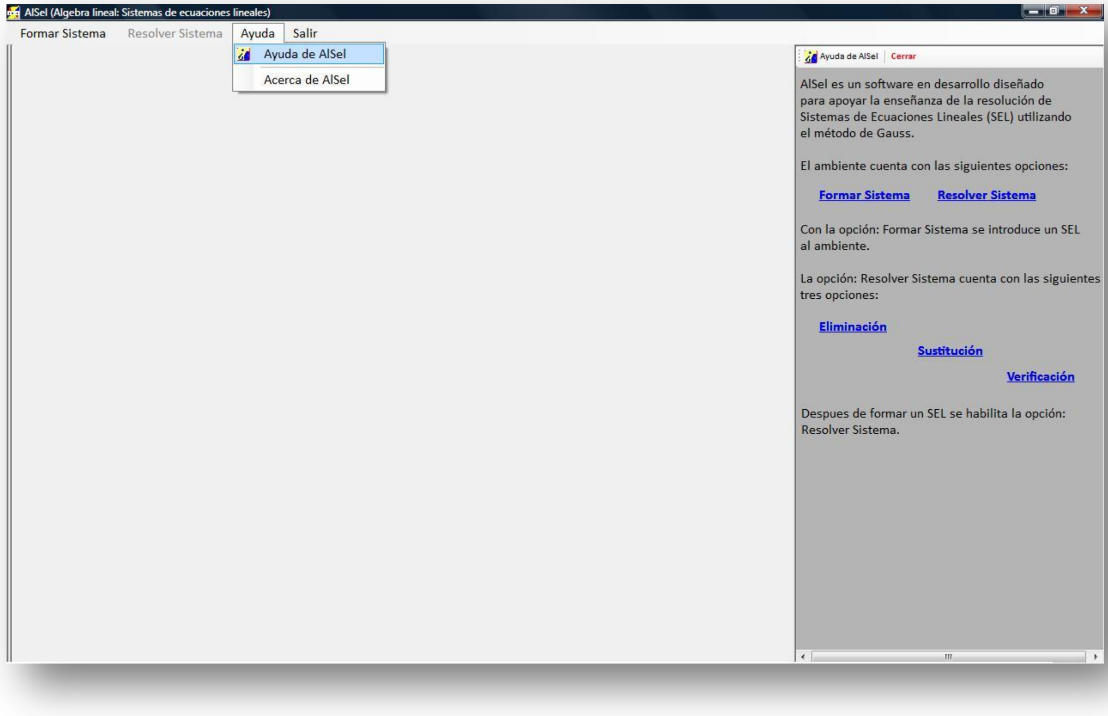
En la imagen se puede observar que la opción *Resolver Sistema* tiene un color tenue porque está inhabilitada, ya que, de acuerdo con el diseño didáctico, el usuario primero deberá introducir el sistema de ecuaciones lineales por medio de la opción *Formar Sistema*. Para la creación del menú se utilizó el objeto *MenuStrip* y para inhabilitar la opción Resolver Sistema se utilizó el atributo *Enabled*. Un hecho importante por comentar es que la ventana principal visualiza y mantiene el SEL que introduzca el usuario, así como el proceso de resolución del mismo.

Antes de exponer el desarrollo computacional de las opciones: Resolver Sistema y Formar Sistema, mostraremos el código de la opción *Ayuda* y *Salir*; en el caso de la Ayuda también mostraremos su aspecto en el monitor. Al elegir la opción Salir simplemente se detiene todo el proceso y se cierra automáticamente el ambiente; su código es:

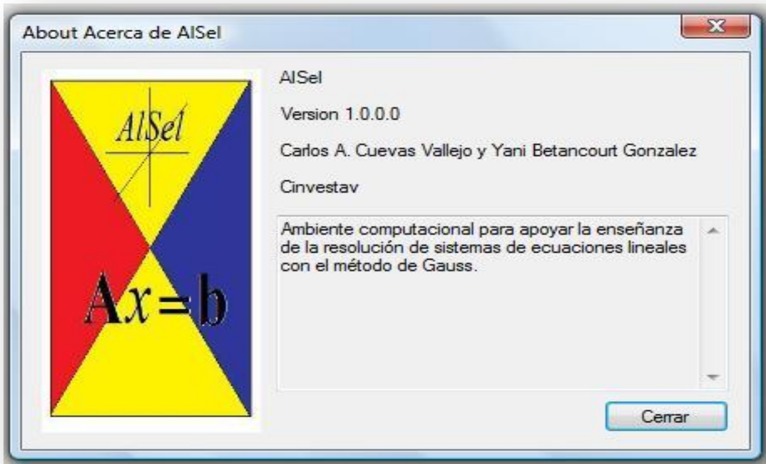
```
private void MnuSalir_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            Close();
        }
```

En el código anterior se aprecia que el método *Close* es simplemente invocado para cerrar todo el flujo.

En el caso de la opción Ayuda, esta consta de dos opciones: Ayuda de ALSEL y Acerca de ALSEL; al elegir Ayuda de ALSEL aparece del lado derecho una ventana en un gris fuerte, que esencialmente es un panel cuyo contenido es información general relacionada con la estructura sintáctica del ambiente; su aspecto es el siguiente:



La opción Acerca de ALSEL es una forma o ventana que contiene la información correspondiente a quién creó el ambiente, la versión, la compañía y una breve descripción del ambiente; antes de mostrar el aspecto de dicha ventana, es pertinente aclarar que este trabajo ha sido el fruto de la experiencia y el esfuerzo de una personalidad, por lo que en dicha información, merecidamente aparece su nombre. Su aspecto es el siguiente:



Ahora bien, de acuerdo con la conformación previamente establecida de ALSEL, la primera fase consiste en introducir un sistema de ecuaciones lineales al ambiente; para hacerlo, el usuario habrá de elegir la opción Formar Sistema la cual abrirá súbitamente una forma o ventana, que hemos denominado *FrmFormar*, en la que el usuario podrá introducir el sistema de ecuaciones lineales deseado.

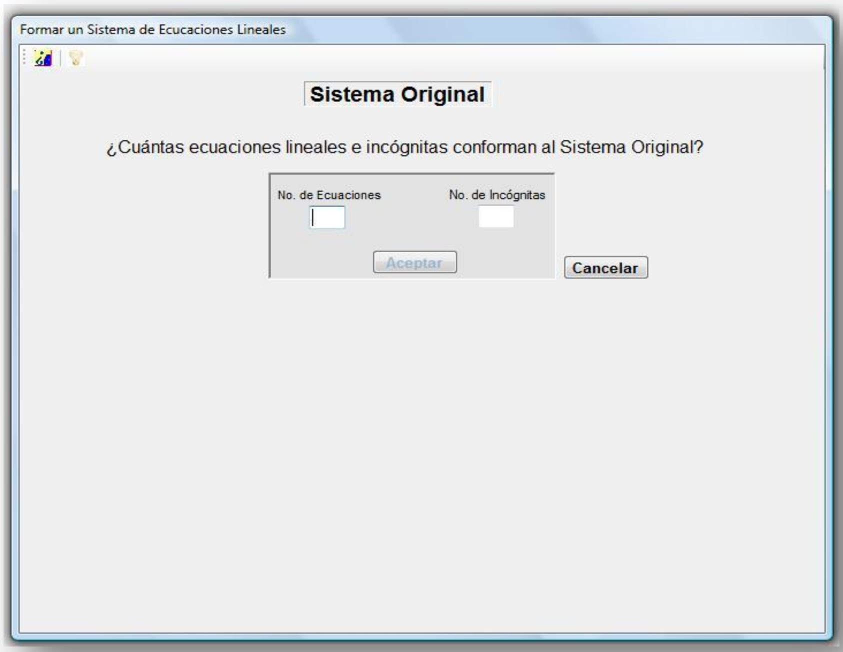
Con base en el diseño didáctico, el usuario primero deberá introducir el número de ecuaciones y de incógnitas, para esto creamos unas cajas de texto especiales; ya que estas filtran y controlan los caracteres del teclado. Este tipo de caja de texto es sumamente útil para evitar errores en el funcionamiento del ambiente, además de dirigir al usuario. Hay que mencionar que este objeto pertenece a la biblioteca del sistema CalcVisual (Cuevas & Mejía, 2003) y ha sido actualizada por Mejía del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Básicamente este objeto es una *Component Class* con el método *OnKeyPress* habilitado, que nos permite restringir el teclado, su código es el siguiente:

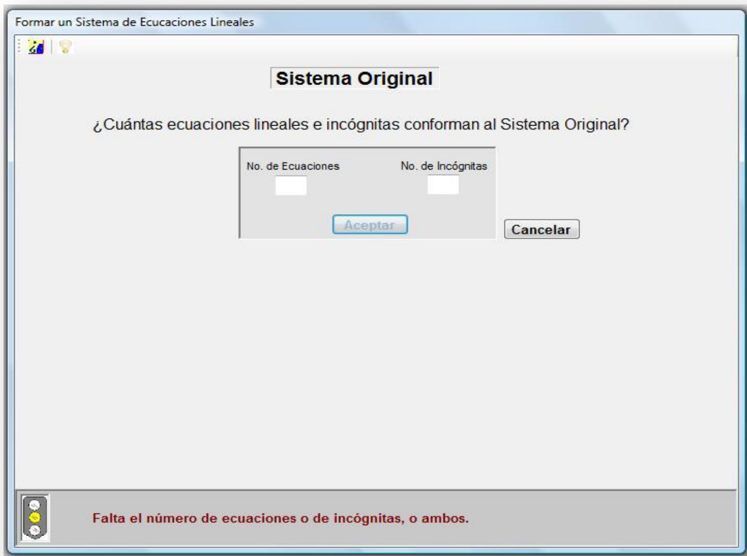
```
protected override void OnKeyPress(KeyPressEventArgs e)
        {
            base.OnKeyPress(e);
            string element = "123456789\b";
            char s = e.KeyChar;
            if (!element.Contains(s.ToString()))
            {
                e.Handled = true;
            }
```

Funciona de la siguiente manera: cuando el usuario oprime una tecla, el carácter que corresponde a ésta se almacena en **e**, si **e** es un carácter que no se encuentra en la lista de *element* (una lista acotada de caracteres, en nuestro caso los naturales del 1 al 9) lo deshabilita restringiendo su entrada en la caja de texto.

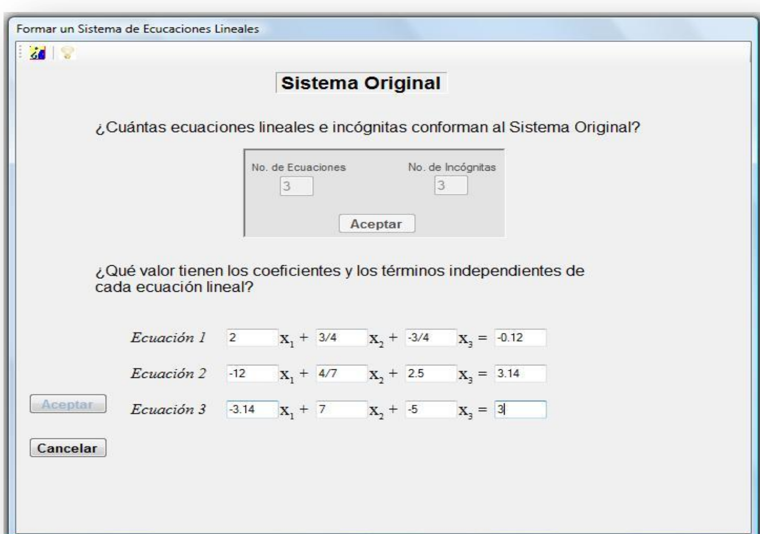
El aspecto de la interfaz en esta parte es la siguiente:



Debajo de las textos: No. de Ecuaciones y No. de Incógnitas, se encuentran las cajas de texto mencionadas. Cuando el usuario escriba los números correspondientes en ambas cajas de texto y oprima el botón Aceptar, aparecerá la representación algebraica del SEL con las dimensiones dadas; si por alguna razón se omitiera introducir algún dato correspondiente al número de incógnitas o de ecuaciones, el ambiente mostrará un mensaje mencionando que ha olvidado introducir el número de ecuaciones o el número de incógnitas; esta información aparece en la parte inferior de la ventana, su aspecto es el siguiente:



Si todo va bien, entonces aparecerá la representación algebraica del sistema de ecuaciones lineales con las dimensiones dadas, y el siguiente paso es introducir cada uno de los coeficientes, su aspecto es el siguiente:



El desarrollo computacional de esta parte fue difícil debido a un par de elementos esenciales:

1. Cajas de texto para introducir números enteros, fraccionarios y decimales.
2. Creación dinámica del sistema de ecuaciones lineales.

Respecto al primer punto, construimos cajas de texto especiales que permiten el uso de números enteros incluido el cero, el signo menos "–", la barra diagonal "/" y el punto ".", con la siguiente gramática: el signo menos siempre deberá aparecer al inicio y sólo una vez; al introducir el punto no se puede introducir la barra diagonal y viceversa, ambos se pueden introducir sólo una vez. El código es el siguiente:

```
protected override void OnKeyPress(KeyPressEventArgs e)
        {
            base.OnKeyPress(e);
            string CadElem = "0123456789-.\b/";
            char s = e.KeyChar;
            if (CadElem.Contains(s.ToString()))
            {
                switch (s)
                {
                    case '-':
               if (this.SelectionStart > 0 || this.Text.IndexOf(s) != -1)
                        {
                            e.Handled = true;
                        }
                        break;
                    case '.':
               if (this.Text.IndexOf(s) != -1 || this.Text.IndexOf('/') != -1)
                        {
                            e.Handled = true;
                        }
                        break;
                    case '/':
if(this.SelectionStart < 1||this.Text.IndexOf(s) != -1 || this.Text.IndexOf('.') != -1)
                        {
                            e.Handled = true;
                        }
                        break;
                    default:
                        break;
                }
            }
            else
            {
                e.Handled = true;
            }
```

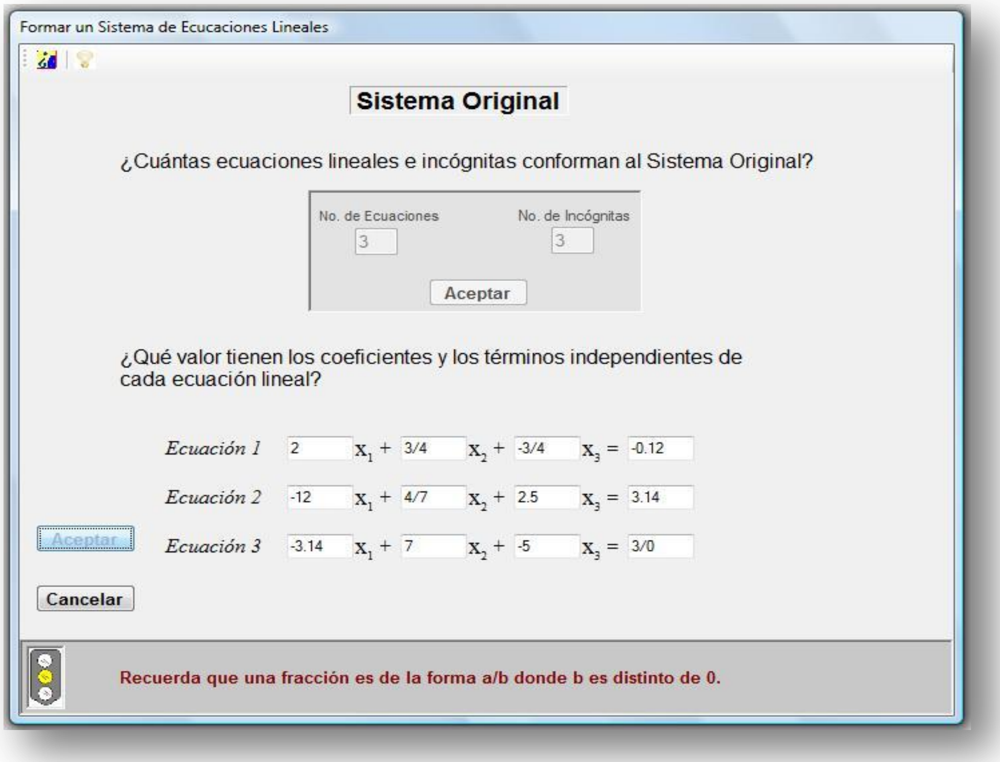
Uno de los desarrollos importantes el software educativo y más concretamente en sistemas tutoriales, es la construcción de filtros, que impidan la entrada de caracteres ilegales. Este tipo de programas han sido diseñados y perfeccionados en el tiempo por Cuevas (1994); Mejía (1996), Cuevas y Mejía (2003), creando así filtros, que permiten cierto tipo de error, pero evitan errores sin sentido al problema planteado. Esto por un lado perfila un tutor computacional flexible y por el otro, con cierta seriedad, obliga al usuario a reflexionar en errores de tipo sintáctico. Lo siguiente es un ejemplo de ello.

Por medio de la sentencia *switch* ejecutamos varias acciones; el primer caso es para el signo "menos", en donde por medio de la sentencia *if* permitimos la entrada sólo de un "menos" y en la primera posición de la cadena de caracteres; el segundo caso es para el "punto", en donde nuevamente por medio de un *if* permitimos la entrada de sólo un punto, verificando que no haya una barra diagonal. Y por último, el caso de la "barra diagonal", en donde por medio de un *if* evitamos poner en la primera posición de la cadena de caracteres este signo, e introducirlo siempre y cuando no haya un punto previamente.

Básicamente, con lo anterior evitamos que el estudiante introduzca expresiones sin sentido. Limitando el uso del teclado únicamente a caracteres de tipo número y los signos antes mencionados. El *switch* juega el papel de un interruptor que se enciende al encontrar alguno de los casos ya mencionados, apagándose al satisfacerse la condición para cada caso.

Con esto evitamos errores de sintaxis, por parte de los usuarios. Sin embargo. La flexibilidad permite cierto tipo de errores, que en caso de cometerlos, aparecerán algunos mensajes de error. Por ejemplo, si el usuario por alguna circunstancia introduce ${}^{2}/_{0}$, el ambiente le recordará que una fracción es de la forma $\frac{a}{b}$ donde $b \neq 0$.

La siguiente imagen muestra lo anterior:

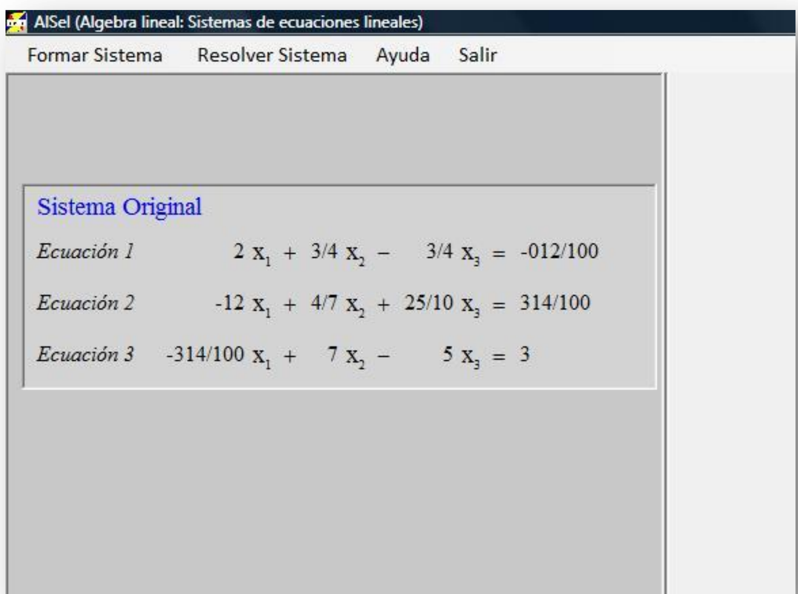


En la imagen se observa que el término independiente de la ecuación tres es $\frac{3}{0}$. Si el usuario oprime el botón Aceptar, entonces aparece súbitamente el mensaje que se encuentra en la parte inferior de la ventana y hasta que el usuario no solucione el error, el flujo del ambiente permanecerá varado.

Ahora bien, para la creación dinámica del sistema de ecuaciones lineales fue necesario definir matrices del tipo *RichTextBox* que representan a las incógnitas, y del tipo *FilTextM* para las cajas de texto especiales (en las que se introducen los coeficientes), así como las del tipo *Label* para los signos: más e igual; por último, los textos *Ecuación* i con $1 \leq i \leq 9$; esto se puede observar en la imagen anterior. Así pues, no hicimos un simple arrastré de objetos con el ratón a la forma, sino que de acuerdo con el número de ecuaciones y de incógnitas creamos el SEL de manera dinámica. Hacerlo nos llevó tiempo porque Visual C# define de manera muy particular, los objetos y sus atributos. El código es un poco largo, aproximadamente 240 líneas (ver anexo 1).

Antes de continuar con la descripción del desarrollo computacional, es conveniente mencionar el esfuerzo invertido en la producción de un ambiente computacional, tanto en tiempo como en el contexto intelectual; por ejemplo, el desarrollo computacional de la componente Formar Sistema, se ha resumido en unos párrafos, sin embargo ha sido el producto de meses de trabajo.

Continuando con la descripción, una vez introducidos los coeficientes de forma correcta y aceptado, la ventana correspondiente a la formación del SEL se cerrará automáticamente; el SEL formado aparece en la ventana principal, con esto, también ocurre la habilitación de la opción *Resolver Sistema* en el menú. La siguiente imagen muestra el “Sistema Original” y la habilitación en el menú de la opción “Resolver Sistema” (recordemos que al principio su color era tenue):



Para que el SEL aparezca con la estructura que se observa en la imagen (e.g., alineación de las incógnitas y de los signos), fue necesario crear un objeto con características especificas y con ciertas propiedades, el cual básicamente es un *User Control* al que denominamos *UsCtrlRepreSEL*. La idea esencial, es contar con un objeto que nos permita visualizar en la interfaz gráfica tanto el SEL original como aquellos que se generen con la aplicación de alguna de las tres operaciones elementales. Así cada sistema generado aparecerá en la interfaz gráfica bajo los siguientes criterios:

1. Todo coeficiente será transformado a su forma fraccionaria irreducible.
2. Si el denominador es "1", presentar el número en su forma entera.
3. Si el coeficiente es "0", desaparece la incógnita.
4. Si el coeficiente es "1", únicamente aparece la incógnita.
5. Si el coeficiente es "-1", aparece la incógnita precedida del signo "–".

Únicamente explicaremos el primer punto por ser considerado el de mayor trascendencia. De los otros cuatro se sugiere revisar el código que aparece en el Anexo 4.

En esencia, deseamos que los números introducidos sean convertidos a su representación racional, con el propósito de evitar errores numéricos, producidos por el redondeo propio de las computadoras, de consecuencia fatal. En términos computacionales, un número se captura como una cadena de caracteres, para poder evaluar la sintaxis. En nuestro caso, si la cadena de caracteres no tiene punto ni barra diagonal es un entero (recordemos que únicamente se permite al usuario introducir números enteros, fraccionaros o decimales); si tiene un punto es un decimal; y si tiene barra diagonal es una fracción. Para lo anterior creamos el método *ConaFrac*, el cual contiene el método *ConverEnt_Frac* que convierte un entero a fracción, el código es el siguiente:

```
public string ConverEnt_Frac(string ent)
        {
             string y=ent;
            if(ent!="0")
             {
                 y= ent + "/1";
             }
             if (ent=="0")
             {
                 y = ent+"/0";
             }
             return y;
        }
```

En el caso de un decimal, se ejecuta el método *ConverDec_Frac* que funciona así:

a. Se determina la longitud de la cadena con el método *Length*, por ejemplo, si la cadena es 2.5 su longitud es 3.
b. Se determina la posición del punto en la cadena con el método I*ndexOf*, el cual asigna a la primera posición “0”, a la segunda “1”, y así sucesivamente; en nuestro ejemplo (inciso a) la posición del punto es 1.
c. Sabemos que 2.5 se puede representar por la fracción 25/10, equivalente a eliminar el punto y dividir el entero resultante por una potencia de 10; es decir, 10^r donde r es la cantidad de números antes del punto. En nuestro caso calculamos a r de la siguiente forma $r = (longitud\ de\ la\ cadena) - (posición\ del\ punto + 1)$, por ejemplo, 2.5 tiene longitud igual a 3 y la posición del punto es 1 entonces $r = 3 - (1 + 1) = 1$.
d. Se elimina el punto de la cadena, y se añade la barra diagonal así como la potencia de 10.
e. Por último, se determina si la fracción es irreducible por medio de un método que también creamos, denominado *Frac_irredu*, el cual reduce la fracción hasta hacerla, valga la redundancia, irreducible (ver anexo 2) y en su flujo utiliza otro método que equivale a determinar el máximo común divisor entre dos enteros denominado *MCD* (ver anexo 3).

Este es el código relacionado con la conversión de un decimal a fracción:

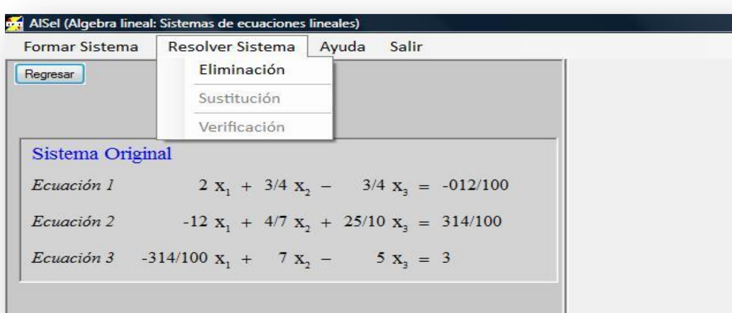
```
public string ConverDec_Frac(string dec)
  {
    int r = dec.Length - (dec.IndexOf(".") + 1);
    string y = dec.Remove(dec.IndexOf("."), 1) + "/" + Math.Pow(10, r).ToString();
    return y;
  }
```

Como se mencionó, la conversión de los números enteros y decimales a racionales obedece principalmente a la necesidad de minimizar el error de la aritmética interna de la máquina, evitando así, posibles errores conceptuales que desemboquen en resultados absurdos y por lo tanto, perjudiquen el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el caso de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en donde el número de operaciones aritméticas crece en extremo, al aumentar el rango, puede suceder que la no previsión de una aritmética inadecuada, en el programa computacional, provoque que un SEL con solución única, resulte ser, un SEL sin solución.

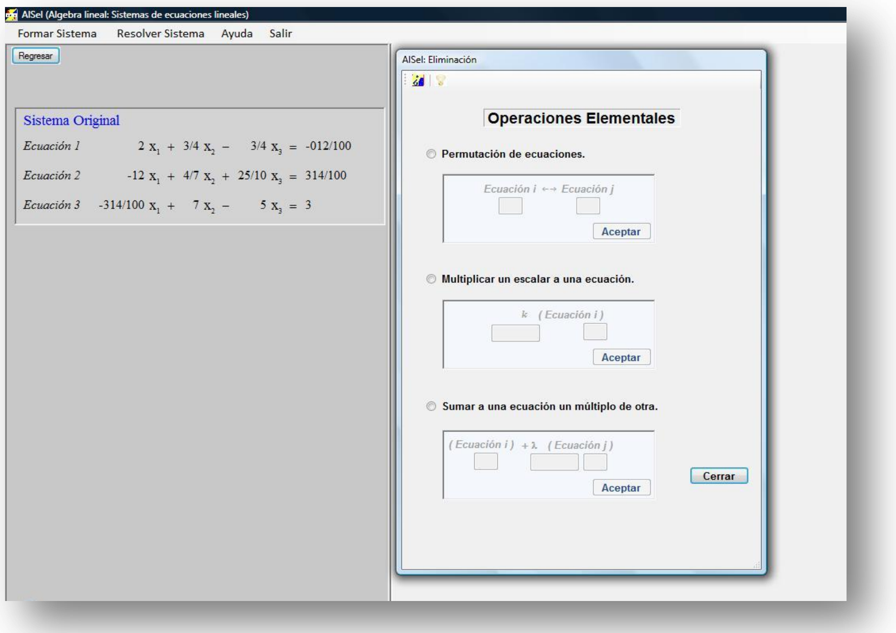
Hasta aquí se cierra, digámoslo así, la primera etapa en el desarrollo computacional del diseño de ALSEL: la formación del sistema de ecuaciones lineales. La segunda etapa corresponde precisamente al desarrollo computacional de los objetos necesarios para la resolución paso a paso del sistema de ecuaciones lineales formado (Sistema Original); es decir, el desarrollo de la componente: Eliminación. Por tal motivo, hemos organizado la descripción del desarrollo computacional en tres puntos representativos del orden de acción en el proceso de resolución de un SEL:

- La elección de la operación elemental.
- La ejecución o aplicación de la operación elemental.
- El resultado de la aplicación de la operación elemental.

Para iniciar el proceso de resolución del SEL elegimos la opción: Resolver Sistema, y de ella, la subopción: Eliminación; la siguiente imagen muestra lo anterior:



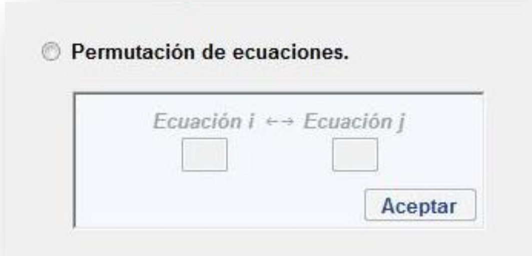
La elección de la subopción: eliminación, súbitamente aparece una ventana superpuesta a la ventana principal. Dicha ventana, básicamente es una forma, denominada internamente como *FrmOperElem*; en ella se encuentran ordenadas las tres operaciones elementales como se observa en la siguiente imagen:



La elección de la operación elemental se hace por medio del objeto denominado *RadioButton*, el cual, redundando es un botón de elección. En la imagen anterior se observa que cada operación elemental tiene asociada cajas de texto y un botón aceptar, objetos que se encuentran inhabilitados. El código correspondiente a las acciones internas en la elección de la operación elemental se encuentra en el anexo 5.

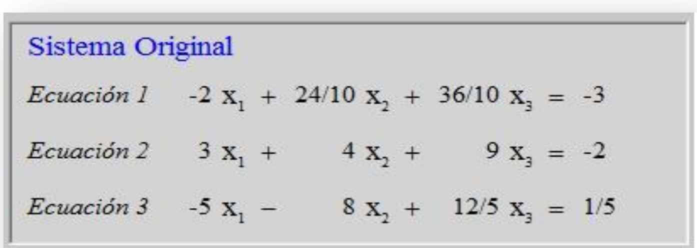
Un elemento importante que merece resaltarse, es el acompañamiento de cierto texto sintáctico relacionado con la operación elemental, el cual funciona como guía para el usuario en la aplicación de la operación elemental. De hecho, se puede observar en la imagen anterior que cada caja de texto está asociada a dicho texto, para dar mayor claridad explicaremos esto tomando como ejemplo a la primera operación elemental.

Para la primera operación elemental tenemos la siguiente estructura:

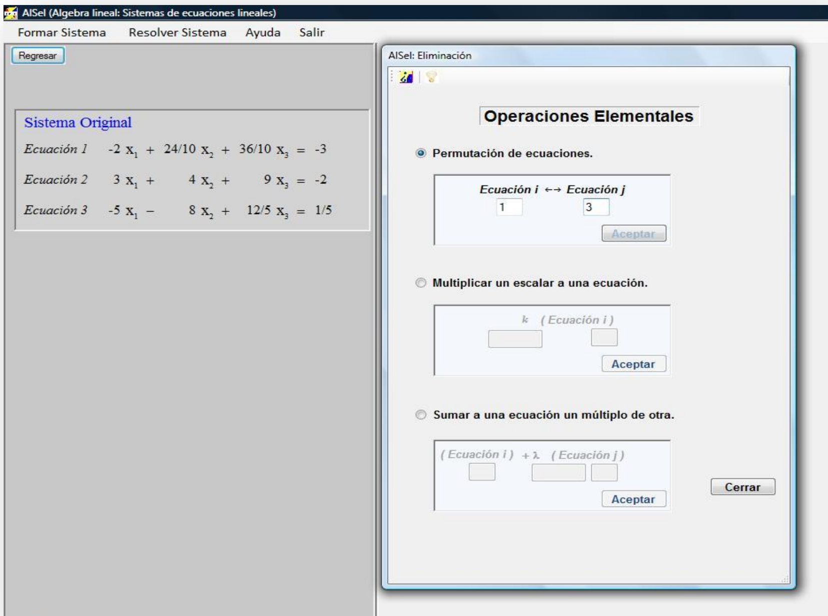


Cuando el usuario elija esta opción, los objetos correspondientes se habilitan, entonces se procede a introducir en las cajas de texto el número de las ecuaciones a permutar. Así, el texto **Ecuación *i* ←→ Ecuación *j*** es una representación precisamente del cambio de lugar de las ecuaciones lineales. Ahora bien, en términos del programa computacional la información que el usuario introduce se guarda en un arreglo tipo cadena con cuatro entradas denominado *EleccOper*, el cual funciona de la siguiente manera: la primera entrada corresponde a la operación elemental elegida, así el número “1” corresponde a la operación elemental: permutación de ecuaciones; el “2” a la operación: multiplicar un escalar a una ecuación; y el “3” a la operación: sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

La segunda entrada del arreglo *EleccOper* corresponde al escalar que será multiplicado a una ecuación, en el caso de la primera operación, esta entrada tiene asignado el valor “0”, ya que no hay escalar por multiplicar. La tercera entrada corresponde al número de una de las ecuaciones lineales y la cuarta entrada al número de otra ecuación lineal. Por ejemplo, dado el siguiente sistema original:



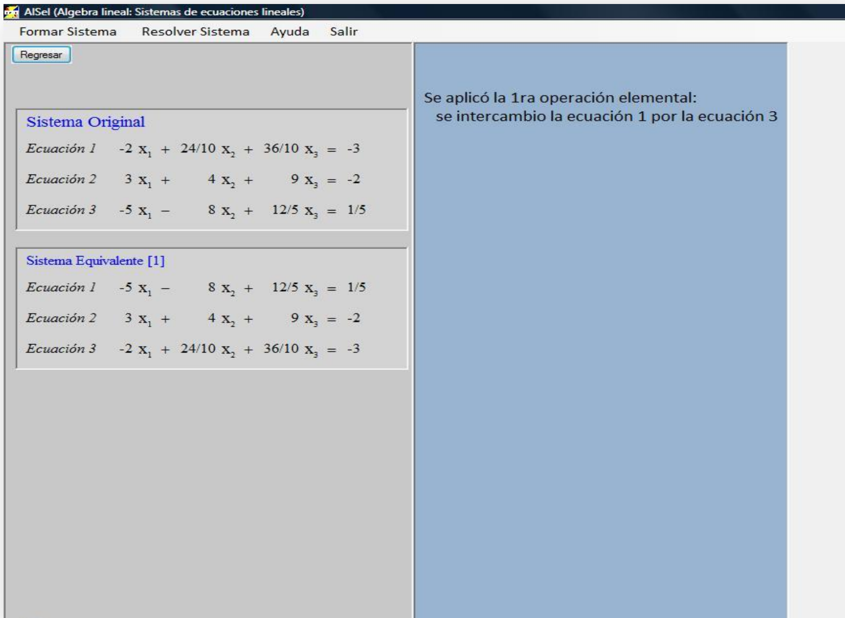
Deseamos permutar la ecuación 1 y la ecuación 3, entonces elegimos la primera operación elemental, por lo tanto en las cajas de texto correspondientes introducimos los números 1 y 3 respectivamente, como se observa en la siguiente imagen:



Al oprimir el botón aceptar se acciona el siguiente código:

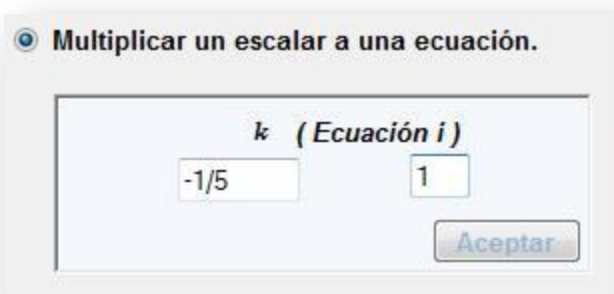
```
private void BtnPnl1raOperAceptar_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            int Eci,Ecj;
            if (!int.TryParse(FtxtEcui.Text, out Eci) ||
!int.TryParse(FtxtEcuj.Text, out Ecj))
            {

            }
            else
            {
                EleccOper[0] = "1";
                EleccOper[1] = "0";
                EleccOper[2] = Eci.ToString();
                EleccOper[3] = Ecj.ToString();

                Close();
            }

        }
```

Y como podemos observar, en el arreglo *EleccOper* guardamos la información en los términos antes mencionados. Esta información es recuperada en la forma principal en donde se lleva a cabo la ejecución de la operación elemental elegida (ver anexo 6); es decir, se realizan los cálculos correspondientes a dicha operación, y cuyo resultado se observa en la siguiente imagen:

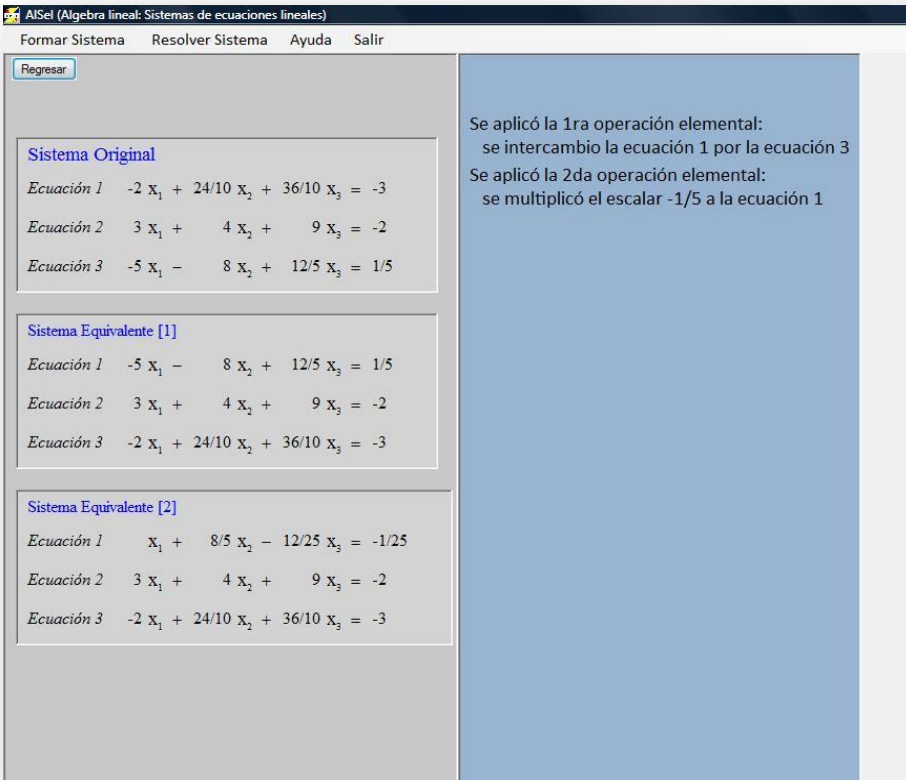


En la imagen se observa la aparición del sistema de ecuaciones lineales equivalente [1] al aplicar la primera operación elemental, así como un texto guía concerniente al tipo de operación que se utilizó y cómo fue utilizada (ver anexo 6) que corresponde a la ejecución de las operaciones elementales.

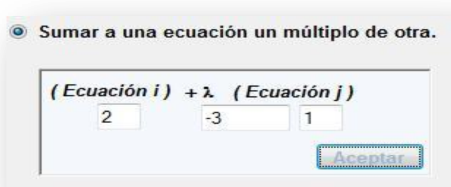
De forma equivalente, se desarrollaron las restantes operaciones elementales, por ejemplo, apliquemos la segunda operación elemental al *sistema equivalente [1]* de la imagen anterior como se propone en la siguiente imagen:



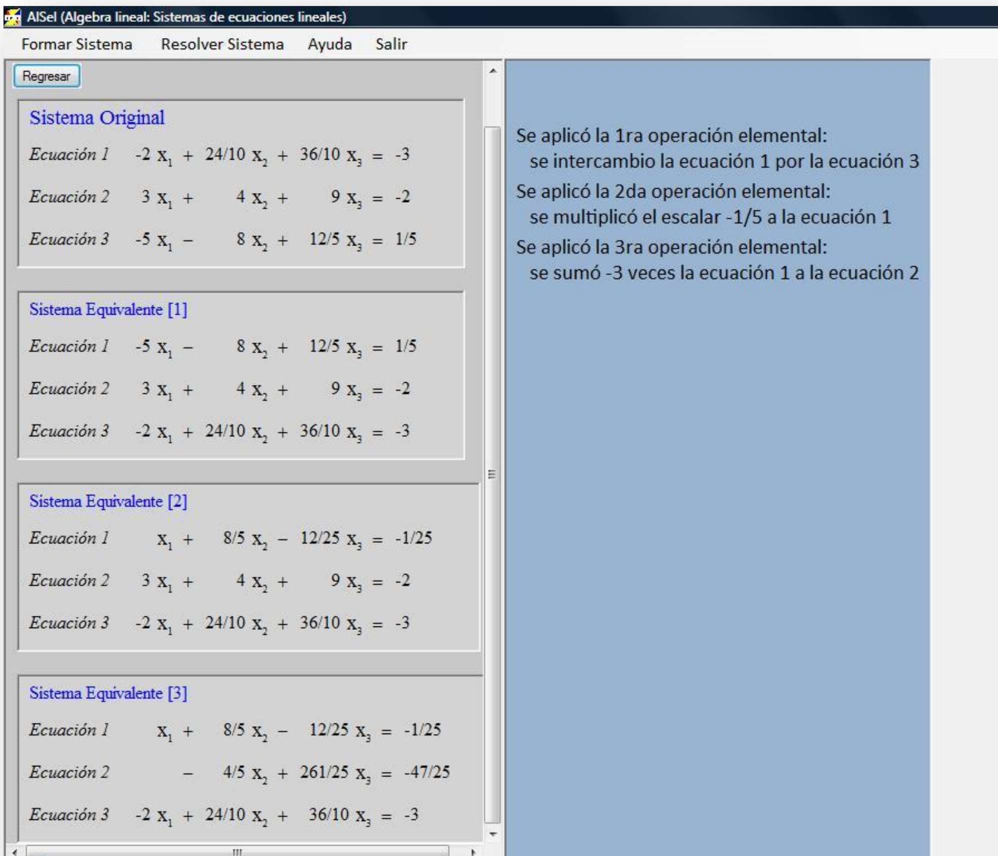
Observamos que la primera caja de texto (de izquierda a derecha) corresponde a k, es decir, al escalar que será multiplicado a la ecuación lineal deseada, y en la segunda caja de texto el número correspondiente a dicha ecuación. De igual forma, en el arreglo *EleccOper* se guarda la información introducida en las cajas de texto y que será utilizada para llevar a cabo las correspondientes operaciones. Así, el resultado de aplicar esta operación elemental es el siguiente:



Se puede observar la aparición de un nuevo sistema equivalente; así como el respectivo texto guía, en el que se menciona la operación elemental aplicada y cómo fue aplicada. Por último, apliquemos la tercera operación elemental de la siguiente forma:



Para este caso, la primera caja de texto corresponde al número de la ecuación lineal a la que se sumará el múltiplo de otra; la segunda caja de texto corresponde a λ, es decir, el escalar que será multiplicado a una ecuación lineal, cuyo resultado será sumando a la ecuación i; y la tercera caja, corresponde a la ecuación lineal a la que habrá de multiplicarse el escalar λ, recordemos que el código correspondiente se encuentra en el anexo 5. El resultado es el siguiente:



Donde el Sistema Equivalente [3] es el generado por la aplicación de la tercera operación elemental.

En este punto conviene exponer el código relacionado con la aritmética racional. Iniciemos con la suma, este es el código:

```
public string SumaFrac(string A, string B)
        {
            string C;
```

```
            long DividendoC;
            long DivisorC;
                int posA = A.IndexOf("/");
                int DividendoA = int.Parse(A.Remove(posA));
                int DivisorA = int.Parse(A.Remove(0, posA + 1));

                int posB = B.IndexOf("/");
                int DividendoB = int.Parse(B.Remove(posB));
                int DivisorB = int.Parse(B.Remove(0, posB + 1));

                if (DividendoA==0 && DivisorA==0)
                {
                DividendoC = DividendoB;
                DivisorC = DivisorB;
            }
            else if (DividendoB == 0 && DivisorB == 0)
            {
                DividendoC = DividendoA;
                DivisorC = DivisorA;
            }
            else
            {
      DividendoC = (DividendoA * DivisorB) + (DividendoB * DivisorA);
                DivisorC = DivisorA * DivisorB;
            }
                C = DividendoC + "/" + DivisorC;
                return C;

        }
```

Básicamente, para sumar dos fracciones creamos el método *SumaFrac*. Una función de dos variables del tipo *string* (cadena de caracteres), las cuales son precisamente los racionales a sumar. En el algoritmo se puede observar que primero dividimos a cada racional en dos partes: el dividendo y el divisor, después realizar la suma de la forma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. El resultado de la suma se guarda en una variable, también del tipo *string*, que es el valor que entrega el método al ser aplicado.

El caso de la multiplicación es parecido al de la suma, este es el código:

```
public string MulFrac(string A, string B)
        {
            int posA = A.IndexOf("/");
            int DividendoA = int.Parse(A.Remove(posA));
            int DivisorA = int.Parse(A.Remove(0, posA + 1));

            int posB = B.IndexOf("/");
```

```
            int DividendoB = int.Parse(B.Remove(posB));
            int DivisorB = int.Parse(B.Remove(0, posB + 1));

            int DividendoC = DividendoA * DividendoB;
            int DivisorC = DivisorA * DivisorB;

            string C = DividendoC + "/" + DivisorC;

            return C;
        }
```

Aquí el método es denominado *MulFrac*, también una función de dos variables del tipo *string*. De igual forma dividimos a cada fracción en sus componentes y realizamos la multiplicación habitual entre fracciones: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; el producto se guarda en una variable de tipo *string*, que regresa dicho método al ser aplicado.

Después de haberse realizado las operaciones, se aplica el método *Frac_irredu*, una función de una variable que nos permite hacer a una fracción irreducible, el código es el siguiente:

```
public string Frac_irredu(string frac)
        {
            string frairre;
            if (frac.Contains("/"))
            {
                int posbarra = frac.IndexOf("/");
                int Dividendo = int.Parse(frac.Remove(posbarra));
                int Divisor = int.Parse(frac.Remove(0, posbarra + 1));
                int flux = 0;
                if (Dividendo < 0)
                {
                    flux = 1;
                    Dividendo = -1 * Dividendo;
                }
                int mcd = MCD(Dividendo, Divisor);

                int Divid = 0;
                int Divis = 0;
                if (mcd!=0)
                {
                Divid = Dividendo / mcd;
                Divis = Divisor / mcd;
                }

                if (flux == 1)
                {
                    frairre = "-" + Divid.ToString() + "/" + Divis.ToString();
                }
                else
                {
                    frairre = Divid.ToString() + "/" + Divis.ToString();
                }
            }
            else
```

```
            {
                frairre = "0";
            }

            return frairre;
        }
```

Básicamente, dividimos nuevamente a la fracción en dos partes: el dividendo y el divisor. Y aplicamos el método *MCD* para encontrar el máximo común divisor de las dos partes de la fracción, su código es el siguiente:

```
private int MCD(int m, int n)
        {
            int max = Math.Max(m, n);
            int min = Math.Min(m, n);
            int res;
            if (m == 0 || n == 0)
            {
                min = 0;
            }
            else
            {
                Math.DivRem(max, min, out res);
                while (res > 0)
                {
                    max = min;
                    min = res;
                    Math.DivRem(max, min, out res);
                }
            }
            return min;
        }
```

Una vez encontrado el máximo común divisor, dividimos a cada parte de la fracción por el MCD y guardamos el resultado en una variable tipo *string* denominada *frairre*, la que regresa el método *Frac_irredu*.

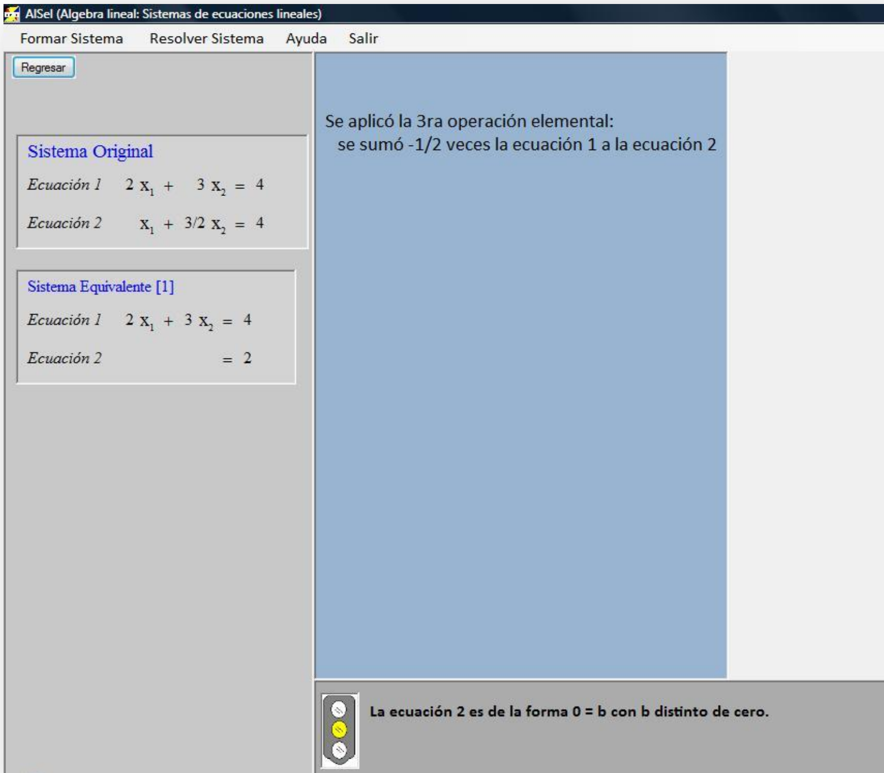
Así, cada vez que se aplica una operación elemental se pone en juego el código anterior. Vale la pena señalar, que la aritmética racional del ambiente aún necesita mejorarse o quizá modificarse, ya que en el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, las fracciones crecen aceleradamente, y debido a que en las operaciones también se utilizan variables del tipo *int*, llega el momento en que ya no es posible manipular a las fracciones por la limitante computacional relacionada con la longitud acotada del tipo de variable.

Por último, para cerrar este capítulo y desde luego el desarrollo computacional de la componente: Eliminación, expondremos las condiciones de paro. Nos referimos con condiciones de paro, a los tres casos posibles de un sistema de ecuaciones lineales; empezamos con el caso en que un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.

Sabemos que un SEL que no tiene solución (ver capítulo 2, apartado 2.1.1) nos llevará en el proceso de resolución a un SEL equivalente en donde alguna de sus ecuaciones tenga la forma $0 = b$ con $b \neq 0$, en este sentido, la idea es verificar los coeficientes de cada ecuación y su término independiente. Así para el caso de un SEL sin solución tenemos el siguiente código:

```
for (int i = 0; i < Necu; i++)
                {
                    if (NecuCas2[i] == Ninc && ConvEnt(CadTemp[i, Ninc]) != "0")
                    {
   LblSitua.Text = "La ecuación "+(i+1)+" es de la forma 0 = b con b distinto de cero.";
                        PnlFrmPrincipalSitua.Visible = true;
                    }
                }
```

Se puede observar que, por medio de un proceso iterativo revisamos a cada ecuación lineal de los sistemas equivalentes que se van generando durante el proceso de resolución; cumpliéndose la condición de que todos los coeficientes de alguna de las ecuaciones sean cero y el término independiente distinto de cero, entonces en la interfaz gráfica aparecerá cierto texto, como se observa en la siguiente imagen:



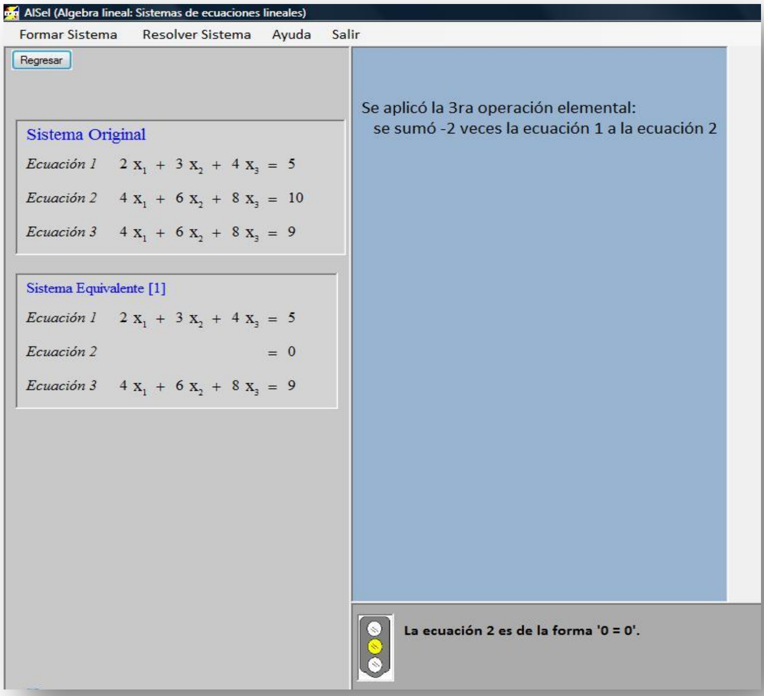
En la parte inferior de la ventana aparece la información alusiva al tipo de sistema, en este caso cuando no tiene solución porque la ecuación 2 es de la forma $0 = b$ con $b \neq 0$. Sin embargo, es el usuario quien debe decidir, si el sistema de ecuaciones lineales tiene o no solución.

Para el caso en que un SEL tenga infinitas soluciones, es necesario verificar si durante el proceso de resolución aparece alguna ecuación lineal de la forma $0 = b$ donde $b = 0$, pero el texto que aparece para esta situación deja abierta la posibilidad de que el sistema en pasos subsecuentes no tenga solución. El código es el siguiente:

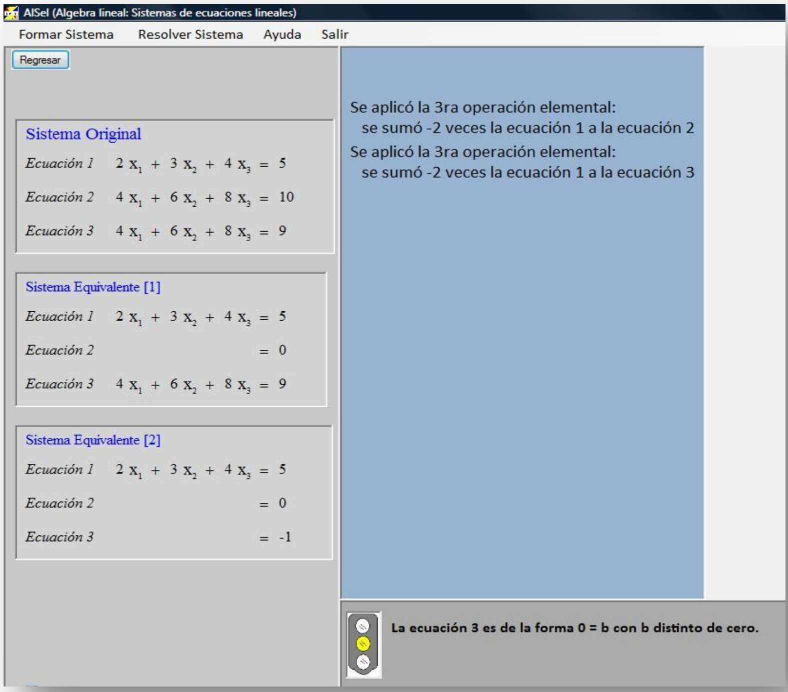
```
for (int i = 0; i < Necu; i++)
                {
                    }
                    if (NecuCas2[i]==Ninc && ConvEnt(CadTemp[i,Ninc])=="0")
                    {
                        LblSitua.Text = "La ecuación "+(i+1)+" es de la forma 0 = 0 \n\n";
                        PnlFrmPrincipalSitua.Visible = true;
                    }
                }
```

Veamos un par de ejemplos. Primero uno en donde no cabe duda de que el SEL tenga infinitas soluciones, es el siguiente:

Ahora el caso de un SEL, el cual durante el proceso de resolución se genera un SEL equivalente con una ecuación de la forma $0 = b$ donde $b = 0$ pero más adelante se genera otro sistema de ecuaciones lineales equivalente con una ecuación de la forma $0 = b$ donde $b \neq 0$, por lo tanto el sistema no tiene solución:


AlSel (Algebra lineal: Sistemas de ecuaciones lineales)
Formar Sistema
Resolver Sistema
Ayuda
Salir
Regresar
Sistema Original
Ecuación 1 2 x1 + 3 x2 + 4 x3 = 5
Ecuación 2 4 x1 + 6 x2 + 8 x3 = 10
Ecuación 3 4 x1 + 6 x2 + 8 x3 = 9
Sistema Equivalente [1]
Ecuación 1 2 x1 + 3 x2 + 4 x3 = 5
Ecuación 2 = 0
Ecuación 3 4 x1 + 6 x2 + 8 x3 = 9
Se aplicó la 3ra operación elemental:
se sumó -2 veces la ecuación 1 a la ecuación 2
La ecuación 2 es de la forma '0 = 0'.

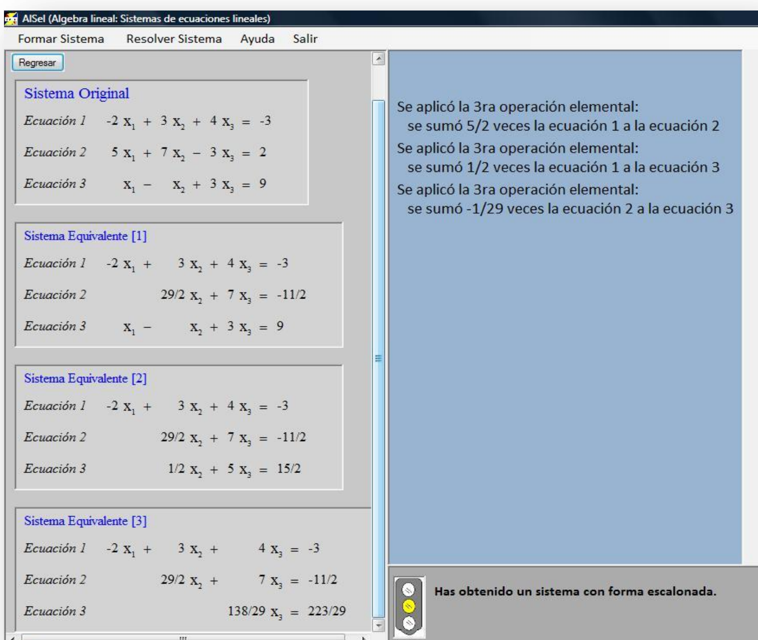
Y ahora:


AlSel (Algebra lineal: Sistemas de ecuaciones lineales)
Formar Sistema
Resolver Sistema
Ayuda
Salir
Regresar
Sistema Original
Ecuación 1 2 x1 + 3 x2 + 4 x3 = 5
Ecuación 2 4 x1 + 6 x2 + 8 x3 = 10
Ecuación 3 4 x1 + 6 x2 + 8 x3 = 9
Sistema Equivalente [1]
Ecuación 1 2 x1 + 3 x2 + 4 x3 = 5
Ecuación 2 = 0
Ecuación 3 4 x1 + 6 x2 + 8 x3 = 9
Sistema Equivalente [2]
Ecuación 1 2 x1 + 3 x2 + 4 x3 = 5
Ecuación 2 = 0
Ecuación 3 = -1
Se aplicó la 3ra operación elemental:
se sumó -2 veces la ecuación 1 a la ecuación 2
Se aplicó la 3ra operación elemental:
se sumó -2 veces la ecuación 1 a la ecuación 3
La ecuación 3 es de la forma 0 = b con b distinto de cero.

Por último, el caso de un SEL que tiene solución. La idea es la siguiente: por medio de un proceso iterativo contamos los coeficientes iguales a cero antes de los pivotes, así como los pivotes; cuando se ha generado un SEL equivalente de forma escalonada, la suma de coeficientes iguales a cero y los pivotes debe ser igual $\frac{m(m+1)}{2}$ donde m es igual al número de ecuaciones. El código es el siguiente:

```
int Niidif0 = 0;
for (int i = 0; i < Necu; i++)
     {
   if (ConvEnt(CadTemp[i, j]) != "0" && j == i || ConvEnt(CadTemp[i, j]) == "0" && j<i)
        {
           Niidif0 += 1;
        }
      }

for (int i = 0; i < Necu; i++)
                {

                    if (Niidif0==((Ninc*(Ninc+1))/2))
                    {
                 LblSitua.Text = "Has obtenido un sistema con forma escalonada. \n\n";
                 LblSitua.Text += "¡El sistema tiene solución!";
                 PnlFrmPrincipalSitua.Visible = true;
                    }
                }
```

Hay que tomar en cuenta, que el algoritmo anterior sólo se cumple para sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, y aún no desarrollamos un algoritmo general. Para consolidar lo expuesto ofrecemos el siguiente ejemplo:



En la imagen anterior se puede observar el proceso de resolución, así como el *sistema equivalente [3]* con forma escalonada, y el mensaje correspondiente a que se ha obtenido un SEL equivalente con forma escalonada; por lo tanto el sistema original tiene solución.

Por último, recordemos que las componentes sustitución y verificación aún se encuentran en desarrollo. Así que, el usuario deberá aplicar el proceso de sustitución regresiva, siempre y cuando no haya una indeterminación, para encontrar la solución del sistema o la forma de las soluciones. Así como verificar sus resultados en la forma tradicional.

En fin, éste ha sido el resumen correspondiente al desarrollo computacional del ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales al que denominamos ALSEL, recordando que uno de los propósitos generales es promover una mejora en la comprensión de los conceptos del álgebra lineal.

CAPÍTULO 4 VALIDACIÓN DE ALSEL

En este capítulo expondremos los resultados obtenidos, al implementar ALSEL en un curso de álgebra lineal con alumnos del segundo semestre de Ingeniería en Computación del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, de la Universidad Autónoma del Estado de México. Iniciamos con la descripción del grupo de estudio. En el segundo apartado, presentamos el diseño de una experiencia didáctica, con la intención de explorar las virtudes y defectos del ambiente, así como de evaluar en qué medida se cumple el propósito didáctico del mismo. En los siguientes apartados describimos y exponemos los resultados de cada momento de la experiencia didáctica y en el último apartado analizamos el examen final realizado por los alumnos con el apoyo de ALSEL, así como algunas de las observaciones derivadas de dicha actividad, y finalizamos presentado algunos comentarios de los estudiantes respecto al ambiente.

4.1 Características del grupo de estudio.

En el programa de estudios de la carrera de Ingeniería en Computación del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco de la Universidad Autónoma del Estado de México, se contempla en el segundo semestre, el curso obligatorio de Álgebra Lineal como parte de la formación de sus alumnos. De acuerdo con la secuencia didáctica propuesta en dicho programa, el tema inicial son los sistemas de ecuaciones lineales.

Por invitación del Dr. Cuevas (Investigador Titular del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN), quien se encontraba realizando su año sabático en dicha institución, participé como profesor adjunto de la mencionada asignatura del segundo semestre (de febrero a junio de 2009) de ICO (Ingeniería en computación). En lista se tenían registrados un total de 37 alumnos, sin embargo la asistencia promedio por clase fue de aproximadamente 35 alumnos. La clase se impartía todos los martes, tres horas, con un horario de 11 de la mañana a 2 de la tarde.

También se tenía asignada una sala de cómputo, con 24 unidades de cómputo. un proyector y una pantalla de proyección. La sala podía utilizarse los martes a partir de las 12 del día.

En términos generales estás son las características del grupo de estudio y las condiciones de infraestructura con las se contaron. A continuación exponemos el diseño de una experiencia didáctica para validar ALSEL.

4.2 Diseño de la experiencia didáctica.

Como hemos mencionado, la esencia de este trabajo ha sido la creación de un ambiente computacional, que facilita y para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, en la idea de para promover una mejor comprensión de los conceptos del álgebra lineal. Esto sin embargo, no exime, si no por el contrario, nos compromete a corroborar en qué medida el ACEM satisface el propósito didáctico planteado. En nuestro caso, y por el momento, hemos hecho una validación de ALSEL a nivel de exploración, con el propósito: primero, de observar su efecto en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y segundo, verificar el grado de amigabilidad de

ALSEL y posibles “pulgas” del mismo. Con el fin de retroalimentar la configuración del diseño.

Para cumplir con la idea anterior, se diseño la siguiente experiencia didáctica:

1. Diseñar y aplicar un pretest, en la idea de constatar el nivel de competencia de los alumnos, así como de prerrequisitos.
2. Diseñar e implementar la experiencia de aprendizaje para resolver sistemas de ecuaciones lineales, mediante el método de Gauss con los recursos y métodos tradicionales en lápiz y papel.
3. Diseñar un test para detectar el nivel de aprendizaje y destreza operacional al resolver un SEL.
4. Diseñar e implementar la experiencia de aprendizaje para resolver sistemas de ecuaciones lineales, mediante el método de Gauss utilizando el ambiente computacional ALSEL.
5. Diseñar un postest para comprobar el nivel de aprendizaje con el apoyo de ALSEL.

En los siguientes apartados se expone cada uno de los puntos anteriores; en aquellos donde se aplico un test, se hace un análisis del mismo; en el último apartado concluiremos con la conformación de cada análisis para expresar algunas conclusiones y reportar los comentarios de los alumnos respecto a su experiencia con el ambiente computacional ALSEL.

4.3 Desarrollo de la experiencia didáctica.

A continuación exponemos tanto el diseño, desarrollo y análisis de cada uno de los cinco momentos que componen la experiencia didáctica.

4.3.1 Diseño, aplicación y análisis del pretest.

Para obtener información respecto a los conocimientos previos de los alumnos sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se diseño el siguiente cuestionario conformado por ocho preguntas:

1. ¿Qué métodos conoces para resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales? Únicamente enúncialos.

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales con el método que prefieras y dibuja la gráfica del sistema:

$$\begin{aligned} 9x + 3y &= 30 \\ 5x - 7y &= -18 \end{aligned}$$

3. Explica ¿cómo funciona el método utilizado en la pregunta anterior?

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales con el método utilizado en la pregunta 2:

$$\begin{aligned} 9x + 3y - 2z &= -4 \\ 5x - 7y + z &= -5 \\ -12x + 3y + 3z &= 30 \end{aligned}$$

5. ¿Tuviste alguna dificultad al resolver el sistema anterior? Explica:

6. ¿Cuál consideras es el propósito de resolver un sistema de ecuaciones lineales?

7. De los siguientes sistemas ¿cuál tiene solución única?, ¿cuál no tiene solución? y ¿cuál tiene infinitas soluciones? **Explica tú conclusión:**

a) $\begin{aligned} x - 5y &= 2 \\ -2x + 10y &= -4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - 5y &= 7 \\ -4x + 10y &= -8 \end{aligned}$

$2x+3y+\ 4z=\ 0$	$x-2y+\ 5z=\ \ 6$
c) $6x+9y+12z=-2$	d) $-2x+5y-15z=-10$
$x-\ \ y+\ 2z=\ 1$	$x-4y+15z=\ \ 2$

8. ¿Qué entiendes por proceso de resolución?

La primera pregunta tiene como propósito permitirnos identificar los métodos de resolución conocidos por los alumnos; la segunda, cómo aplican el método de resolución de su preferencia para resolver un sistema de ecuaciones lineales de $2x2$ con solución, así como la habilidad para graficar este tipo de sistemas con la intención de determinar, si establecen el registro de representación semiótico gráfico, y si establecen la conversión entre el registro representación geométrico y el registro de representación algebraico. Con la tercera pregunta esperamos obtener información en torno a cómo percibe el alumno el funcionamiento del método de resolución elegido para resolver el SEL de la segunda pregunta. Con la finalidad de contrastar tanto los resultados de la segunda y tercera pregunta, además de identificar en qué medida los alumnos dominan la resolución de SEL, proponemos en la cuarta pregunta la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con solución única de $3x3$.

Ahora bien, suponemos que a partir de sistema de ecuaciones lineales que involucran más de dos incógnitas, los alumnos tienen dificultades en su resolución a causa del método de resolución, por ello hemos diseñado la quinta pregunta con la intención de obtener una explicación del alumno respecto a la dificultad de resolver el SEL de $3x3$ de la cuarta pregunta.

Las preguntas 6 y 7 están estrechamente relacionadas porque consideramos que si el alumno tiene claro el propósito de resolver un sistemas de ecuaciones lineales entonces podrá identificar cada uno de los casos posibles al resolver un SEL de $2x2$ y $3x3$; por ello en la pregunta seis se cuestiona al alumno sobre el propósito de resolver un SEL y en la siete se proponen dos SEL de $2x2$, uno con infinitas soluciones y otro sin solución; y dos SEL de $3x3$, uno sin solución y otro con infinitas soluciones.

También incluimos en el pretest una pregunta cuyo propósito es obtener información de la interpretación del alumno respecto al proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Antes de pasar al análisis, es necesario mencionar que de los 37 alumnos inscritos para cursar álgebra lineal, el día de la aplicación del pretest únicamente asistieron 33, no se les puso límite de tiempo pero en aproximadamente una hora la mayoría lo entregó.

Para el análisis, primero identificamos el número de preguntas contestadas por alumno, después revisamos el contenido de la respuesta. En este sentido, la siguiente tabla muestra la cantidad de preguntas contestadas por alumno:

Tabla 1

	Alumno																																	
No. de pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	Total
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**33**
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**33**
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**33**
4		1	1		1	1			1	1	1	1				1	1	1		1	1	1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	**23**
5	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1		1	1	1	1	1		1	1	1	1		1		**25**
6		1	1			1	1	1	1	1	1	1						1	1					1	1	1	1	1	1	1	1			**19**
7	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1					1	1			1		1	1		1			1	1	1	1	1	1	**22**
8			1						1	1	1						1	1	1					1	1		1	1	1		1			**13**
Total	**5**	**7**	**8**	**4**	**5**	**7**	**6**	**6**	**8**	**8**	**8**	**6**	**3**	**3**	**3**	**6**	**7**	**7**	**6**	**5**	**5**	**6**	**6**	**7**	**8**	**4**	**7**	**8**	**8**	**7**	**6**	**6**	**5**	

Las celdas vacías representan las preguntas no contestadas y las celdas que contienen “1” son las preguntas contestadas. Cabe aclarar que son ítems con respuesta, sin calificar si es correcta o incorrecta.

Para mejorar la claridad de la información acompañamos la tabla 1 del siguiente gráfico:

La primera pregunta fue contestada por el 100% de los alumnos, y las respuestas dadas por los alumnos son las siguientes: Suma y resta, sustitución, matrices, determinantes, igualación, reducción, términos independientes, eliminación y método de Cramer. Un poco más adelante podremos observar que a pesar de haber mencionado nueve métodos de resolución, los alumnos en su mayoría utilizaron: suma y resta, y sustitución.

De la tabla 1 también podemos observar que las preguntas 4 y 7 fueron contestadas por aproximadamente el 70% y 67% de los alumnos respectivamente, esto es importante, ya que son las preguntas en donde se incluyen SEL de $3x3$ para su resolución; esto lo abordaremos con detalle más adelante. Las preguntas 6 y 8 tienen el menor número de respuestas con un 58% y 39% de los alumnos que contestaron, esto sin valorar lo correcto o incorrecto de las respuestas. Sin embargo, a partir de dicha información consideramos que los alumnos no tienen claro cuál es el propósito al resolver un SEL, y mucho menos, qué es el proceso de resolución; desde luego, con la revisión de las respuestas esperamos confirmar esta conclusión.

Ahora bien, la segunda pregunta fue contestada por el 100% de los alumnos, cuya información es analizada en términos de los siguientes cuestionamientos:

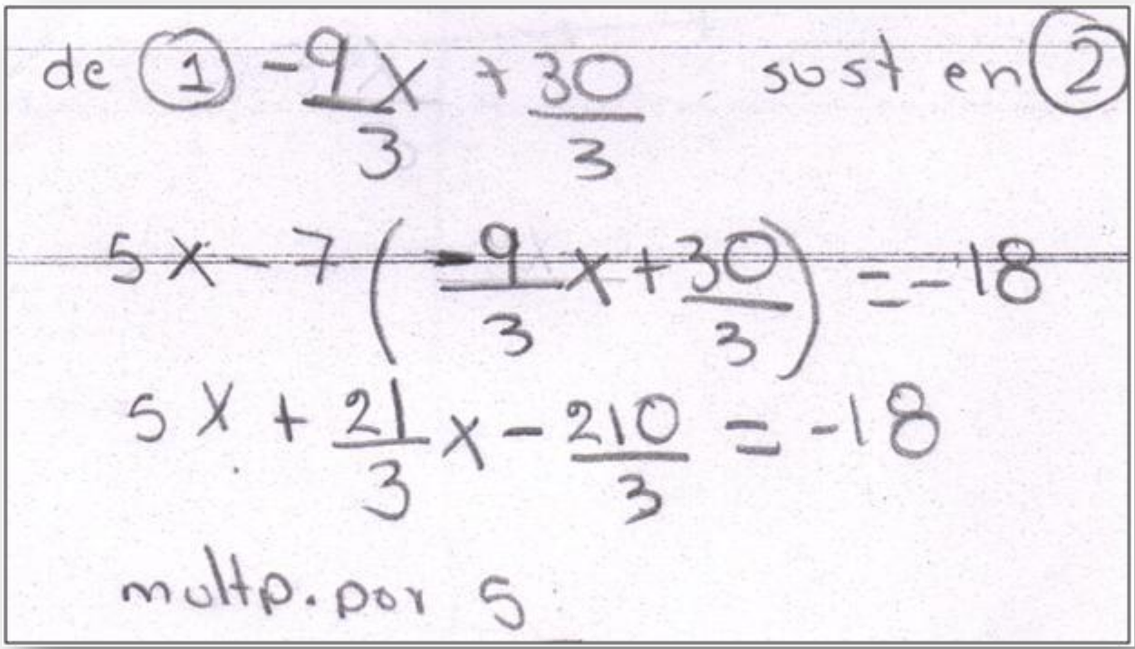
1. ¿qué método de resolución utilizaron?
2. ¿encontraron la solución?
3. ¿graficaron el SEL?

Con la siguiente tabla contestamos las interrogantes anteriores:

Tabla 2

	Alumno	Resolución del SEL	Gráfica	Método
1	Gloria N.		1	
2	David F.	1		Suma y resta
3	Alfonso		1	
4	Cesar		1	
5	Laura A.		1	
6	Azucena	1	1	Suma y resta
7	Yoban		1	
8	José Alberto		1	
9	Omar	1		Sustitución
10	Emanuel	1		Suma y resta
11	Daniel	1		Suma y resta
12	Julio C.	1	1	Sustitución
13	Volieta J.	1		Matriz aumentada
14	Arturo	1		Sustitución
15	Saira	1		Suma y resta
16	Jorge A.	1		Suma y resta
17	Rodrigo	1		Suma y resta
18	Alan	1	1	Sustitución
19	Ricardo		1	
20	Wendy	1		Suma y resta
21	Pedro	1	1	Suma y resta
22	Santiago	1		Regla de Cramer
23	Berenice	1		Suma y resta
24	Diana	1		Suma y resta
25	Javier	1	1	Sustitución
26	Jorge I.	1		Sustitución
27	Uri	1		Matriz aumentada
28	José Manuel	1	1	Suma y resta
29	Ana C.	1		Suma y resta
30	Victor M.	1		Sustitución
31	Rene I.		1	
32	Juventino	1		Suma y resta
33	Saraith		1	
	Total	24	15	

En la tabla se observa que aproximadamente el 73% de los alumnos intentaron resolver el SEL de $2x2$, de estos, el 58% utilizaron el método denominado suma y resta; el 29% utilizó el método de sustitución; el 8% el denominado método de la matriz aumentada; y el 4% utilizó el “método de Cramer”. Además, el 29 % de las respuestas (las celdas en color rojo de la columna resolución del SEL) son incorrectas por no obtener la solución del SEL y como en el siguiente caso, el fallo se debió a un error aritmético, por ejemplo:



En la imagen se observa que al multiplicar la expresión algebraica $-\frac{9}{3}x + \frac{30}{3}$ por -7 el alumno obtiene la expresión $\frac{21}{3}x - \frac{210}{3}$, en la que evidentemente el coeficiente de x no corresponde al producto de multiplicar -7 por $-\frac{9}{3}$, y por consecuencia obtiene un valor incorrecto para dicha incógnita que no es solución del SEL.

Entonces de los 24 alumnos que intentaron resolver el sistema, sólo 17 encontraron la solución, es decir, de los 33 alumnos sólo el 72% intentó resolver el SEL y de los 33, el 51% encontró la solución correcta. De acuerdo con esta información la mitad de los estudiantes pueden resolver un SEL de $2x2$ y como se mencionó en el capítulo 1, uno de los problemas al resolver un SEL son los cálculos aritméticos.

Por otra parte, parece haber problemas al representar geométricamente el SEL, ya que sólo 15 alumnos lo hicieron, lo que representa aproximadamente el 45% de la muestra, y de ellos, el 36% graficaron correctamente el sistema.

De acuerdo con las explicaciones emitidas por los alumnos en la tercera pregunta del pretest, aquellos que utilizaron el método de sustitución, así como el llamado: suma y resta, tienen claridad acerca de cómo funcionan dichos métodos; contrario al caso de aquellos alumnos que utilizaron los métodos de la matriz aumentada y la “regla de Cramer”, ya que no pudieron explicar cómo funcionan dichos métodos. También vale la pena destacar que en la tabla 2, se puede observar que de los métodos más utilizados, para resolver el SEL de $2x2$, el de sustitución está asociado a un mayor número de respuestas incorrectas.

La situación más grave se da con la cuarta pregunta, ya que aproximadamente de los 23 alumnos únicamente 14 intentaron resolver el SEL de $3x3$, y de estos sólo 2, es decir sólo el 5% encontró la solución correcta. Esta información nos permite concluir que, la mayoría de los alumnos no sabe resolver SEL de $3x3$, lo que se había previsto. Y de acuerdo con la quinta pregunta cuya intención es saber cuáles fueron las dificultades al resolver dicho sistema tenemos, por ejemplo las siguientes respuestas:

Alumno	**Respuesta**
2	Si que todavía me falta agarrar un poco de práctica en ese tipo de ecuación lineal.
3	Si tuve dificultades porque a la hora de graficar había tres incógnitas y pues no se graficar así.
11	Si porque no sé cómo se hacen.
12	Sí, me revuelvo al sustituir las variables y al resolver la ecuación.

18	Si no recuerdo cómo resolver este sistema 3 x 3.
21	Si debido a que aún se me dificulta realizar este tipo de ecuaciones.
32	Si el método utilizado es conveniente por la facilidad pero para las ecuaciones lineales de 2 incógnitas.

La mayoría de las respuestas giran en torno a la poca o nula experiencia al resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, y algunos concluyen que la dificultad está relacionada con el método de resolución utilizado. Pero también vale la pena incluir en el análisis las respuestas de los dos alumnos que lograron resolver el SEL:

Alumno	**Respuesta**
10	No tiene dificultad alguna, solo que es laborioso.
28	Si, los números son difíciles de manejar cuando son muy grandes las cantidades.

Son muy interesantes las respuestas de este par de alumnos, ya que aparecen los cálculos aritméticos, como una dificultad, a pesar de resolverse correctamente, el SEL.

Para el análisis de las tres últimas preguntas retomamos la tabla 1, de donde se puede observar que de los 33 alumnos sólo el 56% contesto la sexta pregunta, y de estos, únicamente el 12% de las respuestas giran en torno a encontrar el valor de las incógnitas que satisfagan a cada una de las ecuaciones del sistema. En conclusión, la mayoría no tiene claro el propósito de resolver un sistema de ecuaciones lineales, a pesar de que 24 intentaron resolver el SEL de $2x2$ y 23 el de $3x3$.

En el caso de la séptima pregunta tenemos 22 respuestas, recordemos que en dicha pregunta se propone resolver cuatro SEL, dos de $2x2$ y dos de $3x3$, con la intención de obtener información respecto a la identificación de los casos en que un SEL tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

La siguiente tabla muestra la información correspondiente a la séptima pregunta:

Tabla 3

	SEL 2x2		SEL 3x3		
Alumno	a)	b)	c)	d)	
1	1	1			
2	1	1	1	1	
3	1	1			
4	1				
5					
6	1	1			
7	1	1			*
8	1	1			*
9	1	1	1		
10	1	1			
11	1	1			
12					
13					
14					
15					
16	1	1			
17	1	1			
18					
19					
20	1	1			
21					
22	1				
23	1	1			
24					
25	1	1			*
26					
27					
28	1	1	1	1	
29	1	1			
30	1	1			
31	1	1			
32	1	1			
33	1	1	1		
Total	22	20	4	2	

En el caso del inciso **a** tenemos 22 respuestas, de estás 18 son correctas. Para el inciso **b** tenemos 20 respuestas y 18 son correctas. Los incisos c y d siguen el patrón de la cuarta pregunta, sólo unos pocos intentaron resolver los sistemas de ecuaciones lineales, pero en está ocasión ninguno encontró la solución correcta. Esto último, es contundente: los estudiantes no saben resolver sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas.

Hay que mencionar que en el caso de los incisos a y b, hubo tres alumnos que no resolvieron el SEL, sin embargo, expresaron textualmente el tipo de solución; estos casos los podemos identificar en la tabla 3 por un punto al final de la fila, son los alumnos 7, 8 y 25.

Por último, de la tabla 1 tenemos 13 respuestas en la octava pregunta, es decir aproximadamente el 61% de la muestra no contesto la pregunta; de las 13 respuestas podemos concluir que existe una idea de ¿qué es el proceso de resolución? por ejemplo, en la siguiente tabla se muestran algunas de las respuestas:

Alumno	Respuesta
11	El algoritmo o lo pasos a seguir para llegar a una solución.
17	Pasos que te ayudan a poder resolver un sistema de ecuaciones.

Se puede concluir que la mayoría de los estudiantes pueden resolver sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$. Sin embargo, la mayoría no sabe resolver SEL de $3x3$. Además, la dificultad al resolver SEL con tres incógnitas está asociada a lo “laborioso” que resulta resolver estos sistemas debido precisamente a los cálculos aritméticos. Esto sugiere reforzar la resolución de SEL de $2x2$ y enfocar la atención hacia el significado y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas.

4.3.2 Diseño de la experiencia de aprendizaje para resolver SEL mediante el método de Gauss apoyando al profesor con ALSEL.

Para llevar a cabo esta actividad se diseñaron una serie de actividades acomodadas en tres sesiones, la primera se programó el 3 de febrero, la segunda el 10 de febrero y la tercera el 17 de febrero; sin embargo, por razones de tiempo, las actividades propuestas se concluyeron totalmente en cuatro sesiones, siendo la última sesión el 24 de febrero.

Las actividades fueron las siguientes:

Primera Sesión

Curso: álgebra lineal.
Sesión: Primera.
Fecha: 3 de febrero de 2009.

Objetivo: Analizar la ecuación lineal $ax = b$, siendo ésta el SEL más elemental. Resolver sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$ y $3x3$, introduciendo las operaciones elementales y planteando el propósito de resolver un SEL. Concluir mencionando que el método utilizado es el denominado Método de Gauss.

Actividad 1. Analizar la ecuación lineal $ax = b$, es decir, identificar cuándo la ecuación tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

Actividad 2. Expresar que el propósito de resolver un SEL es encontrar el valor o los valores de las incógnitas que satisfagan a cada una de las ecuaciones, y si esto no es posible entonces el SEL no tiene solución (el antecedente es la actividad anterior). Exponer las tres operaciones elementales entre ecuaciones lineales.

Actividad 3. Proponer al estudiante resolver SEL de $2x2$ y $3x3$, utilizando las tres operaciones elementales con la sugerencia de eliminar variables hasta llegar a un sistema equivalente de donde sea más fácil encontrar el valor de las incógnitas.

Actividad 4. Exponer el método de Gauss a partir de la resolución de dos sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$ y $3x3$. Mencionar que el método de resolución utilizado es el método de Gauss.

Segunda Sesión

Curso: álgebra lineal.
Sesión: Segunda.
Fecha: 10 de febrero de 2009.

Objetivo: Reforzar el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales por medio de la ejercitación. Presentar el algoritmo del método a los alumnos y aplicarlo.

Actividad 1. Llevar a cabo una pequeña discusión en torno a las diferentes dificultades por las que los alumnos han atravesado al resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Actividad 2. Proponer un problema de flujo vehicular a los alumnos y establecer el sistema de ecuaciones, y resolverlo.

Actividad 3. Formalizar el método de Gauss, estableciendo un algoritmo general para ser aplicado a sistemas de cualquier tamaño.

Actividad 4. Concluimos la clase trabajando con la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales.

Tercera Sesión

Curso: álgebra lineal.
Sesión: Tercera.
Fecha: 17 de febrero de 2009.

Objetivo: Mostrar diferentes representaciones geométricas en dos y tres dimensiones de sistemas de ecuaciones lineales con única solución, sin solución e infinitas soluciones. Que el alumno diseñe sistemas con solución única, sin solución e infinitas soluciones. Trabajar una primera etapa con el software ALSEL para obtener los sistemas de ecuaciones equivalentes. Trabajar con la matriz aumenta de un SEL.

Actividad 1. Por medio del registro de representación gráfica de un SEL, determinar qué en caso se encuentra: única solución, sin solución e infinitas soluciones.

Actividad 2. Dada una situación geométrica entre rectas o planos, establecer un sistema de ecuaciones lineales que satisfaga dicha situación.

Actividad 3. Trabajar con el software *ALSEL*, con la intención de obtener cada uno de los sistemas equivalentes y graficarlos.

Actividad 4. Definir matriz a partir de un SEL; resolver el sistema aplicando el método de Gauss a la matriz aumentada.

Actividad 5. Definir el producto entre una matriz y un vector.

El propósito general en esta fase de la validación de ALSEL fue enseñar el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales por medio de la exposición del tema por parte del profesor, la reflexión y acción por parte de alumno. Para nosotros, era necesario que el alumno se enfrentara con dicho contenido matemático con las herramientas con las que usualmente cuenta, y así, propiciar que el mismo detectara las dificultades inherentes al tema de estudio.

Después de haber mostrado el método de resolución y sugerido una lista de ejercicios para su realización por parte de los estudiantes, empezó a surgir, de parte del alumnado un comentario casi general: es muy laborioso resolver un SEL. Evidentemente, dicho comentario estuvo relacionado con los cálculos aritméticos que deben realizarse durante el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Otra situación observada fue que tenían muchos problemas con la aplicación de la tercera operación elemental.

Con estos elementos llegó el momento de cerrar el tema, y lo hice apoyándome en ALSEL. Propuse un SEL de ecuaciones lineales a partir del siguiente problema:

Determinar la ecuación, el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos: $(-1,1)$*,* $(3,5)$ *y* $(5,-3)$*.* (Lehmann, 1996, p. 106)

Se estableció el sistema de ecuaciones lineales de tres por tres, y en ese momento me apoyé de ALSEL para resolver el SEL. Mostré a los alumnos como, cada sistema de ecuaciones lineales equivalente, generado a través de la aplicación de las operaciones elementales tenía la misma solución encontrada. Durante el proceso de resolución utilice en varias ocasiones la tercera operación elemental con la intención de reforzar su uso.

Debo mencionar, que los alumnos mostraron buena disposición para utilizar el ambiente computacional y de hecho hubo quien me pidió el ambiente para utilizarlo en casa. Sin embargo, evité hacerlo ya que en una etapa posterior, tendrían que hacerlo como parte de la validación. En fin, en términos generales esto fue lo acontecido durante el desarrollo de esta fase, ahora sigue analizar el test aplicado a los alumnos para determinar su grado de avance en el proceso.

4.3.3 Test sin el apoyo de ALSEL.

En el CU-UAEM Valle de Chalco se tiene previsto realizar en el semestre dos parciales, en nuestro caso el test diseñado tuvo también la función de primer parcial, con una selección de ítems que forman parte de la experiencia didáctica para validar ALSEL; la participación por parte de los alumnos fue del 100%, es decir, los 37 alumnos realizaron el examen y este se llevó a cabo el 10 de marzo. El diseño del test-examen es el siguiente:

1. De las siguientes ecuaciones ¿cuáles son lineales?:

a) $3x + 4xy = 3$ b) $\sqrt{2}x - 3y + \frac{3}{2}z = 0$ c) $x^2 + y^2 = 7$ d) $3x - 2y = 0$

e) $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

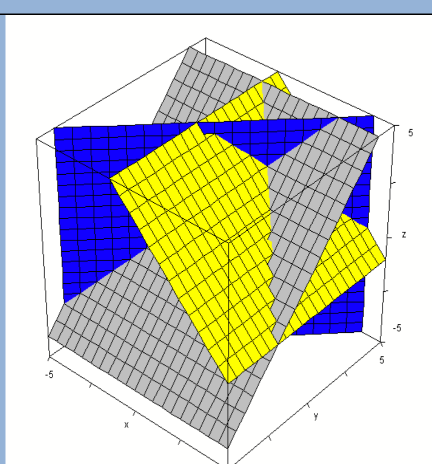
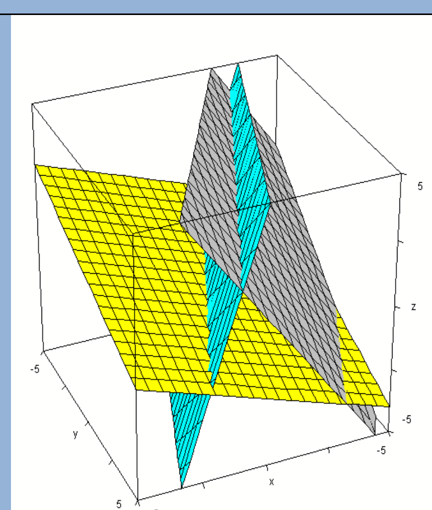
2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \\ -6x + 4y = 10 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} x - y \quad = -1 \\ x \quad + z = 4 \\ y - z = -1 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} x_1 - 300x_2 = 2 \\ \frac{1}{10}x_1 - 30x_2 = \frac{1}{5} \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 2 \end{array}$

3. Dibuja la gráfica de los sistemas de ecuaciones lineales de los incisos a) y c).

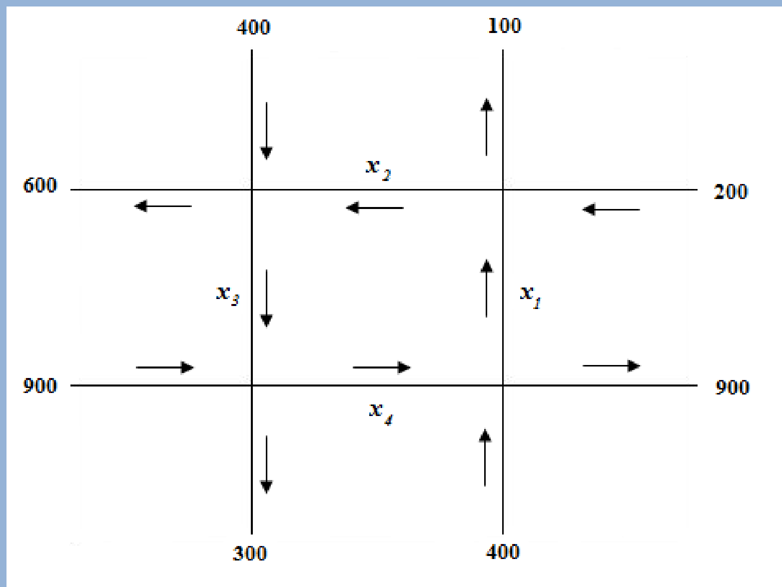
4. De las siguientes gráficas, cuál corresponde al inciso b) y cuál al d):

1)		2)	

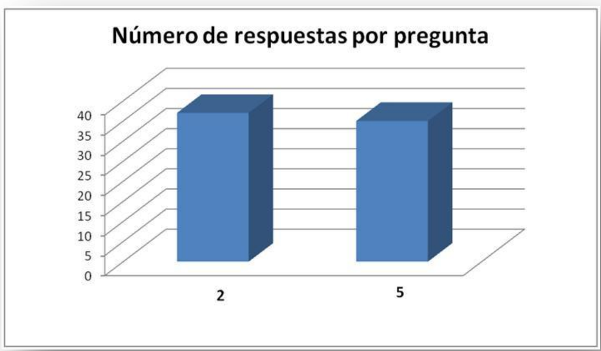
5. Crea un sistema de ecuaciones lineales para cada uno de los siguientes casos:
a) con una solución;
b) sin solución; y

c) con infinitas soluciones.

6. El siguiente croquis representa cuatro calles por donde circulan automóviles en diferentes direcciones. En cada entrada y salida de las cuatro calles se instalaron aparatos especiales para contar el número de automóviles que entraron y salieron en una hora. Por falta de recursos económicos, no se adquirieron los aparatos suficientes, por lo que no se pudo contar el número de automóviles x_1, x_2, x_3 y x_4 , que circularon por las cuadras respectivas. ¿Cuántos automóviles circularon por dichas cuadras?



De acuerdo con nuestros intereses, son del segundo al quinto ítems las que forman parte del análisis que llevaremos a cabo, así que primero vamos a contar el número de alumnos que contestaron a dichas preguntas. En primer lugar tenemos el siguiente gráfico, que nos muestra que la segunda pregunta tuvo un poco más respuestas dadas que la quinta:



Específicamente tenemos la siguiente tabla por alumno y pregunta contestada:

Tabla 4

		Pregunta	
Alumno		2	5
1	Alan	1	
2	Alfonso	1	1
3	Ana Cristal	1	1
4	Antonio	1	1
5	Arturo	1	1
6	Azucena	1	1
7	Berenice	1	1
8	Cesar	1	1
9	Daniel	1	1
10	David Fernando	1	1
11	Emanuel	1	1
12	Erick	1	
13	Gloria Nayeli	1	1
14	J. Juventino	1	1
15	Jorge Alex	1	1
16	Jorge Ivan	1	1
17	José Alberto	1	1
18	José Manuel	1	1
19	Julio Cesar	1	1
20	Laura Angélica	1	1
21	Omar	1	1
22	Pedro	1	1
23	Ricardo	1	1
24	Rodrigo	1	1
25	Saira	1	1
26	Santiago	1	1
27	Saraith Oyuki	1	1
28	Tania	1	1
29	Uri	1	1
30	Victor Manuel	1	1
31	Violeta Yasmin	1	1
32	Wendy	1	1
33	Yoban	1	1
34	Javier	1	1
35	Diana	1	1
36	Rene Ismael	1	1
37	Yadira Yazmín	1	1
Total		37	35

La tabla 4 muestra que el 100% de los alumnos contestaron la segunda pregunta, en la que tenían que resolver dos sistemas de ecuaciones lineales de $3x3$, uno de $3x2$, y otro más de $2x2$, en contraste con la séptima pregunta del pretest en donde el 67% de los alumnos contestaron esta pregunta, aunque de ellos sólo el 5% lo hicieron en forma correcta.

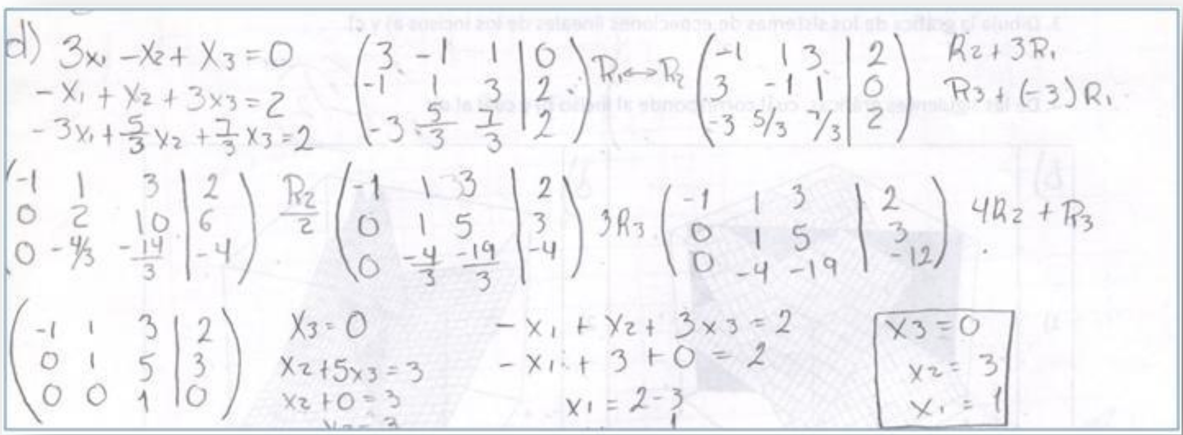
Por otra parte, casi la mayoría de los alumnos intentó contestar la quinta pregunta, en donde tenían que proponer un sistema de ecuaciones lineales con una solución, otro sin solución y otro más con infinitas soluciones. Sabemos que los problemas inversos, como el caso de la quinta pregunta, son verdaderamente difíciles para los alumnos, pero de acuerdo con la información, 35 alumnos intentaron resolver este tipo de problemas.

Ahora necesitamos saber cuántos alumnos obtuvieron un resultado correcto en cada pregunta. Iniciamos con la segunda pregunta; la siguiente tabla muestra esta información:

Tabla 5

	Pregunta 2			
Alumno	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3		1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1
7	1	1	1	1
8	1	1		
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1
16	1	1	1	1
17	1	1	1	1
18	1	1	1	1
19	1	1	1	1
20	1	1	1	1
21	1	1	1	1
22	1	1	1	1
23	1	1	1	1
24	1	1	1	1
25	1	1	1	1
26	1	1	1	1
27	1	1	1	1
28	1	1	1	1
29	1	1	1	1
30	1	1	1	1
31	1	1	1	1
32	1	1	1	1
33	1	1	1	1
34	1	1	1	1
35	1	1	1	1
36	1	1	1	
37	1	1		
Total	36	37	35	34

En la tabla 5 se puede observar que la mayoría de los incisos trataron de ser contestados por los alumnos; las celdas en color rojo son aquellas respuestas incorrectas, es decir, la conclusión no corresponde al tipo de solución del SEL propuesto en el examen. El caso más desafortunado fue el inciso **d**, ya que de los 34 alumnos que contestaron la pregunta, sólo el 12% tuvieron una respuesta correcta. Sin duda, esto es interesante, ya que la mayoría de las respuestas incorrectas en el inciso **d** están asociadas a errores en los cálculos aritméticos y falta de validar una solución, por ejemplo en la siguiente imagen se observa un error en los cálculos aritméticos al aplicar la tercera operación elemental $R_3 + (-3)R_1$:


d) $3x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$, $-3x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 2 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5/3 & 7/3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 + 3R_1 \\ R_3 + (-3)R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & -4/3 & -\frac{14}{3} & -4 \end{array}\right) \frac{R_2}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{19}{3} & -4 \end{array}\right) 3R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -19 & -12 \end{array}\right) 4R_2 + R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_2 + 0 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 3 + 0 = 2 \\ x_1 = 2 - 3 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_1 = 1 \end{array}}$$

Con la intención de observar claramente en donde se encuentra el error elaboramos la siguiente tabla que contiene las operaciones elementales (con la notación del alumno) aplicadas y los sistemas equivalentes generados, para esto utilizamos ALSEL:

Operación elemental	Sistemas equivalentes
$R_1 \leftrightarrow R_2$	Sistema Equivalente [1] *Ecuación 1* $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ *Ecuación 2* $3x_1 - x_2 + x_3 = 0$ *Ecuación 3* $-3x_1 + 5/3\,x_2 + 7/3\,x_3 = 2$

$R_2 + 3R_1$	Sistema Equivalente [2] *Ecuación 1* $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ *Ecuación 2* $2x_2 + 10x_3 = 6$ *Ecuación 3* $-3x_1 + 5/3\,x_2 + 7/3\,x_3 = 2$
$R_3 + (-3)R_1$	Sistema Equivalente [3] *Ecuación 1* $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ *Ecuación 2* $2x_2 + 10x_3 = 6$ *Ecuación 3* $-4/3\,x_2 - 20/3\,x_3 = -4$
$\frac{R_2}{2}$	Sistema Equivalente [4] *Ecuación 1* $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ *Ecuación 2* $x_2 + 5x_3 = 3$ *Ecuación 3* $-4/3\,x_2 - 20/3\,x_3 = -4$
$3R_3$	Sistema Equivalente [5] *Ecuación 1* $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ *Ecuación 2* $x_2 + 5x_3 = 3$ *Ecuación 3* $-4x_2 - 20x_3 = -12$
$4R_2 + R_3$	Sistema Equivalente [6] *Ecuación 1* $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ *Ecuación 2* $x_2 + 5x_3 = 3$ *Ecuación 3* $= 0$

La fila sombreada muestra el sistema equivalente correcto al aplicar la tercera operación elemental, en ella se puede observar que el coeficiente de x_3 de la tercera ecuación es $-20/3$ y ¡no! $-19/3$, que fue el valor que obtuvo el alumno. Esto tuvo como consecuencia que el alumno concluyera que el SEL tenía solución única, cuando en realidad es un SEL con infinitas soluciones.

De acuerdo con la información del examen, hay evidencia de un avance significativo en el aprendizaje de los alumnos respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, aparece aquella dificultad que dio origen, en parte, a este trabajo de investigación: los cálculos aritméticos y el significado. Además identificamos problemas con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, ya que, si bien los alumnos identifican este tipo de SEL, no establecen la solución general del sistema.

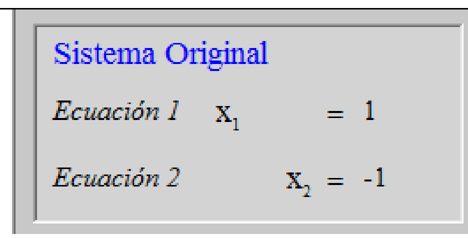
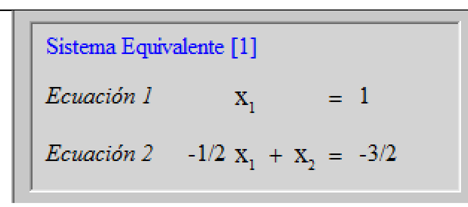
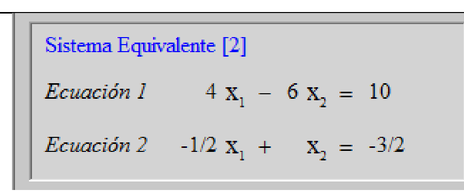
Por otra parte, durante el proceso de enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales abordamos el problema inverso, esto es, establecer un SEL con solución, sin solución o con infinitas soluciones. Recordemos que según la didáctica C&P es importante abordar este tipo de problemas para una mejor comprensión del contenido matemático. La siguiente tabla muestra la información derivada de la quinta pregunta en la que se pide precisamente establecer un SEL para cada uno de los posibles casos:

Tabla 6

	Pregunta 5		
Alumno	a	b	c
1			
2	1	1	1
3	1	1	1
4	1	1	1
5	1	1	1
6	1	1	1
7	1	1	1
8	1	1	1
9	1	1	1
10	1	1	1
11	1	1	1
12			
13	1	1	1
14	1	1	1
15	1	1	1
16		1	1
17	1	1	1
18	1	1	1
19	1	1	1
20	1	1	1
21	1	1	1
22	1	1	1
23	1	1	1
24	1	1	1
25	1	1	1
26			
27	1	1	1
28	1	1	1
29	1	1	1
30	1	1	1
31	1	1	1
32	1	1	1
33	1	1	1
34	1	1	1
35	1	1	1
36		1	1
37	1	1	1
Total	32	34	34

De la tabla 6 se observa que la mayoría de los alumnos intentaron resolver esta pregunta: el inciso **a** fue contestado por el 86% de alumnos, de los cuales aproximadamente el 22% tuvieron una respuesta incorrecta; el inciso **b** fue contestado por 34 alumnos y de ellos, el 35% equivocaron su respuesta; por último, el inciso **c** fue contestado por 34 alumnos con aproximadamente el 24% de estos con respuestas incorrectas. Contrario a lo que vislumbramos, hubo un bajo porcentaje de respuestas incorrectas, sin embargo, la mayoría de los sistemas de ecuaciones lineales propuestos por el alumno fueron de $2x2$; además, pocos se preocuparon por resolver el SEL propuesto.

Vale la pena señalar que ALSEL nos permite construir sistemas de ecuaciones lineales a partir de alguno de los casos posibles de un SEL, si bien no es una opción dentro del menú es posible hacerlo; por ejemplo, si deseo construir un SEL de $2x2$ que tenga por solución a $\{x_1 = 1, x_2 = -1\}$ se hace los siguiente:

Creamos un SEL como se observa en la imagen de la derecha.	
Aplicamos la tercera operación elemental: $$Ecu2 \rightarrow Ecu2 + \left(-\frac{1}{2}\right) Ecu1$$	
Por último, Aplicamos la tercera operación elemental: $$Ecu1 \rightarrow Ecu1 + (-6)Ecu1$$	

Lo anterior es importante, ya que partimos de un SEL de $2x2$ que evidentemente tiene solución, generamos sistemas equivalentes a partir de la aplicación de las operaciones elementales; es decir, utilizamos Gauss pero en sentido inverso.

Concluida esta fase en la validación de ALSEL, el siguiente paso fue llevar a cabo su implementación para observar la interacción con los alumnos, así como sus defectos y virtudes.

4.3.4 Implementación del ambiente computacional y observaciones.

El 24 de marzo, en la sala de cómputo número cuatro de la UAEM Valle de Chalco llevamos a cabo la implementación de ALSEL. Se contó con la participación de 32 alumnos, y como la sala de cómputo únicamente cuenta con 20 computadoras, la mayoría de las computadoras fueron utilizadas por dos alumnos.

La sesión duro aproximadamente una hora treinta minutos, en su inicio se propuso un sistema de ecuaciones lineales de $3x3$ con solución; y se entregó a cada alumno la siguiente información sintáctica para el uso del ambiente computacional:

Universidad Autónoma del Estado de México 24 de Marzo de 2009

Instrucciones para usar ***ALSEL***:

ALSEL es un ambiente computacional con un propósito: Apoyarte en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.
Para cumplir este propósito, el ambiente tiene un Menú principal con las siguientes opciones:

- Formar sistema
- Resolver sistema
- Ayuda

A continuación explicamos qué hacer en cada opción:

Opción	Descripción
Formar sistema	Con esta opción introducirás al ambiente un sistema de ecuaciones lineales.

		Primero debes introducir el número de ecuaciones y de incógnitas. Después de oprimir el botón Aceptar aparecerá el esqueleto del sistema. Segundo debes introducir los coeficientes. Después de oprimir Aceptar la ventana se cerrará y el sistema de ecuaciones lineales introducido	
	Resolver sistema	Esta opción tiene tres etapas: • Eliminación. • Sustitución. • Verificación. Eliminación: Al elegir esta opción se abre una ventana que contiene las tres operaciones elementales. Hay que elegir una de ellas con el propósito de transformar el sistema. Las opciones de Sustitución y Verificación no están habilitadas, ya que se encuentran en desarrollo.	

La exposición de las observaciones derivadas de la implementación de ALSEL la hemos dividido en dos partes; la primera relacionada con los defectos del ambiente computacional y la segunda con lo que creemos son las ventajas.

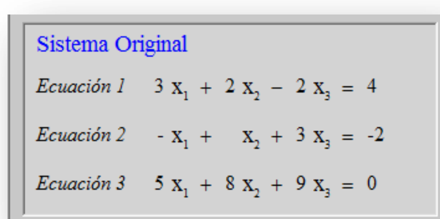
Como mencionamos, propusimos un SEL de $3x3$ para resolverlo con ayuda de ALSEL. En términos generales no hubo ningún problema con la introducción del SEL al ambiente computacional, y quizá lo más relevante es que algunos alumnos tardaron un poco más en realizar esta actividad que otros, pero al final todos conformaron el SEL correctamente.

Ahora bien, el siguiente paso es la resolución del sistema de ecuaciones lineales por medio de la eliminación de las incógnitas aplicando sucesivamente las operaciones elementales, en esta parte ocurrió la siguiente situación: algunos alumnos oprimieron por descuido nuevamente la opción **Formar sistema** y esto elimino el SEL previamente formado, por lo que tuvieron que volver a introducir el SEL, generando cierta molestia en los alumnos.

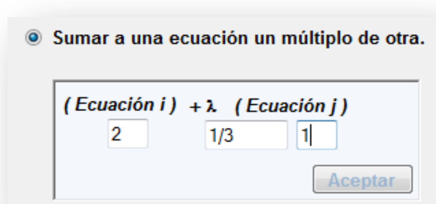
Esto evidentemente es un defecto de usabilidad del sistema, ya que el ambiente computacional una vez que tenga un SEL cargado debe permitir al usuario decidir entre introducir otro SEL o dejar el SEL previamente introducido, ya sea que el usuario por descuido o por deseo elija esta opción.

Dada esta situación, intervine mencionado a los presentes, que una vez introducido el SEL tuvieran cuidado de no elegir la opción Formar sistema, ya que se borraría el sistema introducido y les pedí oprimieran la opción Resolver sistema.

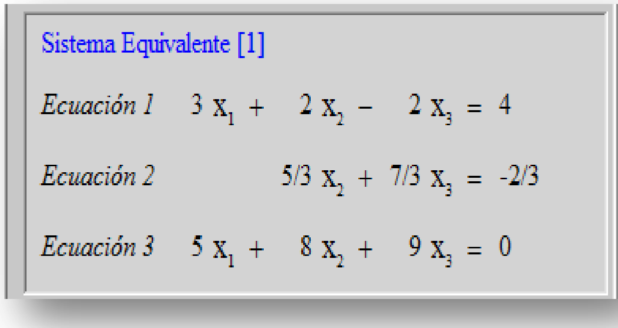
Durante la aplicación de las operaciones elementales para resolver el sistema de ecuaciones lineales surgió otra situación: algunos alumnos al aplicar alguna de las operaciones elementales generaban un SEL equivalente que no correspondía a lo que habían pensado, por ejemplo, dado el siguiente SEL:



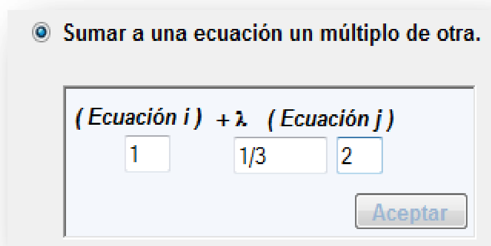
Al intentar eliminar la incógnita x_1 de la segunda ecuación aplicando la tercera operación elemental, en lugar de aplicarla así:



Para obtener el siguiente sistema equivalente:



Lo hacían así:

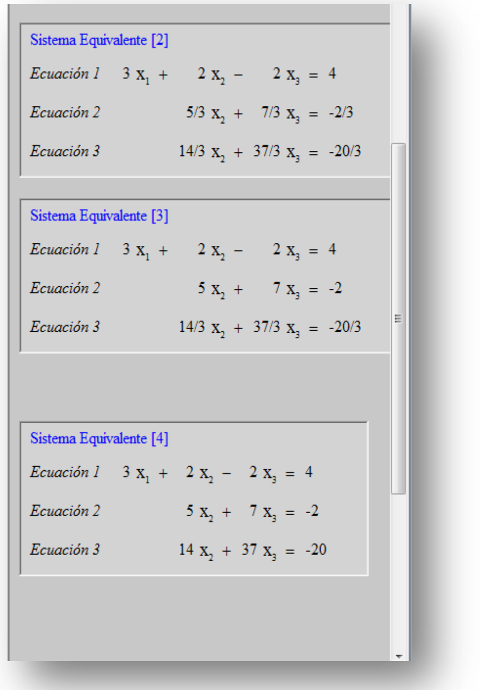


Vale la pena citar lo que un alumno (Emanuel) mencionó: “me equivoque, no hay forma de regresarme un paso”.

Este, segundo defecto de usabilidad detectado, causó que días después, se añadiera en el ambiente computacional, el botón **Regresar** que precisamente tuviera la función de regresar los pasos que el usuario considere necesarios, donde el límite es regresar hasta el Sistema Original.

Otro defecto observado está relacionado con la posición de los SEL en la interfaz gráfica.

Para aclarar lo anterior tenemos siguiente imagen:



Observando la imagen detenidamente, entre los sistemas equivalentes 2 y 3 tenemos cierta separación, sin embargo entre los sistemas equivalentes 3 y 4 la separación aumenta. Esto evidentemente no debería haber ocurrido, ya que la separación entre los sistemas debe ser homogénea; esto nos llevó a la revisión del código para corregir este defecto, conocido en el argot computacional como "pulga".

Hasta aquí hemos abordado defectos de usabilidad derivados de la observación al implementar ALSEL. Lo que sigue son algunas de las que consideramos que consideramos son las virtudes del ambiente. Observamos que todos los estudiantes resolvieron el SEL propuesto, por si mismos, lo interesante e importante se encuentra en el proceso de resolución y en cómo determinaron la solución del SEL.

Durante el proceso de resolución se observó que la mayoría de los alumnos tenían una sucesión de operaciones elementales diferentes, es decir, mientras algunos tenían una sucesión con cuatro elementos con la que generaron un sistema de ecuaciones lineales equivalente en forma escalonada, otros tenían hasta diez elementos en la sucesión de operaciones elementales. Para nosotros esta es una condición de ALSEL, ya que no impone forma de solución alguna y ofrece libertad al usuario. Este es un tutor flexible que además cumple con uno de los apartados del modelo didáctico C&P, referente a la asociatividad de las operaciones. Posteriormente, estos resultados permitieron una discusión en clase, al comparar los diversos procedimientos. En la discusión se mostró a los alumnos que si bien todos los procedimientos eran correctos, es posible resolver el sistema de ecuaciones lineales, con un mínimo de aplicaciones de las operaciones elementales.

Por otra parte, para determinar la solución del sistema la mayoría recurrió a hacerlo por medio de la sustitución regresiva, componente que aún no se desarrolla en ALSEL, por lo que lo hicieron con papel y lápiz. Sin embargo, sorprendentemente hubo algunos alumnos que siguieron aplicando las operaciones elementales hasta obtener un sistema de ecuaciones lineales en la forma Gauss-Jordan. Hay que señalar que en ningún momento se abordó esta forma de resolución, de sistemas de ecuaciones lineales, y de hecho en el examen de la fase tres de la validación no se observó ningún procedimiento parecido; esto, desde nuestro punto de vista es un logró estrechamente relacionado con el uso de la herramienta, una virtud de ALSEL, al promover actividades intelectuales no previstas.

Posterior, a la aplicación de la actividad, algunos alumnos cuestionaron el por qué no había impartido las clases con la ayuda del ambiente, ya que según ellos les permitió entender mejor el método de resolución y sin errores. Esto último, sabemos es uno de los propósitos de ALSEL, pero el usuario debe ser consciente de las dificultades relacionadas con los cálculos aritméticos y métodos de resolución, para valorar la herramienta. Desde luego que la intención es apoyarse en ALSEL para la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero en nuestro caso no era conveniente para la validación de ALSEL porque necesitabas observar tanto los defectos como las virtudes del ambiente.

Después de finalizar esta primera actividad se propuso la resolución de un par de sistemas de ecuaciones lineales de $3x3$, uno sin solución y el otro con infinitas soluciones. La resolución del SEL sin solución se desarrollo sin contratiempo alguno; de igual forma sucedió con el SEL con infinitas soluciones. Sin embargo, al pedir la solución general del sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, nos enfrentamos con que los alumnos no tenían claro cómo determinarla; de esto teníamos evidencia, recordemos que a partir del análisis del examen de la fase tres de esta validación concluimos que los alumnos no sabían determinar la solución general de un SEL con infinitas soluciones. Así que los últimos 15 minutos de la implementación de ALSEL los utilice para explicar nuevamente cómo determinar la solución general de este tipo de SEL.

Esta situación nos confirma lo importante de desarrollar la componente **Sustitución** en la que definitivamente abordaremos la determinación de la solución general para el caso de SEL con infinitas soluciones. Se ha pensado que para este caso el ambiente habrá de cuestionar al usuario sobre el número de variables libres y cuáles, y a partir de ello realizar el proceso de sustitución regresiva.

Para nosotros ha sido muy gratificante realizar esta actividad; de hecho consideramos como una parte esencial en la creación de un ACEM su implementación con el propósito de observar tanto los defectos como las virtudes porque evidentemente nos permite mejorar el ambiente y corroborar el propósito didáctico preestablecido.

Es así como llegamos a la última fase de la validación de ALSEL: la aplicación de un postest con el apoyo de ALSEL con la intención de contrastar los resultados que se obtengan con aquellos derivados del examen sin el apoyo de ALSEL.

4.3.5 Postest y Examen final con el apoyo de ALSEL.

En el diseño del postest, se tomaron en cuenta dos aspectos: la resolución de SEL y la creación de un SEL, ya sea con solución única, sin solución o con infinitas soluciones. Es decir, la operación directa e inversa. El postest se conforma de cinco preguntas; y debido a la recurrencia de algunos alumnos por copiar, y para no sesgar la muestra, se elaboraron cinco postest distintos y equivalentes, para evitar dicha situación. Hay que mencionar que este postest, también fue considerado como examen ordinario, ya que la institución (UAEM) exige la evaluación de sus estudiantes al final del semestre por medio de un examen final.
Los cinco postest se pueden consultar en el Anexo 7.

En el fondo, los postest tienen la misma estructura. En la primera pregunta se pide resolver un SEL de $2x2$ y otro de $3x3$, ambos con solución. En la segunda pregunta se requiere construir un SEL de $3x3$ con cierta solución (e.g., $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, ver el primer examen del Anexo 7). La tercera pregunta en algunos exámenes pide resolver un SEL de $3x3$ que no tiene solución, y en otros, hay que construir un SEL de $3x3$ sin solución. La cuarta pregunta pide resolver un SEL de $3x3$ con infinitas soluciones, si en la tercera pregunta se pidió construir un SEL; pero si en la tercera se pidió resolver un SEL, la cuarta pregunta requiere la construcción de un SEL de $3x3$ con infinitas soluciones. Por último, la quinta pregunta, que evalúa que tanto más avanzaron del tema conceptualmente, en todos los exámenes pide determinar los valores de a, b y c, donde a y b son coeficientes de las variables x y y respectivamente, y c el término independiente de un SEL de $2x2$; de tal forma, que en un caso el SEL no tenga solución y en otro, tenga infinitas soluciones.

Como ya hemos mencionado, a la clase se le asignó la sala de cómputo número 4 con 24 computadoras y 2 horas de disponibilidad. El tiempo que estimamos era necesario para contestar el examen fue de una hora, y debido al número de computadoras de la sala decidimos dividir en dos grupos a los alumnos, uno con

17 integrantes y el otro con 14; en total tuvimos una asistencia de 31 alumnos de los 37 inscritos al curso.

Dado que tenemos la existencia de 5 exámenes, y necesitamos analizar la información, conviene realizar el análisis por examen; por ello, primero hemos elaborado la siguiente tabla para mostrar el número de alumnos que resolvieron alguno de los cinco exámenes:

No. de examen	No. de Alumnos
1	7
2	7
3	6
4	5
5	6

Ahora bien, la siguiente tabla contiene el número de preguntas contestadas por alumno del examen 1:

	Preguntas				
Alumno	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1				
5	1		1		
6			1		
7	1				
Total	6	3	5	3	3

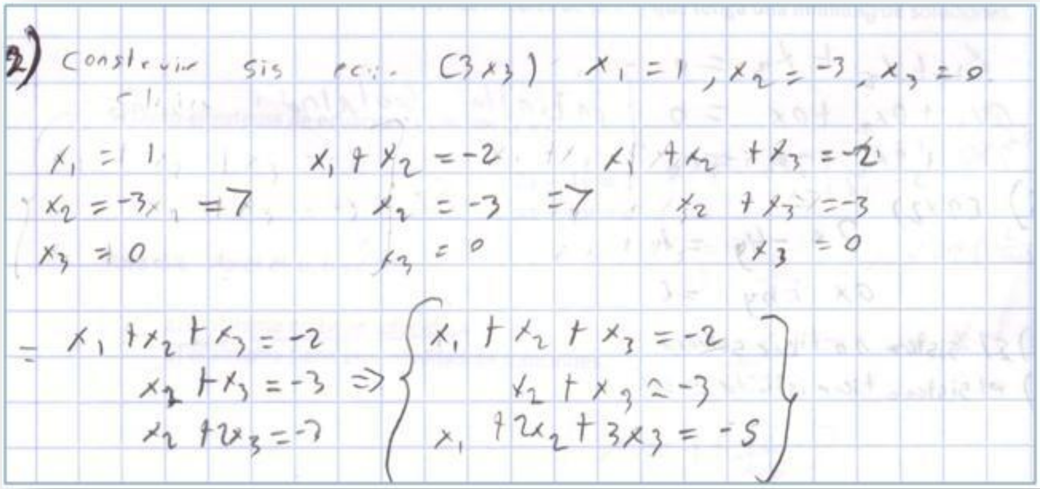
De la tabla anterior se puede observar que la pregunta con más respuestas es la número 1 y le sigue la número 3; esto se debe probablemente a que en ambas preguntas se les pedía resolver un sistema de ecuaciones lineales; y en las 2 y 4 se requería construir un SEL de $3x3$ con solución única y otro con infinitas soluciones respectivamente. La pregunta 5 es un caso especial porque en ella se requería de determinar el valor de los coeficientes y el término independiente de la segunda ecuación lineal de un SEL de $2x2$, para dos situaciones: que el sistema no tenga solución y que tenga infinitas soluciones.

Establecido el número de respuestas por alumno, el siguiente paso es determinar cuántas de estas respuestas son correctas, tomando en cuenta que la pregunta 1 está conformada por dos incisos, al igual que la pregunta 5. En la siguiente tabla se muestra el número de respuestas correctas e incorrectas:

Tabla 7

	Examen 1							
	Preguntas							
	1		2	3	4	5		
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*	
1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	1	1	1	1	1	1	
3	1	1	1	1	1	1	1	
4	1	1						
5	1	1		1				
6				1				*
7		1						*
Total	5	6	3	5	3	3	3	

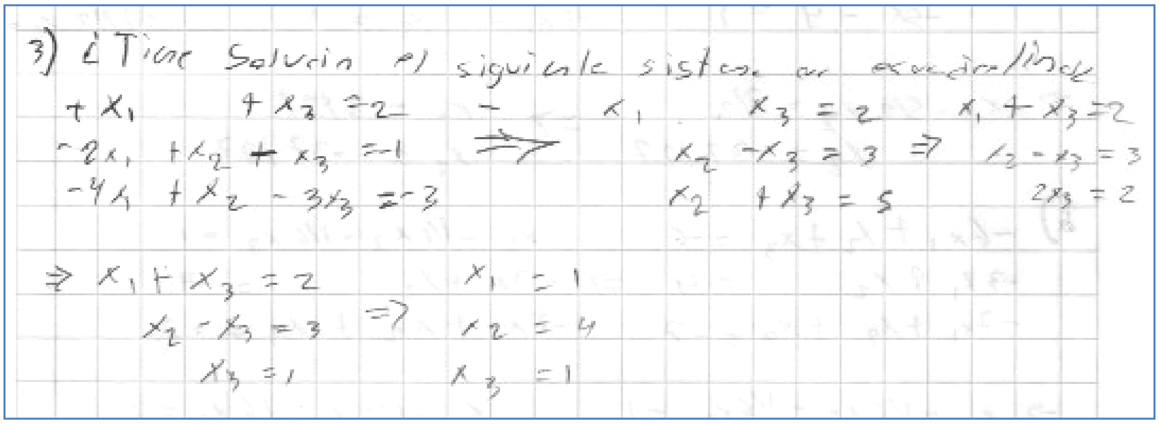
Como se puede observar el caso más desafortunado fue la pregunta 5, ya que sólo el alumno 1 contesto correctamente ambos incisos. Por otra parte, los alumnos que contestaron las preguntas 2 y 4 lo hicieron correctamente, y resulta interesante el caso del alumno 2, ya que para construir el SEL requerido en la pregunta 2, aplica la tercera operación elemental en repetidas ocasiones como se observa en la siguiente imagen:



Claramente se puede observar como este alumno construye el SEL a partir de saber la solución y de aplicar la tercera operación elemental hasta llegar a un SEL equivalente satisfactorio, ya que el proceso se puede continuar.

Lo anterior es una diferencia contundente con respecto al test. Recordemos que en el test se les pidió a los alumnos construir SEL a partir de su solución y aunque muy pocos lo hicieron, nunca fue claro el cómo, además de que fueron SEL de $2x2$. En este caso, se observa el procedimiento; es decir, la aplicación de las operaciones elementales para obtener SEL equivalentes. Desde nuestro punto de vista, este alumno ha construido el concepto tanto de solución como de sistema de ecuaciones lineales equivalente, el propósito fundamental del apoyo del ACEM.

Por otra parte, los alumnos 6 y 7 al parecer tuvieron dificultades, ya que únicamente intentaron contestar a una pregunta y lo hicieron mal; esto se debe a que ambos alumnos no asistieron a la sesión dedicada a interactuar con ALSEL, y evidentemente afecto su desempeño, y se eliminaran de la muestra. Con esta excepción, la mayoría de los alumnos que contestaron a la pregunta 1 lo hicieron correctamente, al igual que la pregunta 3; sin embargo, en esta última pregunta el alumno con la repuesta incorrecta no se percató que a la segunda ecuación del sistema original le cambio el signo al coeficiente de la variable x_3, pero el proceso de resolución fue realizado correctamente; la siguiente imagen muestra lo anterior:


3) ¿Tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} +x_1 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_3 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Desde nuestro punto de vista, la situación anterior representa un efecto positivo al usar la herramienta computacional, ya que ahora no hay errores derivados de los cálculos aritméticos en el proceso de resolución, sino un descuido por parte del alumno. De hecho, si el SEL que aparece en la imagen anterior hubiese sido el propuesto en el examen, la respuesta sería tomada como correcta, ya que de facto lo es.

En lo que sigue, presentaremos como lo hemos venido haciendo, la información derivada de los otros cuatro exámenes restantes; para ello tenemos las siguientes cuatro tablas:

Tabla 8

	Examen 2							
	Preguntas							
	1		2	3	4	5		
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*	
1	1		1	1	1	1	1	
2								*
3	1							
4				1	1	1		
5	1	1		1	1	1	1	
6	1	1		1	1			
7	1	1						
Total	5	3	1	4	4	3	2	

Tabla 9

	Examen 3							
	Preguntas							
	1		2	3	4	5		
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*	
1	1	1						
2	1	1						
3	1	1	1	1	1	1	1	*
4	1	1		1				
5	1	1		1				*
6	1	1	1					
Total	6	6	2	3	1	1	1	

Tabla 10

	Examen 4						
	Preguntas						
	1		2	3	4	5	
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*
1	1	1					
2	1	1	1	1			
3	1	1	1	1			
4	1	1		1			
5	1	1	1	1	1		
Total	5	5	3	4	1	0	0

Tabla 11

	Examen 5						
	Preguntas						
	1		2	3	4	5	
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*
1	1						
2	1	1	1	1	1		
3	1	1		1	1		
4	1						
5	1	1		1	1	1	1
6		1	1	1	1		
Total	5	4	2	4	4	1	1

De los cinco exámenes, el 2 y 3, como se puede observar en las tablas 8 y 9 respectivamente, concentran la mayoría de las respuestas incorrectas (celdas en color rojo). Hay un par de acontecimientos que envuelven la situación anterior; antes de abordarlos hay que establecer algunos parámetros. De los 13 alumnos registrados en ambas tablas únicamente 3 de ellos contestaron correctamente las preguntas que eligieron responder. De los 10 restantes, y aquí aparece el primer acontecimiento, 3 de ellos (en las tablas son señalados con un asterisco a la derecha de la tabla) no asistieron a la sesión de trabajo con el ACEM, lo que tuvo sus consecuencias.

De los 7 alumnos restantes, 3 de ellos encarnaron el segundo acontecimiento que es el siguiente fenómeno: la resistencia a usar la herramienta tecnológica propuesta. Confieso no haber pensado en dicha situación; pero su aparición abre la puerta a la investigación sobre este fenómeno, que por el momento escapa de nuestro propósito. Sin embargo, es posible que la resistencia mencionada este ligada a las características del ACEM, lo que difícilmente podemos confirmar pero indudablemente en trabajos posteriores será atendida como una variable para la evaluación del ambiente computacional.

Valorando los acontecimientos anteriores, lo más conveniente es considerar únicamente aquellos datos no ligados a dichos acontecimientos con el propósito de obtener información directamente relacionada con el uso del ACEM, por esta razón suprimimos de las tablas 8 y 9 algunos renglones para obtener las siguientes tablas:

Tabla 8a

	Examen 2						
	Preguntas						
	1		2	3	4	5	
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*
1	1		1	1	1	1	1
5	1	1		1	1	1	1
6	1	1		1	1		
7	1	1					
Total	4	3	1	3	3	2	2

Tabla 9a

	Examen 3						
	Preguntas						
	1		2	3	4	5	
Alumno	*a*	*b*				*a*	*b*
1	1	1					
4	1	1		1			
6	1	1	1				
Total	3	3	1	1	0	0	0

Para finalizar con el análisis, acoplaremos las tablas 7, 8a, 9a, 10 y 11 en una general, tanto para observar las tendencias como para hacer una comparación entre el pretest y el postest, así como entre el test y el postest.

La siguiente tabla muestra los datos del postest únicamente relacionados con el uso de la herramienta tecnológica:

Tabla 12

		Pregunta						
		1		2	3	4	5	
Alumno		*a*	*b*				*a*	*b*
1	José Emanuel	1	1	1	1	1	1	1
2	Emanuel	1	1	1	1	1	1	1
3	Ana C.	1	1	1	1	1	1	1
4	Uri	1	1					
5	Diana	1	1		1			
6	Azucena	1		1	1	1	1	1
7	Omar	1	1		1	1	1	1
8	Saira	1	1		1	1		
9	Ricardo	1	1					
10	Alfonso	1	1					
11	David Fernando	1	1		1			
12	Daniel	1	1	1				
13	Antonio	1	1					
14	Rene Ismael	1	1	1	1			
15	Rodrigo	1	1	1	1			
16	Julio Cesar	1	1		1			
17	Victor Manuel	1	1	1	1	1		
18	Berenice	1						
19	Javier	1	1	1	1	1		
20	Pedro	1	1		1	1		
21	Violeta J.	1						
22	Jorge Alex	1	1		1	1	1	1
23	Wendy		1	1	1	1		

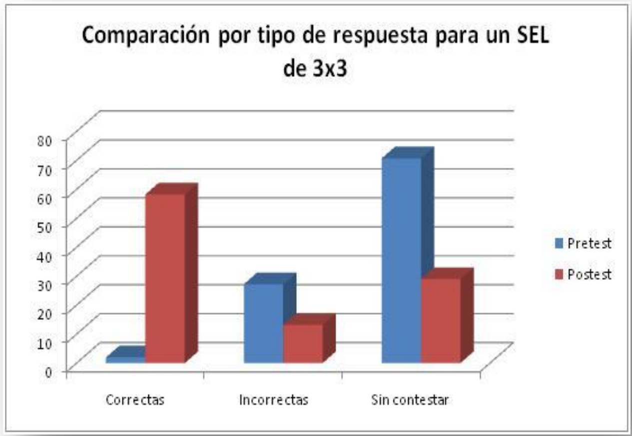
Una primera observación de la tabla 12 son el número de respuestas incorrectas. Para la primera pregunta, el inciso **a** tiene aproximadamente un 9% de respuestas incorrectas, y un 17% para el inciso **b**. En el test, los SEL de $2x2$ tuvieron aproximadamente un 12% de respuestas incorrectas.

Primero comparamos el pretest con el postest para observar las diferencias relacionadas con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por los alumnos. Iniciamos la comparación utilizando la información correspondiente a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de $2x2$.

Para lo anterior, representamos la información por medio del siguiente gráfico:

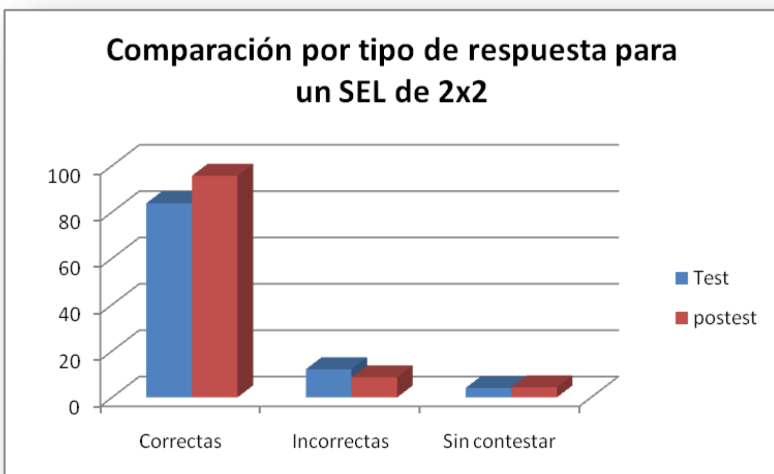
Interpretando el gráfico anterior, observamos una diferencia considerable en el porcentaje de respuestas correctas. Evidentemente, sobresale el postest por poseer la mayor cantidad de respuestas correctas, lo cual nos dice puntualmente, el avance en el aprendizaje de los alumnos sobre este tema; desde luego, derivado del proceso de enseñanza.

Para el caso de la resolución de sistemas de sistemas de ecuaciones lineales $3x3$ la diferencia entre el pretest y el postest es contundente, lo que nos permite concluir que los alumnos mejoraron significativamente en el aprendizaje de la resolución de este tipo de SEL. A continuación presentamos el siguiente gráfico comparativo:



Es evidente la diferencia entre el pretest y el postest. Recordemos que en el pretest, sólo dos alumnos resolvieron correctamente un SEL de $3x3$.

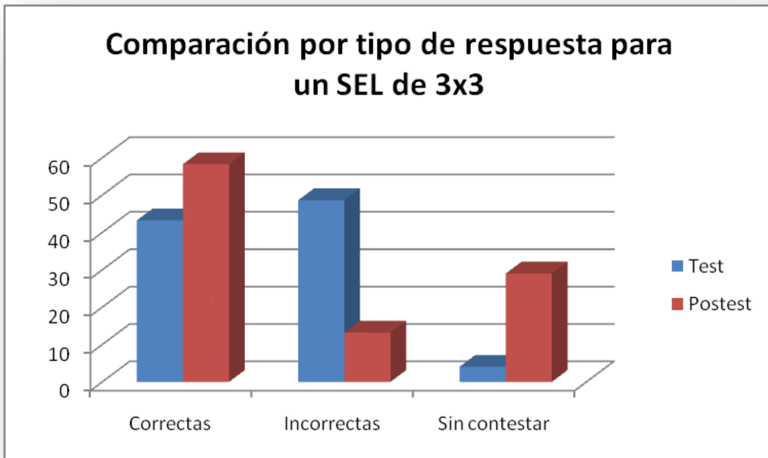
De la misma manera, para comparar el test y el postest para el caso de un SEL de $2x2$ tenemos el siguiente gráfico:



Del gráfico anterior se puede observar una ligera diferencia entre las respuestas correctas e incorrectas entre el test y postest, sin embargo, en ambos casos, la diferencia es a favor del postest.

Ahora bien, para el caso de un SEL de $3x3$ fue necesario utilizar la media aritmética, ya que recordemos que en el caso del test tenemos dos incisos correspondientes a la resolución de un SEL de $3x3$ y en el postest hay exámenes en donde se pidió resolver un SEL de $3x3$ en la tercera pregunta y otros en la cuarta.

Tomando en cuenta lo anterior tenemos el siguiente gráfico comparativo:



Del gráfico anterior se pueden observar las diferencias entre el test y el postest. La diferencia más significativa está entre las respuestas incorrectas, sin embargo, también hay una diferencia a considerar en las respuestas sin contestar, pero claramente hay una diferencia a favor de las respuestas correctas en el postest.

De acuerdo con la comparación entre el test y el pretest, consideramos existe un avance significativo en el aprendizaje de los alumnos tanto en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales dado, como en la construcción de un sistema de ecuaciones lineales bajo ciertas características. Lo anterior nos permite concluir que ALSEL cumplió con el propósito didáctico preestablecido, por lo menos en el sentido en que planteamos su validación.

Para finalizar este capítulo presentamos los comentarios emitidos por algunos de los alumnos, los cuales vienen reforzar la conclusión anterior.

4.4 Comentarios de los estudiantes.

En este apartado presentamos los comentarios emitidos por algunos alumnos al pedirles su opinión sobre el ambiente computacional ALSEL.

La siguiente tabla muestra cada uno de los comentarios emitidos por 21 alumnos:

Alumno	Comentario
1	Me gustó el ambiente porque me ayuda en todo, a formular el sistema y resolverlo.
2	Me gustó porque me ahorró un montón de operaciones.
3	Me gustó mucho porque me ayudó mucho, sin embargo le falta un poco más en el diseño de la interfaz, sobre todo que aparezca el texto a un lado del sistema equivalente.
4	Me gustó el software porque me ayudó a resolver los sistemas sin temor a equivocarse.
5	Me gustó aunque me molestó un poco el color azul del panel donde aparece el texto de la aplicación de las operaciones elementales.
6	Siento que le hace falta diseño, prefiero no estar entrando y saliendo.
7	No fue difícil entender el software y me hubiese gustado haber tenido más tiempo.
8	Esta chido el software y me gustó mucho porque me ayudó a no equivocarme y hacer las operaciones.
9	Me gustó el ambiente pero le hace falta información específica.
10	No utilicé el software porque no lo hice en la práctica anterior, lo intente pero preferí hacerlo manual.
11	Me gustó porque me ayudó a realizar las operaciones sin equivocación.
12	No conocía el software pero que me gustó mucho, le entendí pero ya no me dio tiempo resolver los problemas del examen pero me fue fácil entender el proceso de resolución.

13	Tuve problemas al aplicar la tercera operación.
14	Me gustó porque ya no tenía que hacer los cálculos aritméticos y no me equivoque.
15	Se me complican los sistemas tres por tres y el ambiente me estaba ayudando a resolverlos pero no había tenido contacto con el software por lo que no termine (se refiere al postest).
16	Me gustó el ambiente porque en él sólo tenía que razonar cómo aplicar las operaciones para eliminar los coeficientes.
17	El ambiente fue de mucha ayuda porque me fue más fácil resolver los sistemas; me confundía mucho con los signos al realizar las operaciones a mano, pero con el ambiente pude resolverlos sin problema.
18	No use el software.
20	Es más fácil resolver un sistema en el ambiente.
21	No me gustó porque hay que hacer las cosas uno mismo y yo quiero nada más la solución.

La mayoría de los comentarios giran en torno a la facilidad que ofrece ALSEL para resolver un SEL, pero llaman la atención algunos comentarios relacionados con la falta de información del ambiente y el diseño de la interfaz, y tienen mucho sentido, la última fase del diseño es la asesoría de un profesional de diseño de interfaz, que por razones económicas y de tiempo no nos fue posible contratar; pero y desde luego, serán tomados en cuenta para mejorar el ambiente. Con esto cerramos este capítulo, en donde consideramos ALSEL cumplió con el objetivo y como un ACEM en desarrollo, el siguiente paso consistirá en reforzar el ambiente dotándole de información que ayude al usuario tanto en los aspectos sintácticos como semánticos, así como mejorar el diseño de la interfaz gráfica y desarrollar las componentes faltantes.

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS

Con este capítulo concluimos lo que para nosotros ha sido la primera etapa de este trabajo de investigación, que por sus características, se encuentra en etapa de desarrollo. Hemos organizado el capítulo de la siguiente manera: el primer aparado está conformado por las conclusiones derivadas del desarrollo del ambiente computacional y de su implementación. El segundo y último apartado de este capítulo ofrece una visión general de las posibles líneas de investigación a seguir, las que esperamos abordar en estudios de doctorado.

5.1 Conclusiones.

Una investigación atraviesa por distintas fases en su desarrollo; en esta dirección, quisiera describir brevemente nuestro caso. La primera fase fue la delimitación del tema de investigación y de la pregunta de investigación; después el estudio detallado del contenido matemático y de algunas perspectivas didácticas; tercero el diseño didáctico y desarrollo computacional del ACEM denominado ALSEL; y por último, la implementación del mismo. En cada fase, mencionada anteriormente, el aprendizaje y la experiencia adquirida han sido invaluables. Me queda claro, de acuerdo con la perspectiva didáctica que permea este trabajo, que una parte fundamental en la construcción de conocimiento significativo en un individuo se origina a partir de que él mismo se enfrente y accione ante determinadas situaciones, como la escuela activa pregona.

Sirva pues el párrafo anterior para introducir las conclusiones de este trabajo de investigación.

5.1.1 Conclusiones relacionadas con el diseño y desarrollo de ALSEL.

La creación de un ambiente computacional para apoyar la enseñanza del álgebra lineal, no debe perder de vista uno de los propósitos de la matemática educativa: promover una mejor compresión de los conceptos matemáticos. En este sentido, una de las aportaciones importantes de este trabajo de investigación son las cuatro etapas que consideramos conforman la construcción de un ACEM: 1ra. Dominio del conocimiento; 2da. Propósito didáctico; 3ra. Diseño didáctico; y 4ta. Desarrollo computacional.

Una vez establecido el diseño didáctico, este no puede sufrir modificaciones, ya que está constituido con la finalidad de alcanzar un propósito didáctico. Lo anterior no es trivial, de hecho hubo un momento en que pensé que el diseño didáctico podría modificarse, según se avancé en el desarrollo computacional del mismo; esto evidentemente no es cierto, ya que un cambio en el diseño didáctico podría modificar al mismo propósito didáctico.

Por otra parte, la etapa correspondiente al desarrollo computacional del diseño didáctico fue una de las más complicadas, tanto por el tiempo requerido como por la construcción de los objetos computacionales y subrutinas. Una experiencia adquirida en esta etapa, gira en torno a la cautela en la elección del lenguaje de programación; basando dicha elección en el estudio y experiencia en lenguajes de cómputo, para establecer las posibles ventajas y desventajas al utilizarlo para desarrollar el diseño didáctico. Por ejemplo, si nuestro diseño didáctico requiere el desarrollo de animaciones, quizá lo más conveniente sea usar un lenguaje cercano a este propósito, de lo contrario corremos el riesgo de no concretarlo.

Retomando el principio del párrafo anterior, la elaboración de un ambiente computacional requiere de un amplio conocimiento tanto del lenguaje de programación como de algoritmos. Un programa computacional se compone de algoritmos, en sí mismo el programa es un algoritmo, entonces, entre más elementos se incluyan al programa más complejo se convierte y desde luego, el desarrollo computacional se complica. Como se mencionó en el capítulo 3, sin la inclusión de la aritmética racional a ALSEL, atravesaríamos por serios problemas generados por errores numéricos propios de la arquitectura de una computadora, ya que para nosotros lo que es un racional para la computadora es una aproximación, y así podemos enunciar una serie de dificultades, para nada triviales en la programación. Cabe destacar que la elaboración de una aritmética racional tampoco exime completamente al ambiente de problemas relacionados con errores numéricos, pero con la aritmética racional se minimiza el error. Pero esto será un tema más para las investigaciones futuras en el doctorado.

Sumemos a lo anterior, los cambios constantes en los lenguajes de programación y sistemas operativos. Esto no es una simple dificultad para quienes nos dedicamos a la creación de ambientes computacionales, sino un grave problema, que nos hace eternos estudiantes, o de lo contrario nuestras propuestas tienden a perder vigencia, por lo tanto, a desaparecer. Particularmente, se requiere el estudio de los nuevos lenguajes de programación, que en muchos de los casos resulta en la elaboración nuevamente de cada una de las subrutinas, y de bibliotecas esenciales y necesarias. En resumen, la creación de un ambiente computacional es evidentemente compleja. Por ejemplo, ALSEL fue desarrollado en *Visual Studio .NET 2005*; y actualmente se tiene la versión 10 del mismo. Por ello, en el doctorado, será necesaria la actualización del lenguaje.

Por último, la aplicación de la experiencia didáctica, permitió convencerme de la necesidad del desarrollo de las componentes de sustitución y verificación, así como una componente gráfica. De esta manera ALSEL se podría convertir en una herramienta que ayude a la compresión de conceptos formales del álgebra lineal como independencia y dependencia lineales, e incluso de materias relacionadas con estos conceptos como investigación de operaciones.

5.1.2 Conclusiones relacionadas con el uso de ALSEL.

La validación, es una etapa importante en el desarrollo de ambientes computacionales para la enseñanza de las matemáticas. En nuestro caso, por medio de ésta, se observaron deficiencias en el diseño de la interfaz gráfica de ALSEL en manejo de colores, tamaño del texto, posición de los objetos en la pantalla, y que confirma la asesoría de profesionales de diseño de interfaz.

Por otra parte, de acuerdo con los resultados obtenidos en la validación, considero que ALSEL cumplió en gran parte con su propósito. De acuerdo con el capítulo anterior, los alumnos tuvieron un avance en la compresión de los sistemas de ecuaciones lineales, particularmente con los conceptos de sistema de ecuaciones lineales equivalentes y solución. Sabemos, que en el desarrollo de la teoría del álgebra lineal nuevamente aparecen los sistemas de ecuaciones lineales, ya sea para determinar si un conjunto de vectores son linealmente dependientes o independientes, o para determinar el rango de una matriz, por mencionar algunas de sus aplicaciones en el desarrollo de la teoría. De esto, resulta evidente la necesidad de mejorar a ALSEL, y por lo tanto de seguir desarrollando la investigación sobre la problemática en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

Es importante señalar con base en la validación, lo fundamental e importante que el alumno enfrente a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la forma tradicional, para que ellos mismos se convenzan de lo complejo y laborioso que suele ser resolver un sistema. Una vez que el estudiante haya experimentado esta situación, el siguiente paso es, facilitar los procesos aritméticos, mediante un software, en nuestro caso el uso de ALSEL para promover la reflexión y análisis de los conceptos asociados al resolver un SEL.

Una situación a tomar en cuenta, convirtiéndose en un problema abierto, es la resistencia de algunos alumnos a usar la herramienta computacional. Esto parece deberse particularmente a alumnos que se resisten a participar activamente en su propio aprendizaje y prefieren una enseñanza tradicional. Como evidencia de lo anterior, recordemos el comentario de uno de los alumnos (ver capítulo 4, apartado 4.4): *No me gustó porque hay que hacer las cosas uno mismo y yo quiero nada más la solución*.

De la experiencia didáctica, se observó que resulta significativo para los alumnos, además de motivante, el resolver un problema real e ir construyendo las ideas y conceptos (recordemos que este es uno de los puntos importantes en la didáctica Cuevas & Pluvinage), del contenido matemático, en lugar de iniciar con definiciones y teoremas. En efecto, los alumnos muchas ocasiones externan su frustración al estudiar matemáticas preguntando: y eso ¿para qué sirve? Desde mi punto de vista, hay que mediar entre la presentación de problemas que nos permitan desarrollar un concepto matemático, así como en su formalización, pasando por la operatividad y ejercitación.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, uno de los principales problemas al generar un SEL a partir de una situación real, es la aritmética con coeficientes difíciles de manejar, ya sea decimales o racionales, estos siempre causan dificultades a los alumnos y profesores. Con ALSEL la posibilidad de partir de un problema real aumenta considerablemente, ya que los coeficientes del SEL no son un problema. Permitiéndonos resolver paso a paso el sistema, enfocándonos en la reflexión y análisis conceptual.

La siguiente conclusión gira en torno a la cantidad de horas clase por día y a la suficiencia de las mismas. En nuestro caso, recordemos que la clase de álgebra lineal tenía una duración de tres horas y sólo se impartía un día a la semana. Esta situación, tuvo repercusiones en el aprovechamiento de los alumnos, por ejemplo, de una clase a otra los alumnos olvidaban los temas abordados. Si bien, agradezco profundamente al CU-UAEM Valle de Chalco por todo el apoyo brindado, también se observa una deficiente planeación en la elaboración de los horarios, así como en la asignación del número de horas. El tiempo no es suficiente para que los alumnos comprendan y construyan los conocimientos necesarios.

Existen varias aristas para que una propuesta didáctica tenga éxito, tomando en cuenta que toda propuesta es una respuesta parcial a un problema educativo. Una de estas aristas es la infraestructura, particularmente los laboratorios o centros de cómputo, siempre y cuando la propuesta didáctica requiera del uso de la computadora. En nuestro caso, es evidente la necesidad de centros de cómputo óptimos; desafortunadamente, a partir de nuestra experiencia, vislumbramos serios problemas en este sentido. Los problemas van desde computadoras insuficientes hasta equipos obsoletos, pasando por deterioro del mismo equipo; además de poco personal dedicado tanto al cuidado como al mantenimiento de los laboratorios. Lo anterior, para una propuesta didáctica que incluye el uso de la computadora, tiene un efecto negativo, por ejemplo, como la cantidad de computadoras es insuficiente, a un par de alumnos se les asigna un equipo (esto en el mejor de los casos) y regularmente, uno de ellos trabaja más, afectando el aprovechamiento.

Lo anterior, es un panorama general de la situación en nuestras instituciones educativas. Situación que ha de tomarse en cuenta para el desarrollo de cualquier propuesta didáctica, ya que en menor o mayor medida, en la actualidad, la computadora es un utensilio necesario e indispensable, no sólo en el ámbito educativo.

Finalizamos este apartado con la siguiente conclusión: a raíz de dotar al alumno con una herramienta como ALSEL, se olvidó de las dificultades aritméticas al resolver un sistema de ecuaciones lineales, y enfocó su atención al proceso de resolución; a las operaciones elementales como única herramienta matemática para generar sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Y fue tal el efecto, que los alumnos pudieron interpretar y resolver problemas que implican el proceso inverso. Con lo anterior, nuevamente confirmamos el cumplimiento del propósito de ALSEL, y también nos da motivos para continuar esforzándonos en el desarrollo de ACEM.

5.2 Investigaciones futuras

Este apartado está dirigido a establecer algunas de las posibles líneas de investigación, considerando tanto la parte computacional como la matemática. Sabemos que el álgebra lineal se conforma de una cantidad importante de conceptos fundamentales, como: espacios y subespacios vectoriales, independencia lineal, vectores, bases, transformaciones lineales, etc. En todos estos, la presencia de los sistemas de ecuaciones lineales es ineludible. En términos generales, nuestra investigación a futuro nuevamente está centrada en el problema de la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal, siendo nuestro propósito renovar nuestra propuesta didáctica (la creación de un ambiente computacional que apoye la enseñanza del álgebra lineal) siempre con la premisa de mejorar la comprensión de los conceptos del álgebra lineal.

5.2.1 Posibles líneas de investigación.

Como hemos mencionado ALSEL es un ACEM en desarrollo, así que un trabajo de investigación a corto plazo es consolidar a ALSEL construyendo las componentes faltantes y desarrollando una interfaz gráfica, así como establecer un diseño de interfaz más amigable en términos de la usabilidad (Nielsen, 2003).

Retomar el estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, iniciando con el análisis de un trabajo relacionado con la génesis de la teoría de los espacios vectoriales de Dorier (2000), en donde dice: "…el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sirvió como un marco, sobre el cual una teoría embriónica [*embryonic*] de linealidad fue construida" (p. 5), esto con la intención de encontrar ideas que nos permitan conformar actividades para la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal. Por otra parte, con el propósito de no caer en viejas actitudes, también hemos pensado en el análisis de otro artículo, denominado "el obstáculo del formalismo en álgebra lineal" (Dorier et al, 2000). Desde luego, el estudio no estará centrado únicamente en los documentos antes mencionados, habrá de hacerse nuevamente una selección de artículos e investigaciones recientes. Como los desarrollados por Sierpinska y Oktaç.

Otra línea de investigación, casi paralela a la consolidación de ALSEL corresponde a realizar una experimentación formal para la evaluación del ACEM, posiblemente un estudio longitudinal con miras a obtener información más contundente respecto al aprendizaje de los conceptos mencionados.

Un trabajo casi inmediato es la búsqueda o desarrollo de problemas reales, los que permitan generar sistemas de ecuaciones lineales a partir de su modelación matemática y cuya solución, implique la resolución del sistema, así como la construcción de los conceptos antes mencionados del álgebra lineal. Por ejemplo, Robert (2000) propone el cuadrado mágico de tercer orden como un problema que se puede abordar a diferentes niveles de conceptualización, siendo uno de estos la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, y un poco más adelante identificar al espacio vectorial. Vale la pena mencionar, que identificar problemas reales que nos permitan la construcción de conceptos matemáticos es una tarea compleja.

Así, nuestra intención es extender ALSEL para permitir instrumentar elementos de corte didáctico. Desarrollar hojas de actividades que guíen tanto al profesor como a los alumnos, en la construcción de los conceptos matemáticos deseados. Desarrollar la información tanto sintáctica como semántica que acompañara al ambiente renovado para generar y permitir una mejor interacción humano-computadora.

También, conviene pensar en la posible creación de ambientes computacionales híbridos, es decir ambientes conformados por componentes desarrolladas en varios lenguajes según la conveniencia, la que debe estar basada en las virtudes del lenguaje de programación. Por ejemplo, utilizar *Flash* (Adobe Flash, 2008) para animaciones o desarrollo de una interfaz gráfica. Por lo tanto, en el mismo proceso de investigación será necesario el estudio de por lo menos el lenguaje de programación antes mencionado, así como de las nuevas versiones de *Visual Studio .NET* (Microsoft Visual Studio, 2008).

.

Resumiendo, considero que un trabajo de investigación a futuro sería el siguiente:

a) Desarrollar actividades partiendo de problemas reales. Estos deberán de cumplir con dos condiciones: ser atractivos para los estudiantes y lo suficientemente ricos para que los conceptos emerjan a partir de su resolución.

b) Abordar conceptos como: independencia y dependencia lineales, cambio de bases, transformaciones lineales.

c) Hacer un estudio de arte para actualizarse en investigaciones alrededor de problemas en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

d) Estudiar análisis numérico del álgebra lineal, con el fin de optimizar los algoritmos.

e) Estudiar y actualizarse en lenguajes de programación con la intención de desarrollar las componentes faltantes de ALSEL y empezar a desarrollar las componentes adecuadas para apoyar la enseñanza de los conceptos del álgebra lineal.

f) Llevar a cabo una evaluación formal del ambiente computacional que surja de los puntos anteriores.

g) Desarrollar la componente tutorial, con un tutor, que provea ayudas o asistencia al usuario, a diversos niveles.

h) Extender el sistema a problemas de aplicación de SEL.

i) Aplicar el sistema a diversas materias de matemáticas, como investigación de operaciones, en diversas carreras universitarias.

Para finalizar, quisiera dejar abierta la posibilidad de investigar más sobre uno de los fenómenos acontecidos en este trabajo: la resistencia de algunos alumnos al uso de la herramienta computacional, en términos cognitivos.

ANEXOS

Anexo 1. Código de creación dinámica del SEL en Formar Sistema.

```
public partial class FrmFormar : Form
    {
        public FrmFormar()
        {
            InitializeComponent();
        }
        public int NumEcu;
        public int NumInc;
        private RichTextBox[,] RtextVar;
        private FilTextM[,] FtextCoef;
        private Label[,] SimOper;
        public string[,] ArreCoef;
        private Label[] EcuyNum;
        public bool Seguro=true;
        private void BtnFormar_Aceptar_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            if (!int.TryParse(FilTxtFormar_NoEcu.Text, out NumEcu) ||
!int.TryParse(FilTxtFormar_NoInc.Text, out NumInc))
            {

                LblPnlError.Text = "Falta el número de ecuaciones o de incógnitas, o
ambos.";
                PnlFormar_Error.Visible = true;
            }
            else
            {
                PnlFormar_Error.Visible = false;
                PnlFormar_NoEcuInc.Enabled = false;
                BtnFormar_Cancelar.Visible = false;
                LblFormar_Instru2.Visible = true;
                BtnFormar_AcepSO.Visible = true;
                BtnFormar_CancSO.Visible = true;

                RtextVar = new RichTextBox[NumEcu, NumInc];
                FtextCoef = new FilTextM[NumEcu, NumInc + 1];
                SimOper = new Label[NumEcu, NumInc];
                ArreCoef = new String[NumEcu, NumInc + 1];
                EcuyNum = new Label[NumEcu];

                for (int i = 0; i < NumEcu; i++)
                {
                    int incre = i + 1;
                    EcuyNum[i] = new Label();
                    EcuyNum[i].Font = new Font("Times New Roman", 12F, FontStyle.Italic);
                    EcuyNum[i].Text = "Ecuación " + incre;
                    EcuyNum[i].Location = new Point(105, 320 + (i * 40));
                    EcuyNum[i].AutoSize = true;
                    for (int j = 0; j < NumInc; j++)
                    {

                        RtextVar[i, j] = new RichTextBox();
                        SimOper[i, j] = new Label();
                        RtextVar[i, j].Text = "x" + (j + 1);
                        variables(RtextVar[i, j], j, i);
                        if (j < (NumInc - 1))
                        {
```

```
                        SimOper[i, j].Text = "+";
                    }
                    else
                    {
                        SimOper[i, j].Text = "=";
                    }

                    operS_R_E(SimOper[i, j], j, i);
                }
                for (int k = 0; k <= NumInc; k++)
                {
                    FtextCoef[i, k] = new FilTextM();
                    coeficient(FtextCoef[i, k], k, i);

                }
            }
                for (int i = 0; i < NumEcu; i++)
                {
                    this.Controls.Add(EcuyNum[i]);
                    for (int j = 0; j <= NumInc; j++)
                    {
                        if (j < NumInc)
                        {
                            this.Controls.Add(RtextVar[i, j]);
                            this.Controls.Add(SimOper[i, j]);
                        }
                        this.Controls.Add(FtextCoef[i, j]);

                    }

                }
                FtextCoef[0, 0].Focus();
                BtnFormar_AcepSO.TabIndex = (NumEcu * NumInc + 1) + 9;
                BtnFormar_CancSO.TabIndex = (NumEcu * NumInc + 1) + 10;

            }
        }

        private void ToolSFormar_Ayuda_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            AyudaFormar AyuFormar = new AyudaFormar();
            AyuFormar.ShowDialog();
        }

        private void BtnFormar_Salir_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            Close();
            Seguro = false;
        }

        private void BtnFormar_CancSO_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            Close();
            Seguro = false;
        }

        private void BtnFormar_AcepSO_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            int i=0;
            int j=0;
            do
            {
                if (FtextCoef[i, j].Text.Contains("/0"))
                {
                    LblPnlError.Text = "Recuerda que una fracción es de la forma a/b donde b
es distinto de 0.";
                    PnlFormar_Error.Visible = true;
                    break;
                }
                if (FtextCoef[i, j].Text == "")
                {
```

```
                    LblPnlError.Text = "Hay cajas que están vacías.";
                    PnlFormar_Error.Visible = true;
                    break;
                }

                if (FtextCoef[i, j].Text.Contains("-/") || FtextCoef[i, j].Text == "-." ||
FtextCoef[i, j].Text == "." || FtextCoef[i, j].Text == ("-"))
                {
                    LblPnlError.Text = "Hay cajas que contienen expresiones que no son
números.";
                    PnlFormar_Error.Visible = true;
                    break;
                }
                if(FtextCoef[i,j].Text == "-0" || FtextCoef[i,j].Text == "0.")
                    {
                        ArreCoef[i, j] = "0";
                    }
                    else if (FtextCoef[i, j].Text.Contains("/"))
                    {
                        if (VerFracc(FtextCoef[i, j].Text))
                        {
                            ArreCoef[i, j] = "1";
                        }
                        else
                        {
                            ArreCoef[i, j] = FtextCoef[i, j].Text;
                        }
                    }
                    else
                    {
                        ArreCoef[i, j] = FtextCoef[i, j].Text;
                    }

                j++;
                if (j>NumInc && i<NumEcu)
                {
                    i++;
                    if (i!=NumEcu)
                    {
                        j = 0;
                    }

                }
            } while (i<NumEcu && j<=NumInc);

            if (i==NumEcu && j==NumInc+1)
            {
                Close();
            }
        }

        private void BtnFormar_AcepSO_Leave(object sender, EventArgs e)
        {
            PnlFormar_Error.Visible = false;
        }

        private void BtnFormar_Aceptar_Leave(object sender, EventArgs e)
        {
            PnlFormar_Error.Visible = false;
        }

        #region Métodos de Creación

        private void variables(RichTextBox equis, int Lx, int Ly)
        {

            equis.Font = new Font("Times New Roman", 14F);
            equis.Size = new Size(20, 25);
            equis.Location = new Point(250 + 85 * Lx, 320 + 40 * Ly);
            equis.SelectionStart = 1;
            equis.SelectionLength = 1;
```

```
            equis.SelectionFont = new Font("Times New Roman", 7F);
            equis.SelectionCharOffset = -5;
            equis.BorderStyle = BorderStyle.None;
            equis.ReadOnly = true;
            equis.BackColor = Color.FromKnownColor(KnownColor.ButtonFace);
            equis.TabStop = false;
        }
        private void coeficient(FilTextM param, int Lx, int Ly)
        {
            param.Size = new Size(50, 25);
            param.Location = new Point(200 + 85 * Lx, 320 + 40 * Ly);
            param.TabIndex = Ly + 8;
        }
        private void operS_R_E(Label oper, int Lx, int Ly)
        {
            oper.Font = new Font("Times New Roman", 12F);
            oper.AutoSize = true;
            oper.Location = new Point(265 + 85 * Lx, 320 + 40 * Ly);
        }
        #endregion Métodos de Creación

        private bool VerFracc(string num)
        {
            string a, b;
            a = num.Substring(0,num.IndexOf("/"));
            b = num.Substring(num.IndexOf("/")+1,num.Length-num.IndexOf("/")-1);
            if (a == b)
            {
                return true;
            }
            else
            {
                return false;
            }
        }


    }
}
```

Anexo 2. Reducción de fracciones.

```
public string Frac_irredu(string frac)
        {
            string frairre;
            if (frac.Contains("/"))
            {
                int posbarra = frac.IndexOf("/");
                int Dividendo = int.Parse(frac.Remove(posbarra));
                int Divisor = int.Parse(frac.Remove(0, posbarra + 1));
                int flux = 0;
                if (Dividendo < 0)
                {
                    flux = 1;
                    Dividendo = -1 * Dividendo;
                }
                int mcd = MCD(Dividendo, Divisor);

                int Divid = 0;
                int Divis = 0;
                if (mcd!=0)
                {
                Divid = Dividendo / mcd;
                Divis = Divisor / mcd;
                }

                if (flux == 1)
                {
```

```
                frairre = "-" + Divid.ToString() + "/" + Divis.ToString();
            }
            else
            {
                frairre = Divid.ToString() + "/" + Divis.ToString();
            }
        }
        else
        {
            frairre = "0";
        }

        return frairre;
    }
```

Anexo 3. Maximo Común divisor.

```
private int MCD(int m, int n)
        {
            int max = Math.Max(m, n);
            int min = Math.Min(m, n);
            int res;
            if (m == 0 || n == 0)
            {
                min = 0;
            }
            else
            {
                Math.DivRem(max, min, out res);
                while (res > 0)
                {
                    max = min;
                    min = res;
                    Math.DivRem(max, min, out res);
                }
            }
            return min;
        }
```

Anexo 4. Creación dinámica de la representación de un SEL en la ventana principal.

```
public partial class UsCtrlRepreSEL : UserControl
    {
        public UsCtrlRepreSEL()
        {
            InitializeComponent();
        }

        private int tamx;
        public int etamx
        {
            get { return tamx; }
            set { tamx = value; }
        }

        private int tamy;
        public int etamy
        {
            get { return tamy; }
            set { tamy = value; }
```

```
        }

        private int Lizq;
        public int Pizq
        {
            get { return Lizq; }
            set { Lizq = value; }
        }

        private int Lder;
        public int Pder
        {
            get { return Lder; }
            set { Lder = value; }
        }

        public string[,] Comen = new string[20, 20];
        public string micomen
        {
            get { return Comen[Lizq, Lder]; }
            set { Comen[Lizq, Lder] = value; }
        }


        private Label[,] VERcoef;
        private RichTextBox[,] LasVAR;
        private Label[,] LosSignos;
        private int[] MaxCol;
        private Label[] NoEcu;
        private void UsCtrlRepreSEL_Load(object sender, EventArgs e)
        {
            VERcoef = new Label[tamx, tamy + 1];
            MaxCol = new int[tamy + 1];
            LasVAR = new RichTextBox[tamx, tamy];
            LosSignos = new Label[tamx, tamy];
            NoEcu = new Label[tamx];

            for (int i = 0; i < tamx; i++)
            {
                for (int j = 0; j <= tamy; j++)
                {
                    VERcoef[i, j] = new Label();
                    VERcoef[i, j].Text = Comen[i, j];
                    TtipEtiquetar.SetToolTip(VERcoef[i, j], "Coeficiente");
                    if (Comen[i,j]=="-1" && j==0)
                    {
                        VERcoef[i, j].Text = "-";
                    }
                    if (j<tamy)
                    {
                        if (Comen[i, j] == "0" || Comen[i,j] == "1")
                    {
                        VERcoef[i, j].Text ="";
                    }
                    }
                    if (Comen[i, j] == "0" && j == tamy)
                    {
                        VERcoef[i, j].Text = "0";
                    }
                    if (j > 0 && j < tamy && Comen[i, j].Contains("-"))
                    {
                        string tempo = Comen[i, j];
                        VERcoef[i, j].Text = tempo.Remove(0, 1);
                        if (Comen[i,j]=="-1")
                        {
                            VERcoef[i, j].Text = "";
                        }
                    }

                    VERcoef[i, j].Font = new Font("Times New Roman", 12F);
                    VERcoef[i, j].AutoSize = true;
```

```
                this.Controls.Add(VERcoef[i, j]);

                if (j < tamy)
                {
                    LasVAR[i, j] = new RichTextBox();
                    TtipEtiquetar.SetToolTip(LasVAR[i, j], "Incógnita");
                    LasVAR[i, j].Text = "x" + (j + 1);
                    if (Comen[i, j] == "0")
                    {
                        LasVAR[i, j].Text = "";
                    }
                    variables(LasVAR[i, j]);
                    this.Controls.Add(LasVAR[i, j]);

                    LosSignos[i, j] = new Label();
                    LosSignos[i, j].Font = new Font("Symbol", 12F);
                    LosSignos[i, j].Size = new Size(20, 19);
                    this.Controls.Add(LosSignos[i, j]);

                }
            }
            NoEcu[i] = new Label();
            NoEcu[i].Text = "Ecuación " + (i + 1);
            NoEcu[i].Font = new Font("Times New Roman", 12F, FontStyle.Italic);
            this.Controls.Add(NoEcu[i]);
        }

        int TempCont = 0;
        for (int i = 0; i <= tamy; i++)
        {
            if (tamx == 1)
            {
                MaxCol[i] = VERcoef[0, i].Width;
            }
            else
            {
                MaxCol[i] = 0;
                for (int j = 0; j < tamx; j++)
                {
                    if (MaxCol[i] <= VERcoef[j, i].Width)
                    {
                        MaxCol[i] = VERcoef[j, i].Width;
                    }
                }
            }
            TempCont += MaxCol[i];
        }

        this.Size = new Size((20 * (etamy * 2)) + TempCont + (2 * 20) + 100, (((2 *
tamx) + 1) * 19) + 19);

        for (int i = 0; i < tamx; i++)
        {
            TempCont = 100;
            for (int j = 0; j <= tamy; j++)
            {
                VERcoef[i, j].AutoSize = false;
                VERcoef[i, j].Size = new Size(MaxCol[j], 19);
                VERcoef[i, j].TextAlign = ContentAlignment.MiddleRight;
                if (j == tamy)
                {
                    VERcoef[i, j].TextAlign = ContentAlignment.MiddleLeft;
                }
                VERcoef[i, j].Location = new Point(TempCont, 38 + (i * 38));
                TempCont += MaxCol[j] + 40;
            }
        }

        for (int i = 0; i < tamx; i++)
        {
            TempCont = 80;
```

```
            for (int j = 0; j < tamy; j++)
            {
                TempCont += MaxCol[j] + 20;
                LasVAR[i, j].Location = new Point(TempCont, 38 + (i * 38));
                TempCont += 20;
            }
            NoEcu[i].Location = new Point(5, 38 + (i * 38));
        }

        for (int i = 0; i < tamx; i++)
        {
            TempCont = 80;
            for (int j = 0; j < tamy; j++)
            {
                TempCont += MaxCol[j] + 40;
                LosSignos[i, j].Text = "+";
               if (Comen[i, j + 1].Contains("-"))
                {
                    LosSignos[i, j].Text = "-";
                }
               if (j == tamy - 1)
                {
                    LosSignos[i, j].Text = "=";
                }
               if (Comen[i, j + 1] == "" || Comen[i, j + 1] == "0" && j < tamy - 1)
                {
                    LosSignos[i, j].Text = "";
                }
               if (Comen[i, j] == "0" && !Comen[i, j + 1].Contains("-") && j < tamy - 1)
                {
                    LosSignos[i, j].Text = "";
                }
                LosSignos[i, j].Location = new Point(TempCont, 38 + (i * 38));

            }
        }


    }

   #region métodos de creación
    /// <summary>
    /// Crea las RichTexBox que contienen a las variables "equis" con su
    /// respectivo subíndice.
    /// </summary>
    /// <param name="equis">Un objeto de la forma RichTextBox</param>
    private void variables(RichTextBox equis)
    {
        equis.Font = new Font("Times New Roman", 14F);
        equis.Size = new Size(20, 25);
        equis.SelectionStart = 1;
        equis.SelectionLength = 1;
        equis.SelectionFont = new Font("Times New Roman", 7F);
        equis.SelectionCharOffset = -5;
        equis.BorderStyle = BorderStyle.None;
        equis.ReadOnly = true;
        equis.BackColor = Color.LightGray;
        equis.TabStop = false;
    }

    #endregion métodos de creación
  }
}
```

Anexo 5. Elección de la operación elemental.

```
public partial class FrmOperElem : Form
    {
        public FrmOperElem()
        {
            InitializeComponent();
        }

        private void Rbtn1raOper_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
        {
            Pnl1raOper.Enabled = true;
            Pnl2daOper.Enabled = false;
            Pnl3raOper.Enabled = false;
        }

        private void Rbtn2daOper_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
        {
            Pnl1raOper.Enabled = false;
            Pnl2daOper.Enabled = true;
            Pnl3raOper.Enabled = false;
        }

        private void Rbtn3raOper_CheckedChanged(object sender, EventArgs e)
        {
            Pnl1raOper.Enabled = false;
            Pnl2daOper.Enabled = false;
            Pnl3raOper.Enabled = true;
        }

        public string[] EleccOper = new string[4];
        private void BtnPnl1raOperAceptar_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            int Eci,Ecj;
            if (!int.TryParse(FtxtEcui.Text, out Eci) || !int.TryParse(FtxtEcuj.Text, out
Ecj))
            {

            }
            else
            {
                EleccOper[0] = "1";
                EleccOper[1] = "0";
                EleccOper[2] = Eci.ToString();
                EleccOper[3] = Ecj.ToString();

                Close();
            }

        }
        public bool OperSeg=true;
        private void BtnOperElemCerrar_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            OperSeg = false;
            Close();
        }
        private ConaFrac Cf = new ConaFrac();
        private void BtnPnl2daOperAceptar_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            int SdaEcui;
            string Escalar = FtxtM2daOperEscalar.Text;

            if (!int.TryParse(Ftxt2daOperEcui.Text,out SdaEcui))
            {

            }
            else
               {
                if (Escalar.Contains("."))
                {
                    Escalar = Cf.ConverDec_Frac(Escalar);
                }
```

```
                if (!Escalar.Contains(".")&& !Escalar.Contains("/"))
                {
                    Escalar = Cf.ConverEnt_Frac(Escalar);
                }
                EleccOper[0] = "2";
                EleccOper[1] = Escalar;
                EleccOper[2] = SdaEcui.ToString();
                EleccOper[3] = "0";
                Close();
                }
        }



        private void BtnPnl3raOperAceptar_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            int TraEcui;
            int TraEcuj;
            string multiplo = FtxtMultiplo.Text;

            if (!int.TryParse(Ftxt3raoperEcui.Text, out TraEcui) ||
!int.TryParse(Ftxt3raOperEcuj.Text, out TraEcuj))
            {

            }
            else
            {
                if (multiplo.Contains("."))
                {
                    multiplo = Cf.ConverDec_Frac(multiplo);
                }
                if (!multiplo.Contains(".") && !multiplo.Contains("/"))
                {
                    multiplo = Cf.ConverEnt_Frac(multiplo);
                }
                EleccOper[0] = "3";
                EleccOper[1] = multiplo;
                EleccOper[2] = TraEcui.ToString();
                EleccOper[3] = TraEcuj.ToString();
                Close();
            }
        }
    }
```

Anexo 6. Ejecución de las operaciones elementales.

```
private void MnuItResolver_Elim_Click(object sender, EventArgs e)
        {

            FrmOperElem Eliminar = new FrmOperElem();
            Label []OperOcupa=new Label[20];
            PnlFrmPrincipalSitua.Visible = false;
            Eliminar.ShowDialog();
            if (Eliminar.OperSeg)
            {
                tempCont += 1;
                int Necu = RepreAlgebra[tempCont - 1].etamx;
                int Ninc = RepreAlgebra[tempCont - 1].etamy;
                RepreAlgebra[tempCont] = new UsCtrlRepreSEL();
                string[,] CadTemp = new string[Necu, Ninc + 1];

                if (Eliminar.EleccOper[0] == "1")
                {

                    for (int i = 0; i < Necu; i++)
                    {
                        for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                        {
                            if (RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains("."))
                            {
                                RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j] =
Cf.ConverDec_Frac(RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j]);
                            }
                            if (!RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains(".") &&
!RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains("/"))
                            {
                                RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j] =
Cf.ConverEnt_Frac(RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j]);
                            }
                        }
                    }
                    for (int i = 0; i < Necu; i++)
                    {
                        for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                        {
                            if (int.Parse(Eliminar.EleccOper[2]) - 1 == i)
                            {
                                CadTemp[i, j] = RepreAlgebra[tempCont -
1].Comen[int.Parse(Eliminar.EleccOper[3]) - 1, j];
                            }
                            else if (int.Parse(Eliminar.EleccOper[3]) - 1 == i)
                            {
                                CadTemp[i, j] = RepreAlgebra[tempCont -
1].Comen[int.Parse(Eliminar.EleccOper[2]) - 1, j];
                            }
                            else
                            {
                                CadTemp[i, j] = RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j];
                            }
                        }
                    }

                    RepreAlgebra[tempCont].etamx = Necu;
                    RepreAlgebra[tempCont].etamy = Ninc;

                }
                if (Eliminar.EleccOper[0] == "2")
                {
                    for (int i = 0; i < Necu; i++)
                    {
                        for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                        {
                            if (RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains("."))
                            {
                                RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j] =
Cf.ConverDec_Frac(RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j]);
                            }
                            if (!RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains(".") &&
!RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains("/"))
                            {
```

```
                                RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j] =
Cf.ConverEnt_Frac(RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j]);
                            }
                            if (int.Parse(Eliminar.ElecOper[2]) - 1 == i)
                            {
                                CadTemp[i, j] = Cf.Frac_irredu(Of.MulFrac(Eliminar.ElecOper[1],
RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[int.Parse(Eliminar.ElecOper[2]) - 1, j]));
                            }
                            else
                            {
                                CadTemp[i, j] = RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j];
                            }
                        }
                    }

                    RepreAlgebra[tempCont].etamx = Necu;
                    RepreAlgebra[tempCont].etamy = Ninc;

                }
                if (Eliminar.ElecOper[0] == "3")
                {
                    for (int i = 0; i < Necu; i++)
                    {
                        for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                        {
                            if (RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains("."))
                            {
                                RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j] =
Cf.ConverDec_Frac(RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j]);
                            }
                            if (!RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains(".") &&
!RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j].Contains("/"))
                            {
                                RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j] =
Cf.ConverEnt_Frac(RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j]);
                            }
                        }
                    }
                    for (int i = 0; i < Necu; i++)
                    {
                        for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                        {
                            if (int.Parse(Eliminar.ElecOper[2]) - 1 == i)
                            {
                                string multi = Of.MulFrac(Eliminar.ElecOper[1],
RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[int.Parse(Eliminar.ElecOper[3]) - 1, j]);
                                CadTemp[i, j] = Of.SumaFrac(RepreAlgebra[tempCont -
1].Comen[int.Parse(Eliminar.ElecOper[2]) - 1, j], multi);
                                CadTemp[i, j] = Cf.Frac_irredu(CadTemp[i, j]);
                            }
                            else
                            {
                                CadTemp[i, j] = RepreAlgebra[tempCont - 1].Comen[i, j];
                            }
                        }
                    }

                    RepreAlgebra[tempCont].etamx = Necu;
                    RepreAlgebra[tempCont].etamy = Ninc;
                }

                OperOcupa[tempCont - 1] = new Label();
                if (Eliminar.ElecOper[0]=="1")
                {
                    OperOcupa[tempCont - 1].Text = "Se Aplicó la " + Eliminar.ElecOper[0] + "ra
operación elemental:\n   se intercambio la ecuación " + Eliminar.ElecOper[2] + " por la ecuación
" + Eliminar.ElecOper[3];
                }
                else if (Eliminar.ElecOper[0]=="2")
                {
                    OperOcupa[tempCont - 1].Text = "Se Aplicó la " + Eliminar.ElecOper[0] + "da
operación elemental:\n   se multiplicó el escalar " + Eliminar.ElecOper[1] + " a la ecuación " +
Eliminar.ElecOper[2];
                }
                else if (Eliminar.ElecOper[0]=="3")
                {
```

```
                    OperOcupa[tempCont - 1].Text = "Se Aplicó la " + Eliminar.EleccOper[0] + "ra 
operación elemental:\n   se sumó " + ConvEnt(Eliminar.EleccOper[1]) + " veces la ecuación " + 
Eliminar.EleccOper[3] + " a la ecuación " + Eliminar.EleccOper[2];
                }

                OperOcupa[tempCont - 1].Font = new Font("Calibri", 14F);
                OperOcupa[tempCont - 1].ForeColor = Color.Black;
                OperOcupa[tempCont - 1].AutoSize = true;
                OperOcupa[tempCont - 1].Location = new Point(5, 5 + (tempCont * 30));
                PnlApliOper.Controls.Add(OperOcupa[tempCont - 1]);

                for (int i = 0; i < Necu; i++)
                {
                    for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                    {
                        RepreAlgebra[tempCont].Pizq = i;
                        RepreAlgebra[tempCont].Pder = j;
                        RepreAlgebra[tempCont].micomen = ConvEnt(CadTemp[i, j]);
                    }
                }
                NoSEL[tempCont] = new Label();
                NoSEL[tempCont].Text = "Sistema Equivalente [" + tempCont + "]";
                NoSEL[tempCont].Font = new Font("Times New Roman", 12F);
                NoSEL[tempCont].ForeColor = Color.Blue;
                NoSEL[tempCont].AutoSize = true;
                NoSEL[tempCont].Location = new Point(5, 5);
                RepreAlgebra[tempCont].Controls.Add(NoSEL[tempCont]);
                RepreAlgebra[tempCont].Location = new Point(10, (tempCont * 
((RepreAlgebra[tempCont - 1].Height) + 20)) + 80);
                pnlprincipal.Controls.Add(RepreAlgebra[tempCont]);

                int[] NecuCas2 = new int[Necu];
                for (int i = 0; i < Necu; i++)
                {
                    NecuCas2[i] = 0;
                    for (int j = 0; j <= Ninc; j++)
                    {

                        if (ConvEnt(CadTemp[i, j]) == "0" && j != Ninc)
                        {
                            NecuCas2[i] += 1;
                        }
                    }
                }
                for (int i = 0; i < Necu; i++)
                {
                    if (NecuCas2[i] == Ninc && ConvEnt(CadTemp[i, Ninc]) != "0")
                    {
                        LblSitua.Text = "La ecuación "+(i+1)+" es de la forma 0 = b con b distinto 
de cero.\n\n";
                        LblSitua.Text +="¡El sistema de ecuaciones lineales NO TIENE SOLUCIÓN!";
                        PnlFrmPrincipalSitua.Visible = true;
                    }
                    if (NecuCas2[i]==Ninc && ConvEnt(CadTemp[i,Ninc])=="0")
                    {
                        LblSitua.Text = "La ecuación "+(i+1)+" es de la forma 0 = 0 \n\n";
                        LblSitua.Text +="¡El sistema puede TENER INFINITAS SOLUCIONES!";
                        PnlFrmPrincipalSitua.Visible = true;
                    }
                }
            }
        }
```

Anexo 7. Examen final.

Examen 1

Nombre: ______________________________

Nota: Con ayuda de *ALSEL* contesta las preguntas y justifica tu respuesta.

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $$\begin{aligned} 2x - 5y &= 7 \\ -5x - y &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ -3x_1 + x_2 \quad\quad &= -4 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

2) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga por solución a $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ y $x_3 = 0$.

3) ¿Tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + \ x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - \ x_3 &= -1 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

4) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga una infinidad de soluciones.

5) Dado el sistema de ecuaciones lineales (2 x 2):

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 1 \\ ax + by &= c \end{aligned}$$

Para que valores de a, b y c:

a) el sistema no tiene solución; y
b) el sistema tiene una infinidad de soluciones.

Examen 2

Nombre: ________________________________

Nota: Con ayuda de *ALSEL* contesta las preguntas y justifica tu respuesta.

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $$\begin{aligned} -5x - 2y &= -9 \\ 3x + \quad y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ -3x_1 \qquad - x_3 &= 2 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

2) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga por solución a $x = 0$, $y = 3$ y $z = -6$.

3) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que no tenga solución.

4) ¿Tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x - 2y - \quad z &= 4 \\ 3x - 5y - 2z &= 11 \\ x - 2y - \quad z &= 4 \end{aligned}$$

5) Dado el sistema de ecuaciones lineales (2 x 2):

$$\begin{aligned} 2x + by &= 5 \\ ax - 8y &= c \end{aligned}$$

Para que valores de a, b y c:

a) el sistema tiene única solución; y
b) el sistema tiene una infinidad de soluciones.

Examen 3

Nombre: ______________________________

Nota: Con ayuda de *ALSEL* contesta las preguntas y justifica tu respuesta.

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

b) $\begin{aligned} -x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 &= 10 \\ -x_1 + \quad x_2 &= 8 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ -4x_1 + x_2 \qquad &= -5 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$

2) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga por solución a $x_1 = -6$, $x_2 = -3$ y $x_3 = 3$.

3) ¿Tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} -x \quad + y \qquad &= 1 \\ -2x + y - \quad z &= -1 \\ -4x + y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

4) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga una infinidad de soluciones.

5) Dado el sistema de ecuaciones lineales (2 x 2):

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= c \\ ax + by &= 8 \end{aligned}$$

Para que valores de a, b y c:

a) el sistema tiene única solución; y
b) el sistema no tiene solución.

Examen 4

Nombre: ________________________________

Nota: Con ayuda de *ALSEL* contesta las preguntas y justifica tu respuesta.

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

c) $$\begin{aligned} 3x_1 - \quad 3x_2 &= 24 \\ x_1 + 15x_2 &= -40 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ -3x_1 \qquad - x_3 &= 2 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

2) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga por solución a $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$.

3) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que no tenga solución.

4) ¿Tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 4 \\ y + z &= -1 \\ x - 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

5) Dado el sistema de ecuaciones lineales (2 x 2):

$$\begin{aligned} 7x + by &= 1 \\ ax - 9y &= c \end{aligned}$$

Para que valores de a, b y c:

a) el sistema tiene única solución; y
b) el sistema no tiene solución.

Examen 5

Nombre: ______________________________

Nota: Con ayuda de *ALSEL* contesta las preguntas y justifica tu respuesta.

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

d) $$\begin{aligned} 4x + \tfrac{1}{4}y &= 17 \\ -\tfrac{15}{2}x - \tfrac{1}{2}y &= -32 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_3 &= -6 \\ -3x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= -4 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 &= -7 \end{aligned}$$

2) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga por solución a $x = 2$, $y = 0$ y $z = -6$.

3) ¿Tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{aligned} -3x + 2y - z &= 0 \\ -2x + y - z &= -1 \\ -4x + y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

4) Construye un sistema de ecuaciones lineales de (3 x 3) que tenga una infinidad de soluciones.

5) Dado el sistema de ecuaciones lineales (2 x 2):

$$\begin{aligned} 5x + by &= 5 \\ ax - 6y &= c \end{aligned}$$

Para que valores de a, b y c:

a) el sistema tiene única solución; y
b) el sistema no tiene solución.

BIBLIOGRAFÍA

Bashmakova, I.G. et al (2000). The beginnings and evolution of algebra. Washington, DC, Mathematical Association of America.

Basurto, E. (2007). Diferentes sintaxis de algunas calculadoras básicas en la escritura de operaciones con números enteros y la resolución de problemas aditivos. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.

Brousseau, G. (2000). *Educación y didáctica de las matemáticas*. Educación matemática, Vol. 12, No. 1. Mexico: Editorial Iberoamérica. (5-38)

Ceballos, F. (2006). Enciclopedia de Microsoft Visual C#, 2ª edición. España: Ra-Ma editorial.

Cuevas, C. A. (1994). Sistema tutorial inteligente LIREC. Tesis de doctorado. México, D.F.: Cinvestav.

Cuevas, C. A. (1998). *Hacia una clasificación de la computación en la enseñanza de las matemáticas*. Investigaciones en matemática educativa. México: Editorial Iberoamérica. (273-288)

Cuevas, C. A. y Pluvinage, F. (2003). *Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques*. Annales de didactique et sciences cognitive, Vol. 8. IREM Strasbourg. (273-292)

Cuevas, C. A. y Mejía, H. (2003). Cálculo Visual. México: Oxford University Press.

Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.

Dorier, J. et al (2000). El obstáculo del formalismo en álgebra lineal. *On the Teaching of Linear Algebra*. Netherlands. Kluwer Academic Publisher. (85-124)

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en matemática educativa II. Mexico: Editorial Iberoamerica. (173-202)

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Euler, L. (1984). Elements of algebra. New York, Springer-Verlag. Tr. John Hewlett

Filloy, E. (1970). Introducción al algebra lineal. México: Trillas. (32-34)

Gómez, D. (2006). Representación de conceptos de análisis estructural con álgebra lineal. Tesis de doctorado. México, D.F.: Cinvestav.

Hoffmann, B. (1975). About vectors. New York : Dover Publications.

Johnson, R. E. (1969). Algebra lineal. México, continental.

Lang, S. (1976). Algebra lineal. México, fondo educativo interamericano.

Lay, D. C. (1994). *Linear Algebra and its applications*. USA, Addison-Wesley.

Martínez, M. (2005). Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para un curso de cálculo diferencial a nivel superior. Tesis de doctorado. México, D.F.: Cinvestav.

McCarthy, J. (2007). *What is artificial intelligence?* Artículo consultado en la página Web: http://www-formal.stanford.edu/jmc/whatisai/whatisai.html el 27 de octubre de 2009.

Mery, D. y López, M. (2003). *Restauración de imágenes usando el criterio de minimización de rizado en la imagen restaurada*. Artículo consulado en la página Web: http://dmery.ing.puc.cl/dmery/dmery/repositorio/papers/2003-CLEI.pdf el 27 de octubre de 2009.

Mirón, H. G. (2000). Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones F <-> F' en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.

Mora, B. (2001). Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.

Mochón, S. (2006). *Avances y hallazgos en la implementación de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias*. Matemática educativa: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual. Mexico: Santillana. (101-122)

Moreno, S. (2003). Ambiente computacional para promover una mejor comprensión de conceptos matemáticos casos: máximos y mínimos. Tesis de doctorado. México, D.F.: Cinvestav.

Nielsen, J. (2003). *Introduction to Usability*. Artículo consultado en la página Web http://www.useit.com/alertbox/20030825.html el 27 de octubre del 2009.

Page, L. y Brin S. (2000). *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine*. Artículo consultado en la página Web http://www7.scu.edu.au/programme/fullpapers/1921/com1921.htm el 27 de octubre de 2009.

Pérez Carrizales, C. O. (2007). Nuevas tecnologías y diseño de ambientes virtuales. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.

Rosainz, B. (2005). Tres modelos de enseñanza: obstructores que generan errores en la resolución de problemas que utilizan sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en telesecundaria. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav. (239-242)

Sánchez, J. L. (2008). Geometría dinámica y variación en un ambiente de taller en línea. Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.

Sierpinska, A. (2000). Sobre algunos aspectos del pensamiento de estudiantes en álgebra lineal. *On the Teaching of Linear Algebra*. Netherlands. Kluwer Academic Publisher. (209-246)

Strang, G. (1982). Algebra lineal y sus aplicaciones. México: Fondo Educativo Interamericano.

Vázquez, M. E. (1992). Programa de apoyo para un curso de álgebra lineal (software de apoyo en la educación). Tesis de maestría. México, D.F.: Cinvestav.