



Lyon 1

Année universitaire : 2009/2010



UNIVERSITÉ DE LYON

**Mémoire master recherche HPDS**

# **Effets de variables didactiques sur la résolution d'un problème d'énumération en maternelle**

**Situation : Une voiture dans chaque garage**

**Présenté par ROUSSON Laëtitia**

Soutenance le 22/09/2010

**Discipline : Mathématiques**

**Co-directeurs du mémoire : Viviane DURAND-GUERRIER et Henri-Claude ARGAUD**

**Rapporteur : Floriane WOZNIAK**

**Membres du jury : Virginie DELOUSTAL-JORRAND et Nadja ACIOLY-REGNIER**

## **Remerciements**

J'exprime tout d'abord ma sincère reconnaissance à Henri-Claude ARGAUD pour plusieurs raisons : tout d'abord au co-directeur du mémoire de master qui m'a proposé ce sujet très intéressant, mais aussi au chercheur pour ses précieux conseils lors de l'écriture de ce mémoire. Je remercie également Viviane DURAND-GUERRIER qui m'a permis d'effectuer ce travail en collaboration avec Monsieur ARGAUD et qui m'a aidé dans l'élaboration de ce mémoire. Pour finir, je tiens à remercier mon entourage pour leur soutien.

# Sommaire

INTRODUCTION .....	7
<b>A- De l'énumération composante du dénombrement à l'énumération pour elle-même .....</b>	<b>8</b>
I. La connaissance populaire sur « compter »/ dénombrer .....	8
I.1. Un constat .....	8
I.2. Exemples de significations attribuées par la société, recueillies par des chercheurs .....	8
I.2.a. La comptine n'est pas le comptage (J. BRIAND et M-C. CHEVALIER) .....	8
I.2.b. Pour compter, il ne suffit pas de réciter la suite des nombres (G. BROUSSEAU) .....	9
II. Dénombrer et compter : quelles significations? .....	9
II.1. Qu'est-ce compter/dénombrer pour la didactique des mathématiques .....	9
II.1.a. Compter/dénombrer .....	9
II.1.b. Détails de l'acte de compter (J. BRIAND) .....	11
II.1.c. Les cinq principes de l'activité de comptage (R. GELMAN) .....	12
II.1.d. Les principes pour un dénombrement correct (Ermel) .....	12
II.2. Les difficultés dans le comptage/dénombrement pointées par les chercheurs .....	13
II.2.a. Nécessité de stratégies de comptage (R. BRISSIAUD) .....	13
II.2.b. Les erreurs dans le dénombrement (Ermel GS) .....	15
II.2.c. Les difficultés dans le dénombrement (A. BESSOT, C. COMITI, C. PARISELLE) .....	16
III. L'énumération : composante du dénombrement dans les apprentissages .....	18
III.1. Que disent les dictionnaires? .....	18
III.2. L'énumération chez les chercheurs .....	20
III.2.a. L'énumération incluse implicitement dans les questions de dénombrement .....	20
(G. VERGNAUD) .....	20
III.2.b. L'énumération, instrument de l'exploration des collections (G. BROUSSEAU) .....	21
III.2.c. L'énumération, connaissance mise en jeu lors d'un inventaire (J. BRIAND) .....	22
IV. Énumération et dénombrement : éléments d'analyse à caractère mathématique .....	25
IV.1. Quelques éléments d'analyse principalement mathématique du dénombrement .....	25
IV.1.a. Sur quoi porte-il? .....	25
IV.1.b. Quels problèmes « théoriques » pour l'école? .....	26
IV.1.c. Une variable didactique principale : le « domaine » des « objets » .....	26
IV.2. Quelques éléments principalement mathématiques d'analyse de l'énumération .....	28

IV.3. Lien entre problème d'énumération et connaissances spatiales .....	32
V. L'énumération dans les textes officiels : peut-être considérée comme allant de soi .....	33
V.1. Les textes officiels de 2008 de l'école maternelle .....	33
V.2. Les textes officiels de 2008 concernant l'approche des nombres .....	34
V.3. Les textes officiels de 2002 concernant l'énumération .....	35
VI. Quelles activités pour les élèves dans les ouvrages à destination des enseignants avec ou sans .....	dénombr
VI.1. Remarques générales .....	35
VI.2. La situation des boîtes d'allumettes .....	36
VI.3. La situation des boîtes d'œufs .....	40
VI.4. Du côté des TICE.....	42
<b>B- Problématique, méthodologie de recherche et cadres théoriques de référence .....</b>	<b>44</b>
I. Problématique .....	44
II. Méthodologie de recherche .....	46
II.1. Méthodologie habituelle .....	46
II.2. Particularités méthodologiques de notre étude .....	47
II. Des choix pour l'enseignement et l'apprentissage .....	48
II.1. Constructivisme et socio-constructivisme .....	48
II.1.a. Constructivisme (J. PIAGET) .....	48
II.1.b. Socio-constructivisme (WALLON, VYGOTSKY, BRUNER) .....	49
II.2. Didactique des mathématiques .....	49
II.2.a. La dialectique outil/objet (R. DOUADY) .....	49
II.2.b. La théorie des situations (G. BROUSSEAU) .....	51
◇ La situation d'apprentissage .....	51
◇ Les différents types de situation .....	51
◇ Les caractéristiques d'une situation a-didactique .....	52
◇ Le processus d'apprentissage proposé dans une situation a-didactique .....	55
III. Psychologie et développement de l'enfant .....	57
IV. Différenciation pédagogique .....	58
<b>C- Analyse à priori d'une situation d'énumération d'objets matériels .....</b>	<b>61</b>
I. Analyse globale .....	61
I.1. Les variables potentielles .....	61
I.1.a. Les variables didactiques .....	61
I.1.b. La variable socio-didactique .....	66

I.2. Particularités de procédures de résolution de problèmes d'énumération signalées par les ... chercheurs .....	67
I.2.a. Deux effets d'ergonomie avec pour conséquences : une collection non construite et une énumération induite .....	67
◇ Premier effet : disposition des boîtes à énumérer sur la table .....	67
◇ Deuxième effet : place de la boîte contenant les allumettes .....	68
I.2.b. Effet de secouage .....	69
I.3. Observation sur la dévolution d'un problème d'énumération .....	70
II. Premiers éléments d'analyse didactique de la situation envisagée .....	70
II.1. Les choix pour la dévolution de la situation a-didactique .....	71
II.1.a. Les particularités du contexte .....	71
II.1.b. La « permanence du lien » de l'objet e avec l'objet f : un problème à « vue » ...	72
II.1.c. Le dispositif élève .....	72
II.1.d. Le dispositif pour la communication du problème .....	73
II.2. Caractéristiques des problèmes donnés aux élèves .....	75
II.2.a. Le problème élève .....	75
II.2.b. Contraintes et variables didactiques de la situation .....	75
II.2.c. Connaissances et savoirs en jeu dans le problème .....	77
II.2.d. Les stratégies/procédures attendues .....	77
<b>D- Eléments complémentaires .....</b>	<b>79</b>
I.Eléments méthodologiques pour le mémoire .....	79
I.1. Quelles données pour satisfaire aux hypothèses? .....	79
I.2. Comment recueillir les données? .....	79
I.3. Où recueillir les données? .....	79
II. Eléments didactiques complémentaires de la situation .....	80
II.1. Structure d'une séance .....	80
II.2. Structure de la séquence .....	82
II.3. Description de caractéristiques de phases .....	83
II.3.a. Phase 1 : phase d'appropriation .....	83
II.3.b. Phase 2 : séances avec boîtes mobiles et désorganisées .....	84
III. Rappel des conclusions obtenues dans le mémoire professionnel .....	85
<b>E- Effets de variables didactiques sur la résolution de problèmes .....</b>	<b>89</b>
I.Effets sur les résultats .....	89
I.1. Résultats mitigés pour les élèves de petite section .....	90

I.2. Difficultés légères pour les élèves de moyenne section lors de l'augmentation de la taille de la collection .....	93
I.3. Les élèves de grande section atteignent les 100% lors de deux séances .....	97
I.4. Conclusion .....	99
II. Effets sur les procédures .....	100
II.1. Evolution des procédures vers la procédure P4d de mise à l'écart pour les élèves de PS	102
II.2. Evolution des procédures vers la procédure P4c de mise à l'écart pour les élèves de MS105	
II.3. Evolution des procédures vers la procédure P5 de marquage pour les élèves de GS .....	108
II.4. Conclusion .....	111
III. Autres paramètres .....	111
III.1. L'absentéisme .....	111
III.2. La mobilisation .....	112
III.3. Des contraintes d'ordre temporel et spatial .....	113
<b>F- Des explications à ces résultats? .....</b>	<b>114</b>
I. Liées à l'élève individuellement .....	114
II. Liées aux interactions sociales .....	114
III. Par comparaison avec une autre expérimentation .....	115
IV. Mobilité versus fixité .....	118
CONCLUSION .....	121
BIBLIOGRAPHIE .....	123
Annexes (feuilles jaunes)	

# INTRODUCTION

Ayant travaillé, au cours de l'année 2009/2010, sur le thème de l'énumération lors de mon mémoire de master professionnel et dans le cadre de ma formation de professeur des écoles, j'ai décidé de prolonger et d'affiner mes recherches dans le cadre du mémoire du master recherche.

Ayant cette année en responsabilité tous les niveaux de l'école maternelle (petite section, moyenne section et grande sections), il m'a paru intéressant de tester la situation d'apprentissage sur les trois niveaux de l'école maternelle pour voir l'évolution des procédures des élèves en fonction de l'âge et du choix des variables didactiques.

Pourquoi le choix de l'énumération?

Dans le B.O. n°3 du 19 juin 2008, il est dit que « *l'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets* ». En effet, la maternelle accorde une grande importance à l'apprentissage du dénombrement.

Or, je me suis rendue compte que les programmes et les manuels ne prenaient pas ou très peu en compte une composante du dénombrement qui est pourtant essentielle l'énumération. En CP, on observe encore des élèves qui ne savent pas dénombrer correctement à cause d'une énumération mal maîtrisée. Il m'a donc paru intéressant d'en étudier l'apprentissage.

Après une présentation des travaux des chercheurs sur l'énumération et le dénombrement suivie par l'étude des textes officiels et des manuels, j'énoncerai la problématique et je décrirai la méthodologie de recherche ainsi que les cadres théoriques de référence. Ensuite, une analyse à priori d'une situation d'énumération d'objets matériels sera faite complétée par des éléments complémentaires pour une meilleure compréhension de la situation mise en place. Le mémoire se terminera par l'étude des effets de variables didactiques sur la résolution de problèmes qui sera prolongée par l'explication des raisons de tels résultats.

# A- De l'énumération composante du dénombrement à l'énumération pour elle-même

## I. La connaissance populaire sur « compter » / dénombrer

### I.1. Un constat

Partons d'une discussion eue lors d'une réunion de rentrée parents-professeur dans une classe de petite section. Un parent, à cette réunion, dit « mon fils sait déjà compter jusqu'à quinze ». Un autre parent vient me voir à la fin et me dit : « son fils ne sait pas compter jusqu'à quinze, il connaît seulement les nombres jusqu'à quinze ». Cette remarque faite par le deuxième parent montre que les deux parents ne donnent pas le même sens au terme « compter » ; pour l'un : compter, c'est savoir la comptine numérique et pour l'autre : compter nécessite d'autres connaissances que la comptine numérique<sup>1</sup>.

Suite à cette discussion, j'ai décidé de m'intéresser plus précisément au dénombrement et plus précisément d'étudier les connaissances-compétences nécessaires à l'élève pour dénombrer correctement une collection.

### I.2. Exemples de significations attribuées par la société, recueillies par des chercheurs

#### I.2.a. La comptine n'est pas le comptage (J. BRIAND et M-C. CHEVALIER)

Dans « *les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques* »<sup>2</sup>, Joël BRIAND et Marie-Claude CHEVALIER (1995) relatent un exemple sur ce qu'est compter : le propos commence par cette déclaration « *Mon enfant sait compter jusqu'à 30, mais je lui ai un peu appris...* ». J. BRIAND et M-C CHEVALIER disent ensuite : « *Ainsi, en général, un parent dit que son enfant sait compter jusqu'à 30 (par exemple) si cet enfant connaît la comptine de 1 à 30. Si l'enfant oublie un nombre, l'adulte fait répéter le mot manquant. [...]. Mais ce parent serait peut-être surpris de constater que son enfant sait « compter » jusqu'à 30, et qu'il ne peut pas aller chercher, par exemple 15 fourchettes, à la demande. Dans l'action de compter, l'enfant devra bien sûr réciter la comptine numérique, mais aussi synchroniser les gestes lui permettant de prendre les objets un à un, détacher le nombre 15, etc. En fait, la comptine n'est pas le comptage. L'enfant de notre exemple sait-il réellement compter? C'est-à-dire, répète-t-il simplement une suite de mots*

<sup>1</sup> Comptine numérique : suite ordonnée des noms de nombres «un, deux, trois, quatre...».

<sup>2</sup> J. BRIAND et MC CHEVALIER (1995), *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, p.17.



*comme un rituel dénué de sens ou bien a-t-il compris que cette suite associée intentionnellement à une gestuelle organisée pouvait l'aider dans certains types de tâches (ici le dénombrement)? ».*

Ici, J. BRIAND et M-C CHEVALIER considèrent que la comptine n'est pas le comptage. La comptine est une connaissance nécessaire pour le comptage mais pas suffisante. Il faut y associer une gestuelle organisée.

### **I.2.b. Pour compter, il ne suffit pas de réciter la suite des nombres**

**(G. BROUSSEAU)**

Guy BROUSSEAU relate également une discussion familiale où le terme compter n'a pas la même signification chez les différents membres de la famille (voir le texte en annexe pages 2 à 4). En effet, le grand-père considère que l'enfant sait compter s'il connaît la suite des mots-nombres tandis que Tante Mimi (institutrice à la retraite) considère que « *pour savoir si l'enfant sait compter, il faut lui montrer des doigts et lui demander combien il y en a, et puis lui demander à son tour tant de doigts* ». Tante Mimi conclut « *il ne suffit pas de réciter la suite des nombres!* ». Nous voyons bien que Tante Mimi considère que connaître la suite des nombres n'est pas suffisant pour savoir compter. Le modèle initial {Maître, élève, savoir} du grand-père est substitué par le modèle {Maître, élève, savoir, milieu} de Tante Mimi où le milieu objectif est le nombre de doigts à montrer ou à compter. Dans la situation de Tante Mimi, une collection d'objets, ici les doigts de la main, est introduite afin de permettre d'évaluer si l'enfant sait compter ou non.

D'après ces deux exemples, il semble que compter est un processus complexe nécessitant de savoir la comptine numérique, si cela est nécessaire, ce n'est pas suffisant.

## **II. Dénombrer et compter : quelles significations?**

### **II.1. Qu'est-ce que compter/dénombrer pour la didactique des mathématiques**

#### **II.1.a. Compter/dénombrer**

Le comptage et le dénombrement sont deux notions dont la signification est proche mais une nuance existe entre les deux. Dans sa thèse<sup>3</sup>, J. BRIAND (1993) étudie plus précisément ces deux termes du point de vue de la didactique.

Il rapporte :

« *LE COMPTAGE* :

*Le comptage est défini par GELMAN et GALLISTEL par : chaque objet de la collection à compter doit être apparié à un mot de la « comptine numérique ».*

---

<sup>3</sup> BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse, Bordeaux I, p10.

*Le comptage est un mesurage de collections : L'application de l'ensemble des parties d'un ensemble fini dans  $N$  qui, à toute partie fait correspondre son cardinal est une mesure. L'activité de comptage d'une collection est donc une activité de mesurage. »*

LE DENOMBREMENT :

J. BRIAND donne trois définitions. La première est la définition d'un point de vue plutôt mathématique, les deux autres sont des définitions d'un point de vue plutôt didactique.

*« Définition 1 : En mathématiques, un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec une suite commençante de  $N$ .*

*Définition 2 : On dit qu'un enfant sait dénombrer une collection quand le dernier mot nombre qu'il prononce n'est pas un simple numéro, mais représente à lui seul, la quantité de tous les objets. (GELMAN 1983).*

*Définition 3 : En situation, BLANCA-VILLEGAS (1986) distingue deux définitions du dénombrement :*

*Le dénombrement au sens large : Capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection donnée (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2). (Le comptage peut alors être un savoir suffisant).*

*Le dénombrement au sens restreint : Capacité à produire une collection (C2) équipotente à une collection (C1) sans voir cette collection au moment où l'on produit la collection (C2) en se servant du cardinal de la collection (C1). »*

On peut donc, pour résumer et en s'appuyant sur R. GELMAN, dire que :

- compter : c'est établir une bijection entre

\* un sous-ensemble de la collection des mots nombres de la comptine numérique (stable, conventionnelle et totalement ordonnée) – c'est une « suite » de mots -

\* et les objets (à énumérer) de la collection.

- dénombrer une collection : c'est compter et définir le cardinal de la collection énumérée par le dernier mot-nombre énoncé.

Par exemple, à la question « Combien y-a-t-il? » pour une collection de cinq éléments, un élève qui sait compter dira, en énumérant les objets : « un, deux, trois, quatre, cinq » et il s'arrêtera là ; si on lui demande alors à nouveau : « Combien y-a-t-il? », il reprendra : « un, deux, trois, quatre, cinq » et ainsi il « recompte ». Un enfant qui sait dénombrer dira : « « un, deux, trois, quatre, cinq ; il y en a **cinq** ».

On notera cependant que les termes sont souvent employés l'un pour l'autre.

## II.1.b. Détails de l'acte de compter (J. BRIAND)

Prenons, pour définition, une séquence proposée par Joël BRIAND<sup>4</sup> (1999) :

« Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :

- 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un élément d'une collection.
- 3- Énoncer un mot-nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
- 4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
- 5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.
- 6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
- 7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 8- Énoncer le dernier mot-nombre. »

Il complète cette définition par : « les étapes 1, 2, 4, 5, 6, 7 constituent une tâche que nous appellerons tâche d'inventaire, au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule. »

Dans cette définition, on se rend bien compte que le mot dénombrer serait plus approprié que le mot compter puisque l'étape 8 est l'énonciation du cardinal de la collection.

Dans l'ouvrage *Des situations pour apprendre le nombre*<sup>5</sup>, les auteurs (2006) ont repris cette définition et l'ont complétée par les remarques suivantes :

- « les étapes 1, 2 et 7 relèvent de la nécessité de concevoir ce qu'est une collection (La collection n'est pas un objet réel, c'est un ensemble d'objets réunis dans un lieu de l'espace en fonction d'un critère a priori déterminé par le sujet. On est certain que l'élève a bien défini la collection quand il est capable de l'identifier comme un seul et même objet, c'est-à-dire de la reconnaître comme identique, après qu'elle est subie une transformation) ;
- l'étape 3 relève du principe de bijection (c'est mettre en correspondance correctement les mots et les objets) ;
- l'étape 8 relève du principe cardinal ;
- mais la séquence (1, 2, 4, 5, 6, 7) constitue une tâche bien spécifique que l'on nomme : « tâche d'inventaire ou d'énumération ». »

---

<sup>4</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p53.

<sup>5</sup> NEY Lisbeth, RAJAIN Claude, VASLOT Evelyne (2006), *Des situations pour apprendre le nombre – cycle 1 et GS*, p. 132.

### **II.1.c. Les cinq principes de l'activité de comptage (R. GELMAN)**

Selon R. GELMAN, l'activité de comptage est gouvernée par cinq principes :

- 1) le principe de correspondance terme à terme : on associe un élément de la collection à dénombrer à un mot-nombre.
- 2) le principe de la suite stable : la connaissance de la comptine est stable et correcte.
- 3) le principe cardinal : c'est le dernier mot-nombre qui permet de repérer le nombre d'éléments.
- 4) le principe d'abstraction : on peut dénombrer tout et n'importe quoi. Toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble. On peut compter un ensemble d'objets hétérogènes.
- 5) le principe d'indifférence de l'ordre : on peut compter dans n'importe quel ordre sans incidence sur le résultat.

Ici, également, le terme de dénombrement serait plus approprié car il ait fait mention du principe cardinal.

### **II.1.d. Les principes pour un dénombrement correct (Ermel)**

Dans l'ouvrage *Apprentissages numériques – CP*<sup>6</sup>, l'équipe Ermel (2000) définit le terme dénombrement comme ci-après.

*« Dénombrement : opération qui permet d'exprimer, par un nombre, l'aspect quantitatif d'une collection ; cette opération consiste à utiliser la comptine numérique (suite des mots-nombres) en associant (oralement ou mentalement) un objet nouveau à chaque mot récité ; pour que le dénombrement soit réussi, quelques principes doivent être respectés :*

- *la suite de mots-nombres utilisée doit être à la fois stable (c'est toujours la même suite qui est utilisée) et conventionnelle (tout le monde doit utiliser la même suite pour assurer la communication) ;*
- *il ne faut pas que les objets soient « pointés » plus rapidement que les mots de la comptine ne sont récités (ou l'inverse)*
- *le dénombrement doit être « cardinalisé », c'est-à-dire accompagné de la capacité à annoncer, à la fin du dénombrement, que le dernier mot prononcé correspond au nombre d'objets de la collection ;*
- *il faut faire abstraction de la nature et des différences éventuelles entre les objets dénombrés ;*
- *enfin, il faut avoir conscience que l'ordre dans lequel sont comptés les objets n'influe pas sur le résultat du dénombrement.*

---

<sup>6</sup> ERMEL (2000), *Apprentissages numériques - CP*, Hatier, Paris.

*Pour le dénombrement, à la place de la comptine numérique (orale), on peut utiliser sur le même principe un compteur qui fournit la suite écrite (en chiffre) des nombres ( curseur déplacé sur un calendrier, compteur automatique ou non...).*

*D'autres formes de dénombrement sont également utilisées, s'appuyant sur un comptage de deux en deux, ou par petits paquets inégaux (de 2 à 4 ou 5 objets)...*

*Le recours à l'utilisation de paquets de dix, cent... relève d'une autre technique basée sur la compréhension de notre système d'écriture des nombres. »*

Les « principes » adoptés par l'équipe Ermel et ceux de R. GELMAN sont identiques.

D'après ces définitions, on se rend compte que compter/dénombrer est un processus complexe qui nécessite l'appropriation de plusieurs connaissances-compétences et cela entraîne donc l'apparition de difficultés chez les élèves. En effet, de nombreux principes entrent en jeu et doivent être maîtrisés pour pouvoir effectuer correctement une tâche de dénombrement.

## **II.2. Les difficultés dans le comptage/dénombrement pointées par les chercheurs**

### **II.2.a. Nécessité de stratégies de comptage (R. BRISSIAUD)**

Rémi BRISSIAUD s'intéresse à la question : comment les élèves apprennent à calculer ? Selon lui, il y a deux processus d'apprentissage du nombre : la comptine numérique (mots-nombres) et l'utilisation de collections-témoins de doigts (ou collections organisées). L'usage des collections organisées aide les élèves à accéder directement au dénombrement, mais il y a complémentarité du comptage et de l'usage des collections-témoins.

R. BRISSIAUD aborde le comptage en comparant deux populations. Il étudie le cheminement des américains et des asiatiques. Le chemin américain est basé sur le comptage oral, le dénombrement. Le chemin asiatique basé sur un codage particulier ainsi que sur la décomposition et la recomposition du nombre.

Il considère qu'en PS, les élèves peuvent éventuellement apprendre « comment l'on compte » mais qu'ils sont très peu nombreux à pouvoir comprendre « pourquoi l'on compte ». Ils ne savent pas que compter les objets d'une collection permet d'accéder au nombre.

J. BRIAND (1993) dans sa thèse examine l'ouvrage *Comment les enfants apprennent à calculer* de R. BRISSIAUD et écrit :

*« Son ouvrage traite du comptage et du dénombrement. L'auteur (R. BRISSIAUD) rappelle que le comptage est l'attribution à chaque objet d'un mot-nombre, comme l'on attribuerait « des dossards à des coureurs ». Aucun des mots-nombre prononcés ne représente une quantité à lui tout seul. Le*

*dernier mot-nombre prononcé ne « vaut » pas plus que les autres : lui aussi est un numéro qui réfère à l'objet pointé.*

*Le dénombrement est défini comme : « Un enfant sait dénombrer lorsque le dernier mot-nombre qu'il prononce n'est pas un simple numéro, mais représente à lui seul la quantité de tous les objets. » »*

Ici, on remarque que R. BRISSIAUD effectue une différence entre le comptage et le dénombrement. Cette différence est la même que celle conclut précédemment.

*« P. 35, la préoccupation de l'auteur (R.BRISSIAUD) est l'apprentissage du comptage. Il énonce les résultats de R. GELMAN qui affirme que 80% d'enfants de 4 ans réussissent le comptage d'une collection de 5 éléments et cite les travaux de COMITI-BESSOT-PARISELLE dans lesquelles les auteurs constatent que lorsque la taille augmente, (30 objets en milieu de cours préparatoire) il devient difficile, pour l'enfant d'effectuer correctement une correspondance terme à terme. Les erreurs sont : « soit les enfants oublient un objet, soit ils recomptent deux fois le même objet. »*

*Or, page 36, lorsqu'il s'agit de répertorier les erreurs, R. BRISSIAUD écrit :*

*« On en trouve encore chez des enfants relativement âgés, et qui résultent plus d'un manque de méthode que d'un défaut de connaissances. Pour compter des objets disposés en cercle, par exemple, il faut garder la trace de son point de départ, pour ne pas s'arrêter trop tôt ou amorcer un deuxième tour. Dès que les objets à compter ne sont pas alignés, la mise en œuvre d'une stratégie de comptage appropriée se révèle nécessaire. L'enseignant peut assez facilement aider les enfants dans ce domaine. Si les objets à compter sont déplaçables, par exemple, on a vu qu'une bonne stratégie consiste à déplacer chaque objet, de façon à séparer les objets déjà comptés de ceux qui restent à compter. Quand il s'agit d'objets dessinés, l'enfant peut adopter une stratégie de marquage. »*

*L'auteur (R. BRISSIAUD) a décelé une difficulté qui est sans doute caractéristique de l'énumération, mais il n'y reconnaît pas une connaissance à acquérir. Il propose un moyen d'éviter la difficulté. Il ne propose pas une situation d'apprentissage. L'objectif est le comptage. C'est l'activité première. Tout ce qui s'y oppose est traité comme un manque de méthode, une difficulté personnelle de l'élève que l'enseignant résoudra localement. »*

Ici, on se rend bien compte que R. BRISSIAUD a décelé des difficultés des élèves relatives à la complexité du comptage, pourtant il ne met pas en œuvre des situations propres pour améliorer cette difficulté. Il aide seulement les élèves à résoudre localement leur problème en proposant des stratégies adaptées au problème : déplacement pour des objets déplaçables et marquage pour des objets non déplaçables. Une des erreurs mise en évidence est liée à la correspondance extrême à terme.

## II.2.b. Les erreurs dans le dénombrement (Ermel GS)

L'équipe ERMEL (2005) dans *Apprentissage numérique - grande section de maternelle* remarque que la connaissance de la comptine ne garantit pas la réussite au dénombrement. Selon elle, « *les erreurs les plus fréquentes sont du type :*

- \* *défaut de synchronisation entre la récitation et le geste de la main (il n'y a pas de correspondance entre les « mots-nombres » prononcés et les objets pointés)*
- \* *mauvaise organisation du comptage, en particulier non-partage de la collection entre objets déjà comptés et objets restant à compter*
- \* *pas de statut particulier accordé au dernier « mot-nombre » énoncé, ou encore disent qu'ils ne savent pas*
- \* *importance accordée à autre chose que le comptage : souci d'homogénéisation de la collection, recherche d'une disposition spatiale (alignement, empilement...).* »

Les erreurs les plus fréquentes mises en évidence par l'équipe Ermel sont relatives aux cinq principes énoncés plus haut (page 13).

Par rapport au dénombrement, l'équipe Ermel (dans Ermel GS<sup>7</sup>) a partitionné N en sous ensembles. Elle considère que pour de jeunes élèves, on peut sommairement distinguer quatre domaines numériques :

→ « *Le domaine des nombres « visualisables » (nombres jusqu'à 4 ou 5)*

*Ce sont les nombres pour lesquels une reconnaissance rapide ou globale est possible, sans recours au comptage ou avec un comptage très rapide (l'enfant reconnaît d'emblée qu'une collection comporte 3 objets). Dans ce domaine, il est possible pour l'élève d'évoquer mentalement la collection par chacun des objets qui la compose. Il s'agit donc d'un domaine privilégié pour les procédures du type « comptage mental » (recomptage, sur-comptage, décomptage), et plus tard pour les procédures faisant appel à des résultats mémorisés. C'est là que l'enfant pourra d'abord prendre conscience du pouvoir d'anticipation, de prévision que donnent les nombres et passer le plus aisément du comptage au calcul.*

→ *Le domaine des nombres « familiers » (jusqu'à 12, 16, 19 ... selon les enfants)*

*Dans ce domaine, la comptine (récitation des noms des nombres) peut être maîtrisée assez rapidement et le dénombrement par comptage un à un est possible et efficace. L'usage social de ces nombres est relativement fréquent. Dès la maternelle, il est souvent possible d'amener les élèves à reconnaître globalement leurs écritures chiffrées (c'est-à-dire sans en faire une analyse en dizaine et unités). Enfin, dans les problèmes, le recours à une figuration réalisée peut être envisagé raisonnablement. C'est également dans ce*

---

<sup>7</sup> ERMEL (2005), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes – GS cycle 2*, Hatier, Paris.

domaine que, en utilisant certains résultats mémorisés ou consignés par écrit (table) et ses premières connaissances sur les nombres, l'élève pourra, assez tôt au CP, mettre en œuvre des procédures de type «calcul».

→ Le domaine des nombres « fréquentés »

Ce sont, en gros, les nombres du calendrier (jusqu'à 30 environ); c'est dans ce champ également que se situe le nombre d'élèves de la classe ... Ils correspondent cependant moins à des quantités que l'enfant a l'habitude de manipuler, mais sont souvent présents dans la classe dès la maternelle (nombre d'élèves de la classe, écriture de la date). La comptine peut assez aisément être prolongée jusque-là. Les procédures utilisant une figuration « réalisée » sont encore possibles, bien que plus difficiles à gérer, Mais c'est surtout dans ce domaine que les élèves vont trouver l'occasion de faire leurs premières constatations sur les « régularités » de la suite écrite des nombres ... et pourront avoir l'idée de les exploiter pour produire des suites d'écritures au-delà de 30.

→ Le domaine des « grands » nombres

Ils ont souvent un rôle un peu mythique pour l'enfant (« Je suis grand, je sais compter jusqu'à 100 » ; « Je voudrais 1 000 dollars »). C'est là que les procédés de dénombrement ou d'écritures liés à la numération écrite (groupements, échanges, compteurs) prendront tout leur intérêt et donc leur sens. Contrairement aux domaines précédents (notamment le premier et le second) où les désignations orales sont souvent premières, ici ce sont les désignations écrites qui seront d'abord produites et utilisées (au-delà de 100 éventuellement). C'est aussi là que les algorithmes de calcul écrit deviendront nécessaires. »

### **II.2.c. Les difficultés dans le dénombrement (A. BESSOT, C. COMITI et C. PARISELLE)**

Dans Grand N n°25 (décembre 1981), A. BESSOT, C. COMITI et C. PARISELLE énoncent les difficultés qu'elles ont mises en évidence lors de leurs entretiens de début de CP au sujet d'une tâche de comptage d'objets ou de construction d'un ensemble de cardinal donné.

« Lors de ces entretiens, nous avons mis en évidence combien l'enfant, dans le domaine numérique restreint où il sait réciter la comptine, a du mal à dénombrer des objets donnés et encore plus à extraire  $p$  objets parmi  $n$  ( $p < n$ ).

● Dénombrer un à un des objets, dans un domaine numérique où il a mémorisé le nom des nombres suppose en effet que l'enfant

\* ait acquis le statut de l'objet compté, c'est-à-dire, sache qu'il doit prendre, pour le compter, chaque objet une fois et une seule (en particulier quand il l'a compté, il doit le séparer des non-encore-comptés pour ne plus le considérer à nouveau) ;



\* soit capable de faire une correspondance terme à terme entre les objets à compter et les mots de la comptine, ce qui exige la coordination rythmique de deux processus qui doivent démarrer ensemble et surtout rester en phase tout du long ;

\* sache que le dernier nombre énoncé a une signification très précise : c'est le nombre d'éléments cherché.

Les principales erreurs que nous avons mises en évidence en tout début de C.P. sont les suivantes :

\* comptage du même objet plusieurs fois de suite et/ou oubli de prendre en considération certains objets ;

\* incapacité à coordonner les processus en jeu, ce qui se traduit par une non-adéquation de la parole au geste accompagnant le comptage ;

\* erreur dans l'utilisation de la comptine, pourtant récitée correctement auparavant dans le domaine numérique en jeu : utilisation du même nombre plusieurs fois, oubli des nombres... ;

\* incompréhension de ce que le nombre affecté à chaque objet lors du comptage n'est pas une propriété inhérente de cet objet, n'est affecté à l'objet que temporairement, le temps du comptage et n'y adhère plus dès que le comptage est fini, ce qui va bien évidemment créer des problèmes lorsque la configuration de l'ensemble change (problèmes de conservation en particulier).

● Extraire  $p$  objets parmi  $n$ , dans un domaine numérique où l'enfant a mémorisé le nom des nombres, suppose de plus que l'enfant situe  $p$  dans la comptine pour pouvoir prévoir le passage de ce nombre et s'arrêter lors de son énoncé.

● Nous avons de plus souligné combien le fait d'augmenter la taille du domaine numérique accroît les difficultés des enfants, les amenant à faire des erreurs qu'ils ne faisaient pas dans un domaine numérique plus petit. »<sup>8</sup>

Puis, A. BESSOT, C. COMITI et C. PARISELLE énoncent les opérations qu'exige l'acte de compter.

● « Pour pouvoir dénombrer des objets, il faut :

\* prendre en compte chaque objet une fois et une seule fois (opération 1) ;

\* réaliser une correspondance terme à terme entre les objets et les noms des nombres (opération 2)

\* avoir mémorisé la comptine dans le domaine numérique en jeu (opération 3).

---

<sup>8</sup> Annie BESSOT, Claude COMITI, Claude PARISELLE (1981), « Connaissance de la suite des nombres en fin de C.P. », *Grand N* n°25, p 9 et 10.

- *Pour pouvoir compter de manière opératoire, il faut :*

- \* *prévoir le passage d'un nombre lors de la récitation de la comptine pour pouvoir s'y arrêter lors de son énoncé (opération 4) ;*

- \* *appréhender le dernier nombre énoncé lors du dénombrement comme une propriété de la collection d'objets et non du dernier élément compté (opération 5).*

*Mais cette opération peut fonctionner sans pour autant que l'enfant ne se soit approprié les propriétés d'invariance du cardinal d'un ensemble lorsque l'on modifie la disposition spatiale de ses éléments ou lorsque l'on change l'ordre dans lequel on dénombre ses éléments. »<sup>9</sup>*

Elles concluent donc que « *les opérations 1, 2, 4 et 5 (cités ci-dessus) peuvent commencer à se mettre en place dans un domaine numérique donné avant que la mémorisation de la comptine dans ce domaine ne soit solide, mais l'opération 3 de mémorisation n'en joue pas moins un rôle fondamental puisqu'elle seule permet au jeu d'interaction des différentes opérations de fonctionner avec succès. »*

De nombreux chercheurs mettent donc en évidence que le comptage/dénombrement est un processus complexe qui nécessite en plus de savoir la comptine numérique de prendre en compte une fois et une seule fois les objets sans en oublier un. Cette connaissance-compétence est appelée énumération.

Regardons plus en détail ce qu'est l'énumération.

### **III. L'énumération : composante du dénombrement dans les apprentissages**

#### **III.1. Que disent les dictionnaires ?**

- ◆ Petit Larousse (édition 1992) : Enumérer : Enoncer successivement les parties d'un tout, passer en revue. Enumération : action d'énumérer.
- ◆ Larousse dictionnaire étymologique (1992) p.267 « du latin enumeratio, action de compter complètement ».

Dans l'étymologie même du nom, le comptage paraît nécessaire, alors que la définition du Petit Larousse ne fait pas référence au comptage. La terminologie présente donc des inconvénients puisque nous venons de caractériser une activité présente dans le comptage, mais distincte de celui-ci.

---

<sup>9</sup> Annie BESSOT, Claude COMITI, Claude PARISELLE (1981), « Connaissance de la suite des nombres en fin de C.P. », *Grand N* n°25, p 10 et 11.

Dans une note de bas de page de sa thèse (note 23 page 25), J. BRIAND (1993) nous fait part de la définition du dictionnaire ROBERT.

◆ « *DICTIONNAIRE ROBERT : Enumérer, c'est d'après le dictionnaire Robert, compter un à un. Si l'on se porte au nom, « énumération », il s'agit d'une part de l'action d'énumérer, mais considéré comme une figure rhétorique dans l'expression « faire l'énumération », il s'agit alors, toujours d'après le dictionnaire Robert, de l'action qui consiste à passer en revue de toutes les manières, toutes les circonstances, toutes les parties.*

*On voit que les deux mots « énumération » et « comptage » ont tantôt des significations différentes tantôt la même, ou à peu près.*

*Poursuivons notre exploration afin de préciser le(s) sens admis de « dénombrement » et retournons voir le Robert. Celui-ci accorde trois sens au mot :*

*1- Compte de personnes. Ne se dit guère qu'en parlant d'un très grand nombre.*

*2- Enumération en parlant des choses.*

*3- Terme de logique : « dénombrement imparfait » : faute de raisonnement par laquelle on tire une conclusion générale de plusieurs cas examinés, lorsque l'on a précisément oublié ceux qui rendent la conclusion fausse.*

*La première acceptation est l'action de compter (en vue de...), la deuxième acceptation révèle explicitement la confusion entre énumération et dénombrement, la troisième est clairement la description d'une action qui consiste à passer en revue toutes les manières, tous les cas, c'est-à-dire « faire une énumération » au sens de la figure rhétorique... »*

D'après ces définitions issues de dictionnaires, ils existent des confusions entre énumérer/compter/dénombrer. Nous garderons néanmoins le terme d'énumération puisque les définitions actuelles se rapportent au sens voulu et nous prendrons comme définition pour ce terme : action de passer en revue tous les objets d'une collection discrète finie, de façon à prendre en compte chaque objet une fois et une seule, c'est-à-dire de ne pas compter deux fois un objet et de n'oublier aucun objet.

L'énumération n'est pas un savoir mathématique connu dans la culture scolaire, il a été identifié par Guy BROUSSEAU et Joël BRIAND dans les années 80. Regardons ce que disent les chercheurs à ce sujet.

## III.2. L'énumération chez les chercheurs

### III.2.a. L'énumération incluse implicitement dans les questions de dénombrement (G. VERGNAUD)

Dans la théorie des champs conceptuels, Gérard VERGNAUD donne l'exemple du schème du dénombrement : il comporte un but (associer à une collection discrète un nombre qui sera sa mesure), des règles (ne pas compter deux fois le même objet, les compter tous...), des invariants opératoires de type « concepts en acte » (biunivocité, cardinal, successeur, itération...) et de type « théorème en acte » (le cardinal est indépendant de l'ordre dans le quel on compte les objets...).

Un schème est l'organisation invariante de la conduite d'un sujet qui permet de traiter une même classe de situations. Le schème est fonctionnel, il comporte à la fois l'organisation des gestes, des formes langagières, des opérations de pensées, des interactions sociales qui permettent de traiter une classe de situations. Le schème du dénombrement repose sur différents principes : abstraction, ordre indifférent, bijection, cardinalité... Ces principes sont des concepts (bijection, cardinalité) ou des théorèmes (abstraction, ordre indifférent) qui n'ont pas besoin d'être formulés pour être utilisés : ce sont des *concepts-en-acte* et des *théorèmes-en-acte*.

Plus précisément, dans sa conférence de Montréal<sup>10</sup>, G. VERGNAUD (2001) donne les indications suivantes :

#### « *Le schème du dénombrement* »

*Un, deux, trois, quatre,... quatre!*

*Pour aller vite ne nous attardons pas sur le but : associer un nombre à une collection discrète. Je fais seulement remarquer au passage que le concept de nombre a deux propriétés : l'ordre et l'additivité. Cette dernière propriété est tranquillement ignorée par les 7 chercheurs qui prétendent étudier les prémices du concept de nombre chez les bébés. C'est une grave faute théorique.*

*Dans le schème du dénombrement d'un enfant de 4 à 5 ans, on peut identifier au moins deux concepts mathématiques puissants : celui de correspondance biunivoque et celui de cardinal.*

*- correspondance biunivoque entre quatre catégories distinctes d'éléments : les objets à dénombrer, les gestes du bras et de la main, les gestes du regard, les gestes de la parole. Si l'une de ces correspondances n'est pas biunivoque, si le regard ou la parole vont trop vite ou trop lentement par exemple, le dénombrement est raté. C'est ce qui arrive aux jeunes enfants, et à certains enfants handicapés qui ont du mal à distribuer dans le temps la succession de leurs gestes, et à coordonner les différents registres concernés, notamment celui du regard.*

---

<sup>10</sup> VERGNAUD G. (2001), *Formes opératoires et formes prédicatives de la connaissance*, Conférence de Montréal 2001

- cardinal : un signe observable de ce concept-en-acte est la répétition du dernier mot-nombre, comme dans le cas ci-dessus. Mais certains enfants utilisent une autre marque linguistique, l'accentuation : un, deux, trois, QUATRE! On connaît les difficultés qu'ont certains enfants à cardinaliser : ils ne savent pas résumer l'information recueillie par le cardinal. En réponse à la question "combien?" posée par leur interlocuteur, ils recommencent à compter l'ensemble. Ils savent moins encore utiliser cette information pour opérer des additions. »

On remarque donc bien que G. VERGNAUD, sans la nommer explicitement, prend en compte l'énumération puisque dans les règles du schème du dénombrement, il énonce « ne pas compter deux fois le même objet, les compter tous... ».

### **III.2.b.L'énumération, instrument de l'exploration des collections (G. BROUSSEAU)**

Guy BROUSSEAU a ainsi décrit les « étapes » nécessaires à la construction du nombre :

*« ... [l'élève] il énumère les collections (il appelle l'un après l'autre, tous les objets sans appeler deux fois le même), en même temps qu'il les dénombre qu'(il évalue leur cardinal par correspondance avec une autre collection), en particulier quand il les compte (qu'il met en correspondance leurs éléments avec les mots) puis, si le comptage a été décomposé, en « nombrant » (en exprimant oralement le nombre à l'aide d'un système de numération) le résultat de son comptage, et ensuite en écrivant ce nombre... »*

*« ...il faut bien distinguer l'identification, la désignation, et l'énumération des ensembles, du comptage et de la récitation de la suite des nombres. L'énumération est l'instrument de l'exploration des collections, ce qui permet le dénombrement lui même...*

*Elle ne s'enseignera pas, mais de nombreuses situations permettront de l'apprendre et d'apprendre à l'utiliser. ... »*

Ainsi sont mis en évidence les implicites du « savoir dénombrer », en particulier le principe d'énumération. L'énumération, le fait de parcourir entièrement une collection en désignant chaque élément une fois et une seule, apparaît donc comme un pré-requis indispensable à l'apprentissage du dénombrement.

De plus, G. BROUSSEAU (1998a) dit que « l'énumération n'est pas un concept culturellement pesant. Il n'intervient dans l'enseignement que beaucoup plus tard, avec des langages et problématiques différents. Ni le vocabulaire, ni la connaissance formelle ne viennent donc perturber l'objet de l'enseignement.<sup>11</sup> »

---

<sup>11</sup> BROUSSEAU G. (1998a), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p64.

Dans son ouvrage<sup>12</sup>, G. BROUSSEAU (1998a) relate une situation d'énumération sur micro-ordinateur qu'il analyse.

*« Dans un jeu sur micro-ordinateur, de jeunes enfants (5 ans) doivent avec le crayon optique, conduire un à un, des lapins dans un pré et des canards dans une mare. [...]. Mais il s'agit bientôt d'autre chose que d'une manipulation selon la règle : le maître veut que l'élève pointe tous les lapins l'un après l'autre et une seule fois, avant de les diriger vers le pré, afin de développer chez lui l'énumération d'une collection. La suite des opérations n'est pas donnée dans la consigne, elle est à la charge de l'élève. [...] L'enfant, avant cet apprentissage aurait pu « énumérer » des collections en déplaçant les objets ou en marquant de façon à toujours avoir une matérialisation commode de l'ensemble restant à énumérer. Mais ici, il doit effectuer la même tâche mentalement, ses représentations doivent s'étendre à un contrôle intellectuel beaucoup plus complexe : chercher un premier lapin facile à repérer, puis un autre, de telle façon à garder à l'esprit que ces deux lapins sont déjà pris ; chercher un autre, assez voisin des premiers et formant avec eux une disposition (petit groupe, ligne...) permettant de ne pas les perdre « de vue » tout en cherchant un quatrième, qui entre à son tour dans la structure afin de ne pas reprendre un lapin déjà pris et de permettre de savoir s'il en reste encore..., etc.*

***Cette tâche ne peut pas être décrite comme une procédure, ni même « montrée » car énumérer une collection devant un enfant ne lui donne aucune idée des moyens de contrôle qu'il doit acquérir. »***

Dans sa thèse, J. BRIAND (1993) donne un exemple de situation de base de l'énumération d'une collection d'objets visibles dans un micro-espace mise au point par Guy BROUSSEAU et R. BERTHELOT : Il s'agit de placer un jeton et un seul dans chaque tirelire d'une collection de tirelires. Une fois le jeton dans la tirelire, celui-ci n'est plus visible. Le fait que les tirelires soient opaques empêche un contrôle du déroulement de l'activité d'énumération, c'est-à-dire de pouvoir dire à chaque instant « voici ce que j'ai déjà fait, voici ce qui me reste à faire. »

On voit donc que G. BROUSSEAU pense qu'il est nécessaire de mettre en place des situations d'apprentissage de l'énumération. Voyons ce que dit J. BRIAND.

### **III.2.c. L'énumération, connaissance mise en jeu lors d'un inventaire (J. BRIAND)**

J. BRIAND définit les étapes de l'action de compter.

*« Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :*

- 1) Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.***
- 2) Choisir un élément d'une collection.***
- 3) Énoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-***

---

<sup>12</sup> BROUSSEAU G. (1998a), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p62 à 65.

nombres).

- 4) *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.*
- 5) *Concevoir la collection des objets non encore choisis.*
- 6) *Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.*
- 7) *Savoir que l'on a choisi le dernier élément.*
- 8) *Énoncer le dernier mot nombre.*

*Les étapes en gras (1, 2, 4, 5, 6, 7) constituent une tâche spécifique que nous appellerons tâche d'inventaire, au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule. Cette tâche (d'inventaire) caractérise une connaissance non enseignée que nous appelons énumération faute d'un autre nom.»<sup>13</sup>*

Enfin, comme le dit J. BRIAND (1993) dans sa thèse: « Pour déterminer une collection afin de la compter, le sujet doit prendre une série de décisions qui sont :

- *choisir un premier élément, lui appliquer une fonction de reconnaissance puis*
- *choisir un successeur à ce premier élément en contrôlant qu'il est différent du ou des précédents puis*
- *réitérer l'opération jusqu'à ce que tous les éléments de la collection aient été pointés.*

*Cette opération produit un ordre total qui permet la détermination de l'ensemble. Nous appelons énumération cette opération. »*

D'un point de vue didactique, il définit l'énumération comme « la connaissance mise en jeu lorsqu'un élève effectue un inventaire. L'énumération est la connaissance productrice d'inventaires. C'est à ce moment un modèle implicite d'action, un ensemble de procédés locaux mis en œuvre par l'élève pour réaliser concrètement une énumération. »<sup>14</sup>.

Pour conclure, J. BRIAND<sup>15</sup> (1999) a mis en évidence lors de ses recherches que dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances qui ne lui sont pas enseignées, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre ou pour utiliser ce qu'il a appris. La question se pose alors de repérer ces connaissances, d'en faire éventuellement des objets de savoir, donc de construire des situations d'apprentissage productrices de ce savoir. Il a donc repéré dans le domaine du comptage, des tâches qui nécessitent des connaissances non enseignées. En particulier, il a défini « l'énumération »

---

<sup>13</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p53.

<sup>14</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p55.

<sup>15</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p43.

comme une connaissance nécessaire à la tâche d'inventaire d'une collection finie. Il a donc développé une ingénierie d'apprentissage du contrôle des collections finies simples et de l'énumération comme savoir nécessaire à la réalisation de tâches d'inventaire. Cette ingénierie est celle présentée dans grand N maternelle.

J. BRIAND se sert de la mesure comme modèle pour étudier le comptage des collections. En effet, il considère que *« lorsque des enfants sont en situation de comptage effectif de collections, ils doivent faire face à tout un ensemble de questions analogues aux questions rencontrées lors d'activités de mesurage. »*<sup>16</sup>.

On peut également se demander dans quels domaines les connaissances concernant l'énumération sont-elles mobilisées. J. BRIAND rapporte dans son article « Enseigner l'énumération en moyenne section »<sup>17</sup> que ces connaissances peuvent être mobilisées dans la vie courante ou à d'autres moments de la scolarité.

Dans la vie courante, il prend un exemple bien connu : *« aller faire des achats au supermarché à l'aide d'une liste préparée à l'avance. La tâche serait simple si la liste préparée correspond parfaitement à l'organisation des rayons du supermarché et aux habitudes du client. La liste elle-même apporte des moyens de contrôle des achats déjà effectués et de ceux qui restent à faire. Mais si la liste n'a pas été conçue en fonction de l'organisation des rayons du supermarché, notre consommateur devra exercer un contrôle, plus difficile, du passage en revue des éléments de sa liste. Il pourra s'aider du marquage s'il dispose d'un stylo, il pourra construire des sous listes par familles de produits, etc. »*

J. BRIAND rapporte également d'autres moments de la scolarité où ces connaissances sont mobilisées. En effet, il dit *« Que ce soit dans le domaine de la construction des opérations arithmétiques, et plus tard, dans celui de l'analyse combinatoire, la question se pose toujours de contrôler les collections d'objets qu'il faudra dénombrer. »*

Pour conclure, J. BRIAND installe le fait que l'énumération, composante du dénombrement, peut faire l'objet d'un **apprentissage pour elle-même**, indépendamment du numérique. Il considère l'énumération comme extérieure au problème de dénombrement.

En effet, dans sa thèse (page 26), J. BRIAND dit : *« Cette activité que nous appelons énumération se définit pleinement. Elle ne dépend pas du nombre. Elle est nécessaire au comptage. Elle est entièrement à la charge de l'élève. Ce sont les manifestations de cette activité (erreurs, difficultés) qui sont souvent pointées. Cette connaissance n'est pas uniquement en jeu dans ce contexte*

---

<sup>16</sup> BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse, Bordeaux I.

<sup>17</sup> Joël BRIAND, Marie-José LACAVE LUCIANI, Michèle HARVOUËT, Dominique BEDERE, Véronique GOUA DE BAIX (1999-2000), « Enseigner l'énumération en moyenne section », *Grand N spécial maternelle*, Tome 1, p. 123 à 138.



*particulier de la construction des premiers nombres. Elle aboutit à la production effective d'une énumération des objets. Elle constitue un instrument de contrôle tout au long de la scolarité. »*

## **IV. Énumération et dénombrement : éléments d'analyse à caractère mathématique**

### **IV.1. Quelques éléments d'analyse principalement mathématique du dénombrement**

Nous proposons, dans ce paragraphe quelques éléments d'analyse de la question. La question du dénombrement met en jeu des « objets » (au sens large).

#### **IV.1.a. Sur quoi porte-il ?**

Notons que, dans les références que nous avons citées, les chercheurs emploient souvent des mots (p. 24 et 25 J. BRIAND) comme

- « élément »
- « collection »
- « ensemble »
- « objet »

Ces mots sont employés dans le langage courant et dans le langage mathématique. Ces mots ont des significations génériques d'une part et mathématiques d'autre part. Et ils les mélangent dans leurs textes.

Les termes d'ensemble, d'élément, de partie ont des significations précises en mathématiques. On parle :

- d'un ensemble,
- d'un élément,
- d'une partie.

Il nous semble intéressant de prendre en compte cette distinction pour notre analyse.

Nous dirons

- qu'il y a des **objets matériels** ; et lorsqu'ils sont regroupés (par une propriété par exemple) qu'ils constituent **une collection** : par exemple des capuchons de stylos.
- qu'il y a des **objets conceptualisés**, que nous appelons « **éléments** » (par exemple des nombres) : lorsqu'ils sont regroupés, ils constituent un **ensemble**. Par exemple, les nombres entiers de 1981 à 2012.

Une partie est alors un sous-ensemble de l'ensemble.

#### IV.1.b. Quels problèmes « théoriques » pour l'école?

« Dénombrer » peut selon nous être ceci :

**Répondre à une question de type :** « *Combien y a-t-il de ... o dans ... O ?* »

o désignant un objet (objet matériel d'une collection ou élément d'un ensemble O).

Ce problème traverse la scolarité de l'élève, depuis la maternelle (« *va chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour boucher tous les stylos* »). L'élève devant rechercher pour répondre le nombre de stylos.), en passant par le cours moyen (« *combien de frappes de caractères sont nécessaires pour écrire tous les nombres de 1 à 480* »<sup>18</sup>), et jusqu'en terminale, avec les problèmes de « dénombrement », de probabilités (« *combien de mains de cinq cartes dans un jeu de 32 ?* »).

Le problème type est celui-ci :

« *une collection (resp. un ensemble) étant donnés, combien a-t-elle (resp. a-t-il) d'objets (resp. d'éléments)* »?

Mais le dénombrement intervient dans d'autres problèmes comme :

-« *une collection (resp. ensemble) étant donnés, produire une collection (resp. un ensemble) de même cardinal* » ;

-« *deux collections (resp. ensembles) étant donnés, dans quelle collection (resp. ensemble) y en a-t-il le plus ?* »

En fait, à l'école, le dénombrement peut porter soit sur des collections (jeunes élèves), soit sur des ensembles (élèves plus grands). Et, pour rendre compte de cela, il nous est utile de définir une variable didactique

#### IV.1.c. Une variable didactique principale : le « domaine » des « objets »

Outre la taille de la collection ou de l'ensemble, le problème de dénombrement dépend de façon essentielle d'une variable que nous appelons « le domaine des objets ». En effet les « objets » à dénombrer peuvent être :

- **matériels** (et accessibles à celui qui dénombre)

Le maître présente des allumettes et demande : « *Combien y a-t-il d'allumettes* » ?

L'élève peut agir sur eux et, en particulier procéder par :

\* estimation

Dans le cas d'une collection nombreuse, l'estimation est peu précise ; dans le cas d'une petite collection, les connaissances de l'élève peuvent lui permettre le « subitizing »<sup>19</sup> qui peut être une estimation efficace et donner le bon résultat.

---

<sup>18</sup> ERMEL CM2 Hatier

<sup>19</sup> Le subitizing est la capacité à énoncer rapidement, « d'un coup d'œil », le nombre d'objets d'une collection... sans que l'on sache d'ailleurs s'il y a eu reconnaissance immédiate de la quantité ou dénombrement très rapide.

\*comptage.

Les connaissances - compétences principales pour parvenir à répondre :

- la comptine numérique (...), les mots-nombres – ensemble ordonné totalement - même si pour l'élève ce n'est pas un ensemble ; ce sont des étiquettes (matérielles très souvent)
- la capacité à énumérer la collection, en général non ordonnée.
- la mise en relation (injective) entre la collection et les mots nombres
- la capacité à annoncer, à la fin du dénombrement, que le dernier mot prononcé correspond au nombre d'objets de la collection
- la conscience que l'ordre dans lequel sont comptés les objets n'influe pas sur le résultat
- la nécessaire abstraction de la nature et des différences éventuelles entre les objets.

▪ **évoqués**

Sont en jeu dans ce cas les objets d'une collection d'objets matériels, mais qui ne sont pas accessibles à l'élève. Il peut en parler, les représenter... mais pas les toucher, du moins pour résoudre le problème. Ils sont ailleurs, par exemple, dans un sac, dans une autre salle... sans qu'on les voie... On pourrait dire qu'alors

- cela peut créer un enjeu, pour le problème ; la résolution va permettre d'anticiper sur le réel, c'est à dire sur un dénombrement par comptage effectif.
- la collection d'objets matériels inaccessibles peut être mise à disposition de l'élève, et servir alors pour la validation.

Exemple : « *Pour l'année scolaire, les 28 élèves d'une classe ont besoin de 4 cahiers. Combien le maître doit-il en commander* » ?

Par exemple, au CP :

Premier problème : domaine des objets matériels : Le maître donne des étiquettes prénom : Luc, Eric, Brice, Michèle, François, Christine, et des castagnettes (en bon nombre 30 par exemple), et dit à l'élève : "prépare ce qu'il faut de castagnettes pour que les élèves puissent jouer".

Deuxième problème : domaine des objets évoqués : 11 enfants veulent jouer des castagnettes. Combien faut-il en préparer?

▪ **« théoriques » ou « conceptualisés »**

« *n et m étant deux entiers, combien de nombres entiers entre n et m* » ?

« *Combien de nombres entiers entre 1981 et 2012* » ?

L'élève peut, éventuellement, représenter les éléments, puis compter ces représentations. Mais le calcul peut s'avérer une procédure adaptée ici efficace.

Le dénombrement par comptage peut être lourd, mais tout de même réalisable par des élèves de CM. Lors de l'expérimentation (Ermel CM Hatier) les élèves prennent la peine

- \* de matérialiser tous les objets à dénombrer,
- \* ou de matérialiser des intervalles d'objets facilement dénombrables par leurs bornes.

Les objets sont ici conceptualisés (deuxième exemple), des concepts (premier exemple).

Notons que, dans ces problèmes où les objets ne sont pas matériels (ils sont évoqués ou « théoriques »)  $O$  est défini **en compréhension (par une propriété caractéristique)**. Dans le cas d'objets matériels, le comptage est rendu possible par le fait que  $O$  est défini plutôt **en extension (les objets sont listés)**.

## IV.2. Quelques éléments principalement mathématiques d'analyse de l'énumération

- Qu'énumère-t-on?

L'énumération s'applique, au départ, à une collection d'objets matériels, mais peut aussi s'appliquer à des objets évoqués, voire à des objets théoriques, que l'élève aura pris soin au préalable de représenter par exemple, ou qu'il prendra soin de lister (« dans sa tête »). C'est le cas par exemple pour le problème : « *Combien de nombres entiers entre 1981 et 2012* » ?

La « collection » considérée est discrète, stable et finie.

- Discrète

Petit rappel : un ensemble discret est un ensemble dont tous les éléments sont isolés (on peut les séparer) : un tel ensemble est soit fini, soit dénombrable ( $\mathbb{N}$  est un ensemble discret). Néanmoins, il existe des ensembles dénombrables non discrets (comme  $\mathbb{Q}$  par exemple, dont on ne peut pas séparer les points : entre deux rationnels, il y a toujours un rationnel, ou encore l'ensemble des nombres décimaux, de la même manière, entre deux décimaux, il y a toujours un décimal).

*« En optimisation combinatoire, on parle d'ensemble **discret** pour désigner des ensembles "fondamentalement" discrets, il s'agit en général des ensembles finis ou d'ensembles qui ont essentiellement la même nature que l'ensemble des entiers naturels. En toute rigueur, un ensemble n'est discret que par rapport à un espace topologique. C'est-à-dire, qu'un sous-ensemble  $F$  d'un espace topologique sera dit discret si pour tout  $x$  de  $F$  il existe un voisinage contenant  $x$  et aucun autre élément de  $F$ . Les ensembles discrets ne sont pas tous dénombrables mais les sous-ensembles discrets de l'ensemble des nombres réels sont forcément dénombrables. Remarquons que l'ensemble des rationnels est dénombrable mais pas discret. L'exemple typique d'un ensemble de réels discret infini et borné est celui des  $1/n$  pour tout  $n$  entier non nul. » WIKIPEDIA*

- Stable

Aucun objet n'est « ajouté », aucun n'est « retranché ».

- Finie

« En mathématiques, un ensemble  $E$  est dit fini si et seulement s'il existe un entier  $n$  et une bijection de  $E$  sur l'ensemble des entiers naturels strictement plus petits que  $n$ , en particulier, si  $n = 0$ ,  $E$  est l'ensemble vide qui est donc bien fini. On montre l'unicité d'un tel entier  $n$ , et on appelle celui-ci nombre d'éléments de  $E$ , ou cardinal de  $E$ , en particulier l'ensemble vide a pour cardinal 0. »

WIKIPEDIA

- En quoi consiste énumérer au plan mathématique?

J. BRIAND dit donc : « A passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule ».

Etudions ci-après la différence entre énumérer pour énumérer et énumérer pour dénombrer.

➤ *L'énumération pour elle-même*

Prenons l'exemple des allumettes et des boîtes. Rappelons : Des allumettes (collection F) ; des petites boîtes (en nombre suffisant) (collection E). Le problème : « *Mettre une et une seule allumette dans chaque boîte* ». Les boîtes peuvent être ouvertes (le problème se résout plus facilement) ou fermées (le problème est plus difficile). L'élève va se tromper si, in fine, il y a des boîtes : - qui ne contiennent aucune allumette (boîte non passée en revue) ;  
- qui contiennent plusieurs allumettes.

Pourquoi introduire la collection des allumettes? La collection F sert à problématiser E (boîtes) c'est-à-dire à faire en sorte que l'énumération pour elle-même apparaisse comme un outil adapté à la résolution d'un problème. Les allumettes permettent donc de poser le problème aux élèves, de matérialiser l'énumération et de contrôler la réussite ou l'échec. Rappelons que c'est la collection des boîtes qu'il s'agit d'énumérer.

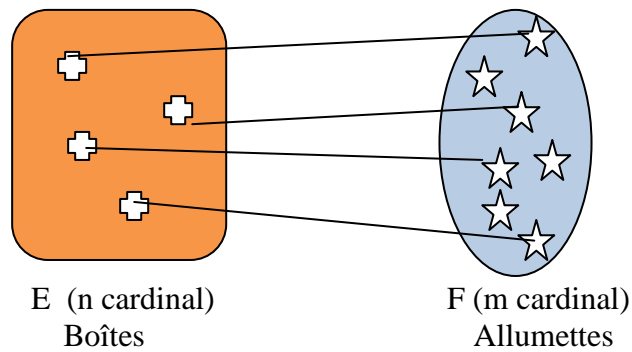
Au plan mathématique alors, E désignant la collection de boîtes (de cardinal  $n$ ) et F celle d'allumettes (de cardinal  $m$ ), énumérer la collection de boîtes c'est au fond établir une **injection** de E vers F : - toute boîte doit avoir une allumette et une seule ; ou il ne doit pas y avoir deux allumettes dans une même boîte : la correspondance (relation) est de type « application ».

- une allumette ne peut être dans deux boîtes à la fois ou deux boîtes ne peuvent contenir la même allumette simultanément : la correspondance est de type « application injective ».

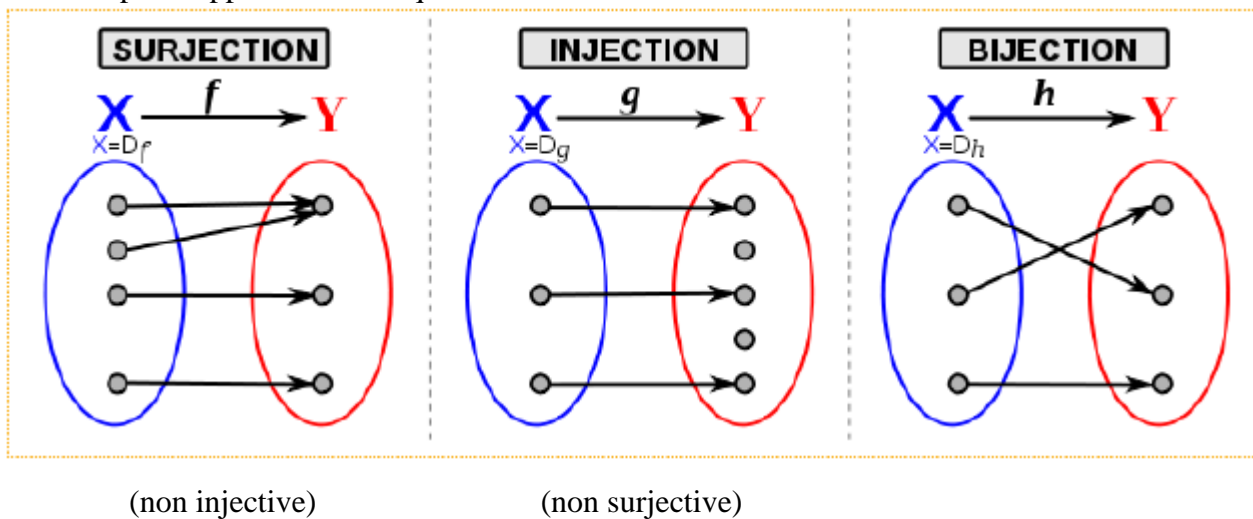
- des allumettes peuvent rester libres (application en général non surjective)

Deux éléments différents ont des images différentes. Il n'est pas possible que deux éléments aient la même image.

On peut donc résumer ceci par le schéma ci-dessous :

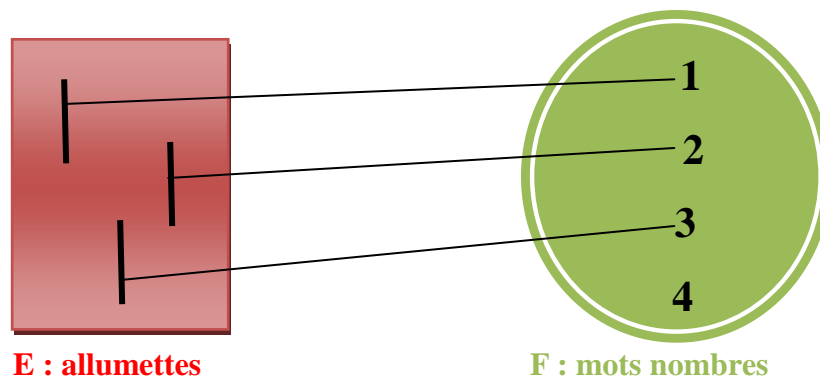


Voici un petit rappel mathématique des termes :



➤ *L'énumération pour dénombrer*

Comme il a été dit, un élève doit donc énumérer correctement pour compter/dénombrer correctement. Dans le problème : « *Combien y a-t-il d'allumettes sur la table ?* », en quoi va donc consister l'énumération ? Une petite analyse montre qu'il est nécessaire d'établir une injection entre  $E$  (la collection d'allumettes) et  $F$  (la suite des mots-nombres). Ces mots nombres servent de « marques » aux éléments passés en revue.



...mais avec une contrainte supplémentaire : il faut respecter l'ordre des mots et cet ordre joue un rôle essentiel pour le dénombrement. Il faut comprendre alors aussi que le dernier mot nombre désigne le cardinal de la collection énumérée. C'est une difficulté particulière. En effet, c'est un

saut conceptuel très important.

➤ *Éléments de comparaison*

Dans l'énumération pour elle-même, les deux collections E et F sont matérielles, donc présentes ; dans l'énumération pour compter, seule la collection à énumérer E est présente matériellement : la collection F (les mots-nombres de la comptine) doit être présente dans les connaissances des élèves, mais elle n'est pas (en général) matérielle ... sauf si, dans la classe par exemple, le maître met à disposition des élèves la bande numérique.

Dans le premier cas, F est donc une donnée objective du problème – elle fait partie des données explicites du problème- ; dans le second cas, F n'est plus une donnée objective, puisque l'énoncé du problème ne l'évoque pas. La connaissance de la comptine peut donc être considérée comme un pré-requis au comptage.

Notons aussi que, nécessairement :  $m > n$  soit  $\text{card } F > \text{card } E$ , c'est-à-dire que si n est fini, m peut-être infini - c'est le cas des mots-nombres (en théorie).

Il faut également comprendre que si pour deux collections distinctes, le dernier mot nombre énoncé est le même, alors on peut mettre ces deux collections en correspondance terme à terme (elles ont la même taille). On décide d'attribuer ce dernier mot nombre à toutes les collections ayant cette propriété ; ceci permet de donner du sens à la question « combien ? ».

L'énumération entretient de plus un lien étroit avec la « correspondance terme à terme », qui permet de comparer la taille des collections discrètes finies sans usage du nombre nécessairement.

Dans la circulaire de 1986 dont un extrait est présent dans ERMEL GS<sup>20</sup>, on voit apparaître la comparaison de collection terme à terme. En voici un extrait ci-après :

«*LES ACTIVITES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES*

*Le but des activités scientifiques et techniques est toujours de poser et de résoudre un problème. La manière dont l'enfant y parvient est fonction de son âge ainsi que du développement de ses capacités et de ses connaissances.*

*Les activités scientifiques et techniques permettent à l'enfant d'explorer, de découvrir et de fabriquer. Il observe, utilise des matières et des matériaux présents dans le coin de bricolage, choisit des techniques (collage, pliage, assemblage, clouage, montage et démontage, etc.). Il fabrique ainsi des objets nouveaux selon un projet qui peut être le sien, celui de plusieurs enfants, ou celui de la classe; le maître intervenant pour guider, accompagner, aider à réfléchir ou à poser des problèmes.*

---

<sup>20</sup> ERMEL (2005), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes – GS cycle 2*, Hatier, Paris, p. 182.

*Ce faisant, l'enfant déploie, découvre et organise les relations logiques et mathématiques qui fondent la construction des objets, le repérage de leurs propriétés, et l'établissement des classifications.*

*Progressivement, l'enfant découvre et construit le nombre. Il apprend et récite la comptine numérique; il établit des sériations, c'est-à-dire ordonne des collections en fonction de propriétés.*

***Il compare des collections terme à terme.***

*Progressivement, l'enfant découvre et construit des relations spatiales. Il saisit sa propre position dans l'espace; il perçoit et représente la position d'un objet par rapport à un ou plusieurs autres. Il appréhende, nomme, représente des formes et des itinéraires. Des objets informatisés tels que robots pédagogiques et automates (« tortue », jouets programmables, etc.) peuvent rendre des services à l'école maternelle. »*

In fine, énumérer une collection E, c'est

- **utiliser une collection F (de cardinal supérieur),**
- **définir une injection (application injective) de E vers F**

### **IV.3. Lien entre problème d'énumération et connaissances spatiales**

Dans l'introduction de sa thèse<sup>21</sup>, J. BRIAND (1993) rappelle que « *MH. SALIN et R. BERTHELOT ont étudiés, dans leur thèse (1992), le statut et le rôle des connaissances spatiales dans la transposition didactique de la géométrie. En effet, des connaissances spatiales personnelles de l'élève sont attendues à un moment ou à un autre par le professeur dans son cours de géométrie. Que se passe-t-il si ces connaissances ne sont pas disponibles? Où se situe la frontière entre ce qui doit être pris en charge par l'enseignement et ce qui reste sous la responsabilité de l'élève? La géométrie échoue comme moyen de donner la maîtrise des rapports des enfants avec l'environnement à un âge jeune parce que l'on gère l'espace à l'aide de modèles qui ne sont pas la géométrie des mathématiciens. Celle-ci est un objet culturel et il y a un point aveugle, c'est-à-dire que la géométrie « objet culturel » a absorbé le projet didactique, éducatif, de donner à l'enfant la capacité de maîtriser son environnement spatial. »*

A partir de là, J. BRIAND énonce la problématique de sa thèse : « *Existe-t-il alors d'autres domaines pour lesquels l'enseignement a besoin de connaissances qu'il ne prend pas en charge? Et, en particulier, une telle étude ne mériterait-il pas d'être faite dans le domaine de l'acquisition du nombre et des opérations arithmétiques?* » La thèse de J. BRAIND expose qu'il existe une connaissance non enseignée mais nécessaire dans le domaine de l'acquisition du nombre et des opérations arithmétiques qui est l'énumération.

On peut également se demander : est-ce que dans le cas de l'énumération n'y a-t-il pas des

---

<sup>21</sup> BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse, Bordeaux I.



connaissances spatiales à acquérir au préalable par l'élève?

L'équipe Démathé a mis en évidence un lien entre l'énumération et l'espace. Elle écrit : « *Le travail épistémologique concernant l'énumération ainsi que les observations en classe que nous avons mené en Grande Section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans) pendant toute l'année 2004-2005 nous ont conduit à une notion plus large que celle d'énumération, que nous nommons l'**organisation des collections**, car elle comprend pour nous certaines relations liées à l'articulation entre l'espace et le temps dans le cadre de la mesure de la **numérosité** d'une collection.* »

Comme l'équipe Démathé, nous pensons que l'énumération, qui consiste à passer en revue tous les éléments d'un ensemble, nécessite semble-t-il d'avoir des connaissances spatiales. En effet, les objets à énumérer sont situés dans l'espace. Pour énumérer correctement une collection d'objets, il faut s'organiser dans l'espace.

Dans le cas d'une collection d'objets déplaçables, des procédures peuvent utiliser le déplacement d'objets. L'élève crée des sous-ensembles d'objets avec une propriété, il met à un certain endroit, par exemple, les objets déjà énumérés. On se rend compte, dans ce cas, que les procédures de résolution efficaces pour l'énumération des objets utilisent avec force les connaissances spatiales ; en l'occurrence la séparation spatiale des objets énumérés par rapport à ceux non énumérés.

Dans le cas d'objets à énumérer non déplaçables, l'élève doit s'organiser dans l'espace, c'est-à-dire imaginer un chemin permettant le passage en revue de tous les éléments de la collection.

## **V. L'énumération dans les textes officiels : peut-être considérée comme allant de soi**

Regardons, en détail, les instructions officielles de 2002 et 2008 au sujet de l'énumération.

### **V.1. Les textes officiels de 2008 de l'école maternelle**

Les instructions officielles de 2008 structurent les apprentissages de l'école maternelle en six chapitres<sup>22</sup> :

- S'approprier le langage
- Découvrir l'écrit
- Devenir élève
- Agir et s'exprimer avec son corps
- Découvrir le monde
- Percevoir, sentir, imaginer, créer.

Chaque chapitre est décliné en sous-chapitres.

Le chapitre « Découvrir le monde » est, lui-même, décliné en sept sous-chapitres :

---

<sup>22</sup> M.E.N. BO du 19 juin 2008.

1. Découvrir les objets
2. Découvrir la matière
3. Découvrir le vivant
4. Découvrir les formes et les grandeurs
5. Approcher les quantités et les nombres
6. Se repérer dans le temps
7. Se repérer dans l'espace.

Les programmes concernant le cycle des apprentissages fondamentaux (CP, CE1) comportent un chapitre spécifique aux mathématiques, ce qui n'est pas le cas des programmes de l'école maternelle (PS, MS, GS). Il est à noter que c'est de « l'approche des nombres » et non d'un « apprentissage des nombres » qu'il est question.

L'énumération peut s'insérer dans la rubrique : Approcher les quantités et les nombres. Regardons donc plus particulièrement ce chapitre.

## **V.2. Les textes officiels de 2008 concernant l'approche des nombres**

*« L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification qui sont prioritaires. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyens de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.*

*Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements ...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes dont les mots nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.*

*Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun.*

*A la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme et les techniques.*

*La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes ou des jeux. Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres. »*

Dans les programmes de 2008, l'accent est mis sur l'acquisition de la suite des nombres (c'est-à-dire connaître la comptine numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification mais il n'est pas fait mention explicitement de l'énumération. Il semble donc que l'apprentissage de l'énumération ne soit pas nécessaire et donc que cette compétence va de soi.

### **V.3. Les textes officiels de 2002 concernant l'énumération**

Dans les instructions officielles de 2002, l'apprentissage de l'énumération apparaît : " *la pratique du comptage nécessite une mise en correspondance des mots (« un », « deux », « trois »...) avec les objets d'une collection sans oublier d'aucun objet et sans compter plusieurs fois le même objet.*"<sup>23</sup>

Dans ces instructions officielles, l'accent est mis sur le fait que savoir la comptine numérique n'est pas compter : « *Il faut garder à l'esprit qu'apprendre la suite orale des nombres n'est pas « apprendre à compter » et ne suffit pas pour dénombrer une quantité qui dépasse les possibilités de reconnaissance globale* ».

Ainsi l'énumération n'est pas explicitement déclarée ; ses principes sont, en revanche, cités.

Dans les programmes, l'énumération n'est pas ou est peu présente. Qu'en est-il maintenant des manuels ou ouvrages à destination des enseignants.

## **VI. Quelles activités pour les élèves dans les ouvrages à destination des enseignants avec ou sans dénombrement?**

### **VI.1. Remarques générales**

Après l'étude de nombreux manuels scolaires, on se rend compte que peu de manuels mettent l'accent sur l'énumération. La plupart des manuels tels *J'apprends les maths*<sup>24</sup> de Retz ou *Découvrir le monde*<sup>25</sup> de Hachette éducation ne travaillent pas l'énumération en tant que telle mais le dénombrement. Il n'accorde pas de place à l'apprentissage de l'énumération pour elle-même.

De même, dans son ouvrage<sup>26</sup>, Dominique VALENTIN ne met pas en place de situations permettant l'apprentissage de l'énumération en tant que telle. Seules des situations sur le dénombrement sont mises en place. Mais dans certaines de ces situations, l'énumération est pourtant travailler sans le

---

<sup>23</sup> Qu'apprend-on à l'école maternelle? (2007) p128.

<sup>24</sup> BRISSIAUD Rémi, MALLAUSSENA Philippe, *J'apprends les maths – PS*, Retz

<sup>25</sup> BRISSIAUD Rémi, BOULARD Christiane, OUZOLIAS André, RIOU Martine, *J'apprends les maths – GS*, Retz  
*Découvrir le monde GS – Activités de logique, apprendre des quantités et des nombres ; repérage dans l'espace ; découverte des formes et des grandeurs ; le temps qui passe*, Collection pour apprendre les math, Hachette Éducation.

<sup>26</sup> VALENTIN Dominique (2004), *Découvrir le monde avec les mathématiques- Situations pour la petite et moyenne section*, Hatier, Paris.

vouloir.

Par exemple, dans la situation « les boîtes d'œufs », l'activité 1 d'appropriation des règles d'action et du but permet de travailler l'énumération puisque les élèves doivent mettre une châtaigne dans chaque alvéole d'une boîte de 12 œufs.

Cependant, on observe dans des documents plus spécialisés à destination des enseignants tels Grand N ou RDM des situations à mettre en place en classe permettant de travailler l'énumération pour elle-même. Deux situations avec des variantes reviennent régulièrement : la situation des boîtes d'allumettes (J. BRIAND) et la situation des boîtes d'œufs (H-C. ARGAUD).

Détaillons dans les paragraphes suivants ces deux situations et leurs variantes.

## VI.2. La situation des boîtes d'allumettes

- La situation des boîtes d'allumettes est présente dans l'article intitulé « Enseigner l'énumération en moyenne section »<sup>27</sup> extrait de *Grand N spécial maternelle* et paru également dans *Grand N n°66*<sup>28</sup> ainsi que dans l'article « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques »<sup>29</sup> issu de *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Dans cette situation, le dispositif, destiné à des élèves de 4-5 ans, est constitué d'un ensemble de boîtes d'allumettes percées d'un trou sur le côté permettant le passage d'allumettes et d'une boîte contenant les bâtonnets. L'élève doit placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir. Ce jeu est intitulé « jeu des boîtes d'allumettes ». Pour vérifier, il y a ouverture des boîtes soit par l'élève lui-même, soit par un autre élève, soit par l'enseignant. La réussite est prononcée si aucune boîte n'est vide et si il y a une allumette dans chaque boîte. Ce travail se fait en ateliers. Les variables sur lesquelles les auteurs ont joué sont le nombre de boîtes et le fait que les objets à énumérer soient effectivement déplaçables ou non. La collection n'est pas organisée.

Les variantes prévues de la situation sont :

- Première variante : 8 boîtes déplaçables sur une table de 120x80
- Deuxième variante : 20 boîtes déplaçables sur une table 120x80
- Troisième variante : 20 boîtes fixées sur un support (vinyle blanc). Mise à disposition d'un stylo feutre.

A ces deux variantes ont été ajoutées deux autres variantes :

- Lors du deuxième jeu, les auteurs ont repérés que certains élèves secouaient les boîtes dans

---

<sup>27</sup> Joël BRIAND, Marie-José LACAVE LUCIANI, Michèle HARVOUËT, Dominique BEDERE, Véronique GOUA DE BAIX (1999-2000), « Enseigner l'énumération en moyenne section », *Grand N spécial maternelle*, Tome 1, p. 123 à 138.

<sup>28</sup> Joël BRIAND, Marie-José LACAVE LUCIANI, Michèle HARVOUËT, Dominique BEDERE, Véronique GOUA DE BAIX (1999-2000), « Enseigner l'énumération en moyenne section », *Grand N*, n°66, p. 7 à 122.

<sup>29</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p. 41 à 76.

le but de voir la présence ou l'absence d'allumette dans la boîte. Ils ont donc décidé de placer au préalable une allumette dans les boîtes et donc le travail était « il faut qu'il ya ait deux allumettes par boîte ». Après étude de cette variante, les auteurs ont conclu que cette décision n'avait pas été utile.

- Les auteurs ont également remarqué qu'une collection de 20 boîtes rendait la situation inutilement complexe. De ce fait, la collection a été ainsi réduite à 15 boîtes.

La séquence expérimentée est résumée par le tableau ci-après.

	<b>Configuration matérielle</b>	<b>Raisons des choix</b>	<b>Analyses effectuées après l'expérimentation</b>
<b>JEU 1</b>	8 boîtes déplaçables		- Stratégies pour remplir des boîtes, élaborer une collection. - Étude d'énumérations induites involontairement.
<b>JEU 2</b>	20 boîtes déplaçables	Changement significatif du nombre de boîtes.	- Influence du passage de 8 à 20 sur les résultats et les stratégies mises en œuvre.
<b>Première phase collective</b>		Faire formuler les stratégies. Faire anticiper un résultat.	- Passage des propositions aux prédicats puis aux calculs sur prédicats. - Traitement des erreurs par l'enseignant.
<b>JEU 3</b>	20 boîtes déplaçables		
<b>JEU 4</b>	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Le secouage (deux allumettes) 15 car 20 rend trop long la validation.	- Étude détaillée du « secouage ».
<b>Deuxième phase collective</b>	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Faire formuler les stratégies. Faire anticiper un résultat.	- Un savoir et son enseignement possible ou impossible. - Limites de ce type de séances. - Absence d'une situation a-didactique de formulation.
<b>JEU 5</b>	15 boîtes non déplaçables. A nouveau une seule allumette.	Énumérer une collection d'objets non déplaçables. Faire des marques.	- Analyse de la complexité de la tâche.

A la fin de l'article, suite à l'analyse de la séquence mise en place, le plan de travail proposé est le suivant. Il est destiné à des élèves de moyenne et grande sections.

	Configuration	Raison des choix
JEU 1	8 boîtes déplaçables	
JEU 2	8 boîtes déplaçables. 2 élèves. Un qui observe. Tâche interrompue.	Modifier le rôle de l'observateur.
Première phase collective	Simuler des phases de validation dans le but de faire formuler plus précisément.	Faire formuler les stratégies. Faire anticiper un résultat.
JEU 3	15 boîtes déplaçables. 2 élèves. Le deuxième n'observe pas. Consigne orale du premier au deuxième au moment de la passation de rôle.	Faire formuler sur l'énumération et la constitution des collections.
JEU 4	15 boîtes déplaçables constituées de boîtes de différentes formes et de couleurs différentes.	Faire travailler sur les classifications croisées.
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. Le deuxième n'observe pas. Traces écrites sur tableau pour le récepteur au moment de la passation de rôle.	Faire formuler, instituer des résultats sur l'énumération et les procédures de marquage.

- Dans le CD Hatier Pédagogie<sup>30</sup>, cette même situation intitulée « boîte d'allumettes » est présentée sous le thème énumération pour des élèves de MS.

La progression est fondée sur les variantes suivantes :

- Situation d'action :

\* 1<sup>er</sup> jeu : 8 boîtes mobiles fermées, à remplir avec une allumette, sans observateur (activité possible en PS).

\* 2<sup>ème</sup> jeu : 15 boîtes mobiles fermées, à remplir avec une allumette, un observateur muet (MS)

\* 3<sup>ème</sup> jeu : 15 boîtes mobiles fermées, à remplir avec une allumette, un observateur qui peut intervenir en donnant des conseils.

- Situation de formulation :

\* 4<sup>ème</sup> jeu : 15 boîtes mobiles fermées, à remplir avec une allumette. A un moment fixé par le professeur, un autre élève continue le travail commencé. Une communication de ce qui a déjà été fait et de ce qui reste à faire est alors nécessaire.

Bilan collectif sur ce jeu.

<sup>30</sup> BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.-H. (2004), *Apprentissages mathématiques en maternelle, Situations et analyses*, cédérom, Hatier, collection « Pédagogie », Paris.

- Situation d'action :

\* 5<sup>ème</sup> jeu : 15 boîtes fixes fermées, à remplir avec une allumette, sans ou avec observateur.

La collection est toujours composée de 15 boîtes mais non déplaçables. En effet, les boîtes sont fixées sur un tableau blanc. Chaque enfant joue seul et dispose d'un feutre dont il pourra se servir éventuellement, selon son choix.

- Situation de formulation :

\* 6<sup>ème</sup> jeu : 15 boîtes fixes fermées, à remplir avec une allumette, avec un autre qui prend la succession.

- Dans le livre *Des situations pour apprendre le nombre*<sup>31</sup>, les auteurs reprennent la situation de J. BRIAND sous le nom « les boîtes trouées ».

Situation 27 : Les boîtes trouées (GS)

Il s'agit de remplir des boîtes fermées avec un seul objet dans chaque boîte et dans toutes les boîtes, mais sans avoir la possibilité d'observer si la boîte contient déjà un objet.

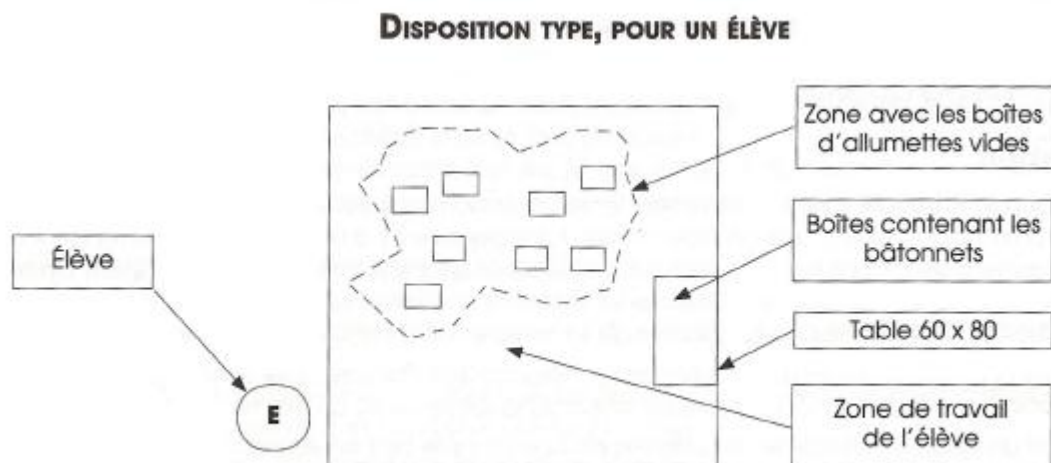
Dans cette situation, les objets (jetons) sont en grand nombre.

On joue sur le nombre de boîtes et la fixité ou non des boîtes.

**TABLEAU RÉCAPITULATIF DES PHASES**

	Configuration du matériel	Remarques	Raison du choix
Phase 1	8 boîtes non fixées	L'élève peut déplacer les boîtes comme il l'entend.	Les élèves essaient, ils expérimentent, donc s'approprient la situation.
Phase 2	15 boîtes non fixées	Idem	Rupture : la variable « nombre de boîtes » doit augmenter d'une manière significative.
Phase 3	8 boîtes fixées	Il est nécessaire de changer la stratégie.	Le déplacement n'est plus possible. Il est nécessaire de fabriquer un chemin virtuel entre les boîtes.
Phase 4	15 boîtes fixées	Idem	Idem, mais c'est la procédure de marquage qui est nécessaire.

<sup>31</sup> NEY Lisbeth, RAJAIN Claude, VASLOT Evelyne (2006), *Des situations pour apprendre le nombre - cycle 1 et GS*.



### VI.3. La situation des boîtes d'œufs

- Un article intitulé « Placer des jetons » extrait de *Grand N* n°63<sup>32</sup> et repris dans *Grand N spécial maternelle*<sup>33</sup> propose une situation permettant de travailler également l'énumération avec une structuration des objets à énumérer. Cette situation est inspirée de la situation des tirelires proposée par BERTHELOT et SALIN dans leur thèse<sup>34</sup>.

Cet article rend compte d'une expérience menée en moyenne section et en grande section de maternelle amenant les élèves à organiser une collection d'objets en lignes et colonnes pour résoudre un problème d'énumération **en mettant en jeu, par ses contraintes, des connaissances spatiales**. L'élève doit donc utiliser de façon implicite des caractéristiques de la structure.

L'expérience proposée consiste à faire remplir une boîte à casiers (rectangle 5x4) par des jetons (le nombre de jetons étant supérieur au nombre de « places »), les élèves glissant les jetons dans des fentes ne peuvent pas voir s'ils ont déjà rempli la case ou non. La structure lignes/colonnes (le quadrillage) est découverte dans deux dispositifs didactiques développée dans des espaces et des plans différents.

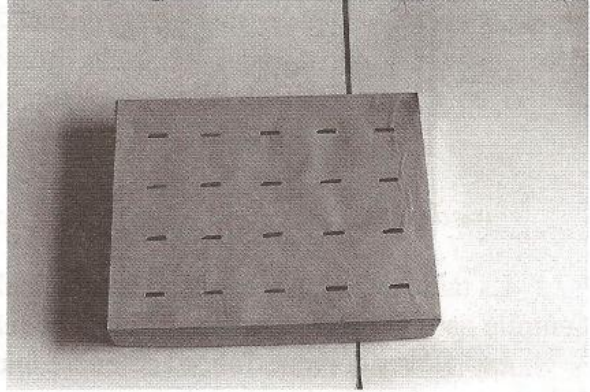
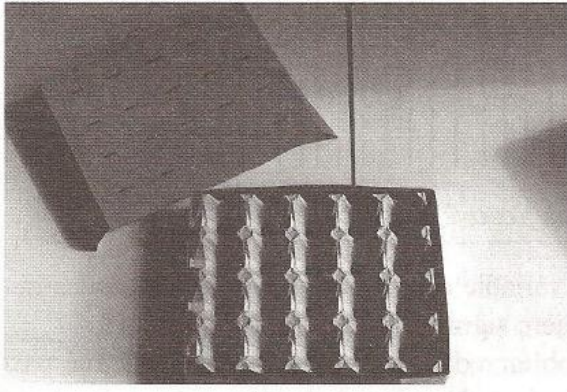
Dans le premier dispositif, les « places » sont les alvéoles d'une boîte à œufs, cachées derrière un couvercle présentant des fentes.

<sup>32</sup> Henri-Claude ARGAUD, MAILLARD Monique, CASTRY Nicole, VALESA Marie-Hélène, PORTE Elyane, CHARRAS Myriam, CASTRY Alain (1998-1999), « Placer des jetons », *Grand N*, n°63, p. 9 à 23.

<sup>33</sup> Henri-Claude ARGAUD, MAILLARD Monique, CASTRY Nicole, VALESA Marie-Hélène, PORTE Elyane, CHARRAS Myriam, CASTRY Alain (2001), « Placer des jetons », *Grand N spécial maternelle*, Tome 2, p. 45 à 59.

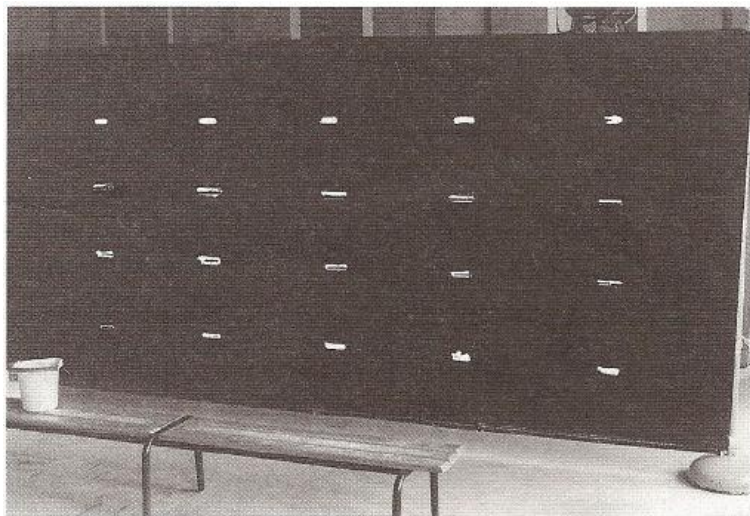
<sup>34</sup> BERTHELOT R. et SALIN M.H., 1992, *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse Université Bordeaux I, LADIST.





Dans ce dispositif, les élèves travaillent par deux. Mais après analyse par les auteurs, il serait préférable que le travail soit fait, dans un premier temps, individuellement pour une meilleure appropriation du problème. Par la suite, un travail par deux serait intéressant pour permettre de la part des élèves une explicitation des repères et de leurs actions.

Dans le deuxième dispositif, les « places » sont des faisselles en plastiques, transparentes, fixées derrière les fentes d'un grand panneau en plastique (3mx1,5m) de type paravent, destinées à recevoir les jetons glissées par les élèves à travers les fentes faite dans un cache plastique. Celui-ci recouvre entièrement le panneau paravent pour empêcher de voir les jetons placés dans les faisselles.



Pour cette activité, les élèves travaillent individuellement. Une attention particulière à la position relative de la maîtresse, des élèves, du grillage, de la réserve de jetons doit mise en place pour éviter une incidence sur le déroulement des stratégies.

Le problème, pour les deux dispositifs, est le même, c'est-à-dire « mettre un jeton et un seul dans chaque place ».

La principale variable didactique est la taille de l'espace : micro-espace pour le premier dispositif, méso-espace dans le second. Il s'avère que le changement de « valeur » de cette variable n'a pas de conséquences essentielles sur les procédures.

- Dans le livre *Des situations pour apprendre le nombre*<sup>35</sup>, les auteurs reprennent la situation d'H.C. ARGAUD sous le nom « le repas des poussins». Elle est destinée à des élèves de PS, MS, voire GS.

Situation 26 : Le repas des poussins

Il s'agit de mettre en boîte des jetons sans percevoir le contenu de la boîte une fois le jeton placé.

La collection à énumérer (alvéoles de boîtes d'œufs) est organisée en rectangle 2 x 5 (PS et MS) ou 5 x 6 (GS).

Le nombre de jetons est égal au nombre d'alvéoles, **il n'y a pas de jetons surnuméraires**.

Le contexte est celui de poussins, il faut donner une graine (un jeton) à chaque poussin.

#### VI.4. Du côté des TICE

Un logiciel<sup>36</sup> sur internet propose des situations d'énumération. Ce logiciel est une adaptation du logiciel « A nous les nombres » produit par le Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université Bordeaux 1 (COREM – Auteurs initiaux : Joël BRIAND, Guy BROUSSEAU, Susy VINANT GAIRIN-CALVO et Jean-Louis OYALLON). En annexe pages 5 et 6, le logiciel est présenté brièvement.

<sup>37</sup>Ce logiciel propose un apprentissage progressif de l'énumération par le module « Capala » à partir d'une même situation reprise dans les différents « niveaux du jeu ».

La situation :

Chaque fenêtre de jeu regroupe différents lieux : ciel, pré, désert, lac. Le ciel est présent dans toutes les activités et c'est le lieu où se trouvent tous les animaux au départ. Selon le niveau de difficulté, l'activité peut proposer 2 ou 3 lieux parmi lesquels figurent obligatoirement le ciel et plusieurs catégories d'animaux. Il s'agit de déplacer les animaux qui ne sont pas dans le bon lieu. Pour ce faire, on clique sur un ou plusieurs animaux pour les sélectionner et on clique ensuite sur l'habitat où ils doivent se rendre.

Niveau 1 :

Ce niveau met les élèves en situation de réaliser des tris. Il s'agit de déplacer certains animaux qui sont dans le ciel pour les mettre dans leur habitat.

---

<sup>35</sup> NEY Lisbeth, RAJAIN Claude, VASLOT Evelyne (2006), *Des situations pour apprendre le nombre - cycle 1 et GS*, p. 137 à 138.

<sup>36</sup> [http://www.abuledu.org/leterrier/a\\_nous\\_les\\_nombres](http://www.abuledu.org/leterrier/a_nous_les_nombres)

<sup>37</sup> [http://pedagogie.ac-toulouse.fr/ien65-tarbes-adjoint/tice/tice\\_apprentissages/construct\\_nombre1.pdf](http://pedagogie.ac-toulouse.fr/ien65-tarbes-adjoint/tice/tice_apprentissages/construct_nombre1.pdf)



Plusieurs tactiques sont possibles :

- les animaux sont déplacés un par un.
- Plusieurs animaux sont déplacés à la fois, voire toute la collection.

Niveau 2 :

La règle est modifiée : l'élève doit « prendre » tous les animaux en même temps, il n'a plus la possibilité de déplacer un par un ou par petits groupes. Toutefois, les animaux « désignés » par un clic apparaissent plus clair (ils sont marqués), d'où le nom donné à l'activité : « marquage ».

Niveau 3 :

La règle est encore modifiée ; les animaux ne sont plus marqués, on est dans une véritable situation d'énumération.

Il s'agit de déplacer certains animaux qui sont dans le ciel pour les mettre dans leur habitat. On doit prendre tous les animaux en même temps. Il n'y a pas de marque visuelle sur les objets sélectionnés. L'élève se trouve maintenant devant une situation d'énumération. Cette situation nécessite une plus grande concentration, sollicite davantage la mémoire visuelle, et induit également le recours à un « algorithme » pour parcourir la collection de manière efficace, du moins lorsque le nombre d'animaux est élevé. Dans les niveaux les plus difficiles, les enfants peuvent s'appuyer sur une méthode de parcours de la collection en visualisant au préalable « un chemin » qui relie logiquement et spatialement tous les objets à déplacer. La difficulté supplémentaire générée par le déplacement des animaux à l'écran, dans les niveaux les plus difficiles, permet de solliciter d'une manière « rééquilibrée » la mémoire visuelle et le recours à un algorithme de parcours de la collection.

L'étude des ouvrages à destination des enseignants et des programmes officiels, montrent que l'énumération n'est pas suffisamment prise en charge par l'enseignement, ce qui handicape un certain nombre d'élèves dans les activités numériques. Il paraît donc intéressant de travailler cette notion à l'école.

## **B- Problématique, méthodologie de recherche et cadres théoriques de référence**

L'acquisition du schème du dénombrement est un des objectifs essentiels de l'école maternelle française. Les travaux de J. BRIAND ont mis en évidence le fait que l'énumération en est un pré-requis. La question de son apprentissage est alors posée.

### **I. Problématique**

Le mémoire professionnel m'avait amené à m'interroger sur les difficultés, spécifiques à l'énumération, auxquelles l'enseignant était confronté et aux solutions que ce dernier pouvait mettre en place pour diminuer ces difficultés. Par référence au quadrilatère didactique, nous avons envisagé les difficultés du côté du maître et du côté des élèves. Nous avons vu que les difficultés se situaient à deux niveaux : à travers le processus de dévolution d'une part et à propos de la résolution du problème et la mise en place de procédures de résolution d'autre part.

Bien que les programmes en vigueur ne soient pas explicites au sujet de l'énumération, nous faisons le choix de mener à nouveau un apprentissage sur ce thème qui paraît, à la lumière des recherches présentées précédemment, essentiel. En effet, cette connaissance-compétence est indispensable pour mener à bien le dénombrement d'une collection et la non-maîtrise de celle-ci est souvent à l'origine des erreurs de dénombrement chez les jeunes élèves.

La situation, mise en place cette année, est similaire à celle de l'année dernière et est donc une situation d'énumération visant à être adidactique, c'est-à-dire une situation dans laquelle l'énumération d'une collection d'objets montrés soit (indépendamment de l'activité numérique) la solution au problème posé.

Compte tenu de la partie qui précède, il résulte que le nombre de problèmes d'énumération différents qu'il est possible de poser à l'élève est très grand.

Nous avons choisi dans ce travail de nous intéresser à l'incidence de certaines variables sur la résolution d'un problème d'énumération. Nous avons donc fait le choix de fixer nombre d'entre elles et de faire varier essentiellement la variable « taille de la collection des objets à énumérer » puisque nous pensons qu'elle a une incidence sur l'évolution des procédures ainsi que la variable « permanence possible du lien de l'objet e avec l'objet f ».

Nous pouvons à ce stade formuler notre problématique en ces termes :

**Dans une situation d'apprentissage de l'énumération d'objets mobiles à l'école maternelle, quelles incidences peuvent avoir les variables didactiques que sont**

**- « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f**

**- « taille » de la collection des objets à énumérer »**

**sur la résolution de problèmes?**

A propos de cette question, nous faisons les hypothèses suivantes :

**• 1. Incidence sur le taux de réussite :**

En effet, il est possible qu'une baisse significative du taux de réussite des élèves apparaisse après un changement de variables (perte du lien de l'objet e avec l'objet f, passage à une taille de collection non mémorisable). Avec la perte du lien de l'objet e avec l'objet f et surtout avec l'augmentation de la taille de la collection, la mémoire des élèves peut être saturée et donc entraîner des erreurs lors du remplissage des boîtes, soit oubli d'une boîte, soit remplissage de deux fois la même boîte. Le taux de réussite devrait remonter progressivement du fait de l'adaptation des élèves à la nouvelle contrainte.

**• 2. Incidence sur les procédures :**

On peut s'attendre à une évolution des procédures de résolution après un changement de valeurs de variables (perte du lien de l'objet e avec l'objet f, passage à une taille de collection non mémorisable). En particulier, lors de l'augmentation de la taille de la collection, on pourrait observer une baisse des procédures qui utilisent la mémoire et une augmentation des procédures de déplacement des objets à énumérer qui libèrent la mémoire. Cette évolution des procédures se fait progressivement après le changement de variables, cela nécessite une adaptation de la part des élèves aux nouvelles contraintes.

L'étude de la variable « permanence possible du lien de l'objet e avec l'objet f » devrait montrer que la perte de ce lien entraîne la mise en place de procédures d'énumération faisant appel à la mémorisation et au déplacement des objets e. Avec la permanence du lien, l'élève n'est pas obligé de mettre en place des procédures performantes, il lui suffit par analyse visuelle d'observer si le lien entre l'objet e et l'objet f est effectif.

L'étude de la variable « taille de la collection des objets à énumérer » devrait montrer que l'augmentation du nombre d'objets à énumérer, qui fait passer d'une taille de collection mémorisable à une taille de collection non mémorisable, au cours de la séquence entraîne une évolution des procédures. Avec un nombre important d'objets, le regard de l'élève devra

obligatoirement quitter certaines parties de l'espace contenant des objets. C'est l'effort important de mémoire que cette rupture du regard induit, qui nous l'espérons, feront évoluer la procédure et forcera les élèves à se poser la question clé : comment repérer les objets déjà énumérés sans trop d'effort de mémoire ? Peut être penseront-ils à déplacer les objets déjà énumérés.

Les nouvelles contraintes devraient donc permettre l'émergence des stratégies d'organisation plus marquées.

## II. Méthodologie de recherche

### II.1. Méthodologie habituelle

Dans un article<sup>38</sup>, M. ARTIGUE (1990) décrit une méthode de travail pour conduire une recherche en didactique appelé ingénierie didactique<sup>39</sup>. Cette ingénierie se base sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement. Elle se fonde sur une confrontation entre l'analyse faite a-priori et les constats a-posteriori.

Selon M. ARTIGUE (1990), le cadre de l'ingénierie didactique comprend quatre phases :

#### 1- Les analyses préalables

Elles sont destinées à faire émerger les connaissances liées au domaine étudié, afin de préparer la phase de conception qui suivra, et prennent en compte les objectifs spécifiques de la recherche. Ces analyses préalables concernent :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets
- l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles rencontrés

#### 2- La conception et l'analyse a priori de situations didactiques

« Dans cette seconde phase, le chercheur prend la décision d'agir sur un certain nombre de variables du système non fixées par les contraintes : variables de commande dont il suppose qu'elles sont des variables pertinentes par rapport au problème étudié. »

---

<sup>38</sup> ARTIGUE M., « Ingénierie didactique », *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol 9/3.

<sup>39</sup> " La notion d'ingénierie didactique a émergé en didactique des mathématiques au début des années quatre-vingts. Il s'agissait d'étiqueter par ce terme, une forme de travail didactique : celle, comparable au travail de l'ingénieur qui pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique, mais en même temps se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut pas ou ne peut pas prendre en charge"  
ARTIGUE M., « Ingénierie didactique », *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol 9/3.

« L'objectif de l'analyse a priori est donc de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. Pour ce, elle va se fonder sur des hypothèses dont la validation sera, en principe, indirectement en jeu dans la confrontation opérée dans la quatrième phase entre analyse a priori et analyse a posteriori ».

### **3 - L'expérimentation**

C'est une phase classique, qui doit permettre un recueil de données diverses, éclairant l'objet de la recherche.

### **4 - L'analyse a posteriori et l'évaluation**

« Elle s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement, mais aussi productions des élèves en classe et hors classe. Ces données sont souvent complétées par des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes, questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes, réalisés à divers moments de l'enseignement ou à son issue. C'est sur la confrontation des deux analyses : analyse a priori et analyse a posteriori que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche ».

« Les hypothèses mêmes engagées explicitement dans le travail d'ingénierie sont souvent des hypothèses relativement globales, mettant en jeu des processus d'apprentissage à long terme, que l'ampleur de l'ingénierie ne permet pas nécessairement de faire entrer réellement dans une démarche de validation ».

## **II.2. Particularités méthodologiques de notre étude**

Pour répondre à notre problématique, nous avons commencé par faire des recherches sur le dénombrement, le comptage et l'énumération. En effet, il nous fallait clarifier ces termes, regarder ce qu'en disaient les chercheurs ainsi qu'examiner les textes officiels et les ouvrages/manuels à destination des enseignants. Ces études sont présentes dans la partie A. De plus, il a fallu faire des choix concernant les méthodes d'enseignement et d'apprentissage. Notre expérimentation se faisant en maternelle et dans une classe à triple niveau, il a fallu prendre également en compte les particularités de ces élèves et de cette classe ; et donc étudier la psychologie et le développement de ces jeunes élèves ainsi que réfléchir à une différenciation. Ceci constitue la suite de la partie B.

Avant la mise en œuvre d'une situation d'énumération d'objets matériels dans la classe, il a fallu étudier les différents problèmes possibles après avoir recherché les variables didactiques et analysé les résultats de situations testés antérieurement afin de concevoir la situation à tester. Pour la conception, il a fallu choisir les variables intéressantes à étudier et donc fixer les contraintes, choisir un contexte pour une dévolution réussie, réfléchir au problème élève et prévoir les stratégies des

élèves. La partie C rend compte de cette réflexion.

La partie D, quant à elle, donne des indications quant à l'expérimentation elle-même : données à recueillir, où et comment ainsi que la structure de la séquence.

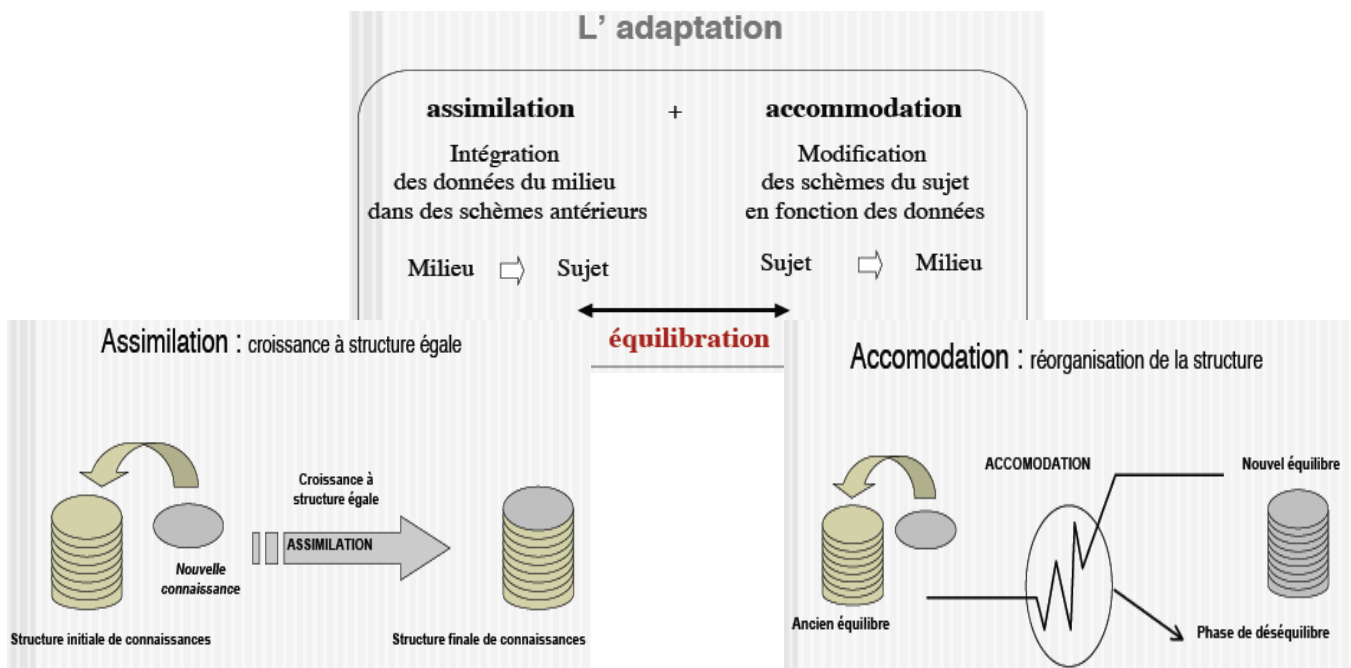
Le mémoire se clôt avec les parties E et F qui correspondent à l'analyse des résultats et des procédures. Plus précisément, nous étudions les effets de variables didactiques sur la résolution de problèmes et nous revenons sur les hypothèses émises suite à la problématique. Une analyse complémentaire essaie d'expliquer les raisons de ces résultats.

### III. Des choix pour l'enseignement et l'apprentissage

#### III.1. Constructivisme et socio-constructivisme

##### III.1.a. Constructivisme (J. PIAGET)

Il s'agit de faire référence à PIAGET (1896 - 1980). L'apprentissage se fait par l'interaction entre un sujet et son environnement. Selon la théorie de PIAGET, le sujet apprend en s'adaptant à un milieu ; c'est en agissant sur le monde qu'il apprend. Le développement se caractérise par le passage d'une structure à une autre par le processus d'équilibration. L'adaptation est la recherche d'un équilibre entre le sujet et le milieu, elle se fait par assimilation et accommodation.



Pour J. PIAGET le développement guide l'apprentissage. Le développement de l'individu va passer par différents stades :

- stade sensori-moteur (jusqu'à 3 – 4 ans) : construction de l'objet permanent et de l'espace proche.



- stade pré-opératoire (jusqu'à 6 – 7 ans)
- stade des opérations concrètes (jusqu'à 12 ans)
- stade des opérations formelles (jusqu'à 15 ans) : passage à la pensée conceptuelle et socialisée, raisonnement hypothético-déductif.

### III.1.b. Socio-constructivisme (WALLON, VYGOTSKY, BRUNER)

Dans l'approche socio-constructiviste, un individu apprend mieux s'il est entouré que seul, et il apprend mieux en communiquant d'où l'importance des interactions entre pairs (individus de même statut).

Mais le développement d'un individu n'est pas automatique, il y a une contrainte extrêmement forte, c'est qu'il s'effectue à l'intérieur d'une zone « Zone Proximale de Développement » : c'est l'écart entre le niveau actuel de l'enfant (ce qu'il est capable de produire seul) et son niveau potentiel (ce qu'il est capable de réaliser avec l'aide de l'adulte).

L'acquisition de connaissances passe par une interaction entre le sujet, la situation d'enseignement et les acteurs de la situation.

## III.2. Didactique des mathématiques

Tout d'abord, donnons une définition de la didactique des mathématiques empruntée à l'Encyclopedia Universalis :

*« La didactique des mathématiques étudie le processus de transmission et d'acquisition de cette science, particulièrement en situation scolaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. À terme, elle se propose d'améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement, (...) assurant chez l'élève la construction d'un savoir vivant (susceptible d'évolution) et fonctionnel (qui permettent de résoudre des problèmes et de poser des questions). »*

### III.2.a. La dialectique outil/objet (R. DOUADY)

Cette théorie fait état des différents « statuts » du concept dans un processus d'apprentissage, et en précise l'articulation.

R. DOUADY définit les termes de outil et objet : « Nous disons qu'un concept est **outil** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème [...] Par **objet** nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné reconnu socialement »<sup>40</sup>.

Une connaissance ou un concept a un statut « outil » lorsqu'un élève utilise cette connaissance ou ce

<sup>40</sup> R. DOUADY (1987), « Jeux de cadres et dialectiques outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 7/2, p9.

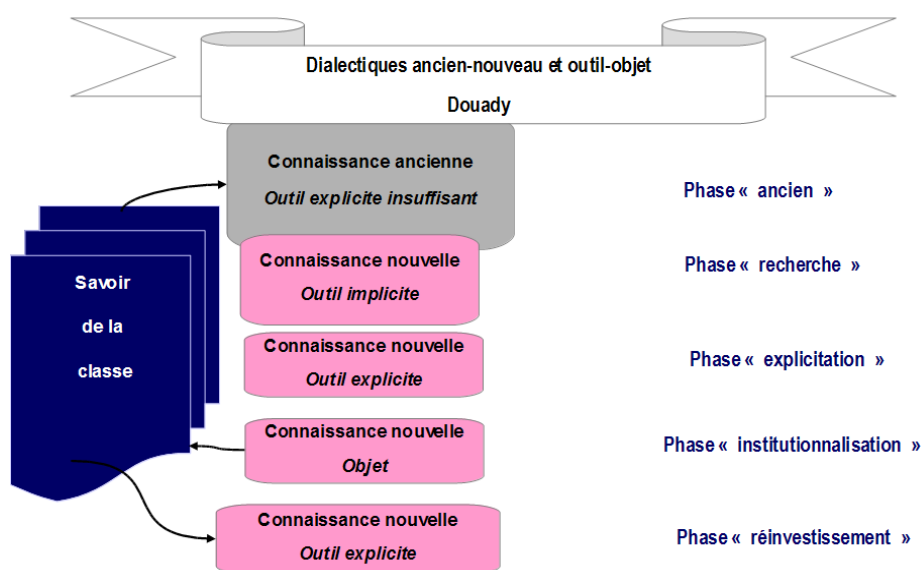
concept pour résoudre un problème. On remarque qu'un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes et que plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

Une connaissance ou un concept a un statut « objet » lorsqu'une connaissance ou un concept est reconnu(e) au sein de la classe comme ayant sa place parmi l'ensemble des savoirs de la classe à un moment donné.

La dialectique outil-objet est constituée de différentes phases :

- Phase « ancien » : les élèves s'engagent dans le problème avec leurs anciennes connaissances, qui sont mises en œuvre comme outils (explicites le plus souvent) pour résoudre au moins partiellement le problème.
- Phase « recherche de nouveau » : les élèves s'aperçoivent de l'insuffisance de leurs connaissances ; ils ont des difficultés pour résoudre complètement le problème. Ils doivent alors chercher des moyens nouveaux adaptés : de nouvelles connaissances implicites.
- Phase « explicitation et institutionnalisation locale » : la connaissance nouvelle découverte en tant qu'outil à la phase précédente est explicitée.
- Phase « institutionnalisation » : l'enseignant donne le statut d'objet à la nouvelle connaissance.
- Phase « familiarisation ou réinvestissement » : la nouvelle connaissance est réutilisée en tant que nouvel outil explicite dans les textes connus.

Pour résumé, « une notion mathématique intervient comme outil (implicite ou explicite) de résolution de problème, est reconnue et étudiée en tant que savoir officiel (objet), puis intervient comme outil dans d'autres problèmes ». <sup>41</sup>



<sup>41</sup> J. BRIAND et MC CHEVALIER (1995), *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*.

### III.2.b. La théorie des situations (G. BROUSSEAU)

Tout d'abord, définissons le terme de situation : une situation est l'ensemble des conditions (matérielles) dans lesquelles se trouve un sujet au cours d'une action. Selon J. BRIAND et M-C CHEVALIER (1995), « *une situation désigne l'ensemble des circonstances dans lesquels se trouve un individu, les relations qui l'unissent à son milieu, et l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution* »<sup>42</sup>.

#### ◇ La situation d'apprentissage

Selon J. BRIAND et M-C. CHEVALIER (1995), « *une situation d'apprentissage est une situation qui permet à un sujet de passer d'un état de connaissance à un autre état de connaissance* »<sup>43</sup>.

#### ◇ Les différents types de situations

G. BROUSSEAU distingue trois catégories de situations.

##### × situation non didactique

Une situation non didactique est une situation qui n'a pas de finalité didactique (didactique : qui sert à enseigner). Le rapport au savoir se construit comme un moyen économique d'action.

Dans le glossaire<sup>44</sup>, les situations non didactiques sont définies comme des situations « *où l'évolution de l'actant n'est soumise à aucune intervention didactique directe* ».

En effet, Claire MARGOLINAS<sup>45</sup> (1993) parle de situations non didactiques si personne ne l'a organisée pour permettre un apprentissage.

##### × situation didactique

Une situation didactique est une situation « *où un actant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d'un autre actant, un élève par exemple et lui permet de s'exprimer en actions* »<sup>46</sup>.

Claire MARGOLINAS<sup>47</sup> (1993) donne comme définition d'une situation didactique « *une situation qui se noue le plus souvent dans la classe, entre un maître, et un ou des élèves, autour d'un savoir à enseigner. La situation didactique ne concerne donc que le système didactique stricto sensu, et pas l'ensemble du système d'enseignement, même si les phénomènes qui ont lieu dans la classe n'en sont pas indépendants. Dans la situation didactique, les intentions d'enseigner et d'apprendre sont*

---

<sup>42</sup> J. BRIAND et MC CHEVALIER (1995), *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*.

<sup>43</sup> J. BRIAND et MC CHEVALIER (1995), *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*.

<sup>44</sup> BROUSSEAU Guy « Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques ».

<sup>45</sup> MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée sauvage éditions.

<sup>46</sup> BROUSSEAU Guy « Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques ».

<sup>47</sup> MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée sauvage éditions.

*affichées. La situation didactique est régie par le contrat didactique, tissus d'obligation implicites vis-à-vis du savoir qui se noue entre le maître et l'élève. »*

× situation adidactique

Une situation adidactique a une finalité didactique. L'élève agit comme si la situation était non didactique, c'est-à-dire indépendamment des attentes du professeur. Ce que fait l'élève a un caractère de nécessité. Les interventions du professeur sont limitées et neutres par rapport au savoir en jeu de la situation. Les intentions didactiques du professeur sont « prises en charge » par le milieu, le professeur n'a pas besoin d'intervenir. En effet, *« entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître refuse à intervenir comme proposeur de connaissances qu'il veut voir apparaître »*<sup>48</sup>. Plus précisément, *« les situations « adidactiques » sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances »*<sup>49</sup>.

G. BROUSSEAU dit qu'un élève est dans une situation adidactique si l'élève peut la vivre en autonomie, comme chercheur d'un problème de la discipline liée à un savoir « enjeu » de la situation.

Les conditions d'adidacticité d'une situation sont les suivantes :

- l'élève peut envisager une solution sans que cela soit celle que le professeur veut enseigner
- la procédure initiale doit être insuffisante : nécessité d'adaptation qui conduit à une modification des connaissances de l'élève
- le savoir visé est indispensable pour concevoir la procédure optimale
- le milieu est valide (rétroactions possibles)
- l'élève a la possibilité de recommencer (accommodations).

◇ Les caractéristiques d'une situation a-didactique

× le contrat didactique

Le contrat didactique est l'ensemble des règles qui fixent :

- le fonctionnement
- la définition des rôles
- la répartition des tâches entre le professeur et ses élèves.

Le contrat didactique est fait de règles implicites et explicites.

En effet, G. BROUSSEAU (1998a) dit que entre l'élève et le professeur *« se noue une relation –*

---

<sup>48</sup> BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p. 59.

<sup>49</sup> BROUSSEAU G. (1998a), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p. 311.

*qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre »<sup>50</sup>.*

Il existe des différents effets liés au contrat didactique :

- effet Jourdain : reconnaissance de l'indice d'une connaissance dans le comportement des élèves alors qu'il est produit par des causes banales
- effet Topaze : négociation à la baisse des conditions d'obtention de la réponse attendue ; les questions posées sont de plus en plus faciles, le professeur prend à sa charge le travail.
- glissements métacognitif et métadidactique.

Le contrat didactique met le professeur et l'élève devant une injonction paradoxale : le professeur ne peut pas dire à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, sinon le professeur ne joue plus son rôle. Si le professeur dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. Le professeur doit faire en sorte que l'élève produise la réponse attendue, sinon le professeur n'a pas réussi son enseignement. Si l'élève accepte que le professeur lui enseigne les résultats, il ne les établit pas et n'apprend pas les mathématiques.

#### × le milieu

Dans une situation adidactique, l'élève construit ou modifie son rapport au savoir comme réponse au milieu et non aux intentions du professeur. Le sujet apprend en s'adaptant à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, déséquilibres (assimilation/ accommodation). G. BROUSSEAU définit le milieu comme le système antagoniste de l'élève : « tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit ».

Le milieu :

- joue un rôle central dans l'apprentissage comme cause des adaptations
- modifie l'état des connaissances des élèves
- n'est pas finalisé : il n'a pas « d'intention ».

#### × les variables didactiques

Les variables didactiques sont les variables que peut manipuler le professeur et qui modifient la hiérarchie des stratégies des élèves. En agissant sur les variables didactiques, on peut provoquer des adaptations et des régulations.

Si les variables sont fixées, on parle alors de contraintes.

#### × la dévolution

La dévolution est le processus par lequel le professeur place l'élève comme actant ; l'élève se sent alors « responsable » de l'obtention de la solution au problème posé.

---

<sup>50</sup> BROUSSEAU G. (1998a), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p. 61.

« La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, (consigne, règles, but, état final...) mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité, du résultat qu'il doit chercher »<sup>51</sup>.

C. MARGOLINAS<sup>52</sup> (1993) cite BROUSSEAU (1987, p. 39) : « Il ne suffit pas de « communiquer » un problème à un élève pour que ce problème deviennent **son** problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre. Il ne suffit pas non plus que l'élève accepte cette responsabilité pour que le problème qu'il résout soit un problème « universel » dégagé de présupposés subjectifs. Nous appelons « dévolution » l'activité par laquelle le professeur cherche à atteindre ces deux résultats. »

C. MARGOLINAS<sup>53</sup> (1993) poursuit par « Dans la dévolution, le maître se dessaisit de la partie de sa responsabilité qui est spécifique du savoir à enseigner. Cela veut dire qu'il ne se retire pas, ne devient pas spectateur de la situation (ou pas de façon nécessaire). La dévolution nous semble être un processus qui dure tout le temps de la situation a-didactique, et pas seulement dans une phase d'établissement. Le maître est alors non seulement responsable d'une simple discipline acceptable dans la classe, mais moins superficiellement, de l'engagement de l'élève dans une relation a-didactique avec le problème. Le processus (dynamique) de dévolution est rendu possible par la situation non isolée du maître. »

G. BROUSSEAU (1998a)<sup>54</sup> donne un exemple de dévolution d'une situation adidactique. Cette situation est une situation d'énumération sur micro-ordinateur : les élèves doivent à l'aide d'un crayon optique, conduire un à un, des lapins dans un pré et des canards dans une mare. Selon lui, la dévolution de cette tâche se fait par étapes :

*« Première étape : Approche purement ludique*

*Les élèves n'ont pas compris que parmi les issues du jeu, certaines sont souhaitables et d'autres sont non souhaitables. Les élèves jouent et sont heureux de provoquer un effet tel qu'il soit.*

*Deuxième étape : Dévolution d'une préférence*

*Les élèves ont bien compris quel est l'effet souhaité mais ils attribuent les résultats, bons ou mauvais, à une sorte de fatalité ou de hasard.*

*Troisième étape : Dévolution d'une responsabilité et d'une causalité*

*Pour accepter une responsabilité dans ce qui lui arrive, l'élève doit considérer ce qu'il fait*

---

<sup>51</sup> BROUSSEAU G. (1988), actes de l'université d'été d'Olivet, p. 89.

<sup>52</sup> MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée sauvage éditions.

<sup>53</sup> MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée sauvage éditions.

<sup>54</sup> BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p. 62 à 64.

*comme un choix parmi diverses possibilités puis envisager une relation de causalité entre les décisions qu'il a pris et leurs résultats.*

*A cette étape, les élèves peuvent après coup, envisager que le déroulement du jeu aurait pu être différent. Cela suppose qu'ils peuvent se souvenir de certaines de leurs actions et plus précisément de ce qui, en elles, étaient pertinent ou non.*

*Cette dévolution est délicate : la plupart des enfants sont prêts à accepter du maître l'idée qu'ils sont responsables du résultat du jeu, bien qu'ils soient incapables d'établir à ce moment-là qu'ils auraient pu en obtenir un meilleur par un choix approprié. Or seule la connaissance de cette liaison justifierait la dévolution.*

#### *Quatrième étape : Dévolution de l'anticipation*

*La relation entre la décision et le résultat doit être envisagée avant la décision, l'élève prend alors à sa charge des anticipations qui excluent toute intervention occulte. Même si elle n'est pas entièrement maîtrisée, cette anticipation est considérée comme étant de la responsabilité cognitive du joueur et non pas seulement sa responsabilité sociale.*

#### *Cinquième étape : Dévolution de la situation adidactique*

*Pour réussir, le jeu des lapins, l'élève doit bien effectuer l'énumération d'une collection. Mais il ne suffit pas qu'il la produise une fois « par hasard ». Il faut qu'il sache la reproduire à volonté dans des circonstances variées. Il faut qu'il soit conscient de ce pouvoir de reproduction et qu'il ait une connaissance, au moins intuitive, des conditions qui lui permettent de bonnes chances de réussite. L'élève doit reconnaître les jeux auxquels il vient d'apprendre à jouer. Mais ce qu'il sait faire ne lui pas été nommé, identifié et surtout ne lui pas été décrit comme une procédure « fixe ». Ainsi la dévolution ne porte pas sur l'objet de l'enseignement mais sur les situations qui le caractérisent.*

*Dans cet exemple, la dévolution de la situation adidactique peut-être observé indépendant de la dévolution de l'objet de l'enseignement (qui ne peut avoir lieu à ce moment). Ni le maître ni l'élève ne peuvent identifier, sinon par la réussite d'une tâche complexe, ce qui est enseigné, ce qui est à connaître ou à savoir. »*

- ◇ Le processus d'apprentissage proposé dans une situation a-didactique

G. BROUSSEAU distingue quatre phases différentes au cours desquelles le savoir n'a pas la même fonction et l'élève n'a pas le même rapport au savoir.

- × la situation d'action

La situation d'action pose à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner et permet à l'élève d'agir sur elle et lui renvoie de l'information sur son action.

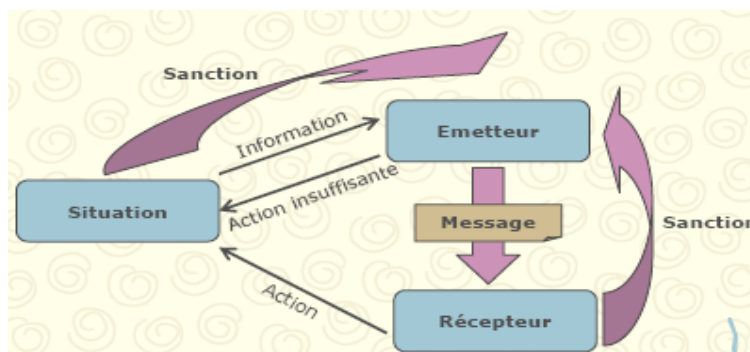
Elle permet à l'élève de juger le résultat de son action (utilisation « en-acte » de propriétés) et ajuster l'action (sans intervention du maître).



D'après G. BROUSSEAU, c'est « une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter la connaissance nécessaire »<sup>55</sup>.

× la situation de formulation

L'élève explicite son modèle implicite de manière à ce que cette formulation ait un sens.

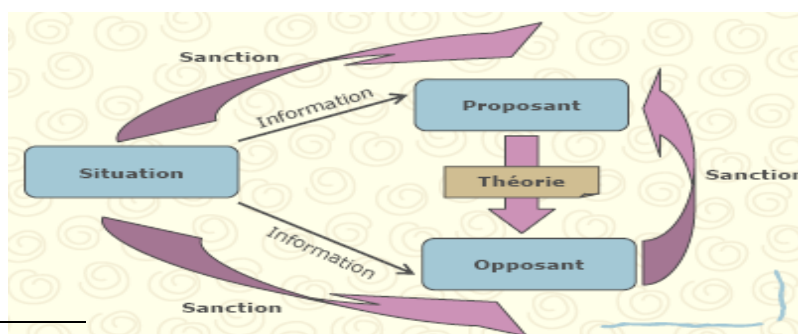


Ce type de situation « met en rapport deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu » (Brousseau).

× la situation de validation

L'élève doit montrer pourquoi le modèle créé est valable : il doit convaincre (argumentation, démonstration, réfutation).

Selon G. BROUSSEAU, « une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de la situation. (...) les protagonistes confrontent leur avis sur l'évolution du milieu et s'accorde selon les règles du débat scientifique ».



<sup>55</sup> BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions.



× la situation d'institutionnalisation

*« Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui lui fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique. »<sup>56</sup>*

De nombreuses contraintes sont à mettre en place pour élaborer une situation adidactique d'apprentissage de l'énumération, en particulier il faut prendre en compte le public auquel est destinée la situation. Regardons quelles sont les particularités des élèves de cet âge.

#### **IV. Psychologie et développement de l'enfant**

On sait aujourd'hui que la petite enfance est un stade déterminant dans le développement de l'enfant. On mesure mieux l'importance de la qualité de l'environnement social ou linguistique sur la construction de sa personnalité et l'évolution de sa scolarité.

L'école maternelle constitue une phase essentielle dans le processus d'apprentissage puisque les enfants découvrent et s'initient progressivement aux bases du travail effectué en classe préparatoire et puisqu'il constitue le premier pas de l'enfant dans le processus d'apprentissage. En effet, l'école maternelle est le lieu de socialisation des enfants, du développement du langage et de compétences. L'enfant y apprendra à vivre en communauté, à agir et réagir avec les autres. L'école maternelle le socialise, développe ses capacités de communication, d'expression envers les autres et lui apprend comment se comporter dans ce nouveau milieu. Le développement n'est pas que social, il est aussi personnel. L'enfant s'y épanouit, il prend conscience de soi, des autres, de l'existence d'une temporalité et développe de nombreuses qualités.

L'entrée en petite section de maternelle est donc une étape essentielle pour le développement de l'enfant et la scolarisation. C'est le premier pas dans le système scolaire. Cette scolarisation en petite section coïncide parfois avec la première séparation du petit enfant de son milieu familial. A ce titre, il arrive qu'elle soit vécue comme un moment douloureux.

La petite section est la classe où les différences sont les plus importantes. Ces différences du point de vue de la maturité, des compétences, des connaissances sont dues à un âge différent des élèves, un vécu personnel (socialisation en crèche ou non...). En effet, quelques mois de différence au niveau de l'âge entraînent de nombreuses disparités entre les élèves.

---

<sup>56</sup> BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions, p. 282.

On peut donc penser que certains élèves ne réussiront pas le travail demandé du fait de leur jeunesse et car ils ne sont pas encore entrés dans les apprentissages.

## V. Différenciation pédagogique

Vu que l'expérimentation a lieu dans une classe à triple niveau, des différences existent entre les élèves : âge des élèves, maturité, connaissances et compétences acquises, temps d'attention, niveau de langage et de compréhension. De ce fait, une différenciation pédagogique sera nécessaire.

### Regardons les définitions données par les chercheurs :

- Le terme de pédagogie différenciée veut désigner « un effort de diversification méthodologique susceptible de répondre à la diversité des élèves. »

(Louis LEGRAND, *La différenciation pédagogique*, Scarabée, CEMEA, Paris 1984)

- « Différencier, c'est avoir le souci de la personne sans renoncer à celui de la collectivité. »

(P. MEIRIEU, *Enseigner, scénario pour un métier nouveau*, ESF, 1989)

- « Différencier, c'est se laisser interpeller par l'apprenant, par l'élève concret, déroutant et irritant, mettant parfois en échec nos meilleures intentions, faisant vaciller avec inconscience nos plus beaux édifices. »

« Différencier la pédagogie c'est se laisser interpeller par cette évidence si importune pour celui qui sait déjà : il n'y a de savoir que par le chemin qui y mène. »

(P. MEIRIEU, *Cahiers pédagogiques*, « Différencier la pédagogie », 1989)

- « La pédagogie différenciée est une méthodologie d'enseignement et non une pédagogie. Face à des élèves très hétérogènes, il est indispensable de mettre en œuvre une pédagogie à la fois variée, diversifiée, concertée et compréhensive. Il doit y avoir une variété de réponses au moins égale à la variété des attentes, sinon le système est élitiste. Chaque enseignant est différent dans sa manière de faire et il reconnaît à l'autre le droit d'avoir une méthode différente. La diversification est facteur de réussite. Du bon sens, de la bonne entente sont des gages de réussite. Le travail en équipe devient une obligation de service, l'enseignant ne peut rester isolé.»

(A. De PERETTI)

- « La pédagogie différenciée est une démarche qui consiste à mettre en œuvre un ensemble diversifié de moyens et de procédures d'enseignement et d'apprentissage pour permettre à des élèves d'âge, d'aptitudes, de compétences, aux savoirs hétérogènes d'atteindre par des voies différentes des objectifs communs. »

(AUZELOUX)

- « La 'flexibilité méthodologique' du maître est un facteur de la réussite des élèves dans la mesure où elle permet à chacun d'élaborer sa propre stratégie. »

(L. DREVILLON, *Pratiques pédagogiques et développement de la pensée opératoire*, PUF, 1980)

- La pédagogie variée : « Varier sa pédagogie c'est se rendre compte que toute méthode dominante en appelle d'autres - complémentaires - qui seront employées de façon plus légère. »
- La pédagogie diversifiée : « Diversifier la pédagogie c'est s'interroger sur l'éventail des démarches simultanément possibles. »

(J.P. ASTOLFI)

- Différenciation simultanée et différenciation successive :

Soit le maître fait preuve de flexibilité pédagogique en proposant à sa classe une succession d'activités ordonnées autour d'un même objet, telle que chacun puisse découvrir sa propre stratégie et s'approprier le savoir proposé ; c'est le cadre le plus facile.

Soit le maître, à un moment donné, fait que les élèves s'adonnent à des activités diverses définies pour chacun d'eux, en fonction de leurs besoins, de leurs ressources etc. ; c'est un cadre plus complexe à gérer.

(AUZELOUX)

### **La pédagogie différenciée n'est pas ...**

- « ... le culte de la différence. »

(Bernard Xavier RENE)

- « Elle est moins un système qu'une démarche. »

(P. MEIRIEU)

- « Différencier la pédagogie ce n'est pas renoncer à élaborer des programmes rigoureux, des méthodes bien construites, des principes pédagogiques clarificateurs. »

(P. MEIRIEU)

- « Elle n'a de sens que dans un système d'objectifs constants. »

### **Pédagogie différenciée ou différenciation pédagogique ?**

La différenciation n'est pas une 'nouvelle pédagogie', une 'pédagogie parmi d'autres' ; à fortiori, ce n'est pas une pédagogie miracle. C'est pourquoi on préfère l'appellation différenciation pédagogique à l'expression pédagogie différenciée.

**La Loi d'orientation sur l'éducation du 9 juillet 1989, dite « loi Jospin »** précise dans son préambule :

« Mettre l'enfant au centre du système éducatif, c'est d'abord le prendre tel qu'il est, avec ses acquis et ses faiblesses. C'est donc construire les apprentissages sur les compétences acquises précédemment : cela suppose de ne pas reprendre, fût-ce pour un groupe d'élève, des apprentissages déjà maîtrisés. Cela implique aussi que, quelle que soit la classe, les lacunes éventuelles de certains élèves soient comblées avant qu'ils n'abordent les apprentissages ultérieurs.... ». D'autre part, elle stipule que « pour assurer l'égalité et la réussite des élèves l'enseignement est adapté à leur

diversité ».

### **Pourquoi différencier ?**

La raison principale en est l' « hétérogénéité ». En effet, la démocratisation du système éducatif a eu pour effet de rendre les classes hétérogènes. Mais en quel sens peut-on dire des classes qu'elles sont hétérogènes? Plus précisément, qu'est-ce qui fait que les élèves sont dits « hétérogènes » ?

### **Les postulats de Burns :**

- 1- Il n'y a pas 2 apprenants qui progressent à la même vitesse.
- 2- Il n'y a pas 2 apprenants qui soient prêts à apprendre en même temps.
- 3- Il n'y a pas 2 apprenants qui utilisent les mêmes techniques d'étude.
- 4- Il n'y a pas 2 apprenants qui résolvent les problèmes exactement de la même manière.
- 5- Il n'y a pas 2 apprenants qui possèdent le même répertoire de comportements.
- 6- Il n'y a pas 2 apprenants qui possèdent le même profil d'intérêt.
- 7- Il n'y a pas 2 apprenants qui soient motivés pour atteindre les mêmes buts.

D'après ces postulats, nous voyons que l'hétérogénéité peut porter sur différents axes :

- sur le plan cognitif :

Il existe chez les élèves une grande hétérogénéité dans le degré d'acquisition des connaissances exigées et dans la richesse de leurs processus mentaux où se combinent représentations, stades de développement, images mentales (On se réfère là essentiellement à la théorie des « profils pédagogiques » d'Antoine de la Garanderie : certains ont une intelligence visuelle tandis que d'autres en ont une auditive voire kinesthésique ou manipulatoire), mode de pensée, stratégie d'apprentissage.

- sur le plan socio-culturel :

Les élèves ont des valeurs, croyances, habitudes, histoires familiales, codes de langages, types de socialisation, ... différents.

- sur le plan psychologique et affectif :

Le vécu, ainsi que la personnalité de chaque apprenant, influent sur leur motivation, volonté, attention, créativité, curiosité, énergie, plaisir, équilibre, rythmes, relation maître/élève (relation pédagogique), relation élève/élève...

D'après ce que nous venons de voir ci-dessous, il est nécessaire de différencier. On pourrait citer Philippe Meirieu : « L'expression de pédagogie différenciée est un pléonasme, il n'y a de pédagogie que différenciée, puisqu'il n'y a de savoir que dans et par le chemin qui y mène (*L'école, mode d'emploi*) »

Pour conclure, différencier, c'est s'adapter aux élèves, c'est mettre en place un ensemble de méthodes diverses afin que tous les élèves atteignent le même objectif.

## C- Analyse à priori d'une situation d'énumération d'objets matériels

### I. Analyse globale

Suite à la variable indiquée dans la partie A paragraphe IV.1.c nommé une variable didactique principale : le « domaine » des « objets », nous nous intéresserons à une situation d'énumération d'objets matériels.

Pour rappel, le problème général est :

« Etant donnée une collection E d'objets matériels e, et une collection F d'objets matériels f, associer à tout objet de E un objet et un seul de F sans que :

- aucun objet e ne soit pas associé à un objet f
- aucun objet e ne soit associé à plus d'un objet f»

#### I.1. Les variables potentielles

##### I.1.a. Les variables didactiques

Dans la situation, la collection à énumérer est la collection E d'objets e et la collection matérialisant l'énumération est la collection F d'objets f.

- VI. *La nature des objets matériels*
  - l'espace sensible usuel
  - l'espace graphique papier-crayon
  - l'espace informatique

Lorsque les objets sont matériels, ils peuvent être de « nature » différente.

Nous faisons l'hypothèse que l'espace sensible usuel est plus adapté, dans un premier temps, à de jeunes élèves. Cet espace permet une meilleure compréhension du problème par les élèves. Cela leur permet de manipuler des objets et d'être dans l'action. Dans cet espace, il y a trois possibilités : soit utiliser les objets réels si la taille est raisonnable, soit utiliser des objets miniaturisés représentant le réel, soit utiliser des objets modélisant le réel. Dans le troisième cas, l'élève doit acquérir un niveau plus important d'abstraction, il doit faire correspondre l'objet réel à l'objet modélisé.

L'espace graphique papier-crayon demande une abstraction encore plus importante vis à vis du problème. Cet espace induit la mise en place de procédures plus complexes. L'élève ne manipule pas directement des objets.

L'espace informatique est un espace autre, ouvrant d'autres possibilités (voir partie A paragraphe VI.4 du côté des TICE). Dans cet espace, par exemple, il n'est pas nécessaire d'avoir une deuxième collection matérialisant l'énumération. La prise en compte d'un élément de la collection se fait par un clic de la souris sur l'élément.

- *V2. La taille de l'espace englobant les collections*
  - micro-espace
  - méso-espace
  - macro-espace

Les trois tailles de l'espace ont été définies par BROUSSAU (1983), GALVEZ (1985) et BERTHELOT - SALIN (1992) :

- Le micro-espace ou « espace des interactions liées à la manipulation des petits objets »<sup>57</sup> désigne l'espace qui est proche du sujet ; l'individu peut voir, toucher, et déplacer les objets de cet espace. De plus, le sujet étant à l'extérieur de l'espace, les objets y sont perçus exhaustivement. Il n'est donc pas nécessaire de conceptualiser afin d'appréhender cet espace. Nous pouvons citer comme micro-espace la table d'un élève.

- Dans le méso-espace ou « espace des déplacements du sujet dans le domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet »<sup>58</sup>. En d'autres termes, il est question d'un espace accessible à une vision globale. Les objets y sont semi-fixes ou fixes, visibles selon diverses perspectives. Ici, l'individu est à l'intérieur de l'espace et peut s'y déplacer afin d'observer l'espace selon différents points de vue. Par conséquent, une conceptualisation est nécessaire afin d'appréhender cette espace. Citons comme exemple de méso-espace la classe de l'enfant.

- Le macro-espace ou « espace des trajets dans la ville »<sup>59</sup>. Il s'agit de l'espace accessible uniquement à des visions partielles. Les objets y sont fixes et une partie seulement est sous le contrôle de la vue. Par ailleurs, l'individu est à l'intérieur de l'espace et doit donc coordonner les informations partielles qu'il reçoit. Par conséquent, une conceptualisation est indispensable, pour appréhender cet espace (plan, carte...)

Le problème d'énumération peut être envisagé avant tout pour des espaces de type micro-espace et méso-espace essentiellement. Lorsque l'espace devient méso-espace, les objets de l'espace changent, les relations de l'élève à l'espace changent : on peut se demander si les procédures

---

<sup>57</sup> Selon la formulation de G. BROUSSEAU (1983)

<sup>58</sup> Selon la formulation de G. BROUSSEAU

<sup>59</sup> BERTHELOT R. et SALIN M.H., 1992, *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse Université Bordeaux I, LADIST, p. 102.

développées pour l'énumération – seront véritablement différentes de celles développées en micro-espace ; -conduiront plus difficilement ou non à la réussite.

Le format du plateau et la taille de l'objet à énumérer interviennent dans la taille de l'espace.

- V3. La « position relative » de l'élève vis à vis du référentiel / du support
  - fixe
  - semi-libre
  - libre

Cette variable renvoie à : l'élève peut-il se déplacer librement autour du support?

Si l'élève peut se déplacer librement autour du support, cela lui permet d'appréhender l'espace de travail librement mais également induit une vision du travail sous différents angles ce qui peut être une difficulté supplémentaire. On peut se demander également si certains élèves ne résolvent pas le problème dans le méso-espace lorsqu'ils se déplacent autour du plateau de travail pour résoudre le problème.

On peut fixer la position de l'élève en l'obligeant à s'asseoir sur une chaise sans pouvoir la changer de place. On peut le laisser libre en faisant le travail par terre, l'élève s'asseyant comme il veut par rapport au support et pouvant se déplacer librement autour.

- V4. La « taille relative » de l'objet f vis-à-vis de l'objet e
  - concordance de taille : on ne peut associer matériellement qu'un objet f à e
  - non concordance de taille: il est possible d'associer matériellement plusieurs objets f à e.

Cette concordance de taille peut pousser l'élève objectivement à ne faire correspondre qu'un objet f à un objet e. La non concordance de taille entre les objets des deux collections entraîne une difficulté supplémentaire. Il faut que l'élève mémorise s'il a déjà associé un objet e à un objet f.

Pour expliciter cette variable, prenons un exemple : collection E = une boîte d'œufs comprenant 6 alvéoles ; pour la collection F, deux cas se présentent :

- si concordance de taille : la collection F peut-être des œufs en plastique avec une taille parfaitement adaptable à l'alvéole de la boîte d'œufs.

- si non concordance de taille : la collection F peut-être des jetons, des petits œufs, des étiquettes-œufs de telle sorte qu'il est possible de mettre plusieurs objets f dans une alvéole.

▪ *V5. La « fixité » des objets e dans leur espace englobant*

- les objets à énumérer sont fixes
- les objets à énumérer sont mobiles

Une des procédures les plus appropriées pour résoudre le problème est de déplacer les objets déjà énumérés. En fixant les objets au support, cette procédure est bloquée ; les élèves sont amenés à organiser leur énumération. La fixité des objets à énumérer implique que les élèves trouvent une stratégie pour mémoriser les objets déjà énumérés des objets non énumérés.

▪ *V6. La disposition spatiale des objets e à énumérer dans leur espace englobant*

Cette variable est surtout significative lorsque les objets sont fixes.

- une collection sans organisation spatiale a priori de la part de l'enseignante ou « les objets sont disposés de façon aléatoire »
- une collection organisée spatialement par l'enseignante en vue de faciliter l'énumération ou « les objets sont disposés de façon structurée »

Dans le deuxième cas, l'organisation de l'espace propose à l'élève des repères objectifs ; dans le premier cas, l'élève doit se constituer des repères. Une organisation des objets à énumérer facilitent donc l'énumération. Cela permet d'alléger la mémoire et de construire une procédure utilisant l'organisation des objets. L'organisation des objets donne des repères aux élèves. Dans le cas d'une collection organisée spatialement se pose le problème milieu matériel/milieu objectif de l'élève. Ce n'est pas parce qu'on le met dans le milieu matériel, qu'il sera dans le milieu objectif de l'élève (il est possible que l'élève n'identifie pas que l'organisation spatiale choisie pourrait lui faciliter la tâche).

○ *V6'. Le mode d'organisation des objets à énumérer dans leur espace englobant*

Cette variable a un poids particulier lorsque les objets e sont fixes et qu'ils sont disposés de façon structurée dans leur espace englobant.

- linéaire
- lignes-colonnes
- regroupement
- formant une figure (par exemple les bords d'une ligne brisée ou d'une ligne courbe) fermée ou non etc...

Les différents modes d'organisation, s'ils sont reconnus par l'élève comme tel, lui donnent des repères. Une organisation linéaire donne un chemin facile à suivre par l'élève, la seule difficulté est de se souvenir du dernier objet énuméré et du sens de remplissage pour pouvoir énumérer correctement. L'organisation lignes/colonnes demande à l'élève de réfléchir sur comment organiser



l'énumération entre lignes et colonnes : faire toute une ligne puis descendre à la ligne suivante, faire une colonne puis faire la colonne suivante à droite, faire un chemin sous forme de serpentins... Les groupements permettent de donner des repères à l'élève, « je fais ce groupement, puis l'autre ». Après il faut qu'il s'organise au sein du groupement. L'organisation sous forme de figure demande à l'élève de reconnaître cette figure pour pouvoir l'utiliser comme aide lors de l'énumération, si la figure est fermée, il faut choisir un point de départ et le garder en mémoire.

- V7. La « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f
  - permanence maintenue
  - permanence perdue

S'il y a permanence du lien de l'objet e avec l'objet f, les élèves ne sont pas obligés de mettre en place des procédures permettant de différencier les objets e déjà énumérés des objets e restant à énumérer. Il y a une permanence de visibilité de la collection matérialisant l'énumération. A tout moment, l'élève peut voir si l'objet a déjà été énuméré ou non.

S'il n'y a pas permanence du lien de l'objet e avec l'objet f, des procédures plus complexes sont mises en place par les élèves pour permettre de différencier les objets e déjà énumérés des objets e restant à énumérer. Par contre, cette permanence du lien peut-être rétablie par une association objets e - objets f. Dans la situation boîtes-allumettes, ce lien peut-être maintenu par la mise de l'objet f (allumette) sur l'objet e (boîte) ou par l'introduction à moitié de f dans e. Cette manipulation est faite pour l'ensemble de la collection e puis on met l'objet f entièrement dedans. Cette stratégie utilise l'objet f comme élément de marquage. L'énoncé du problème de J. BRIAND (« Vous devez mettre, dans chaque boîte, une allumette et une seule, en la passant par le petit trou ») incite à ôter cette permanence du lien.

- V8. La mise à disposition d'éléments de marquage
  - présence d'outils permettant le marquage (feutres, jetons...) :
    - Les modalités de mise à disposition peuvent être variées :
    - \* mise à disposition sur la table de jeu
    - \* mise à disposition sur demande ou présence dans la classe
  - absence d'outils permettant le marquage

La possibilité de marquage permet de ne pas encombrer la mémoire des élèves et permet donc de faciliter l'énumération. Le marquage donne une permanence visuelle à l'énumération, c'est-à-dire, à tout moment l'élève peut distinguer les objets déjà énumérés des objets restant à énumérer.

- *V9. La « taille » de la collection des objets à énumérer*

Taille étant repris un peu dans le sens que lui donne G. BROUSSEAU lorsqu'il parle de « taille de l'espace ». Pour lui, la « taille » n'est pas une caractéristique d'étendue nécessairement, mais plutôt caractéristique des rapports que l'élève entretient avec l'espace (micro-espace, ...)

Pour nous la « taille » de la collection pourrait être :

- - taille de la collection « mémorisable » : l'élève a la capacité de mémoriser une partie de la collection qui a déjà été énumérée, du reste, sans isoler spatialement ces objets, ou les marquer.
- - taille de la collection « non mémorisable » : l'élève n'a pas la capacité de mémoriser une partie de la collection qui a déjà été énumérée, du reste, sans isoler spatialement ces objets, ou les marquer.

On peut supposer que selon les élèves les limites entre les deux ne sont pas les mêmes.

Cette variable est évidemment liée au cardinal de la collection.

Le nombre d'objets à énumérer joue un rôle important dans la difficulté du problème d'énumération.

Cette analyse a priori nous semble confirmer que la situation d'énumération met en jeu de façon particulière des connaissances spatiales.

### **I.1.b. La variable socio-didactique**

- *V10. Le mode de travail*
  - individuel
  - binôme
  - collectif

La situation peut être faite individuellement, en binôme ou en collectif. Travailler en binôme nécessite de la communication entre les deux élèves et donc de l'explicitation du travail effectué. Expliciter son travail permet aux élèves d'organiser leurs pensées.

Les activités à deux obligent les élèves à expliciter des repères ou des actions, alors que quand l'élève travaille seul, une telle explicitation n'est pas nécessaire. De plus, en binôme les procédures de chacun se contrarient souvent.

- *V10'. Modalité du travail en binôme*
  - consécutif : un élève commence le travail, l'autre le continue
  - simultanée : les deux élèves travaillent ensemble.

La modalité de travail « consécutif » consiste en ce que le premier élève commence à énumérer la collection E, à un certain moment, il s'arrête et un autre élève continue le travail, c'est-à-dire que ce dernier doit énumérer les objets qui n'ont pas encore été énumérés par l'autre élève du binôme. Dans ce contexte, au moment du changement d'élève, les deux élèves ont un temps de communication, soit une communication orale, soit une communication écrite afin de pouvoir se donner des indications sur le travail déjà effectué et à faire.

La modalité de travail « simultanée » oblige les élèves à s'entendre pour mettre en place une procédure commune afin de réussir.

## I.2. Particularités de procédures de résolution de problèmes d'énumération signalées par les chercheurs

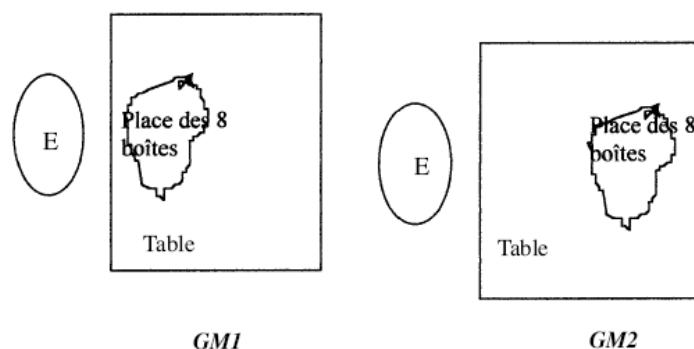
Les particularités de procédures de résolution de problèmes d'énumération présentées ci-après ont été mises en évidence par J. BRIAND dans son article publié dans R.D.M. 19-1 <sup>60</sup>.

### I.2.a. Deux effets d'ergonomie avec pour conséquences : une collection non construite et une énumération induite

#### ◇ Premier effet : effet de la disposition des boîtes à énumérer sur la table

La mise en évidence de ce premier effet est due à l'observation des résultats de deux classes. La différence de résultats (5 échecs sur 6 pour la classe n°1, 6 réussites sur 6 pour la classe n°2) est explicable par une présentation différente de la situation.

Pour la classe n°1 (intitulée GM1), la maîtresse pose les boîtes assez proche des élèves tandis que pour la classe n°2 (intitulée GM2), l'autre maîtresse dispose les boîtes assez loin des élèves.



J. BRIAND explique cet effet :

« Pour mettre une allumette dans chaque boîte, l'élève doit :

1- Se saisir d'une boîte.

<sup>60</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p. 41 à 76.

2- Prendre une allumette (ces deux actions peuvent être permutées).

3- Mettre l'allumette dans la boîte.

4- Poser la boîte remplie

– Recommencer cette séquence.

Dès la deuxième boîte, la réussite impose la constitution, par énumération, de la collection des boîtes remplies.

Dans le cas de GM2, l'action 1 impose un déplacement corporel (tendre la main, se lever un peu de sa chaise). L'action 4 sera réalisée au moindre coût en posant la boîte devant soi.

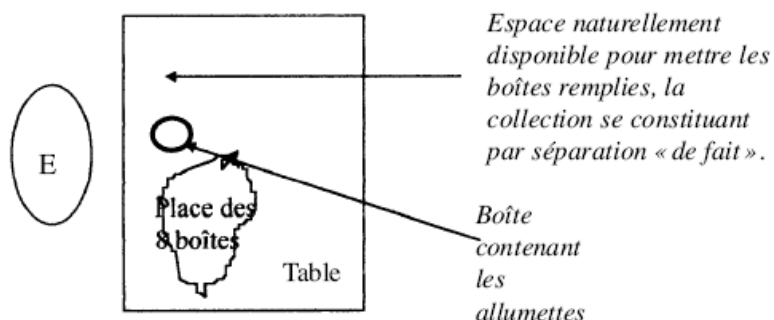
Dans le cas de GM1, l'action 1 n'impose aucun déplacement, l'action 4 doit alors s'accompagner d'un geste volontaire (coûteux) de mise à l'écart, geste qui signifiera une intention de constitution de collection.

Dans le premier cas, pour des raisons ergonomiques élémentaires, l'élève n'a pas (ou peu) en charge l'énumération. La deuxième collection (boîtes-allumettes) peut se construire totalement à son insu. On peut donc faire l'hypothèse que la différence de résultats est largement explicable par cette différence d'organisation. »

#### ◇ Deuxième effet : effet de la place de la boîte contenant les allumettes

Le deuxième effet est lié à la place de la boîte contenant les allumettes.

D'après J. BRIAND, « Une autre contrainte ergonomique a joué comme une variable de la situation : la place de la boîte qui contient les allumettes. Selon la place qu'elle occupait sur la table, elle constituait, ou non, un moyen mis à disposition des élèves pour qu'ils n'aient pas à confondre les boîtes remplies et les boîtes à remplir :



Pour éviter ces deux effets d'énumération induite, il faut disposer les boîtes à énumérer devant les élèves et la boîte contenant les allumettes en bord de table.

### I.2.b. Effet de secouage

Secouer les boîtes : est-ce un détournement de la compétence travaillée?

J. BRIAND fait une étude détaillée de l'effet du secouage dans RDM 19-1<sup>61</sup> :

« A un moment ou à un autre, les enfants secouent pour savoir si il y a une voiture dans la boîte.

- le bruit est un évènement (qui peut avoir un caractère ludique)
- il peut devenir une propriété qui caractérise un nouvel objet : boîte avec allumette
- il peut être un moteur de tri de ces objets afin de constituer une nouvelle collection
- il peut, en interaction avec une organisation spatiale, être une aide au contrôle de l'énumération.

L'élève qui ne se fonde que sur le tri à l'aide du bruit, sans constituer spatialement la nouvelle collection des boîtes remplies, est devant une tâche très couteuse et non totalement fiable que nous analysons ainsi : soit  $E$  tel que  $\text{card}(E) = n$ . Il s'agit pour l'élève de :

1. Prendre un élément de  $E$
2. Construire un nouvel élément (couple (boîte, voiture)), lui attribuer une propriété (bruit) qui caractérise ce nouvel objet. (et constituer un sous ensemble de  $R$  de  $E$ )
3. Prendre un élément de  $C(E, A)$
4. Recommencer 1 jusqu'à ce que  $E$  soit vide.

Mais l'exécution de cette boucle ne peut se faire que si l'élève utilise en permanence le contrôle par le bruit afin de ne pas reprendre un élément de  $R$  et s'il dispose d'une stratégie pour contrôler l'arrêt de la boucle. Or, nous avons constaté que plusieurs élèves qui utilisaient le bruit mais pas à chaque boucle, mettaient deux allumettes dans une boîte. Enfin, pour contrôler l'arrêt, il faut être sûr que toutes les boîtes ont eu une voiture, il faut donc les secouer toutes, mais comment contrôler si TOUTES sont secouées alors que la collection « boîtes-voitures » peut ne pas être la préoccupation de l'élève.

En conclusion, contrairement à une première analyse qui pourrait en être faite, le « secouage » d'une boîte n'est pas suffisant pour réussir. Il ne constitue pas une stratégie permettant totalement l'évitement de l'acquisition du savoir visé (constitution d'une collection par pratique énumérative). Toutefois, par le contrôle même incomplet qu'il permet, il augmente la probabilité de réussir sans avoir de procédure énumérative bien aboutie. »

D'après ces propos rapportés, nous choisissons dans la situation des garages de laisser libre les élèves de secouer leur boîte ou non.

---

<sup>61</sup> BRIAND J. (1999) "Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p63.

### **I.3. Observation sur la dévolution d'un problème d'énumération**

Comment Briand organise-t-il la dévolution du problème ?

Dans la situation de J. BRIAND, le problème donné à l'élève est le suivant :

*« Je vais vous présenter un jeu dans lequel il faudra trouver une méthode pour gagner. Voici un tas de boîtes et des allumettes. Vous devez mettre, dans chaque boîte, **une allumette et une seule**, en la passant par le petit trou. Vous n'avez bien sûr pas le droit d'ouvrir la boîte. Quand vous pensez avoir fini, nous regarderons ensemble si vous avez gagné ou perdu. Pour gagner, il faut une seule allumette dans chaque boîte et aucune boîte de vide. »*

La phrase *« Vous devez mettre, dans chaque boîte, **une allumette et une seule**, en la passant par le petit trou »* incite l'élève à effectuer cette tâche au fur et à mesure qu'il considère les boîtes.

Cette variable d'un côté aide à problématiser l'énumération, à la rendre outil de résolution de problème. En effet, le « lien qui associe allumette et boîte » disparaît avec le placement de l'allumette dans la boîte. L'élève doit en effet se dire : comment puis-je faire, quand j'ai mis l'allumette dans la boîte » pour m'en souvenir ?

Il faut alors un recul important à l'élève pour se dire : « comment puis-je faire pour me faciliter la tâche ? »

Des solutions s'offrent à lui :

- P1 : maintenir le lien explicite (en plaçant l'allumette sur la boîte et en faisant ainsi pour toutes les allumettes ou en rentrant l'allumette à moitié dans la boîte).
- P2 : séparer les objets boîtes contenant une allumette des autres.

En effet, J. BRIAND fait la remarque suivante dans le CD Hatier : *« la stratégie qui semble être la plus économique, d'un point de vue d'adulte consisterait à placer, au préalable une allumette sur chaque boîte, puis, une fois cette action accomplie, à mettre les allumettes en question dans leur boîte. Le contrôle de l'énumération est bien effectué par une organisation du milieu matériel. Mais cette stratégie suppose une mise à distance entre l'intention liée à la réussite et l'action immédiate, mise à distance très peu probable à cet âge. Par ailleurs, la consigne induit l'idée de mettre les allumettes **DANS** les boîtes et non sur les boîtes. »*

Il semblerait donc intéressant dans la situation des garages que lors de la dévolution, la consigne soit moins « stricte » et laisse plus de liberté aux élèves.

## **II. Premiers éléments d'analyse didactique de la situation envisagée**

Nous avons donc souhaité mettre en place une situation a-didactique. Nous décrivons ci-dessous des choix effectués dans la conception de la situation afin d'en assurer le mieux possible ce caractère a-didactique.

## **II.1. Les choix pour la dévolution de la situation a-didactique**

### **II.1.a. Les particularités du contexte**

La mise en place d'un contexte est nécessaire pour des élèves si jeunes. Mais le choix du contexte est lié à différentes raisons propres à une situation d'énumération.

Le contexte doit répondre à différentes contraintes :

- Il doit être porteur, c'est-à-dire qu'il doit contenir de manière implicite l'énumération. En effet, il doit nous permettre d'introduire les contraintes de l'énumération : correspondance terme à terme des éléments et la possibilité de laisser des éléments surnuméraires.
- Il doit être modélisable car nous avons décidé, à la différence de J. BRIAND, de ne pas expliciter oralement les critères.
- Il doit être compris par les élèves et donc socialement ou culturellement connus par ces derniers.

Pour répondre au mieux à ces contraintes, nous avons considéré que la situation « garages-voitures » était appropriée, et cela même si elle ne nous satisfait pas pleinement. La collection à énumérer est la collection de garages et la collection matérialisant l'énumération est la collection de voitures.

Nous pensons que c'est un contexte familier pour l'élève. En effet, les élèves savent qu'on rentre une voiture dans un garage : les élèves habitent dans un village et la majorité d'entre eux ont une maison avec un garage.

Le problème consistera donc à rentrer une voiture dans chaque garage. Les voitures surnuméraires resteront dans un espace intitulé la cour. Le choix de la cour est également social, c'est-à-dire, que dans la vie courante, les voitures qui ne sont pas rentrées dans les garages restent dans la cour, sur le parking. Le contexte et ses contraintes sont aussi fait pour assurer au mieux la correspondance un pour un, sans avoir, comme J. BRIAND, à la déclarer dans l'énoncé du problème (consigne présente dans le paragraphe C.I.3).

Ainsi donc la correspondance un à un et l'énumération devraient apparaître davantage comme « outil implicite » (cf. Douady).

Pour rester dans ce même contexte, la réussite est matérialisée par l'extinction de la lumière par le responsable des garages nommé Marcel. En effet, quand les garages sont tous remplis, Marcel éteint la lumière et peut rentrer chez lui. L'utilisation d'un tiers qui valide ou non le travail permet de ne pas attribuer directement ce rôle à l'enseignant et donc d'accentuer le caractère adidactique de la situation. De plus, la décision de Marcel est avant tout prise par les élèves.

Marcel, playmobil dans la situation de l'année dernière devient Monsieur Patate dans cette nouvelle

situation. La tierce personne validant le travail doit être suffisamment grande pour que les élèves y fassent référence. Ce personnage est, de plus, familier pour la plupart des élèves.

Les éléments en question sont donc importants pour assurer la dévolution et la validation du problème.

### **II.1.b. La « permanence du lien » de l'objet e avec l'objet f : un problème à « vue »**

A la différence de J. BRIAND, nous avons choisi que la première phase<sup>62</sup> serait à « vue », c'est-à-dire qu'il y ait une permanence du lien de l'objet e avec l'objet f. La collection matérialisant l'énumération reste donc visible après avoir énumérer l'autre collection. Pour cela, l'objet e, étant une boîte, nous décidons de la garder ouverte. Ce problème permet aux élèves de s'approprier la situation. Dans ce problème, la situation est simplifiée car l'élève n'a pas besoin de mettre en place une stratégie pour énumérer la collection d'objets, seule la correspondance terme à terme est suffisante. C'est lors de la phase 2 que la permanence du lien sera supprimée pour complexifier le problème.

### **II.1.c. Le dispositif élève**

Le choix du matériel matérialisant la situation est important pour la dévolution du problème et la rétro-action du milieu.

La collection à énumérer est la collection de garages. Un garage est représenté sous forme d'une boîte blanche sur laquelle une gommette a été collée (une gommette de couleur et de forme différente pour chacun des élèves) afin que les élèves ne mélangent pas leur collection de garages.

La collection matérialisant l'énumération est la collection de voitures. Une voiture est une étiquette colorée et plastifiée (la couleur est la même que la gommette) sur laquelle un dessin de voiture a été imprimé. Un premier problème s'est posé : si les étiquettes voitures ont toute la même dimension, comment les élèves vont distinguer plusieurs voitures présentes dans la même boîte? Il a donc été décidé de faire neuf tailles différentes de voitures en jouant sur la largeur et la longueur des voitures. En effet, pour que les élèves prennent rapidement de l'information dans le milieu et se rendent compte de la validité ou non du travail, il faut que le nombre de voitures dans une boîte soit facilement distinguable d'où l'utilisation d'étiquettes colorées et de tailles différentes.

Pour rentrer les voitures quand les boîtes sont fermées, il faut passer les voitures par la fente qui est l'espace situé entre le tiroir et le couvercle. Des élastiques ont été ajoutés autour des boîtes, pour d'une part indiquer à l'élève la non possibilité d'ouverture des boîtes et d'autre part pour éviter

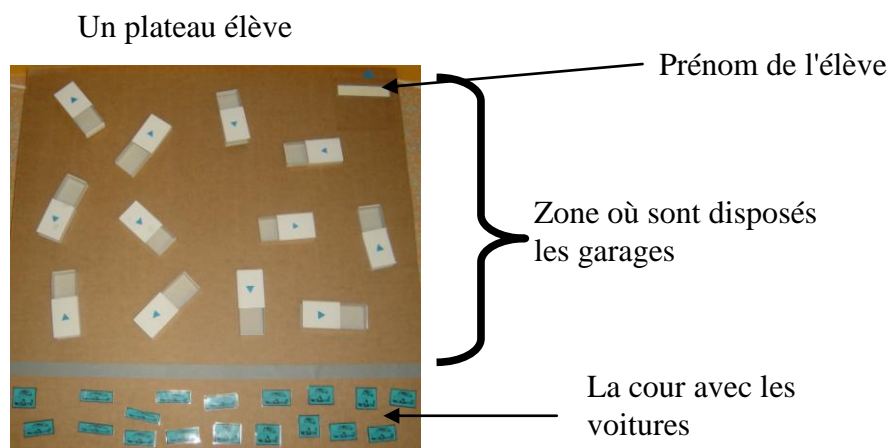
---

<sup>62</sup> Nous appelons phase un groupement de plusieurs séances d'une séquence avec des contraintes semblables. Dans la séquence expérimentée, il y a deux phases. La première phase a comme variable la permanence du lien maintenue. La deuxième phase a la permanence du lien supprimée. Au sein de la phase 2, la taille de la collection va évoluer.



l'ouverture involontaire des boîtes lors de l'introduction d'une voiture.

Un plateau symbolise l'espace de travail. Sur celui-ci est présent le prénom de l'élève ainsi que la gommette qui lui est associée, un scotch gris délimitant deux espaces : l'espace supérieur correspond à l'emplacement où les garages sont mis et l'espace inférieur correspond à la cour, c'est-à-dire l'endroit où stationnent les voitures au démarrage de la situation et où stationnent les voitures surnuméraires en fin de situation. Les voitures sont fixées dans cette cour à l'aide de colle repositionnable.



Marcel est symbolisé par un Monsieur Patate. La lampe est une lampe pince ce qui permet de l'accrocher sur le plateau en mise en commun et lors communication du problème.

#### II.1.d. Le dispositif pour la communication du problème

Lors de la communication du problème, le choix a été fait de ne pas expliciter les critères de réussite et donc de passer la consigne par le mime en utilisant une modélisation proche du réel mais qui ne doit pas être non plus trop éloignée de la modélisation utilisée par les élèves.

La mise en situation s'est faite donc à l'aide d'un « jouet » qui représente un bloc de trois garages. Les voitures d'une dimension adéquate permettent de montrer qu'une seule voiture est capable de rentrer dans un seul garage. En effet, il fallait leur faire comprendre que dans notre situation, à la différence de certains cas de la vie courante, une voiture et une seule pouvait rentrer dans un garage. Pour cela, à l'aide du bloc de garages et de voitures sous forme de jouets, j'ai décidé de mimer la situation avec une mise en mot simple « oui » ou « non » selon que c'était possible ou non de rentrer la voiture dans le garage situé devant la voiture. La voix était doublée d'un geste de la tête. Le mime permet de faire passer la consigne et aussi les critères de réussite sans les expliciter : une voiture dans chaque garage, pas de garage de vide et les voitures supplémentaires restent dans la cour.



Plateau pour la communication du problème

Plus précisément, dans la phase 1, le matériel est présenté (on demande aux élèves ce qu'ils voient) et plusieurs mises en scène sont faites. Un premier exemple est donné aux élèves pour montrer le travail à faire et où à la fin Marcel éteint la lumière pour mettre en place le codage lumineux. Puis un contre-exemple est donné où Marcel n'éteint pas la lumière car un garage est vide. Dans cette séance, les garages sont ouverts et restent ouverts après l'entrée des voitures. Plusieurs simulations sont faites pour que la consigne soit bien comprise : rentrer correctement des voitures dans les garages équivaut à mettre une voiture et une seule dans chaque garage, aucun garage de vide et de laisser les voitures supplémentaires dans la cour. Puis, il est nécessaire de faire le parallèle avec le plateau à disposition des élèves et associer garage à boîte blanche et voiture à dessin de voiture.

La consigne est : « le travail est de rentrer des voitures dans les garages ». Le PE commence le travail sur un plateau, il entre trois voitures et précise bien que lui n'a fait qu'une partie du travail mais que les élèves devront faire le travail entièrement pour que Marcel éteigne la lumière.

La phase 2 commence à nouveau par la modélisation avec les « jouets ». À la différence de la séance précédente, les garages sont fermés au départ et après chaque voiture introduite dans le garage, ce dernier est fermé pour être plus proche de la situation à laquelle seront confrontés les élèves. Deux voitures sont rentrées dans deux garages différents avant de demander l'avis aux élèves et de montrer que Marcel n'éteint pas la lumière. La couleur différente des portes de garages permet d'identifier de quel garage on parle. Puis la dernière voiture est rentrée pour finir le travail. Ensuite, une voiture est présentée devant chaque garage pour expliquer que les voitures supplémentaires restent dans la cour. On demande à nouveau aux élèves leur avis et on montre que maintenant Marcel peut éteindre la lumière. Pour finir, on passe sur le plateau élève. L'enseignant montre la fente par laquelle les voitures seront rentrées et donne l'interdiction d'enlever les élastiques. L'enseignant commence ensuite le travail en mettant une voiture dans une boîte située au centre pour ne pas influencer l'ordre et précise bien que lui n'a fait qu'une partie du travail mais que

les élèves devront faire le travail entièrement pour que Marcel éteigne la lumière.

Au fil des séances, la communication du problème sera de plus en plus rapide puis sans passage par la modélisation avec les « jouets ». Finalement, une histoire sera introduite pour éviter l'épuisement de l'intérêt des élèves.

## **II.2. Caractéristiques des problèmes donnés aux élèves**

Si la séquence prétend comporter des situations a-didactiques d'action au sens de G. BROUSSEAU (1981), elle ne comporte pas de situation de formulation, ni de situation de validation. Par contre, elle contient des phases de validation dont le but est de faire débattre collectivement les élèves sur une solution, tels que les moments de mise en commun à la fin de chaque séance où le groupe prend position par rapport à la production d'un élève en dehors de toute intervention de l'enseignant. Je me limite donc à des situations d'action. Il est à noter que les rétroactions du milieu n'interviennent qu'après l'action, et donc que c'est l'ensemble des séances proposées qui constituent une situation d'action ; le milieu s'enrichit des séances précédentes.

### **II.2.a. Le problème élève**

La situation s'adresse donc à des élèves de l'école maternelle. Après la communication du problème dans le coin regroupement, les élèves rejoignent leur lieu de travail. Chaque élève dispose, par terre, devant lui d'un plateau (grand carton de 50 cm x 60 cm), sur lequel se trouvent des boîtes faisant office de garages et d'une cour délimitée par un scotch gris dans laquelle se trouvent des voitures en papier plastifié (les voitures sont en grand nombre, c'est-à-dire qu'il y a plus de voitures que de garages). Il s'agit de placer une voiture et une seule dans chaque garage sans l'ouvrir, de savoir lorsque l'on a terminé. Lorsque les élèves estiment qu'ils ont terminé, ils se regroupent dans le coin prévu à cet effet et assistent à l'ouverture des garages par l'élève ou l'enseignant selon l'âge de l'élève. S'il y a une seule voiture dans chaque garage et qu'aucun garage n'est vide alors l'élève a réussi. La réussite est matérialisée par l'action d'éteindre la lumière par Marcel, le responsable des garages.

La consigne donnée aux élèves est la suivante : « *Le travail est de rentrer des voitures dans les garages* ». L'utilisation de l'article indéfini « des » est très important, car cela signifie qu'il ne faut pas rentrer forcément toutes les voitures dans les garages et que nous avons le droit d'en laisser dans la cour. Les critères de réussite ne sont pas explicités oralement mais mimés.

Ce choix de consigne est lié à ce dit C.I.3.

### **II.2.b. Contraintes et variables didactiques de la situation**

Pour la situation des garages, nous avons fait le choix des contraintes didactiques suivantes :

- V1. La nature des objets matériels : espace sensible usuel
- V2. La taille de l'espace englobant les collections : micro-espace, voire méso-espace
- V3. La « position relative » de l'élève vis à vis du référentiel / du support : position fixe pour les GS ; position semi libre pour les PS-MS (élèves pouvant se déplacer à droite et à gauche du support)
- V4. La « taille relative » de l'objet f vis-à-vis de l'objet e : non concordance de taille
- V5. La « fixité » des objets e dans leur espace englobant : mobilité des objets à énumérer
- V6. La disposition spatiale des objets e à énumérer dans leur espace englobant : collection sans organisation spatiale à priori de la part de l'enseignant
- V8. La mise à disposition d'éléments de marquage : absence d'éléments de marquage
- V10. Le mode de travail : individuel

Nous avons donc décidé de jouer sur les variables :

- V7 : la « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f
- V9 : la « taille » de la collection des objets à énumérer

Suite au débat qu'a animé le jury l'année dernière lors de la soutenance du mémoire professionnel au sujet objets mobiles/objets fixes, et compte tenu de l'hypothèse émise selon laquelle la mobilité des objets rendraient l'énumération plus facile, il a été décidé cette année de mettre en œuvre une situation analogue à celle de l'année précédente avec pour différence majeure objets mobiles au lieu d'objets fixes. Nous mettons donc en place une situation ressemblante aux travaux de J. BRIAND.

D'où l'important changement entre les deux expérimentations se trouve au sujet de la variable V5. Lors de l'expérimentation du mémoire professionnel, les objets e étaient fixés et l'expérimentation portait essentiellement sur le mode d'organisation des objets e. Nous nous sommes rendus compte qu'une organisation préalable des objets e n'aidaient pas forcément les élèves car cette organisation n'était pas visible par ces derniers. Lors du passage à la mobilité, la contrainte fixité avait été trop présente et peu d'élèves utilisaient cette mobilité.

Pour le mémoire recherche, nous avons donc décidé de laisser mobiles les objets e et de laisser les élèves s'organiser librement. Les élèves, dans cette configuration, vont pouvoir déplacer les objets e pour faciliter l'énumération.

Après une première phase où les boîtes sont ouvertes (d'où permanence du lien de l'objet e avec l'objet f), une série de problèmes est proposée avec pour contraintes : boîtes fermées (perte de la permanence du lien de l'objet e avec l'objet f) et mobiles disposées de façon inorganisée.

Les problèmes se complexifient ensuite par augmentation du nombre d'objets à énumérer : 6 puis 8 puis 15 afin de passer d'une taille de collection mémorisable à une taille de collection non mémorisable.

### **II.2.c. Connaissances et savoirs en jeu dans le problème**

- Objectifs du professeur : amener les élèves à concevoir une collection et à exercer un contrôle sur son élaboration par une énumération, favoriser le développement des stratégies d'énumération en faisant varier le nombre d'objets à énumérer.

- Objectifs pour les élèves : développer des stratégies d'énumération.

Pour cela, l'élève doit mettre en œuvre des connaissances spatiales :

- invention d'un itinéraire

- réorganisation spatiale des objets

- \* pour séparer les objets énumérés des objets non énumérés

- \* pour structurer l'ensemble et énumérer plus facilement.

- Savoirs en jeu : concevoir une collection, énumérer une collection. Ces savoirs sont nécessaires pour la construction des premiers nombres.

- Analyse : Dans cette situation, les élèves doivent s'organiser afin de ne pas glisser une voiture dans une boîte qui aurait été déjà remplie. Cela suppose que l'élève ait pris en charge le contrôle et l'inventaire de 3 collections : celle initiale des boîtes puis celle des boîtes déjà remplies et celle des boîtes à remplir. Organiser son travail n'est donc pas qu'un savoir-faire, mais est constitutif d'un apprentissage des concepts de collection et de leur énumération.

### **II.2.d. Les stratégies/procédures attendues**

Les procédures possibles quand les boîtes sont fermées et mobiles peuvent être les suivantes :

- ✓ P1 : Remplissage aléatoire des boîtes sans mémorisation des places occupées.

Il est peu probable qu'un élève qui utilise cette procédure réussisse et il est vraisemblable qu'il n'a pas compris le travail demandé. L'élève met les voitures dans les boîtes de façon désorganisée, il met parfois plusieurs voitures dans une même boîte et/ou oublie de remplir certaines boîtes. L'élève, dans ce cas, a parfois tendance à mettre toutes les voitures dans les boîtes et en laisser aucune dans la cour.

- ✓ P2 : Remplissage aléatoire des boîtes avec mémorisation des places occupées.

L'élève ne repère pas a priori un chemin au sein des boîtes, il n'utilise pas une organisation des boîtes mais mémorise les boîtes remplies. Cette procédure est de moins en moins efficace si le nombre de boîtes à énumérer augmente.

- ✓ P3 : Repérage visuel d'un cheminement possible permettant de passer en revue toutes les boîtes.

L'élève s'imagine un trajet, par exemple il commence en haut à gauche puis va vers la droite puis descend d'une ligne. Le chemin imaginé par l'élève est visible par un observateur, il effectue l'ensemble du chemin ou une partie de celui-ci à chaque fois qu'il prend une nouvelle voiture. L'élève peut accentuer le chemin par la diction de « oui » ou « non » face aux garages qu'il rencontre.

- ✓ P4 : Séparation des boîtes remplies des boîtes non remplies (correspondance terme à terme non apparente) :
  - o P4a : groupement **désorganisé sur** le plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
  - o P4b : groupement **désorganisé en dehors** du plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
  - o P4c : groupement **organisé sur** le plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
  - o P4d : groupement **organisé en dehors** du plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
  - o P4i : mise à l'écart des boîtes déjà remplies de façon involontaire par économie d'énergie (Cette procédure est en lien avec ce qui est dit p. 67 sur l'effet de la disposition des objets à énumérer sur le support.)

- ✓ P5 : Correspondance terme à terme objets à énumérer et objets matérialisant l'énumération : Association voiture-boîte

L'élève associe une voiture à une boîte (pose une voiture sur la boîte ou entre la voiture à moitié). Quand la correspondance est effective pour tous les objets à énumérer, il met les voitures dans chaque boîte. L'élève a un contrôle permanent de son travail, cette procédure est donc plus efficace que la procédure P4.

- ✓ P6 : Organisation préalable des boîtes

Cette procédure nécessite de la part de l'élève une anticipation du problème.

Procédure complémentaire (c'est-à-dire pouvant s'associer avec les procédures précédemment présentées)

- ✓ P' : Secouage des boîtes pour repérer la présence d'une voiture grâce au bruit (procédure qui peut apparaître comme un détournement de la compétence d'énumération mais qui s'avère trop coûteuse et peu fiable si on ne met pas les boîtes de côté une fois secouées).

## **D- Eléments complémentaires**

### **I. Eléments méthodologiques pour le mémoire**

#### **I.1. Quelles données pour satisfaire aux hypothèses ?**

Pour vérifier la première hypothèse qui est en lien avec l'incidence des variables sur le taux de réussite, nous relèverons dans un tableau la réussite ou non aux problèmes de chaque élève. Par la suite, nous analyserons le tableau résultat en effectuant des statistiques pour chaque séance et pour chaque élève ce qui nous permettra de mettre en évidence les variations du taux de réussite au regard de l'évolution des variables pour chaque niveau de classe et à chaque séance.

Pour contrôler la deuxième hypothèse qui est en lien avec l'incidence des variables sur les procédures, nous relèverons les procédures utilisées par chaque élève et pour chaque séance. Pour cela, nous étudierons minutieusement les gestes de chaque élève au cours de chaque problème afin de déterminer la procédure mise en œuvre. L'étude des procédures au cours des séances pour chaque élève nous permettra de voir l'évolution des élèves dans la résolution du problème au cours de la séquence et l'évolution des procédures en fonction des modifications des valeurs des variables.

#### **I.2. Comment recueillir les données ?**

Pour recueillir les données, j'ai fait le choix d'utiliser un caméscope afin de filmer l'ensemble des séances et dans leur intégralité (les 3 groupes). Ceci me permettra de voir les gestes des élèves lors de la phase d'action et donc d'en déduire leurs procédures. Des photos ont été également prises, au début et à la fin de la phase d'action, pour mettre en évidence l'organisation spatiale des boîtes et observer les modifications apportées au cours du travail.

Par rapport à l'année précédente, nous avons pu recueillir les données pour chaque élève et pour chaque séance grâce à une disposition adéquate du caméscope par rapport aux élèves.

#### **I.3. Où recueillir les données ?**

L'expérimentation est menée dans une classe triple niveau (petite, moyenne et grande sections de maternelle) de l'école maternelle du quartier de Bonlieu de Chateauneuf sur Isère (village situé aux alentours de Valence). La classe possède un effectif de 21 élèves. Sur ce nombre, 7 élèves étaient de petite section, 8 élèves de moyenne section et 6 élèves de grande section. L'expérimentation s'est déroulée tous les lundis de mi novembre à début février avec une interruption de 2 semaines fin décembre pour les vacances de Noël et une interruption de 3 semaines en janvier pour cause de stage.

Pour cette expérimentation, la classe a été partagée en trois groupes selon les niveaux de classe. La situation mathématique se faisait par groupe de niveau de classe, les deux autres groupes travaillant soit en autonomie, soit avec l'A.T.S.E.M., puis nous faisons tourner les groupes. Les trois groupes faisaient donc une séance chaque lundi. Le travail se faisait individuellement et avait lieu dans le dortoir qui communiquait avec la classe pour les élèves de petite et moyenne sections. Pour les élèves de grande section, la situation se faisait en début d'après midi dans la classe pendant que les élèves de petite et moyenne sections faisaient la sieste.

## **II. Eléments didactiques complémentaires de la situation**

### **II.1. Structure d'une séance**

Chaque séance est composée de 4 temps :

- \* Étape 1 : Communication du problème
- \* Étape 2 : Mise en place des élèves
- \* Étape 3 : Recherche individuelle – phase d'action
- \* Étape 4 : Bilan collectif final

- **Communication du problème**

La communication du problème se fait dans le coin regroupement.

Les élèves sont disposés sur des bancs autour de l'enseignante.

- **Mise en place des élèves et recherche individuelle**

Après cette étape de mise en place du contexte et du problème, les élèves sont disposés dos à leur plateau afin de ne pas être tentés de jouer avec les voitures et pour entendre une dernière fois la consigne.

Puis au signal, ils se retournent et commencent à travailler individuellement.

Pour les élèves de petite et de moyenne sections, les plateaux sont disposés par terre en ligne. Il y a deux lignes l'une en face de l'autre séparées par des lits mis à la verticale.

Pour les élèves de grande section, les plateaux sont disposés sur des tables. Devant ses tables, sont présentes deux chaises, une face au travail et une dos au travail (chaise d'attente). Il y a deux lignes de tables l'une en face de l'autre séparées par des lits mis à la verticale.





Disposition des tables des élèves de petite  
et moyenne sections



Disposition des tables des élèves de  
grande section

Lors de la phase d'action, les élèves n'ont pas le droit de se déplacer (sauf autour de leur plateau), ni de communiquer avec les autres élèves.

Lorsque les élèves estiment qu'ils ont fini le travail, ils s'assoient dans la même position qu'au début, c'est-à-dire dos au plateau et attendent que tous les élèves aient fini le travail pour rejoindre le coin regroupement.

- **Bilan collectif**

Pour finir, les élèves retournent au coin regroupement et une phase de validation commence pour permettre de vérifier le travail de chacun. Pour diminuer l'intervention de l'enseignant dans la validation, les voitures ont des dimensions différentes permettant aux élèves de distinguer seuls et sans toucher les voitures le nombre de voitures présents dans chaque boîte. Les élèves ont le droit de se lever (un seul à la fois) pour appuyer leur discours avec le plateau et des gestes.

Pour les élèves de petite et de moyenne sections, le choix a été fait que lors de la mise en commun aucune explication des procédures ne serait faite du fait de l'âge des élèves et du peu de langage disponible ou de compétences pour communiquer. En effet, il leur est difficile à cet âge de pouvoir expliciter leur procédure.

Par contre, pour les élèves de grande section, lors de certaines mises en commun, les élèves expliquent leur stratégie avec l'aide du matériel. Il est possible de faire à nouveau le travail devant les autres élèves pour appuyer leurs paroles.

Lors de cette étape, le choix a été fait de symboliser la réussite ou non au problème à l'aide d'une lampe manipulée par Monsieur Patate nommé Marcel qui a la fonction de responsable des garages.

Lors du travail, la lampe est allumée. Marcel, à l'issue du travail, éteint la lumière pour signaler aux élèves que des voitures ont été correctement rentrées dans les garages ou laisse la lumière pour signaler que le travail n'a pas été fait correctement. A partir de la deuxième séance, un tableau résultat a été introduit.

Sur le tableau des résultats,

- un trait noir est porté en cas de non réussite au jeu
- une gommette est collée en cas de réussite au jeu
- les lettres « Abs » sont portées en cas d'absence.

The table is titled "Une voiture dans chaque garage" and is organized into three sections based on initials: G, M, and P. Each section has columns for sessions 52, 53, 54, and 55. The rows list students' names. Symbols used include colored dots (orange, blue, red) and the word "Abs" (Absence). A horizontal line is drawn between the G and M sections, and another between the M and P sections.

	52	53	54	55
<b>G</b>				
JUSTINE	✓	✓	✓	✓
MARION	✓	✓	✓	✓
MARIE	✓	Abs	Abs	✓
LOLA	✓	✓	✓	✓
THIBAUT	✓	✓	Abs	✓
VALENTIN	✓	✓	✓	✓
<b>M</b>				
ELARA	✓	✓	✓	✓
HELENE	✓	✓	✓	✓
LAURINE	Abs	✓	✓	✓
LOUISE	✓	✓	✓	✓
MICHÈLE	✓	Abs	✓	✓
ALEX	✓	Abs	Abs	✓
SOPHIE	✓	✓	✓	✓
SIMON	✓	✓	✓	✓
<b>P</b>				
AMÉLIE	✓	✓	✓	✓
ANASTASIE	✓	✓	✓	✓
FLAVIO	✓	✓	✓	✓
ISAGUILH	✓	✓	✓	✓
JULIES	✓	✓	✓	✓
LOUIS	✓	✓	✓	✓
TOM	✓	✓	✓	✓

Une séparation spatiale des plateaux dont le travail est réussi ou non réussi après la validation est également effectuée.

Durant cette étape, les élèves sont regroupés autour du plateau élève à étudier. Le plateau, étant incliné légèrement, permet à tous les élèves de voir le contenu des boîtes.

Les changements de lieu (coin regroupement et coin travail) permettent de faire comprendre aux élèves les différentes étapes de la séance et donc de marquer une rupture spatiale. A un moment, on écoute en collectif le problème posé par le professeur puis on résout individuellement le problème avant de vérifier en collectif le travail de chaque élève.

## II.2. Structure de la séquence

La séquence comporte 8 séances et 2 phases.

Voici ci après le tableau résumant les phases (tableau présent en annexe page 24 avec les prolongements possibles)

	<b>Configuration du matériel</b>	<b>Remarques</b>	<b>Raison du choix</b>	<b>Variables modifiées au cours de la phase</b>
<b>Phase 1</b>	Boîtes ouvertes et mobiles => Problème à vue	L'élève peut vérifier à tout moment l'état de l'énumération.	Les élèves s'approprient la situation et le travail demandé.	
<b>Phase 2</b>	Boîtes fermées et mobiles => Problème d'énumération pur	L'élève peut déplacer les boîtes comme il le veut.	L'élève doit trouver une stratégie pour se rappeler les boîtes déjà énumérées des boîtes restant à énumérer.	- le nombre de boîtes à énumérer

La séquence, séance par séance, est résumée par le tableau ci-après. (tableau présent en annexe page 25 avec des photographies des plateaux)

	<b>PS</b>	<b>MS</b>	<b>GS</b>
Séance n°1 le 16/11/2009	Phase n°1 : 12 boîtes ouvertes et mobiles (18 voitures)	Phase n°1 : 12 boîtes ouvertes et mobiles (18 voitures)	Phase n°1 : 12 boîtes ouvertes et mobiles (18 voitures)
Séance n°2 le 23/11/2009	Phase n°1 : 10 boîtes ouvertes et mobiles (15 voitures)	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (9 voitures)	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (9 voitures)
Séance n°3 le 30/11/09	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (8 voitures)	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (8 voitures)	Phase n°2 : 8 boîtes fermées et mobiles (10 voitures)
Séance n°4 le 07/12/09	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (10 voitures)	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (10 voitures)	Phase n°2 : 8 boîtes fermées et mobiles (11 voitures)
Séance n°5 le 14/12/09	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (11 voitures)	Phase n°2 : 8 boîtes fermées et mobiles (11 voitures)	Phase n°2 : 15 boîtes fermées et mobiles (18 voitures)
Séance n°6 le 04/01/10	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (12 voitures)	Phase n°2 : 8 boîtes fermées et mobiles (12 voitures)	Phase n°2 : 15 boîtes fermées et mobiles (17 voitures)
Séance n°7 le 01/02/10	Phase n°2 : 6 boîtes fermées et mobiles (9 voitures)	Phase n°2 : 15 boîtes fermées et mobiles (16 voitures)	Phase n°2 : 15 boîtes fermées et mobiles (16 voitures)
Séance n°8 le 08/02/10	Phase n°2 : 8 boîtes fermées et mobiles (11 voitures)	Phase n°2 : 15 boîtes fermées et mobiles (17 voitures)	Phase n°2 : 15 boîtes fermées et mobiles (17 voitures)

## **II.3. Description de caractéristiques de phases**

### **II.3.a. Phase 1 : phase d'appropriation**

La première phase est une phase importante. Suivant l'âge des élèves et les résultats observés, cette phase peut durer une ou deux séances. Lors de cette phase, les boîtes sont ouvertes,

mobiles et désorganisées.

Les principaux objectifs de cette phase sont :

- se familiariser avec le contexte
- prendre conscience du but (mettre une voiture dans chaque garage)
- vérifier si le but est atteint et s'il ne l'est pas prendre conscience de l'écart au but.

L'appropriation du problème se fait par l'utilisation d'un « jouet » (bloc de 3 garages). Le PE explique la situation en donnant un exemple et un contre exemple.

Plus précisément, la mise en scène est la suivante pour l'exemple :

Les garages sont ouverts.

Le PE (professeur des écoles) fait rouler une première voiture qui entre dans un premier garage et dit « oui » doublé du geste de la tête.

Il prend une deuxième voiture et essaie de la faire rentrer dans le premier garage, c'est impossible, il dit « non » doublé du geste de la tête et il la rentre dans le deuxième garage.

Il prend une troisième voiture et essaie de la faire rentrer dans le premier garage, c'est impossible, il dit « non » doublé du geste de la tête. Il essaie de la faire rentrer dans le deuxième garage, c'est impossible, il dit « non » doublé du geste de la tête et il la rentre dans le troisième garage.

Puis il prend la quatrième voiture et essaie de la faire rentrer successivement dans les trois garages, le PE dit « non » doublé du geste de la tête à chaque fois. Il replace donc la voiture dans la cour.

Il fait de même avec la cinquième voiture.

Finalement, le responsable des garages Marcel éteint la lumière.

La mise en scène, pour le contre exemple, est la suivante :

Le PE prend une première voiture, l'entre dans le garage de droite et dit « oui » doublé du geste de la tête.

Il prend une deuxième voiture et essaie de la faire rentrer dans le garage de droite, c'est impossible, il dit « non » doublé du geste de la tête et il la rentre dans le garage de gauche.

Le PE demande alors aux élèves si Marcel peut éteindre la lumière.

Après discussion, Marcel n'éteint pas la lumière car un garage est vide, le PE rentre une troisième voiture dans le garage du milieu et Marcel éteint la lumière.

Après, le PE passe au plateau qu'auront les élèves afin qu'ils transposent la situation. Ce plateau est décrit par les élèves et ils font coïncider les éléments similaires (voiture en plastique = voiture papier, garage = boîte). La consigne est ensuite donnée et le PE commence le travail pour trois boîtes.

Les élèves sont ensuite disposés dos à leur plateau et commence le travail.

Quand tous les élèves ont terminé, une mise en commun a lieu.

### **II.3.b. Phase 2 : séances avec boîtes mobiles et désorganisées**

Les séances de la phase 2 sont semblables. Les garages sont maintenant fermés sur le plateau.

Ceux qui diffèrent entre ces séances sont

- le nombre de boîtes et de voitures

- l'organisation spatiale des boîtes mais toujours désorganisée
- l'entrée dans la situation.

◇ Nombre de boîtes et de voitures

Le nombre de boîtes varient entre 6, 8 et 15.

Le nombre de voitures oscillent mais il est toujours supérieur au nombre de boîtes.

◇ Organisation spatiale des boîtes

Pour chacune des séances, les boîtes sont désorganisées sur l'ensemble du plateau. Il n'y a pas de structuration des boites. Nous avons fait ce choix du fait que les boites sont mobiles.

◇ Entrée dans la situation

Les premières séances ont une entrée dans l'activité semblable à la phase 1, seulement plus rapide : on continue à modéliser grâce au bloc de trois garages.

Pour les séances 7 et 8, l'entrée se fait par l'observation de photographies de Monsieur Patate.

A la séance 7, les copains de Monsieur Patate sont allés se promener, ils rentrent très tard à leur maison et ils sont trop fatigués pour rentrer leurs voitures et c'est donc aux élèves d'aider Marcel à rentrer des voitures dans les garages.

A la séance 8, ils sont allés au zoo et de même ils rentrent tard et fatigués, il faut donc aider Marcel à entrer des voitures dans les garages.

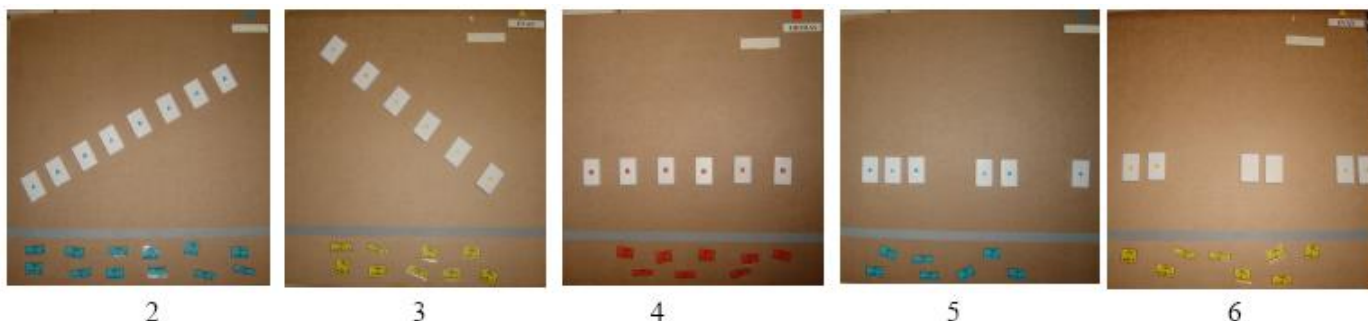
Ce changement d'entrée permet aux élèves de ne pas se lasser de la situation.

### III. Rappel des conclusions obtenues dans le mémoire professionnel

Dans le tableau ci-dessous est résumée la séquence expérimentée dans le mémoire professionnel au cours de l'année 2009/2010. Cette séquence comporte 8 séances. 22 élèves de petite section de l'école maternelle de Malissard ont participé à cette expérimentation.

	Séance n°	Configuration matérielle des garages	Nombre de garages	Nombre de voitures
<b>Phase n°1 : boîtes ouvertes, fixes et désorganisées</b>	<b>1</b>	Garages ouverts, fixes et désorganisés	12	18
<b>Phase n°2 : boîtes fermées, fixes et organisées</b>	<b>2</b>	Garages fermés, fixes et organisés organisation linéaire en diagonale montante	8	12
	<b>3</b>	Garages fermés, fixes et organisés organisation linéaire en diagonale descendante	6	9

	<b>4</b>	Garages fermés, fixés et organisés organisation linéaire en ligne horizontale	6	8
	<b>5</b>	Garages fermés, fixés et organisés organisation linéaire en ligne horizontale avec regroupement en 3 – 2 - 1	6	7
	<b>6</b>	Garages fermés, fixés et organisés organisation linéaire en ligne horizontale avec regroupement en 2 – 2 - 2	6	8
<b>Phase n°3 : boîtes fermées, mobiles et désorganisées</b>	<b>7</b>	Garages fermés, mobiles et désorganisés	6	8
	<b>8</b>	Garages fermés, mobiles et désorganisés	6	8



Organisation des boîtes sur le plateau pour les différentes séances

Lors de cette expérimentation, nous avons fait le choix de jouer sur les variables :

- V7 : la « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f
- V5 : la « fixité » des objets e dans leur espace englobant
- V6 : la disposition spatiale des objets e à énumérer dans leur espace englobant : objets e organisés spatialement dans le cas de la fixité des boîtes et désorganisés dans le cas de la mobilité des boîtes.
- V6' : le mode d'organisation des boîtes à énumérer dans leur espace englobant : variable sur laquelle nous avons joué en cas de fixité des boîtes : linéaire, par regroupement
- V9 : « taille » de la collection à énumérer : finalement, nous avons peu joué sur cette variable du fait de la difficulté pour les élèves de résoudre le problème.

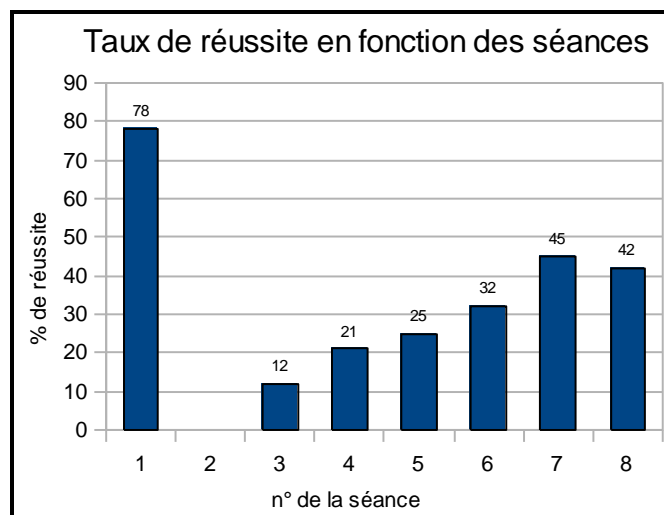
Les autres variables deviennent donc des contraintes :

- V1. La nature des objets matériels : espace sensible usuel
- V2. La taille de l'espace englobant les collections : micro-espace, voire méso-espace
- V3. La « position relative » de l'élève vis à vis du référentiel / du support : position semi libre
- V4. La « taille relative » de l'objet f vis-à-vis de l'objet e : non concordance de taille

- V8. La mise à disposition d'éléments de marquage : absence d'éléments de marquage
- V10. Le mode de travail : individuel

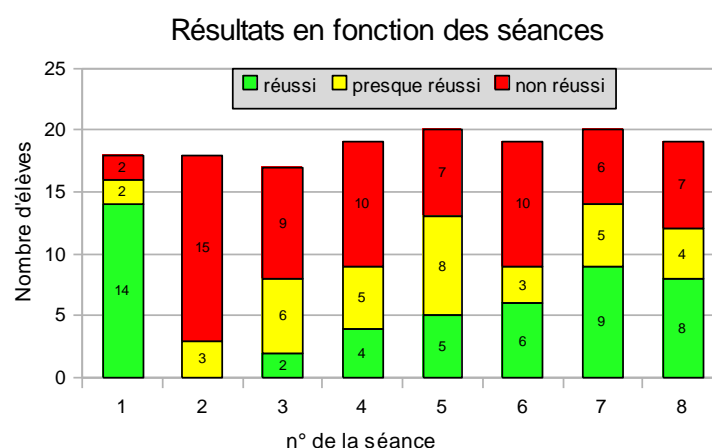
Regardons rapidement les résultats obtenus lors de cette expérimentation.

- Tout d'abord, analysons les réussites des élèves au cours des séances



On observe un taux de réussite important lors de la séance d'appropriation qui est une séance « à vue », c'est-à-dire boîtes ouvertes, puis une chute des réussites lors de la séance 2 ce qui est normal du fait du saut informationnel. Les élèves, à partir de cette séance, doivent mettre en place des stratégies pour garder en mémoire les éléments de la collection déjà énumérés et les éléments de la collection à énumérer. Puis, des séances 2 à 8, on observe une augmentation régulière des réussites.

- Analysons plus en profondeur et détaillons les non réussites.



Parmi les élèves qui n'ont pas réussi, on extrait ceux qui ont presque réussi et qui ont fait une seule erreur. Ce sont les élèves qui ont comme erreur :

- soit oublié d'une boîte – l'élève a sauté une boîte

- soit deux voitures dans une boîte - l'élève a oublié qu'il avait déjà mis une voiture et en remet une autre

- soit un oubli dans une boîte et deux dans une autre – l'élève met deux fois dans la même boîte et croit qu'il a bien mis dans la boîte et dans l'autre boîte qu'il a finalement oublié.

La séance 6 montre un léger recul. En effet, lors de cette séance, pour le deuxième groupe, j'étais absente lors de la phase d'action, ce qui je pensais ne poserait pas de problème puisqu'étant dans une situation adidactique. Or les élèves, n'étant pas sous les yeux de l'enseignant, se sont moins appliqués dans le travail.

La séance 8 montre également des résultats plus faibles, ce qui peut être expliqué par les 4 semaines d'écart entre la séance 7 et 8.

Nous observons, cependant, des taux de réussite ne dépassant les 50% dès la fermeture des boîtes.

La problématique de ce précédent mémoire s'articulait autour des difficultés auxquelles les élèves et le maître peuvent être confrontés dans une situation d'apprentissage de l'énumération à l'école maternelle et s'il est possible de les réduire.

Nous avons fait les hypothèses que les difficultés se situaient à deux niveaux :

- à travers le processus de dévolution d'une part, et plus précisément au niveau de l'acquisition de la correspondance bi-univoque ;

- à propos de la résolution du problème et la mise en place de procédures de résolution d'autre part.

Les choix faits par l'enseignant pour diminuer la première difficulté ont été concluants. Les élèves, grâce principalement à un contexte fort et à une séance à « vue », ont compris la correspondance bi-univoque. Par contre, diminuer les difficultés liées à la résolution même du problème a été plus difficile. Le choix fait sur les dispositions spatiales des collections n'est pas si évident ; ne semble pas forcément aider les élèves à déterminer un cheminement évident... C'est en partie ce qui a justifié le choix de la présente problématique.

Pour résumé, même si la dévolution est effective (et en particulier la correspondance bi-univoque) grâce à certains choix du maître, un problème d'énumération, contrairement à ce que beaucoup semblent penser, n'est pas si évident que ça et sûrement pas limité à la maîtrise de la correspondance bi-univoque, comme on peut s'en rendre compte dès la fermeture des boîtes et nécessite le contrôle de plusieurs tâches en simultanée! Donc il est utile, voire même très utile, de proposer de telles situations dès la petite section mais au cours de la maternelle en générale.



## **E- Effets de variables didactiques sur la résolution de problèmes**

Nous allons maintenant revenir à l'expérimentation conduite en 2009/2010 afin d'étudier les effets de variables didactiques sur la résolution de problèmes et plus précisément les effets de la variable « permanence possible du lien de l'objet e avec l'objet f » et la variable « taille de la collection des objets à énumérer ». Nous allons regarder les effets sur les résultats et les procédures.

### **I. Effets sur les résultats**

Pour pouvoir étudier finement les résultats, pour chaque niveau, un tableau a été réalisé exprimant la réussite (R) ou l'échec (E) pour chaque élève et pour chaque séance. Ce tableau est un extrait du tableau récapitulatif la réussite ou non de l'ensemble des élèves pour chaque séance disponible en annexe (page 28).

Dans ce tableau, les pourcentages de réussite et d'absentéisme pour chaque séance et pour chaque élève ont été effectués. Les pourcentages sont à considérer avec prudence, ils ne sont pas forcément significatifs car le nombre d'élèves par niveau est faible et une absence entraîne des modifications des taux. Nous nous sommes ramenés à des pourcentages pour la commodité de lecture mais sont présents dans une colonne les résultats sans pourcentage.

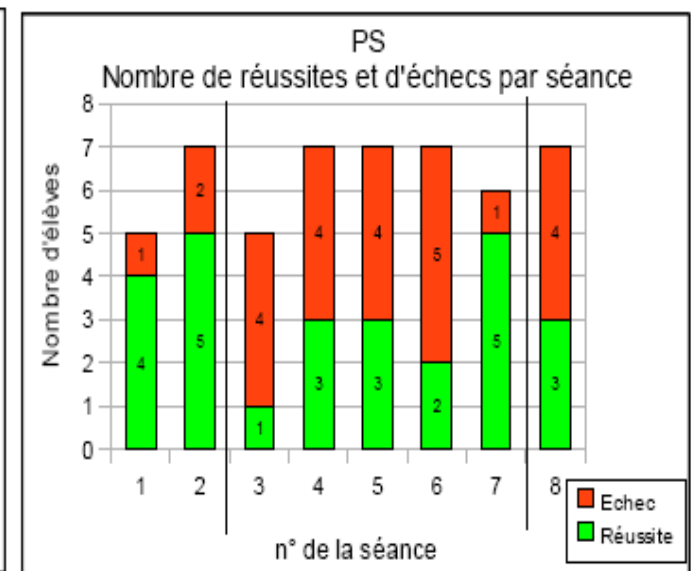
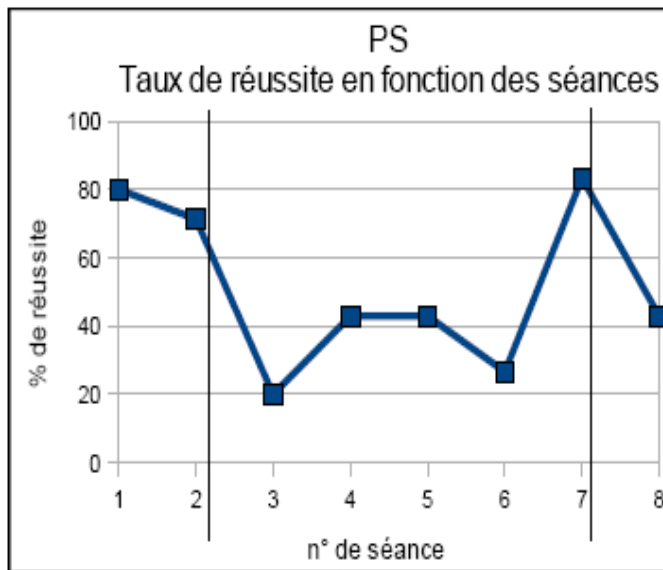
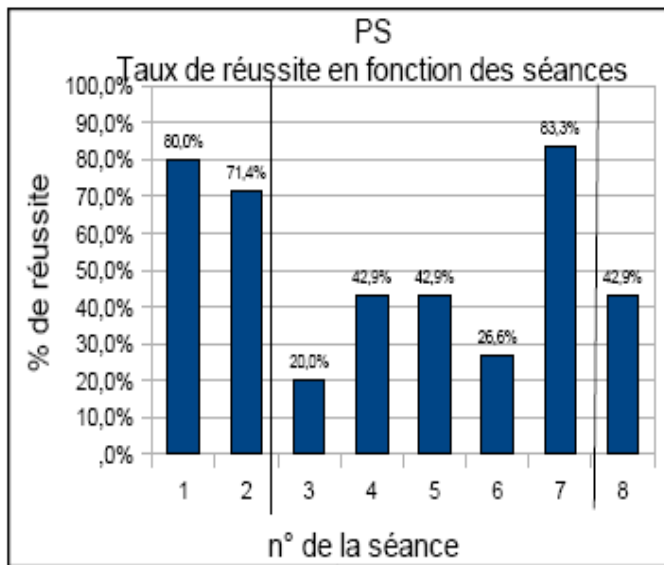
Ces résultats sont ensuite représentés sous forme de trois graphiques permettant une meilleure vue d'ensemble : un graphique en bâtons exprimant le taux de réussite en pourcentage en fonction des séances, le même graphique en courbe et le dernier donnant le taux de réussite en nombre d'élèves en fonction des séances.

Nous allons constater que le taux de réussite est très variable selon les séances et donc dépend des valeurs des variables.

### I.1. Résultats mitigés pour les élèves de petite section

		Séance n°1	Séance n°2	Séance n°3	Séance n°4	Séance n°5	Séance n°6	Séance n°7	Séance n°8		% réussite	% d'absentéisme	
P S	Tom	R	R	E	E	E	E	R ↔ R		4/8	50%	0%	
	Joaquim	R	R	E	R	R	E	R ↔ R		6/8	75%	0%	
	Alexandre	R	R	Abs	E	E	E	R ↔ E		3/7	43%	12,5%	
	Louis	R	R	Abs	R	R	E	R ↔ E		5/7	71%	12,5%	
	Flavio	E	E	E	E	E	R	E	E		1/8	12,5%	0%
	Ambrosine	Abs	E	R	E	R	E	R ↔ R		4/7	57%	12,5%	
	Jules	Abs	R	E	R	E	R	Abs	E		3/6	50%	25%
Réussite	4	5	1	3	3	2	5	3					
Échec	1	2	4	4	4	5	1	4					
Activité	5	7	5	7	7	7	6	7					
Absents	2	0	2	0	0	0	1	0					
		4/5	5/7	1/5	3/7	3/7	2/7	5/6	3/7				
% réussite		80%	71,4%	20%	42,9%	42,9%	26,6%	83,3%	42,9%		51,2%		
% d'absentéisme		29%	0%	29%	0%	0%	0%	14%	0%			9%	





Changement de variables (symbolisé dans le tableau par  et sur les graphiques par une ligne verticale) :


- entre les séances 2 et 3 : passage de permanence du lien à absence de lien entre les deux collections : fermeture des boîtes
- entre les séances 7 et 8 : passage de 6 à 8 boîtes.



Autres informations :

- entre les séances 5 et 6, il y a eu quinze jours de vacances de Noël
- entre les séances 6 et 7, il y eu un mois d'absence pour cause de stage.



## Étude du tableau et des graphiques :


- On remarque un taux de réussite important lors des séances 1 et 2 où la permanence du lien entre l'objet e et l'objet f est effective. On note donc que les élèves se sont appropriés la situation, le contexte, la consigne, le matériel etc... et que la correspondance terme à terme est comprise. On observe un pourcentage plus élevé à la séance 1 alors que moins d'élèves ont réussi, ceci est dû aux absences et à un nombre total d'élèves faibles.

- On voit une forte baisse du taux de réussite entre les séances 2 et 3  due à la fermeture des boîtes. Fermer les boîtes entraîne une difficulté supplémentaire pour les élèves. Les élèves n'ont plus la visibilité en permanence du travail. À partir de la séance 3, ils doivent mettre en place de nouvelles stratégies.

- De la séance 3 à la séance 7, il y a une fluctuation du taux de réussite avec une évolution générale vers la hausse du taux de réussite. On remarque un taux en légère baisse  à la séance 6 qui peut être expliquée par les vacances de Noël, vacances considérées comme particulières avec les festivités. Il est difficile pour les élèves de se mettre à nouveau au travail le premier jour après les vacances. Par contre, on observe un taux important de réussite de  à la séance 7.

La coupure entre les séances 6 et 7 a peut-être permis aux élèves de faire un « break » au niveau de la situation et donc permettre un mûrissement du travail.

- Entre les séances 7 et 8, on observe une baisse du taux de réussite  due au passage de 6 à 8 boîtes. Cette différence de deux boîtes pour des élèves de petite section entraîne une perturbation au niveau du taux de réussite des élèves. On remarque que les trois élèves  qui réussissent à la séance 8 avaient réussi à la séance 7. Pour certains élèves, on peut penser que le passage de 6 à 8 boîtes entraîne une perturbation peut-être due au passage d'une collection mémorable à une collection non mémorable ou due à une instabilité de stratégies dans la résolution du problème.

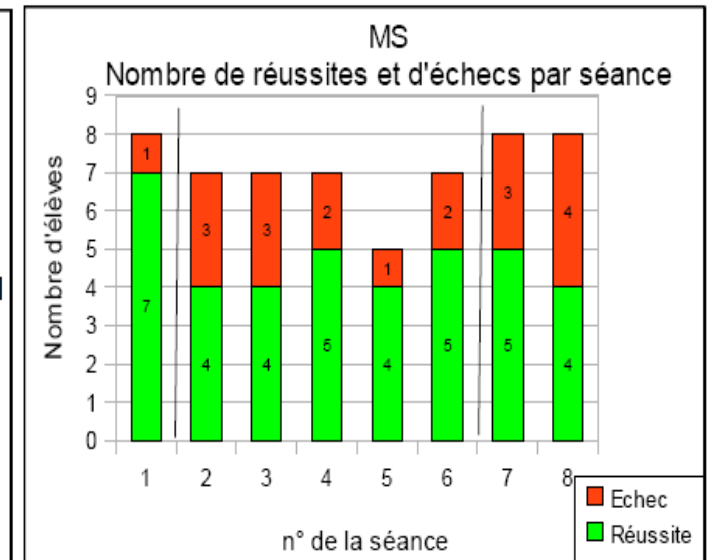
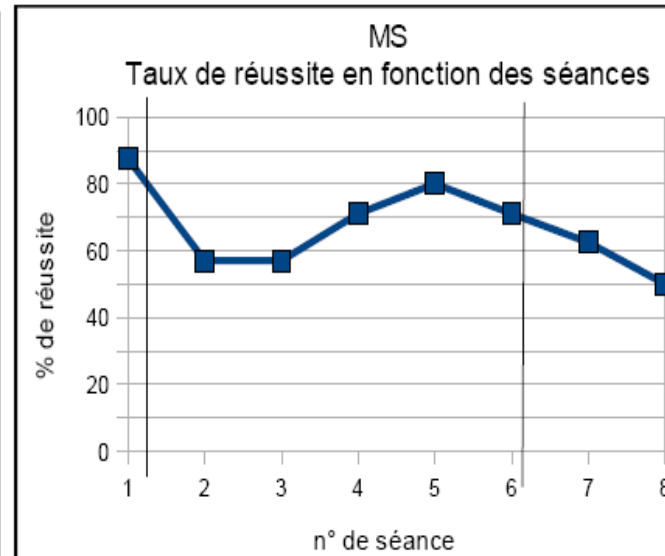
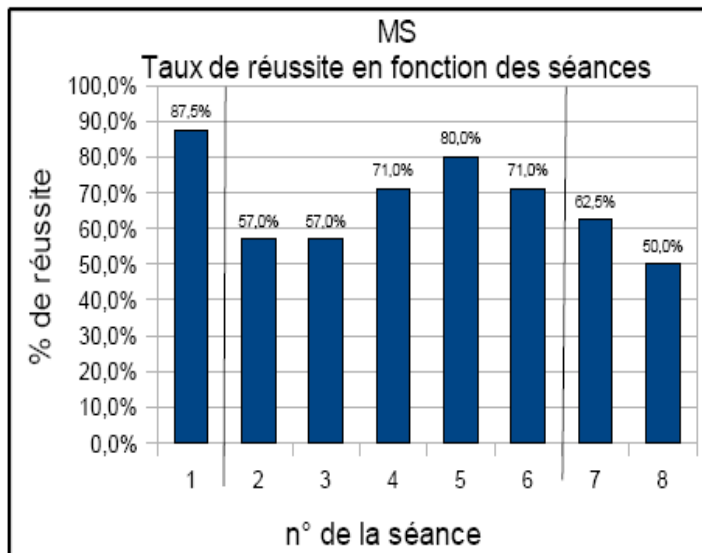
- On remarque un taux de réussite de  pour l'ensemble des élèves et des séances. On remarque également que 5 élèves sur 7 élèves ont plus de 50% de réussite au total sur la séquence. On notera cependant que les deux élèves ayant un taux de réussite inférieur à 50% sont des élèves qui ont des difficultés pour entrer dans les apprentissages.

On voit nettement sur les graphiques une baisse du taux de réussite après chaque changement de valeurs de variables. On peut donc en conclure que la modification de la valeur des variables V7 (la « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f) et V9 (« taille » de la collection des objets à énumérer) entraîne des modifications du taux de réussite et plus précisément une baisse de ce taux. Ces deux variables ont donc une incidence sur le taux de réussite.

## I.2. Difficultés légères pour les élèves de moyenne section lors de l'augmentation de la taille de la collection

		Séance n°1	Séance n°2	Séance n°3	Séance n°4	Séance n°5	Séance n°6	Séance n°7	Séance n°8		% réussite	% d'absentéisme
M S	Louise	R	R	E	R	R	R	E	E	5 / 8	62,5%	0%
	Mélyne	R	E	Abs	E	R	R	R	E	4 / 7	57%	12,5%
	Laurine	R	Abs	E	R	Abs	R	R	R	5 / 6	83%	25%
	Alex	R	E	R	Abs	Abs	Abs	R	R	4 / 5	80%	37,5%
	Jofrey	E	E	E	R	Abs	E	R	E	2 / 7	<u>28,5%</u>	12,5%
	Hélène	R	R	R	E	R	R	R	R	7 / 8	87,5%	0%
	Simon	R	R	R	R	E	R	E	R	6 / 8	75%	0%
	Clara	R	R	R	R	R	E	E	E	5 / 8	62,5%	0%
	Réussite	7	4	4	5	4	5	5	4			
	Echec	1	3	3	2	1	2	3	4			
	Activité	8	7	7	7	5	7	8	8			
	Absents	0	1	1	1	3	1	0	0			
		7/8	4/7	4/7	5/7	4/5	5/7	5/8	4/8			
	% réussite	87,5%	<del>57%</del>	57%	71%	80%	71%	<del>62,5%</del>	50%		<b>67%</b>	
	% d'absentéisme	0%	12,5%	12,5%	12,5%	37,5%	12,5%	0%	0%			11%





Changement de variables (symbolisé dans le tableau par  et sur les graphiques par une ligne verticale) :


- entre les séances 1 et 2 : passage de permanence du lien à absence de lien entre les deux collections : fermeture des boites
- (entre les séances 4 et 5 : passage de 6 à 8 boites : le passage de 6 à 8 boites n'est pas un changement de variable significatif)
- entre les séances 6 et 7 : passage de 8 à 15 boites

Autres informations :


- entre les séances 5 et 6, il y a eu quinze jours de vacances de Noël
- entre les séances 6 et 7, il y eu un mois d'absence pour cause de stage.

## Étude du tableau et des graphiques :

- Comme pour les élèves de petite section, on remarque un fort taux de réussite lors de la séance à vue. Seul un élève n'a pas réussi. On peut en conclure que le choix d'une séance avec permanence du lien entre l'objet e et l'objet f permet aux élèves de comprendre la situation ainsi que le travail demandé. Lors des séances suivantes, on peut donc écarter comme explication de la non réussite la non compréhension de la situation.

- On voit une forte baisse du taux de réussite  à la séance 2 due à la fermeture des boîtes. Il n'y plus de possibilité de voir les boîtes déjà énumérées. Cela nécessite pour les élèves de mettre en place une stratégie pour se rappeler des boîtes déjà énumérées.

- Des séances 2 à 6, on observe une légère augmentation du taux de réussite explicable par la mise en place de la part des élèves de stratégies. Les taux sont à prendre avec précaution car dans ce niveau de classe, beaucoup d'absences ont été remarquées. Le nombre d'élèves réussissant avec 6 ou 8 boîtes à énumérer oscillent entre 4 et 5. Le passage de 6 à 8 boîtes n'entraîne pas de changement significatif au niveau de cette tranche d'âge d'élèves. Notons qu'il est difficile d'étudier ce changement du fait de l'absence de 3 élèves à la séance 5.

- Nous observons une nouvelle baisse  aux séances 7 et 8 du au saut informationnel (passage de 8 à 15 boîtes : passage d'une collection mémorisable à une collection non mémorisable) d'où une nécessité de réajuster les stratégies de la part des élèves. La baisse n'est pas très importante car si on regarde le nombre absolu d'élèves réussissant à 15 boîtes, les réussites oscillent entre 4 et 5.

Le passage de 8 à 15 boîtes entraîne des difficultés surtout pour Louise et Clara. Ces deux élèves réussissent régulièrement le problème pour 6 ou 8 boîtes mais se voient en difficultés lors du passage à 15 boîtes.

A chaque augmentation du nombre de boîtes (6 à 8 et 8 à 15), on remarque que l'élève Simon est perturbé momentanément avant de réajuster.

- On remarque un taux de réussite de **67%** pour l'ensemble des élèves et des séances.

On remarque également que 7 élèves sur 8 élèves ont plus de 50% de réussite au total sur la séquence. On notera cependant que l'élève avec un taux de réussite inférieur à 50% est un élève très renfermé et que c'est également celui qui n'a pas réussi lors de la séance 1.

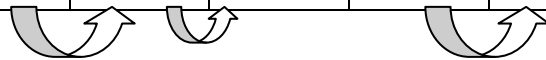
On voit nettement sur les graphiques une baisse du taux de réussite après la modification de V7 (la « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f) mais plus légère lors de la modification de V9 (« taille » de la collection des objets à énumérer). On peut donc en conclure que la modification de la valeur des variables V7 et V9 entraîne des modifications du taux de réussite et plus précisément une baisse de ce taux. Ces deux variables ont donc une incidence sur le taux de

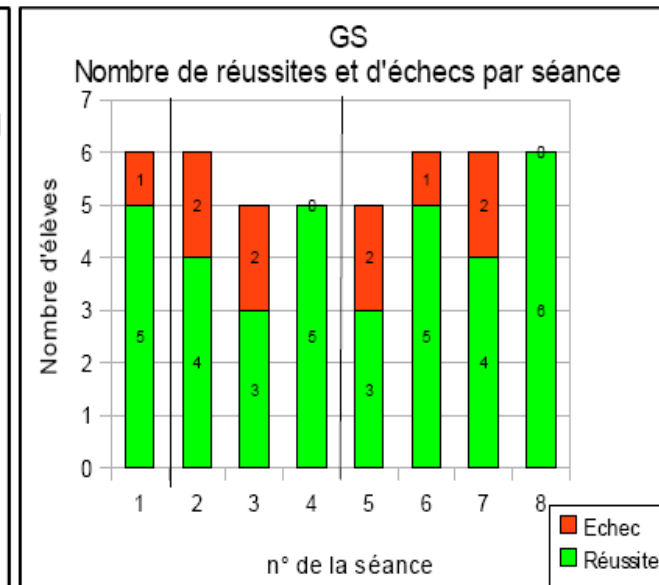
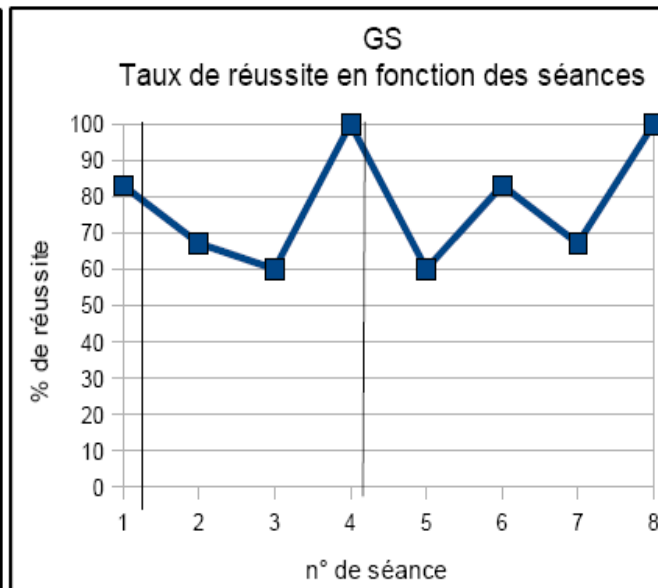
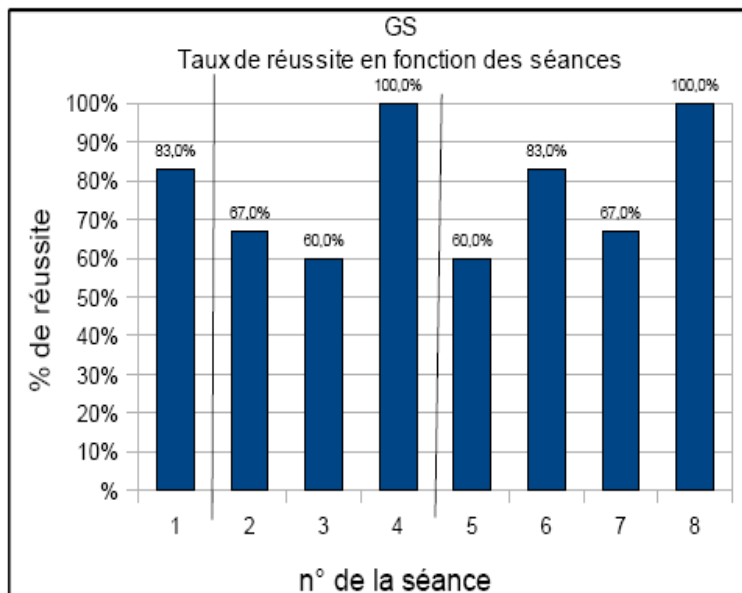
réussite. Le changement de taille de la collection se fait lors du passage de 8 à 15 boîtes. Le passage de 6 à 8 boîtes n'engendre pas d'effet sur le taux de réussite, ceci est dû au fait que pour 6 et 8 boîtes, nous sommes dans le même domaine numérique et nous pouvons considérer que nous sommes dans une collection dont la taille est mémorisable. Le passage de 6 à 8 boîtes n'entraîne pas de modification concernant la valeur de la taille de la collection.



### I.3. Les élèves de grande section atteignent les 100% lors de deux séances

		Séance n°1	Séance n°2	Séance n°3	Séance n°4	Séance n°5	Séance n°6	Séance n°7	Séance n°8		% réussite	% d'absentéisme
G S	Marie	E	R	Abs	R	Abs	E	R	R	4/6	67%	25%
	Valentin	R	R	E	R	R	R	E	R	6/8	75%	0%
	Justine	R	R	R	R	E	R	R	R	7/8	87,5%	0%
	Manon	R	E	E	R	R	R	R	R	6/8	75%	0%
	Lola	R	R	R	R	R	R	R	R	8/8	100%	0%
	Thibaut	R	E	R	Abs	E	R	E	R	4/7	57%	12,5%
	Réussite	5	4	3	5	3	5	4	6			
	Échec	1	2	2	0	2	1	2	0			
	Activité	6	6	5	5	5	6	6	6			
	Absents	0	0	1	1	1	0	0	0			
		5/6	4/6	3/5	5/5	3/5	5/6	4/6	6/6			
	% réussite	83%	67%	60%	100%	60%	83%	67%	100%		77%	
	% d'absentéisme	0 %	0%	17%	17%	17%	0%	0%	0%			6,5%





Changement de variables (symbolisé dans le tableau par  et sur les graphiques par une ligne verticale) :


- entre les séances 1 et 2 : passage de permanence du lien à absence de lien entre les deux collections : fermeture des boîtes
- (entre les séances 2 et 3 : passage de 6 à 8 boîtes : le passage de 6 à 8 boîtes n'est pas un changement de variables significatif)
- entre les séances 4 et 5 : passage de 8 à 15 boîtes.

Autres informations :


- entre les séances 5 et 6, il y a eu quinze jours de vacances de Noël
- entre les séances 6 et 7, il y eu un mois d'absence pour cause de stage.


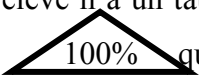
Étude du tableau et des graphiques :

- Comme pour les deux autres niveaux de classe, la séance avec permanence du lien donne un taux de réussite important. Un seul élève n'a pas réussi, ce qui nous permet de conclure à la compréhension du problème.

- A la séance 2, nous observons une baisse  du taux de réussite qui est due à la fermeture des boîtes. Cette baisse visible avec les pourcentages est légère car en nombres d'élèves, on passe seulement de 5 réussites à 4 réussites.

- La courbe continue à baisser à la séance 3 (passage de 6 à 8 boîtes). Les élèves doivent s'approprier la nouvelle contrainte qui est la perte du lien de l'objet e avec l'objet f. Par contre, il y a 100% de réussite à la séance 4 d'où le passage à la séance 5 à 15 boîtes.

- A la séance 5, le taux de réussite baisse , ceci est dû au passage de 8 à 15 boîtes. Cette nouvelle contrainte rend difficile la mémorisation des boîtes déjà remplies. Les élèves doivent réajuster leurs stratégies au cours des 5 à 7. A la séance 8, on a un taux de 100%. Les élèves se sont appropriés la nouvelle contrainte.

- On remarque un taux de réussite de  pour l'ensemble des élèves et des séances. Aucun élève n'a un taux inférieur à 50% pour l'ensemble de la séquence mais nous observons un taux de  qui montre que cet élève n'a pas été perturbé par les changements de variables.

On voit sur les graphiques une baisse légère du taux de réussite après la modification de V7 (la « permanence possible du lien » de l'objet e avec l'objet f) mais une baisse plus significative lors de la modification de V9 (« taille » de la collection des objets à énumérer). On peut donc en conclure que la modification de la valeur des variables V7 et V9 entraîne des modifications plus ou moins importantes du taux de réussite et plus précisément une baisse de ce taux. Ces deux variables ont donc une incidence sur le taux de réussite. Le changement de taille de la collection se fait lors du passage de 8 à 15 boîtes. Le passage de 6 à 8 boîtes n'entraîne pas de changement de taille de la collection des objets à énumérer.

#### **I.4. Conclusion**

Pour chaque niveau, le taux de réussite lors de séance où la permanence du lien de l'objet e avec l'objet f est maintenue est important. Les élèves éprouvent peu de difficultés pour résoudre le problème. Ceci nous permet d'affirmer que la situation est comprise et que les échecs lors des séances suivantes seront dus à la non mise en place de stratégies efficaces pour résoudre le problème et non à une non compréhension du travail demandé.

Lors de la fermeture des boîtes c'est-à-dire lors de la perte du lien de l'objet e avec l'objet f, on observe une baisse du taux de réussite. On peut expliquer ceci par la difficulté supérieure de résoudre le problème. Il y a un saut informationnel, c'est-à-dire que les stratégies efficaces avant ne le sont plus et donc les élèves doivent mettre en place de nouvelles procédures de résolution prenant en compte la nouvelle valeur de la variable.

On observe également une baisse du taux de réussite lors de l'augmentation du nombre de boîtes à énumérer. Le passage de 6 à 8 boîtes entraîne très peu de changement, cela dépend de l'âge des élèves. Ce passage entraîne des difficultés pour certains élèves de petite section, pour les élèves de moyenne et grande sections, ce changement n'engendre pas spécialement de difficultés. En effet, ce passage ne modifie pas ou peu la taille de la collection à énumérer. Par contre, le passage de 8 à 15 boîtes entraîne un changement de la taille de la collection à énumérer. Cette modification est nettement visible pour les élèves de grande section, un peu moins chez les élèves de moyenne section qui sont restés plus longtemps avec 6 ou 8 boîtes. On passe donc d'une collection mémorisable (6 ou 8 boîtes) à une collection non mémorisable (15 boîtes).

## II. Effets sur les procédures

Pour chaque niveau, un tableau est réalisé donnant pour chaque élève et pour chaque séance le code de la procédure utilisée. Les procédures entre parenthèses sont des procédures mineures utilisées en complément de la procédure majeure. En vert sont surlignées les procédures ayant engendrées une réussite. Ce tableau récapitule l'ensemble des tableaux détaillés présents en annexe. Le détail et le codage de la classification des procédures est présent dans la partie C II.2.d. Le tableau est ensuite transcrit sous forme de graphiques, un premier graphique faisant l'étude du nombre d'élèves utilisant une procédure en fonction des séances, un deuxième graphique analysant plus en détail les procédures utilisées en cas de réussite. Les procédures sont étudiées quand les boîtes sont fermées, il nous apparut inintéressant d'examiner les procédures des élèves quand la permanence du lien de l'objet e avec l'objet f est maintenue car l'ensemble des élèves utilisent cette caractéristique pour résoudre le problème.

Voici un rappel bref du codage des procédures :

- ✓ P1 : Remplissage aléatoire des boîtes sans mémorisation des places occupées.
- ✓ P2 : Remplissage aléatoire des boîtes avec mémorisation des places occupées.
- ✓ P3 : Repérage visuel d'un cheminement possible permettant de passer en revue toutes les boîtes.
- ✓ P4 : Séparation des boîtes remplies des boîtes non remplies
  - o P4a : groupement **désorganisé sur** le plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
  - o P4b : groupement **désorganisé en dehors** du plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des

boîtes non remplies

- o P4c : groupement **organisé sur** le plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
- o P4d : groupement **organisé en dehors** du plateau des boîtes déjà remplies à l'écart des boîtes non remplies
- o P4i : mise à l'écart des boîtes déjà remplies de façon involontaire par économie d'énergie
- ✓ P5 : Correspondance terme à terme objets à énumérer et objets matérialisant l'énumération
- ✓ P6 : Organisation préalable des boîtes

Procédure complémentaire :

- ✓ P' : secouage des boîtes

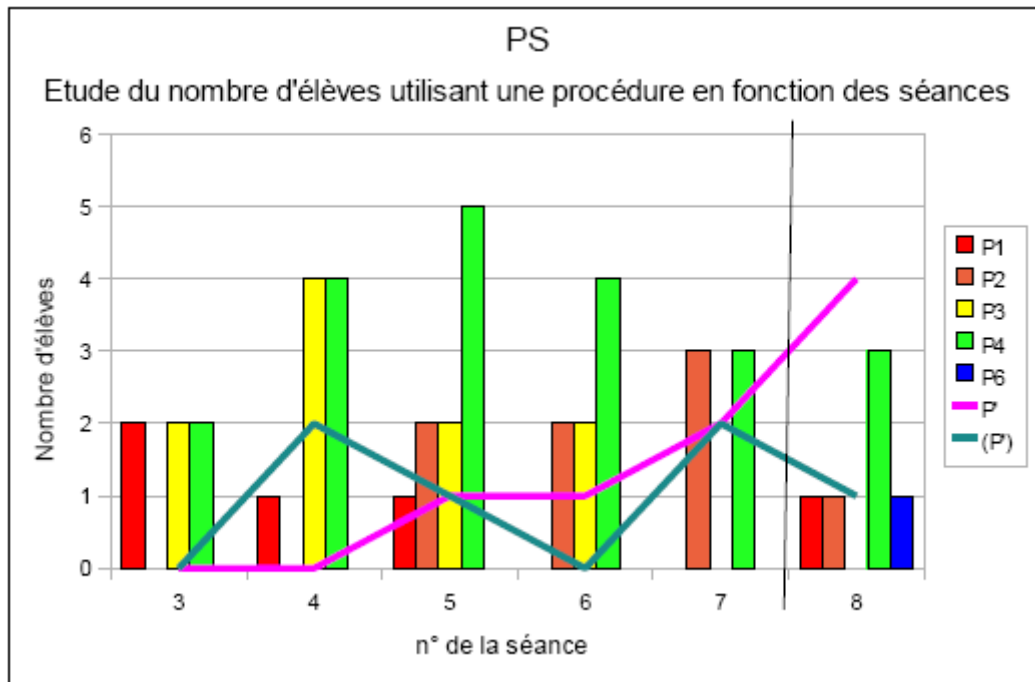
Lors de l'analyse des procédures par vidéo, nous avons décidé de mettre en place **deux nuances** au sujet de cette procédure que nous coderons par P' et (P')

\* P' = secouage des boîtes utilisé comme procédure pure, c'est-à-dire que le secouage des boîtes est réalisé pour l'ensemble de la collection des objets à énumérer. Le secouage des boîtes est utilisé en permanence.

\* (P') = secouage des boîtes utilisé comme aide à une autre procédure lors d'une hésitation sur une boîte pour savoir si elle a déjà été énumérée. Le secouage des boîtes est utilisé par intermittence.

## II.1. Evolution des procédures vers la procédure P4d de mise à l'écart pour les élèves de petite section

		Séance n°1	Séance n°2	Séance n°3	Séance n°4	Séance n°5	Séance n°6	Séance n°7	Séance n°8	Commentaire
P S	Tom	/	/	P3 puis P1	P3 (P')	P3	P3	P2 + P'	P' (P3 P2 P4i)	Il ne déplace pas les boites.
	Joaquim	/	/	P4d	P4d	P4d	P2 (P4i)	P4d (P')	P4d	Il reproduit la procédure qui lui permet de réussir : mise à l'écart des boites en dehors du plateau.
	Alexandre	/	/	Abs	P3 puis P4d	(P2) P4d	P3 puis P4d	P2 (P')	P1 (P')	Il n'est pas dans l'activité.
	Louis	/	/	Abs	P3	P2 (P4i)	P2	P2	P2 P'	Il ne déplace pas les boites.
	Flavio	/	/	P1	P1 (P')	P1 + P'	P'	P4 P'	P6 P'	Il n'est pas dans l'activité.
	Ambroisine	/	/	P4d	(P3) puis P4d	P4d	P4d	P4d	P4a	Elle reproduit la procédure qui lui permet de réussir : mise à l'écart des boites soit en dehors du plateau, soit sur le plateau.
	Jules	/	/	P3	P4d	(P3) puis P4d (P')	P4d	Abs	P4d P'	Il a tendance à mettre à l'écart les boites énumérées.
P1	/	/	2	1	1	0	0	1		
P2	/	/	0	0	2	2	3	1		
P3	/	/	2	4	2	2	0	0		
P4	/	/	2	4	5	4	3	3		
P6	/	/	0	0	0	0	0	1		
P'	/	/	0	0	1	1	2	4		
(P')	/	/	0	2	1	0	2	1		



A la première séance boîtes fermées (séance 3), on observe une multitude de procédures mises en place par les élèves (P1, P3 et P4). En effet, les élèves passent de boîtes ouvertes à boîtes fermées, il y a perte de la permanence du lien de l'objet e avec l'objet f. Les élèves sont donc obligés de mettre en place des stratégies pour se rappeler les boîtes déjà énumérées par rapport aux boîtes non énumérées.

Au cours de la séquence,

- \* la procédure P1 tend à disparaître.

- \* la procédure P2 apparaît en minorité sauf à la séance 7 où cette procédure apparaît en lien avec P'.

- \* la procédure P3 apparaît au début de la séquence puis a tendance à disparaître à la fin de la séquence.

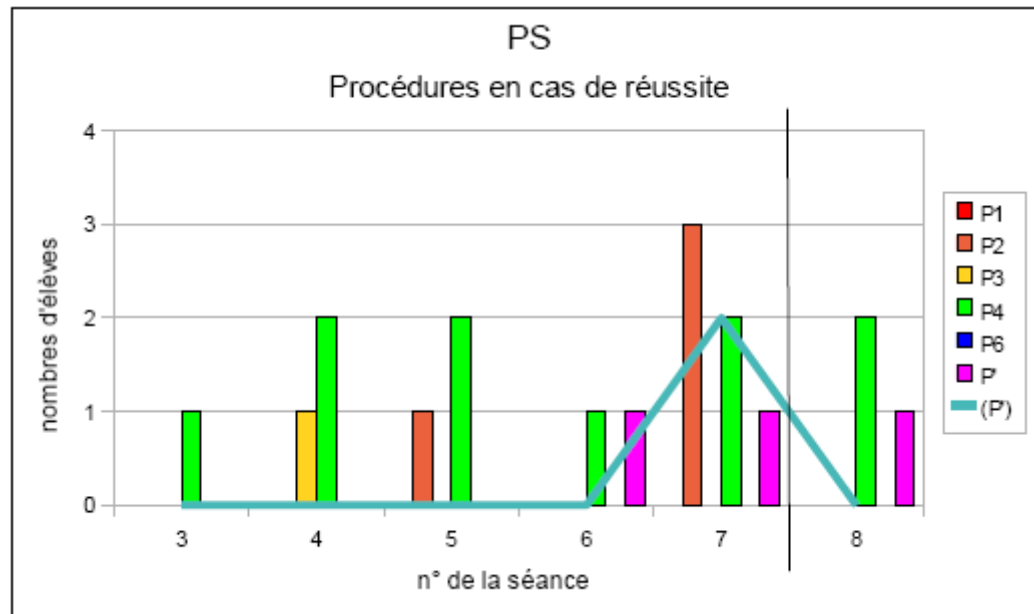
- \* la procédure P4 est très présente. Elle est majoritaire dans la plupart des séances.

A la séance 7, où on observe la réussite de 5 élèves sur 6, deux procédures P2 et P4 sont présentes.

A la séance 8, où le nombre de boîtes passe de 6 à 8, la procédure P1 réapparaît et la procédure P6 apparaît. Cette augmentation du nombre de boîtes entraîne des perturbations au niveau des procédures des élèves. C'est également lors de cette séance qu'on observe un taux important d'utilisation du secouage des boîtes.

On remarque que deux élèves (Ambroisine et Joaquim) utilisent régulièrement une même procédure qui leur permet de réussir pratiquement à coup sûr, c'est la procédure P4d de mise à l'écart des boîtes déjà énumérées en dehors du plateau.

Procédures en cas de réussite						
	3	4	5	6	7	8
P1	0	0	0	0	0	0
P2	0	0	1	0	3	0
P3	0	1	0	0	0	0
P4	1	2	2	1	2	2
P6	0	0	0	0	0	0
P'	0	0	0	1	1	1
(P')	0	0	0	0	2	0



La procédure qui apparaît le plus souvent pour la réussite est P4 et plus précisément P4d. C'est seulement à la séance 7 où P2 apparaît de façon importante couplée à P'.

Cette procédure (P4) ne permet pas toujours la réussite car les élèves ne commencent pas toujours la procédure dès la première boîte énumérée. Cela nécessite de leur part une anticipation vis à vis du problème, ce qui n'est pas évident du fait de leur jeune âge.

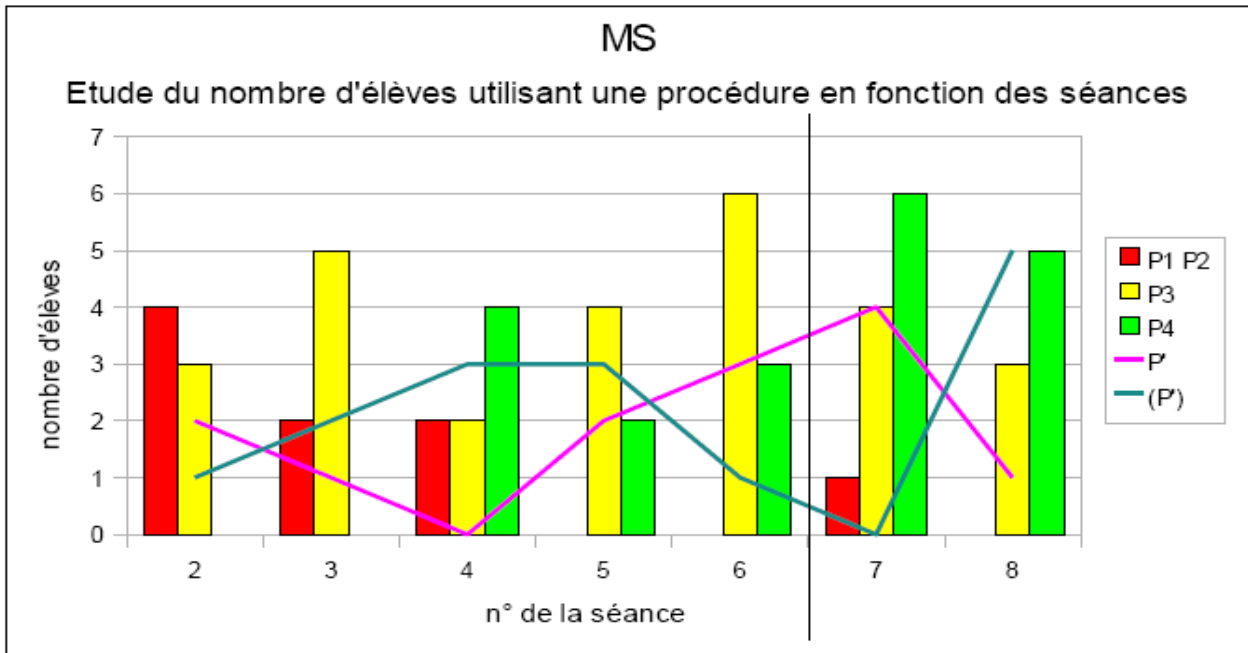
Sur 17 réussites sur l'ensemble des élèves et des séances, 10 réussites sont dues à l'utilisation volontaire de la procédure P4, c'est-à-dire que volontairement les élèves mettent à l'écart les boîtes déjà énumérées.

**On peut conclure que le jeu sur la variable « taille de la collection à énumérer » permet de faire évoluer les procédures de résolution vers la procédure P4, procédure adéquate pour la résolution de ce type de problème.**



## II.2. Evolution des procédures vers la procédure P4c de mise à l'écart pour les élèves de moyenne section

	Séance n°1	Séance n°2	Séance n°3	Séance n°4	Séance n°5	Séance n°6	Séance n°7	Séance n°8	Commentaire	
M S	Louise	/	P2 (P')	P2 (P')	P4c (P')	P3 (P') P4c (P')	P3 + P' puis P4c + P'	P3 puis P4c + P'	P4c (P')	Procédures de plus en plus évoluées au cours des séances
	Mélyne	/	P1 +P'	Abs	P2 (P')	P3 (ou P2) + P'	P3 + P'	P4c + P'	P4c (P')	Procédures de plus en plus évoluées au cours des séances
	Laurine	/	Abs	P3	P4a	Abs	P4c	P4c	P4c (P')	Procédures de plus en plus évoluées au cours des séances
	Alex	/	P2	P3	Abs	Abs	Abs	P4c	P4c	Procédures de plus en plus évoluées au cours des séances
	Jofrey	/	P2	P2	P2	Abs	P3 (P4i)	P3 (P4i)	P3 (P4i)	Procédures de plus en plus évoluées au cours des séances
	Hélène	/	P3	P3	P3	P3 (P')	P3 + P'	P4c	P4c (P')	Procédures de plus en plus évoluées au cours des séances
	Simon	/	P3 + P'	P3 + P'	P3 (P')	P3 + P'	P3	P3 puis P' puis P4c	P3 (P')	Un peu de stagnation
	Clara	/	P3	P3(P')	P4c	P4c (P')	P3 puis P4c (P')	P3 puis P2 + P'	P3 + P'	Procédures moins performantes à la fin
	P1	/	1	0	0	0	0	0	0	
P2		3	2	2	0	0	1	0		
P3		3	5	2	4	6	4	3		
P4	/	0	0	3	2	3	6	5		
P5	/	0	0	0	0	0	0	0		
P'	/	2	1	0	2	3	4	1		
(P')	/	1	2	3	3	1	0	5		



L'évolution générale des procédures montrent qu'au cours de la séquence les procédures P1 et P2 sont mises de côté au profit de la procédure P4. La procédure P4 apparaît à la séance 4. Elle est utilisée de façon variable au cours des séances 4 à 6. C'est à partir de la séance 7 que son utilisation devient prépondérante. C'est donc le passage de 8 à 15 boîtes qui a permis à la procédure P4 d'être plus utilisée.

La procédure P3 est utilisée de façon variable tout au long de la séquence.

Le secouage des boîtes est très présent tout au long de la séquence.

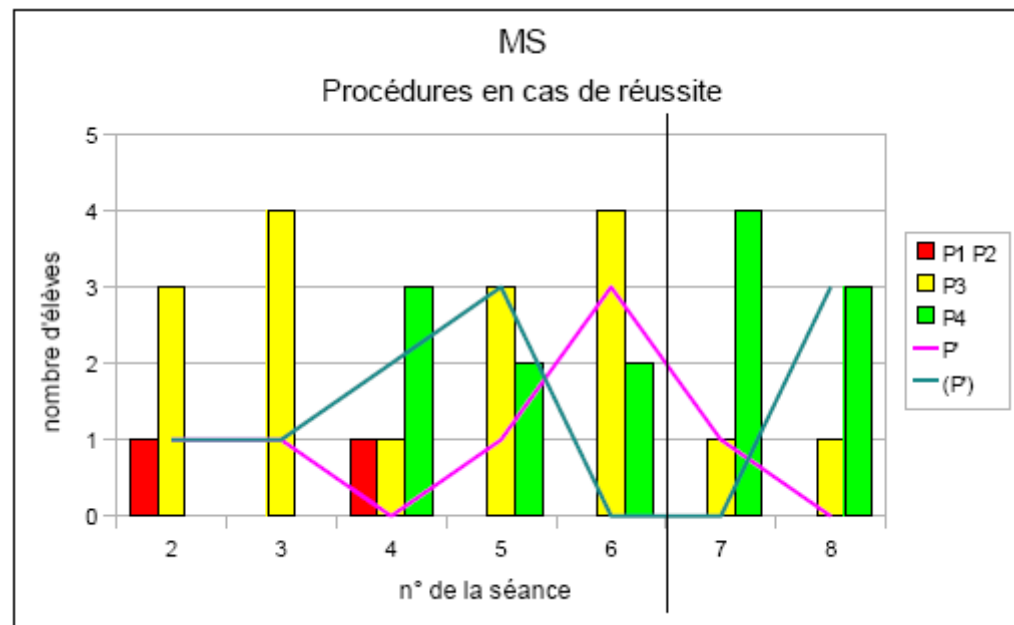
Par l'étude du tableau, on remarque que 5 élèves sur 8 ont progressé au cours de la séquence, ils passent de la procédure P3 à la procédure P4 au long de la séquence et ce changement de procédures est plus nettement visible lors du passage de 8 à 15 boîtes.

On note que Louise est perturbée lors du passage à 15 boîtes. Avec 6, 8 ou 15 boîtes, elle utilise la procédure P4c mais ne la met pas en place dès la première boîte. Avec 6 ou 8 boîtes, elle arrive à retrouver les boîtes déjà remplies en les secouant mais avec 15 boîtes, cela devient plus difficile. A la séance 8, elle commence bien la procédure P4c dès la première boîte mais oublie d'aligner une boîte qu'elle vient de remplir et laisse une boîte à l'écart. Elle n'arrive donc pas à appliquer la procédure P4c efficacement dès la première boîte et sur l'ensemble des boîtes.

On remarque également que Simon présente peu d'évolution de procédures, il utilise de façon régulière la procédure P3 couplée à certain moment avec le secouage. Cela ne l'empêche pas de réussir à la séance 8 avec 15 boîtes. Il fait pourtant un essai de P4 à la séance 7 mais ne l'applique pas dès la première boîte.

On remarque que Clara qui utilisait P4c avec 6 ou 8 boîtes est perturbée au passage à 15 boîtes et revient à la procédure P3.

Procédures en cas de réussite							
	2	3	4	5	6	7	8
P1 P2	1	0	1	0	0	0	0
P3	3	4	1	3	4	1	1
P4	0	0	3	2	2	4	3
P'	1	1	0	1	3	1	0
(P')	1	1	2	3	0	0	3



L'étude du graphique montre qu'avec 6 ou 8 boîtes, c'est la procédure P3 qui est dominante et la procédure P4 apparaît à la séance 4. C'est le passage à 15 boîtes qui met en évidence la procédure P4 comme dominante.

On note cependant que la procédure P4 est dominante à la séance 4 puis elle régresse aux séances 5 et 6. Une explication possible de cette diminution pourrait être le passage de 6 à 8 boîtes qui perturbe légèrement les stratégies non encore stabilisées.

L'étude de l'évolution des procédures au cours de la séquence montre que la procédure P3 très présente de la séance 3 à la séance 6 est remplacée par la procédure P4 après le passage à 15 boîtes.

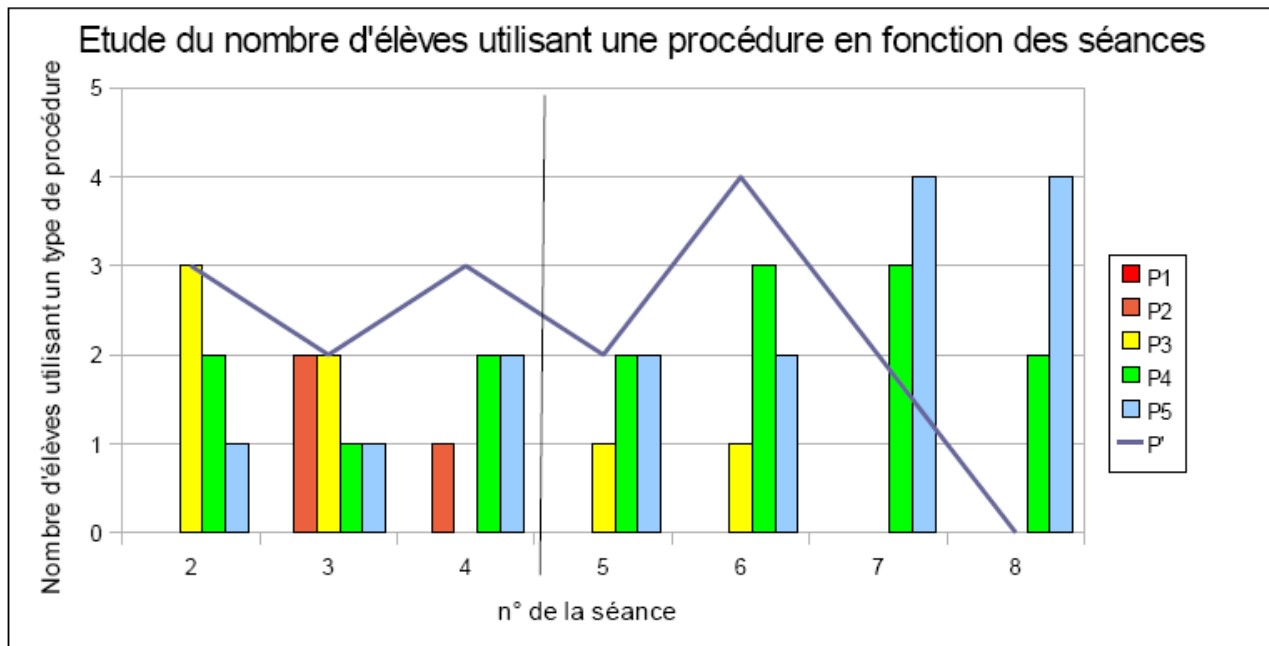
On remarque également qu'avec 15 boîtes, la procédure P' est de moins en moins utilisée et elle est seulement utilisée en tant qu'aide mais pas en tant que procédure.

**On note donc que le jeu sur la variable « taille de la collection à énumérer » a tendance à entraîner l'apparition et l'utilisation prépondérante d'une procédure adéquate pour le problème.**

### II.3. Evolution des procédures vers la procédure P5 de marquage pour les élèves de grande section

		Séance n°1	Séance n°2	Séance n°3	Séance n°4	Séance n°5	Séance n°6	Séance n°7	Séance n°8	Commentaire
G S	Marie	/	P3 puis (P')	Abs	P4c (P')	Abs	P4c (P')	P5 et P4b et P'	P4b	Évolution dans les procédures : passage de P3 vers P4 en passant par P5
	Valentin	/	P3	P3	P4a (P')	P4a	P4a (P') (P6)	P4c	P5	Évolution dans les procédures : passage de P3 vers P4 pour finir par P5.
	Justine	/	P4a	P3 + P'	P2 + P'	P3 + P'	P3 (P')	P5	P5	Flottement dans les procédures puis adoption à la fin de P5
	Manon	/	P3 + P'	P2	P5	P5	P5	P5	P5	Adoption de la procédure P5 dès la séance 4
	Lola	/	P5	P5	P5	P5	P5	P5	P5	Utilisation de la procédure P5 dès le début. Sa procédure se propage progressivement auprès des autres élèves.
	Thibaut	/	P4i (P')	P2 puis P' + P4a	Abs	P4c (P')	P4b (P')	P4d + P'	P4d	Utilisation de la procédure : mise à l'écart des boîtes déjà énumérées, procédure pas toujours mise en place entièrement et correctement
	P1	/	0	0	0	0	0	0	0	
	P2	/	0	2	1	0	0	0	0	
	P3	/	3	2	0	1	1	0	0	
	P4	/	2	1	2	2	3	3	2	
	P5	/	1	1	2	2	2	4	4	
	P'	/	3	2	3	2	4	2	0	





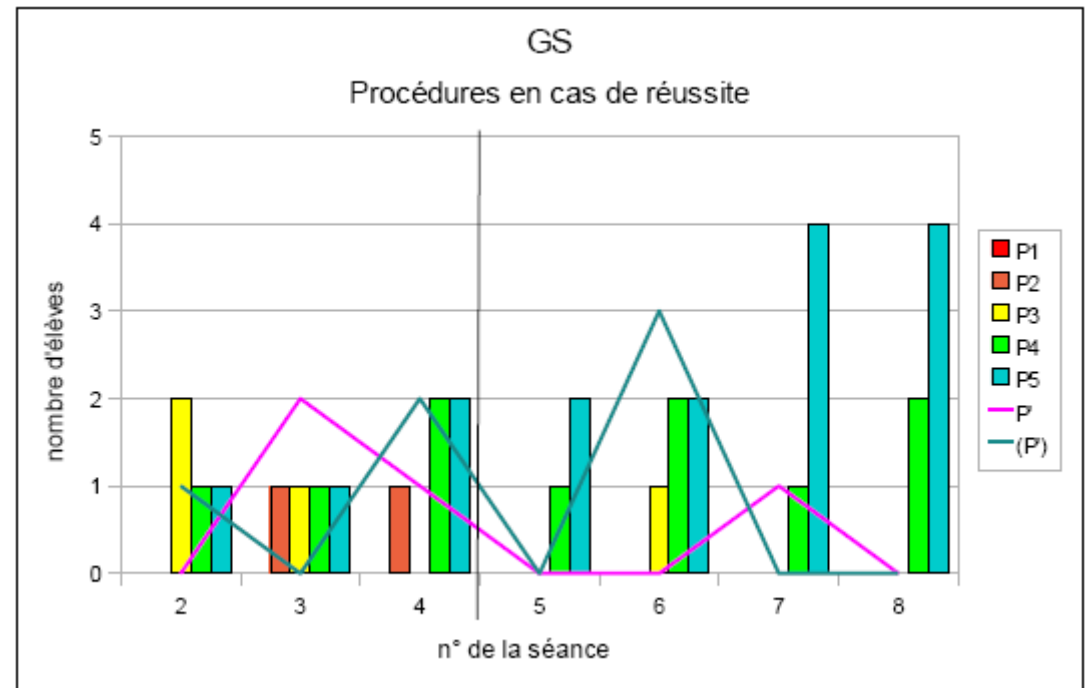
L'utilisation du secouage des boîtes est très utilisée jusqu'à la séance 6. Puis il y a diminution de cette procédure à la séance 7 jusqu'à non utilisation de cette procédure à la séance 8. Les élèves, au cours de la séquence, se rendent compte que le secouage des boîtes est une aide mais ne permet pas de réussir à coup sûr. C'est un détournement du travail mais si l'élève ne mémorise pas ou ne met pas à l'écart les boîtes déjà remplies, cela ne lui permet pas d'énumérer correctement l'ensemble de la collection. Cela permet d'aider, de vérifier si une boîte est déjà remplie. Mais si l'élève a mis deux voitures dans une boîte, il n'est pas capable de faire la différence au niveau du bruit. Dans certains cas, une boîte remplie d'une voiture ne fait pas de bruit car la voiture s'est collée dans la boîte.

**Au niveau des procédures, on observe une évolution au cours de la séquence. Les procédures P1, P2 et P3 sont délaissées au profit de P4 et surtout P5.** La procédure P5 est une procédure très intéressante car à tout moment, on peut voir les boîtes remplies ou non. Il y a un visuel. On observe que les élèves qui utilisent la procédure P5 gagnent à chaque coup.

La procédure P5 est utilisée dès la séance 2 par Lola puis elle se propage rapidement à Manon qui dès la séance 4 se l'approprie et la garde tout le long de la séquence. C'est après le passage à 15 boîtes et surtout aux séances 7 et 8 que les autres élèves (Justine, Marie et Valentin) commencent à se l'approprier. Marie, à la séance 7, essaie d'utiliser cette méthode mais ne l'applique pas sur l'ensemble de la collection des objets à énumérer. Par contre, Thibaut n'utilise pas la procédure P5 mais la procédure P4 qu'il n'arrive pas forcément à mener correctement sur l'ensemble des objets de la collection.

On note que quatre élèves, à la séance 8, se sont correctement appropriés la procédure P5. Tous les élèves présentent une évolution des procédures, soit vers P4, soit vers P5.

Procédures en cas de réussite							
	2	3	4	5	6	7	8
P1	0	0	0	0	0	0	0
P2	0	1	1	0	0	0	0
P3	2	1	0	0	1	0	0
P4	1	1	2	1	2	1	2
P5	1	1	2	2	2	4	4
P'	0	2	1	0	0	1	0
(P')	1	0	2	0	3	0	0



La procédure la plus utilisée en cas de réussite est la procédure P5 puis P4.

L'étude de l'évolution des procédures qui permettent la réussite au cours de la séquence montre que lors des séances 2 à 4, de multiples procédures entraînent la réussite au problème. C'est lors du passage à 15 boîtes que la procédure P5 devient de plus en plus dominante. On remarque qu'aux séances 7 et 8 où la procédure P5 est prépondérante, l'utilisation du secouage disparaît. Ceci est explicable par le fait que les élèves n'ont pas besoin d'utiliser le secouage afin de savoir s'il y a une voiture dans la boîte car celle-ci est visible puisqu'étant à moitié entrée dans la boîte.

On en conclut donc que l'évolution des procédures vers P4 et P5 est due au changement de la valeur de la variable « taille de la collection à énumérer ».

## **II.4. Conclusion**

Le changement de valeur de la variable « permanence possible du lien de l'objet e avec l'objet f » a permis la mise en place de stratégies d'énumération. Cette mise en place de stratégies est une des difficultés pour la résolution du problème. Le choix des valeurs de la variable « taille de la collection à énumérer » effectué par l'enseignant a permis de faire évoluer les procédures des élèves vers des procédures plus expertes.

Les élèves de petite et moyenne sections ont évolué vers la procédure P4 de mise à l'écart des boîtes déjà énumérées par rapport aux boîtes non énumérées. Les élèves de petite section évoluent vers la procédure P4d de mise à l'écart de façon organisée des boîtes déjà énumérées en dehors du plateau tandis que les élèves de moyenne section évoluent vers la procédure P4c de mise à l'écart de manière organisée des boîtes déjà énumérées sur le plateau.

Les élèves de grande section ont eux évolués vers la procédure P5 de marquage des boîtes déjà énumérées avec la voiture.

Le changement de valeur de la variable « taille de la collection à énumérer » a donc permis aux élèves d'évoluer vers des procédures de plus en plus expertes permettant d'alléger la mémoire.

L'âge des élèves et la nécessité de s'organiser sont deux paramètres qui semblent ainsi avoir de l'influence sur les procédures de résolution du problème.

## **III. Autres paramètres**

### **III.1. L'absentéisme**

Des écarts se sont creusés entre les élèves dus aux absences régulières de certains. En particulier, certains élèves de petite section étaient absents lors de la première séance, séance qui permettait l'appropriation du matériel et de la situation. Il a donc été décidé de faire à nouveau la première phase à la séance 2 pour les élèves de petite section. La fréquentation a donc été très variable selon les élèves. Plusieurs raisons expliquent cela : d'une part, plusieurs enfants ont été malades, en particulier malade de la grippe A ce qui entraînait un isolement des élèves ; d'autre part, certains parents considèrent que les apprentissages en maternelle et encore plus en petite section sont faibles.

Sur les 21 élèves participant à l'expérimentation,

11 ont suivi les 8 séances

6 ont suivi 7 séances

3 ont suivi 6 séances

1 a suivi 5 séances.

### III.2. La mobilisation des élèves

Le fait de refaire, d'une séance sur l'autre, la même situation pouvait être source de démobilisation chez les élèves. En effet, les différentes variables sur lesquelles j'ai joué pour faire évoluer la situation n'apportaient que peu de changements. Dans toutes les séances, les élèves pouvaient avoir l'impression de refaire toujours la même chose : mettre des voitures dans les garages. Pour éviter la démobilisation des élèves au cours de la séquence, j'ai fait le choix sans changer la situation d'enrober la situation.

Les premières séances présentaient la situation à l'aide de « jouets » : un bloc de trois garages en plastique et cinq voitures miniatures en plastique. Au fil des séances, la présentation à l'aide du jouet se faisait de plus en plus rapidement.

Pour les séances 7 et 8, l'entrée se fait par l'observation de photographies de Monsieur Patate.

A la séance 7, les copains de Monsieur Patate sont allés se promener.



A la séance 8, ils sont allés au zoo.



Une mise en scène de la situation permet également le suspense. À l'arrivée dans la salle, le nouvel « enrobage » était caché sous un drap, derrière une planche, sous une feuille...



### **III.3. Des contraintes d'ordre temporel et spatial**

La mise en place de la situation mathématique a été rendue plus difficile par des contraintes temporelles et spatiales.

En effet, l'expérimentation a lieu tous les lundis du fait que chaque jour de la semaine, j'ai une classe différente puisque j'occupe un poste fractionné. L'écart entre chaque séance entraîne, à mon avis, une difficulté pour les élèves de réinvestir les observations ou conclusions faites lors de la séance précédente. L'idéal aurait été d'avoir au moins deux séances par semaine ou la possibilité de relancer un jeu directement après la mise en commun. Ceci n'a pas été possible. J'ai fait le choix de faire passer les trois groupes lors de la même journée. De plus, les vacances d'hiver et le stage T1 ont encore plus parsemé les séances.

En outre, l'expérimentation a commencé mi novembre. Les élèves de petite section sont tous des élèves scolarisés depuis septembre 2009 (pas d'élèves ayant fait une TPS). Ils sont donc jeunes et pas encore tous prêts à aborder les apprentissages.

Des contraintes spatiales ont également été mises en évidence. Certains groupes passant le matin, d'autres l'après-midi, cela nous empêchait d'utiliser toujours la même salle. Le choix a été de faire passer les élèves de petite et moyenne sections le matin puisque ces derniers sont absents ou font la sieste les après-midis. Le matin, la salle de repos étant disponible, les deux groupes précédents étaient dans cette salle à tour de rôle pendant que les autres restaient dans la classe. L'après-midi, la salle de repos étant utilisée, les élèves de grande section travaillaient dans la classe.

## F- Des explications à ces résultats?

### I. Liées à l'élève individuellement

On remarque qu'il existe d'autres difficultés dans la résolution du problème qui ne sont pas liées à la mise en place d'une stratégie. Faisons en une petite liste non exhaustive.

\* Motricité fine

Il y a également un problème de motricité. Pour certains élèves, en particulier les élèves de petite section, il peut être difficile de mettre la voiture dans la boîte ; certains n'arrivant pas à mettre la voiture dans la boîte voulue abandonne totalement ou essaie avec une autre boîte ou une autre voiture.

\* Problème de concentration

Il y a un problème de concentration, au bout d'un certain temps, les élèves regardent à côté et perdent leurs repères. Ce problème est dû à l'âge des élèves.

\* Problème de maturité

Certains élèves ne sont pas encore rentrés dans les apprentissages.

\* La question de l'enjeu : Quelles réactions doit avoir le maître quand l'élève a perdu?

J'ai décidé de mettre en place un gain de gommettes afin que les élèves est un enjeu.

### II. Liées aux interactions sociales

En analysant les vidéos et les procédures utilisées par les élèves au cours des séances, on se rend compte que les élèves progressent grâce à leurs pairs. Suivant le niveau de classe des élèves, les interactions sociales sont de différents types.

Pour les élèves de petite et moyenne sections, c'est par l'ouïe et la vue qu'ils progressent. Les élèves regardent les plateaux des autres élèves, observent l'organisation des boîtes sur ou en dehors du plateau et par la suite imitent cette organisation. Ceci donne des indices concernant la procédure P4. Ils entendent également les bruits faits par les autres élèves, en particulier « oui » ou « non » et peuvent les reproduire. Ceci donne des indices sur les procédures P2 et P3.

Pour les élèves de grande section, c'est surtout les interactions orales lors du bilan collectif qui permettent les échanges entre pairs. Du fait de l'augmentation du nombre de boîtes et des interactions sociales, la procédure P5 devient dominante. Cette procédure est une procédure experte car l'élève peut contrôler en permanence où il en est de l'énumération par le marquage. En effet,

par cette procédure, les voitures-images matérialisant l'énumération sont utilisées pour marquer les boîtes.

Notons que, selon G. BROUSSEAU, le milieu ne prend pas en compte la communication entre les pairs. Or en classe, cela est inévitable. Dans une classe, il n'est pas possible d'avoir un travail isolé. Le social, les échanges entre pairs sont facteurs de diffusion des informations, les bonnes pour être reprises, les mauvaises pour être invalidées. Les échanges sont facteurs d'apprentissage. Le caractère adidactique au sens de G. BROUSSEAU sera à moduler dans la situation des garages. La situation, étant ce qu'elle est, les élèves par les interactions sociales apportent des solutions, ceci permet de faire évoluer les procédures des élèves.

Dans ERMEL GS<sup>63</sup>, un paragraphe est consacré aux interactions sociales.

*« L'interaction essentielle entre adulte et enfant n'épuise pas à elle seule toutes les modalités d'interactions sociales possibles. Certains travaux mettent également l'accent sur les bénéfices cognitifs que les enfants peuvent retirer d'interactions avec leurs pairs.*

*Dans une optique visant à concilier interactionnisme et constructivisme, les recherches expérimentales de Doise et Mugny, par exemple, attestent que les « progrès consécutifs au travail interindividuel sont authentiques » (Doise et Mugny, *Le Développement social de l'intelligence, Interéditions, Paris, 1981*), car chaque enfant y est confronté à une tâche critique: coordonner son jugement à celui d'autrui pour intégrer en un système des points de vue d'abord divergents. La résolution du **conflit sociocognitif** (à la fois social, car il met vraiment en jeu des partenaires sociaux, et cognitif, car il intervient à propos de problème ou de tâche à mener à bien) est moteur du développement intellectuel en tant qu'il permet la prise de conscience de nouveaux points de vue et qu'il donne des « pistes » nouvelles à explorer à chacun.*

*Certes, il ne suffit pas de « mettre les enfants ensemble » pour que des apprentissages s'opèrent, encore faut-il que la situation, élaborée et proposée par l'adulte, soit réellement problématique et stimulante, et que la composition des groupes d'enfants soit vraiment favorable à une confrontation des points de vue. Ces travaux engagent donc le pédagogue à prendre au sérieux les relations entre enfants et à ne pas négliger, dans la construction de situations d'apprentissage, la dimension relative aux échanges interindividuels. »*

Dans ce paragraphe, l'équipe ERMEL parle essentiellement des interactions sociales entre pairs lors d'un travail en groupe mais nous pensons que des interactions sociales lors de mises en commun peuvent entraîner également des bénéfices.

---

63 ERMEL (2005), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes – GS cycle 2*, Hatier, Paris, p. 190.

### III. Par comparaison avec une autre expérimentation

La situation mise en place en 2009/2010 paraît difficile pour des élèves de petite section.

Les difficultés des élèves face à cette situation peuvent être expliquées par :

- ✓ contexte partiellement défectueux puisque la correspondance terme à terme n'est pas totalement naturelle : dans la réalité plusieurs voitures peuvent être garées dans un même garage.
- ✓ contraintes spatiales entre objets : l'équivalence de taille entre objet X et son correspondant Y n'est pas assurée. En effet, il est matériellement possible de mettre plusieurs voitures dans un même garage.
- ✓ jeunesse des élèves dans les apprentissages : les élèves de petite section en novembre ne sont pas tous entrés dans les apprentissages. De plus, ils sont présents dans une classe à triple niveau donc ils sont moins sollicités que dans une classe à simple niveau.

Pour des élèves de petite section, la situation expérimentée par ma collègue Agnès Villetorte (collègue PE2 de l'IUFM de Valence qui a fait une expérimentation sur l'énumération en partant de mes travaux de PE2) paraît plus appropriée. Elle s'intitule « un œuf dans chaque alvéole ». Cette expérimentation prend appui sur celle du mémoire de master professionnel. Le but de son travail était d'améliorer la situation des garages pour des élèves de petite section. Dans ce cadre, la situation des boîtes d'œufs prend en compte les difficultés nommées ci-dessus.

Le contexte choisi est celui des œufs et des boîtes d'œufs : la collection à énumérer est la collection d'alvéoles des boîtes d'œufs et celle matérialisant l'énumération est la collection d'œufs. Ce contexte paraît familier de l'élève. En effet, ils savent qu'il faut ranger les œufs dans les boîtes pour les vendre et de ce fait les acheter. Ce contexte permet de résoudre la difficulté n°1. Les alvéoles présentent une organisation spatio-linéaire, c'est-à-dire que les alvéoles sont solidaires les unes aux autres (boîtes de 6 œufs). Le problème consistera à ranger un œuf dans chaque alvéole. Les œufs surnuméraires resteront dans un espace nommé «nid ». Le choix du nid est également social, c'est-à-dire que dans la vie courante, les élèves savent que ce sont les poules qui pondent des œufs et qu'elles le font dans un nid. Pour rester dans le même contexte, la réussite ou l'échec au travail est matérialisé par l'obtention d'une photographie souriante ou non d'un fermier appelé Paul.

Par rapport à la situation des garages, les variables caractéristiques spatiales de l'objet ont été modifiées dans la situation des boîtes d'œufs. Autrement dit, les objets étant les œufs, les élèves ont dans un premier temps travaillé avec des œufs en plastique de taille réelle, puis plus petits pour arriver à davantage d'abstraction avec des modélisations d'œufs, soient des étiquettes. Ce choix fait dans la situation des boîtes d'œufs permet de réduire la difficulté n°2. A la différence de la situation des garages où les élèves manipulent directement l'objet modélisé, la situation des boîtes d'œufs

fait arriver progressivement les élèves à la modélisation. De plus, dans cette situation, l'élève a la possibilité de déplacer l'ensemble des alvéoles en même temps, en l'occurrence la boîte d'œufs.

L'objectif des séances de la situation des boîtes d'œufs était clair : il s'agissait d'amener les élèves à concevoir une collection et à exercer un contrôle sur son élaboration par une énumération. Mais aussi, de favoriser le développement des stratégies d'énumération en faisant varier la taille des œufs et la possibilité ou non de voir les alvéoles. Notons d'ailleurs que les cinq premières séances ont été essentiellement des séances portant sur une correspondance terme à terme.

Ci après, voici le tableau résumant les variables choisies pour chaque séance.

	état de la boîte	Taille de l'œuf	Nombre d'œufs par nid
Séance 1	Ouverte	Taille réelle	7,8 ou 9
Séance 2	Ouverte	Taille réelle	7 ou 8
Séance 3	Ouverte	Petite taille	8
Séance 4	Ouverte	Petite taille	8
Séance 5	Ouverte	Etiquette (modélisation)	9
Séance 6	Fermée	Etiquette (modélisation)	9
Séance 7	Fermée	Etiquette (modélisation)	9

Voici les résultats obtenus :

Juste : 1	faux : 0	Absent : abst
-----------	----------	---------------

Prénom de l'élève	Séance 1	Séance 2	Séance 3	Séance 4	Séance 5	Séance 6	Séance 7	% de réussite	% d'absentéisme
Angel	1	1	0	1	1	0	0	<b>57.2</b>	0
Rilal	1	1	0	1	1	0	0	<b>57.2</b>	0
Anthony	1	1	1	1	1	0	0	<b>71.4</b>	0
Alyssa	1	1	1	abst	abst	0	abst	<b>42.9</b>	42.9
Judy	1	1	abst	1	1	0	0	<b>57.2</b>	14.3
Yoan	0	1	1	1	abst	abst	1	<b>57.2</b>	28.6
Théo	0	0	1	1	1	0	0	<b>42.9</b>	0
Julien	1	1	1	1	1	0	1	<b>85.7</b>	0
Oscar	1	1	1	1	abst	1	0	<b>71.4</b>	14.3
Diego	0	1	1	1	1	1	1	<b>85.7</b>	0
Romane	0	1	abst	1	1	1	1	<b>71.4</b>	14.3
Yann	1	1	1	1	1	0	1	<b>85.7</b>	0
<b>% de réussite</b>	<b>66.7</b>	<b>91.7</b>	<b>66.7</b>	<b>91.7</b>	<b>75</b>	<b>25</b>	<b>41.7</b>	<b>65.5</b>	/
<b>% d'absentéisme</b>	0	0	16.7	8.4	25	8.4	8.4	/	9.5

## IV. Mobilité versus fixité

Suite à l'écriture de ces deux mémoires, la question de la mobilité/fixité des objets à énumérer se pose.

Examinons tout d'abord les incidences de cette variable dans les deux cas :

### Fixité des objets à énumérer :

- D'un côté :
  - Les élèves ne se posent pas la question « que faire de l'objet que je tiens, où poser l'objet que je tiens ? ».
  - Dans le cas d'objets organisés sur le support, les élèves, s'ils reconnaissent l'organisation spatiale, peuvent la suivre pour s'aider à mémoriser les objets déjà énumérés.
- D'un autre côté :
  - Un moment de déconcentration, de rêverie peut entraîner une erreur/une inexactitude dans la mémoire de la position du dernier objet énuméré. L'élève peut donc énumérer un objet déjà énuméré ou oublier d'énumérer un objet.
  - L'organisation des objets à énumérer n'est pas forcément perçue par les élèves.

### Mobilité des objets à énumérer :

- D'un côté :
  - Les élèves ont la possibilité d'utiliser la mobilité pour séparer spatialement avec ou sans organisation les objets déjà énumérés des objets non énumérés. D'où les élèves peuvent contrôler en permanence par l'organisation spatiale où en est l'énumération. Une perte de concentration/un oubli du dernier objet énuméré n'entraîne pas forcément d'erreur.
- D'un autre côté :
  - Les élèves, par la mobilité des objets à énumérer, ont une action supplémentaire à effectuer : où déposer cet objet. Les élèves doivent prendre conscience que cette action permet une diminution de l'encombrement de la mémoire.

J. BRIAND s'est posé la question de la fixité/mobilité dans l'article de RDM<sup>64</sup> et a réalisé un tableau décrivant quatre stratégies pour mettre en évidence la complexité d'une énumération avec les objets fixes et possibilité de marquage. Il définit comme rupture le moment de l'activité de l'élève pendant lequel il devra abandonner la collection du regard. Pour réussir l'inventaire de la collection, l'élève doit donc mettre en mémoire la collection déjà constituée (boîtes-allumette).

Élève	Action bouclée	Ruptures visuelles	Charge mémoire	Contrôle
S.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo. Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser la dernière boîte entourée non encore remplie.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N contrôles à effectuer.
M.	Ai : entoure n boîtes (ne pose pas le stylo), (rupture) prend n allumettes et met n allumettes. Ai+1 : entoure n boîtes, met n allumettes : à partir de A2.	(n=2) 2 ruptures par boucle. N/2 boucles.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser les n (n=2) dernières boîtes entourées non encore remplies.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N/2 contrôles à effectuer.
E.	A1 : met une marque au pied de chaque boîte. Ai : met une allumette, efface la marque correspondante. (rupture) Ai+1 : met une allumette, efface la marque correspondante.	Une rupture par boucle.	Il n'y a rien à mémoriser.	Aucun contrôle à effectuer.
C.	Ai : (rupture) prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo. Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser (spatialement) la dernière boîte entourée non encore remplie.	Clément laisse la main sur la boîte. Ou bien il garde les yeux dessus.

J. BRIAND dit donc : « Selon les démarches adoptées, le nombre de ruptures (qui contribue à la définition de la complexité de la tâche) varie de 1 à 3 par boucle.

Conséquences sur la complexité, intérêt pour le comptage : reprenons la situation fondamentale de l'énumération, cette fois sous la forme proposée par un logiciel [Briand, Brousseau, Oyallon 1995]. Le logiciel propose à l'élève de parcourir visuellement une collection de quelques objets. Le pointage (mémorisé par la machine) de chacun des objets inventoriés une fois et une seule est la

<sup>64</sup> BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p. 68 à 70.

*solution du problème posé. Il n'est pas nécessaire d'effectuer une autre action que le seul passage d'un objet à l'autre. A la différence du logiciel, la situation des boîtes d'allumettes, nécessite que l'enfant prenne, à chaque fois, en un lieu précis, les allumettes. Mais les boîtes sont déplaçables. Les élèves mettent ceci à profit pour dépasser la difficulté de la prise des allumettes. Il reste à ne pas commettre d'erreur dans la suite séquentielle allumette-boîte-allumette-boîte, etc. Par contre, la situation des boîtes fixées va créer les ruptures étudiées précédemment. Le marquage ajoute, provisoirement, une difficulté. Dans le cas où les boîtes sont déplaçables, le contrôle s'exerce par la force des choses puisque la boîte concernée est le plus souvent tenue en main.*

*On pourrait donc s'interroger sur l'intérêt à rendre la situation aussi difficile, puisque le but est de construire des situations d'énumération qui favorisent ultérieurement le comptage de petites collections. En effet, cette situation met en œuvre des procédures d'inventaire plus complexes que celles qui seront nécessaires au comptage. Le parcours exhaustif d'une collection montrée n'exige pas que l'on quitte des yeux la collection montrée en passant de l'un à l'autre de ses éléments. Dans le travail que nous venons d'étudier, seule la stratégie de C. permet, par un marquage « au préalable », de diminuer la complexité et de la rendre égale à celle qui est rencontrée lors de l'activité de comptage. Nous pensons toutefois que ce travail d'organisation de la tâche constitue en soi une activité cognitive intéressante. »*

D'après les résultats obtenus lors des expérimentations dans les deux classes, il est difficile de conclure sur laquelle des situations est la plus facile ou difficile car les expérimentations présentent un seul niveau de classe commun (la petite section) et un nombre peu important d'élèves de petite section participant à la deuxième expérimentation. Il semblerait toutefois que nous ayons des résultats en pourcentage plus haut lors de la mobilité des objets.

Pour conclure, nous pensons que les deux situations sont intéressantes à mettre en place dans une classe car elles travaillent deux « sous compétences » de l'énumération :

La situation de fixité des objets à énumérer travaille la sous compétence de repérage visuel d'un chemin au sein des objets à énumérer.

La situation de mobilité des objets à énumérer travaille la sous compétence d'organisation spatiale des deux collections d'objets : la collection des objets déjà énumérés et la collection des objets restant à énumérer.

Nous pensons qu'il est nécessaire de travailler ces deux sous compétences : soit par l'utilisation de deux situations distinctes avec deux contextes différents, soit par l'utilisation d'une seule situation évolutive. Dans le deuxième cas, il semble préférable de commencer par la mobilité des objets à énumérer pour aller vers la fixité, ajouter une contrainte est plus facile à comprendre pour les élèves que de supprimer une contrainte.



## CONCLUSION

Il existe une multitude de problèmes d'énumération par le jeu sur les variables. Il appartient donc à l'enseignant de choisir les variables adaptées, de les faire évoluer au bon moment pour engager l'élaboration de nouvelles procédures et donc de nouvelles connaissances. Cela nous a conduits à nous interroger sur l'incidence que peuvent avoir certaines variables didactiques comme « la permanence possible du lien de l'objet e avec l'objet f » et « la taille de la collection des objets à énumérer » sur la résolution de problèmes ? ».

Il semblait au départ que les modifications des « valeurs » de ces variables, malgré une baisse momentanée du taux de réussite, entraîneraient une évolution des procédures initiales vers des procédures plus expertes.

Il est apparu que la permanence possible du lien de l'objet e avec l'objet f a permis à l'élève de s'approprier la situation : en effet, l'élève doit pouvoir essayer « pour rien », en quelque sorte « pour voir », avant d'être réellement confronté au problème posé. Comme c'était attendu, la perte de cette « permanence du lien » a provoqué ensuite une baisse provisoire du taux de réussite et a permis le développement de procédures nouvelles.

La taille de la collection s'est avérée être un paramètre déterminant : l'enseignant peut la faire varier pour faire que les élèves éprouvent la nécessité de changer de procédures. Ainsi, pour le même problème qui relève de l'énumération, si la collection est « petite », c'est-à-dire qu'elle a un nombre d'éléments faible et donc facilement mémorisable, les procédures de mémorisation, de mise en place d'un chemin sont une bonne solution ; et si la collection est « grande », c'est-à-dire qu'elle a un nombre d'éléments important et donc non facilement mémorisable, les procédures de marquage ou de déplacements des objets de la collection sont une bonne solution. On ne passe pas d'une procédure à une autre par simple prolongement, mais que doit s'opérer une rupture ou un renoncement à une procédure qui fonctionnait et qui n'est plus efficace pour en construire une nouvelle plus adaptée. Cette rupture s'est réalisée lors de l'augmentation du cardinal de la collection à énumérer.

Selon l'âge des élèves, les procédures apparues par le changement de valeur de cette variable diffèrent mais elles évoluent toutes en direction de la diminution de l'encombrement de la mémoire. Les résultats qui ont été obtenus peuvent encore s'expliquer par l'absentéisme, la mobilisation des élèves, les contraintes temporelles et spatiales, les particularités de l'élève et les interactions sociales. En effet, la situation est organisée pour être proposée à des élèves qui ont des particularités intrinsèques, qui sont dans un environnement particulier, qui sont confrontés à certaines contraintes, en un lieu et à un temps choisi.

A la lumière des deux expérimentations, il semble intéressant de jouer sur la variable « fixité des objets e dans leur espace englobant » afin d'amener les élèves à mettre en place des procédures différentes selon la fixité ou la mobilité des objets à énumérer. La fixité des objets amène les élèves vers des procédures de mise en place d'un chemin permettant de passer en revue l'ensemble des objets de la collection, sans en oublier un et sans en prendre en compte un deux fois. Tandis que la mobilité des objets entraîne plutôt des procédures de type déplacements d'objets. Dans les deux cas, une organisation dans l'espace est nécessaire.

Tous ces éléments nous paraissent attester du fait que l'énumération des collections d'objets est à un carrefour entre connaissances numériques et connaissances spatiales puisque,

d'un côté elle est un préalable au comptage/dénombrement, et que,  
d'un autre côté

- les variables didactiques V2 à V6 (la taille de l'espace englobant les collections, la position relative de l'élève vis-à-vis du référentiel/support, la taille relative de l'objet f vis-à-vis de l'objet e, la fixité des objets e dans leur espace englobant, la disposition spatiale des objets e à énumérer dans leur espace englobant) ont un caractère spatial.

- les élèves développent des procédures utilisant des connaissances spatiales (Procédures P3, P4 et P6). Par exemple, quand les objets sont mobiles, on peut déplacer les objets déjà énumérés de sorte à les séparer des objets non énumérés. Ou, quand les objets sont fixes, on peut imaginer un chemin permettant de passer en revue l'ensemble des objets de la collection à énumérer.

De telles situations d'apprentissage dès la petite section de maternelle, au cours de la maternelle en général, ou même en élémentaire s'avèrent être utiles. Notons cependant que le contexte choisi (des garages) pose certaines difficultés et n'est peut-être pas le plus approprié pour des élèves de petite section. Cela pourrait conduire à réfléchir sur ce que pourrait être un contexte adéquat pour une situation à destination de ces très jeunes élèves, en rapport notamment avec la dévolution du problème d'énumération.

Ce mémoire m'a permis de comprendre la complexité du dénombrement et d'appréhender ses différentes composantes. Il a permis aussi d'en approcher des difficultés d'apprentissage chez les jeunes élèves à propos notamment de l'une de ses composantes essentielles : l'énumération. Ce travail pourrait conduire à l'étude de l'incidence d'autres variables didactiques sur la résolution d'un problème d'énumération ; il pourrait aussi mener à une analyse approfondie des connaissances (spatiales en particulier) ou des capacités susceptibles d'être utilisées par les élèves dans ce type de problèmes.

## BIBLIOGRAPHIE

### Ouvrages ou articles de didactique :

ARGAUD Henri-Claude, MAILLARD Monique, CASTRY Nicole, VALESA Marie-Hélène, PORTE Elyane, CHARRAS Myriam, CASTRY Alain (1998-1999), « Placer des jetons », *Grand N*, n°63, p. 9 à 23.

ARGAUD Henri-Claude, MAILLARD Monique, CASTRY Nicole, VALESA Marie-Hélène, PORTE Elyane, CHARRAS Myriam, CASTRY Alain (2001), « Placer des jetons », *Grand N Spécial maternelle : Structuration de l'espace*, Tome 2, Grenoble, p. 45-59.

ARTIGUE M., « Ingénierie didactique », *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol 9/3.

BERTHELOT R. et SALIN M.H., 1992, *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse Université Bordeaux I, LADIST.

BESSOT Annie, COMITI Claude, PARISELLE Claude (1981), « Connaissance de la suite des nombres en fin de C.P. », *Grand N* n°25.

BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse, Bordeaux I.

BRIAND J. et MC CHEVALIER (1995), *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier pédagogie.

BRIAND J. (1999), « Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19-1, La pensée sauvage, Grenoble, p. 41 à 76.

BRIAND Joël, LACAVE LUCIANI Marie-José, HARVOUËT Michèle, BEDERE Dominique, GOUA DE BAIX Véronique (1999-2000), « Enseigner l'énumération en moyenne section », *Grand N*, n°66, p. 7 à 22.

BRIAND Joël, LACAVE LUCIANI Marie-José, HARVOUËT Michèle, BEDERE Dominique, GOUA DE BAIX Véronique (2001), « Enseigner l'énumération en moyenne section », *Grand N Spécial maternelle : Approche du nombre*, Tome 1, Grenoble, p. 123 à 138.

BROUSSEAU G. (1998a), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G. (1998b), actes de l'université d'été d'Olivet.

DOUADY R. (1987), « Jeux de cadres et dialectiques outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 7/2.

MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, La pensée sauvage éditions.

VERGNAUD G (1990), « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, volume 10.2, p. 133 à 170.

VERGNAUD G. (1991) « L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine »,

in J. Bideaud, C. Meljac, J-P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre*, Presses Universitaires de Lille, pp 271-282.

VERGNAUD G. (2001), *Formes opératoires et formes prédicatives de la connaissance*, Conférence de Montréal 2001.

### **Ouvrages à destination des enseignants :**

BRISSIAUD Rémi, MALLAUSSENA Philippe, *J'apprends les maths – PS*, Retz.

BRISSIAUD Rémi, BOULARD Christiane, OUZOLIAS André, RIOU Martine, *J'apprends les maths – GS*, Retz.

ERMEL (1990), *Apprentissages numériques - Grande section*, Hatier, Paris.

ERMEL (2000), *Apprentissages numériques - CP*, Hatier, Paris.

ERMEL (2005), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes – GS cycle 2*, Hatier, Paris.

NEY Lisbeth, RAJAIN Claude, VASLOT Evelyne (2006), *Des situations pour apprendre le nombre - cycle 1 et GS*.

VALENTIN Dominique (2004), *Découvrir le monde avec les mathématiques- Situations pour la petite et moyenne section*, Hatier, Paris.

### **Programmes et instructions officiels :**

M.E.N. (2008), BO du 19 juin 2008.

M.E.N. (2007), *Qu'apprend-on à l'école maternelle?*

### **CD :**

BRIAND J., BROUSSEAU G., OYLLON J.L. (1995), Logiciel, "A nous les nombres", Profil éditions, Paris.

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.-H. (2004), *Apprentissages mathématiques en maternelle, Situations et analyses*, cédérom, Hatier, collection « Pédagogie », Paris.

### **Sites internet :**

BROUSSEAU G., « Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques »

[http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire\\_Brousseau.pdf](http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf)

Equipe Démathé :

<http://eduxmath.inrp.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/archiaves/parteneriat-inrp-08-09/demathE>

Logiciel proposant des situations d'énumération (adaptation de « A nous les nombres »)

[http://www.abuledu.org/leterrier/a\\_nous\\_les\\_nombres](http://www.abuledu.org/leterrier/a_nous_les_nombres)

Analyse du logiciel

[http://pedagogie.ac-toulouse.fr/ien65-tarbes-adjoint/tice/tice\\_apprentissages/construct\\_nombre1.pdf](http://pedagogie.ac-toulouse.fr/ien65-tarbes-adjoint/tice/tice_apprentissages/construct_nombre1.pdf)