Le tecnologie, una seconda chance per i laboratori di matematica?

Luc Trouche, Institut National de Recherche Pédagogique, Lyon (France), Luc.Trouche@inrp.fr,
http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire

Le texte ci-dessous reprend les grandes lignes d'une conférence prononcée à Turin. Je remercie Ferdinando Arzarello et Ornella Robutti pour leur invitation, et Michela Maschietto pour la traduction des diapositives support de la conférence. Cette traduction a été exploitée ici : que le lecteur ne s'étonne donc pas de trouver des ilots en italien au sein d'un texte en français. J'espère que les lecteurs pourront s'engager avec confiance dans cette sorte de laboratoire de la communication franco-italienne !

Préambule

Les laboratoires de mathématiques, dans les lycées, existent ! La requête, avec les mots clés « laboratoires de mathématiques lycée », obtient, le 6 septembre 2009, 138000 réponses sur Google (Figure 1), témoignant d'une grande diversité de réalités.

Figure 1. *Multiplicité et diversité des laboratoires de mathématiques*

Explorons plus avant cette notion de laboratoires de mathématiques scolaires, en recherchant ses racines, en analysant le rôle des outils dans son développement, en regardant ses concrétisations institutionnelles, et, enfin, en considérant le point de vue des professeurs.

1) I laboratori di matematica, una nota *metafora*, regolarmente rivisitata

Pour apprendre les mathématiques, il faut faire des mathématiques. Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. Résoudre des problèmes, c'est manipuler des objets. Cette idée n'est pas neuve, on peut en trouver des traces dès les premiers apprentissages mathématiques. Cette idée resurgit avec force au début du XXème siècle, avec à la fois l'émergence de nouvelles idées pédagogiques[1], et l'essor des sciences et de leur enseignement (qui concurrence dès lors les humanités). La promotion d'un apprentissage actif des mathématiques est le fait des mathématiciens et de la première organisation internationale qui se constitue autour le l'enseignement des mathématiques (Maschietto et Trouche online). Dans cette perspective, faire des mathématiques, c'est faire « comme des mathématiciens » : manipuler des objets, rechercher des invariants, formuler des hypothèses, discuter dans la communauté, engager des démarches de preuve. La métaphore du *laboratoire de mathématiques* est donc naturelle pour donner forme à cette volonté de donner une large place à l'activité des élèves. Les descriptions de ces laboratoires sont précises, par exemple sous la plume du mathématicien Borel :

> « Si è già intuito quel che potrebbe essere, secondo me, il laboratorio di matematica ideale: sarebbe, per esempio, una *bottega* di falegnameria; l'assistente di laboratorio sarebbe un falegname che, nei piccoli istituti, verrebbe solo qualche ora alla settimana, mentre, nei grandi licei, sarebbe quasi sempre presente.
>
> Sotto la supervisione dell'insegnante di matematica, e seguendo le sue istruzioni, gli allievi, aiutati e consigliati dall'assistente di laboratorio, lavorerebbero *a piccoli gruppi* per la realizzazione di *modelli* e *semplici apparecchi*. Se si possedesse un *tornio*, potrebbero costruire delle superficie di rotazione; con *pulegge* e *spaghi*, farebbero le esperienze di Meccanica che ci descriveva Henri Poincaré, verificherebbero *in modo concreto* il parallelogramma delle forze, etc.
>
> In un angolo, ci sarebbe una bilancia da droghiere; acqua e qualche recipiente permetterebbero, per esempio, di far svolgere agli allievi, *su dati concreti*, i problemi classici sui recipienti che si riempiono mediante un rubinetto e che si svuotano mediante un altro rubinetto, etc. » (Borel 1904)

L'évocation des laboratoires s'appuie toujours sur des outils, permettant de réaliser des expériences. L'essor des outils informatiques va donner, à la fin du XXème siècle, une nouvelle vitalité à cette métaphore, en particulier dans le cadre de la Commission française de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, présidée par le mathématicien Jean-Pierre Kahane, qui souligne aussi la responsabilité de l'institution, et l'importance de la formation des maîtres.

> «I licei potrebbero ospitare *laboratori di matematica accanto a quelli di fisica*. Allievi e insegnanti vi troverebbero *documenti, materiali informatico, software*… Potrebbero riunirsi, organizzare dei seminari, invitare conferenzieri o consulenti. Fasce orarie specifiche potrebbero essere riservati agli insegnanti per la loro *formazione in servizio*.
>
> Le proposte precedenti ci sembrano *ambiziose* e allo stesso tempo *ragionevoli*. *Ambiziose in quanto implicano evoluzioni in tutti gli attori del sistema educativo*. Ambiziose perché ciò che è in gioco è urgente e importante. Ragionevoli perché gli *attuali insegnanti di matematica sono aperti al cambiamento*, e pronti ad accettare la sfida che questo secolo lancia loro. Infine, ragionevoli perché non si tratta di costruire qualcosa dal nulla, ma di far evolvere la formazione in matematica del nostro paese in un progetto coerente.
>
> Tra matematica e informatica vi è una *solidarietà fondamentale* che si basa sulla storia (Turing, Von Neumann) e sulle pratiche attuali, ma questa solidarietà non è senza contraddizioni» (Kahane 2000).

Les descriptions des laboratoires de mathématiques ne sont pas toutes de même nature. Janvier *et al.* (2006) les définissent par un quadruplet : un lieu, des machines, des activités et des propriétés. Il insiste aussi sur leur esprit, basé sur la coopération, au lieu de la compétition :

> *« Una stanza*, attrezzata con materiali, come è il caso dei laboratori di scienze naturali; il materiale include computers, libri, e ogni tipo di oggetto che può essere usato per costruzioni o esperimenti matematici […]. Infine, ma questa è la prima cosa a cui pensare, *un buon repertorio di attività* aperte da proporre agli allievi.
>
> La principale caratteristica dei laboratori di matematica è che sono il *luogo per esperimenti*, i quali richiedo *tempo* e *libertà*. Si dovrebbe fornire agli allievi soggetti da *esplorare* [...]. Questi dovrebbero sentirsi liberi, non sotto pressione. *Anche per gli insegnanti*, i laboratori di matematica sono terreno di sperimentazione. Possono provare nuovi temi, al di fuori del curriculum. L'atmosfera di un laboratorio dovrebbe essere un'atmosfera di *cooperazione* ».

Anichini *et al.* (2003) les définissent plutôt par un système structuré d'activité, en soulignant l'importance des questions de signification :

> « Il laboratorio di matematica è […] un *insieme strutturato di attività* volte alla *costruzione di significati degli oggetti matematici*. […] assimilabile a quello della *bottega rinascimentale*, nella quale gli apprendisti imparavano *facendo* e *vedendo fare*, *comunicando* fra loro e con gli *esperti* »

Ce sont des métaphores de couleur différente, marquée culturellement (par l'informatique d'un côté, par les ateliers de la renaissance de l'autre). J'y vois aussi une différence essentielle : un laboratoire doit-il se développer dans un lieu spécifique, ou alors peut-il aussi prendre place dans la salle de classe ordinaire ? Je veux dire : bien sûr, il peut aussi être un lieu spécifique, mais, si l'on veut penser une évolution de l'enseignement des mathématiques, il faut que le travail de recherche mathématiques puisse exister dans le système d'activité structuré de la classe, que cette activité puisse prendre la forme, pendant un temps, d'un laboratoire de mathématiques. De ce point de vue, les technologies peuvent avoir un rôle majeur.

[1] Dont témoigne par exemple en France le nouveau dictionnaire pédagogique (Buisson 1911) et, en Italie, le travail de Maria Montessori (1909).

2) Non c'è laboratorio senza mediazione: problemi, oggetti, macchine

Nous faisons donc le choix de regarder ce qui se passe, ou ce qui pourrait se passer dans des classes ordinaires. On ne peut pas faire des mathématiques sans problèmes pour chercher et sans objets à manipuler, et sans outils pour les manipuler (Figure 2). Ce sont les ingrédients de base du travail mathématique. Il reste ensuite au professeur à organiser ces ingrédients pour construire un milieu pour les apprentissages mathématiques. Le concept *d'orchestration* a été introduit pour décrire cette organisation, avec des définitions qui peuvent varier :

- pour Bartolini Bussi (Bartolini Bussi 1996, Bartolini Bussi et Maschietto to appear), il s'agit de l'orchestration des discussions dans la classe, phase essentielle dans des cycles didactiques qui structurent le temps de la classe ;

- pour Drijvers et Trouche (2008), il s'agit d'une notion plus globale, qui décrit toute la gestion didactique d'une situation mathématique dans un environnement donné. C'est à cette acception que nous nous référerons ici.

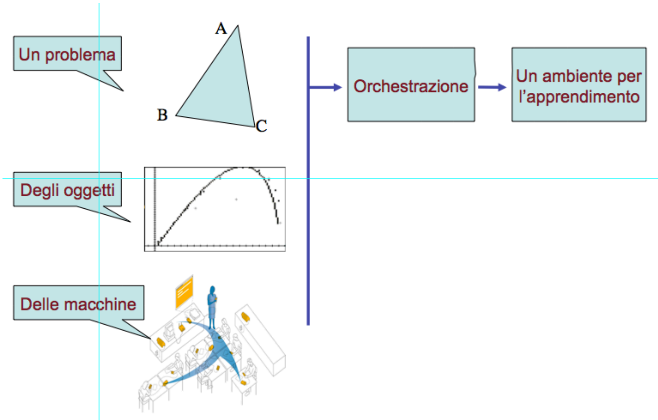

Figure 2. *Les ingrédients du travail mathématique dans la classe*

Le travail mathématique a toujours sollicité un ensemble d'outils (Trouche 2005), qui ont souvent été exploités dans la perspective des laboratoires mathématiques (voir en particulier l'expérience du « Laboratoire des machines mathématiques de Modène », Maschietto 2005). Les technologies donnent aujourd'hui de nouveaux moyens pour manipuler les représentations des objets mathématiques (calculatrices, logiciels de géométrie dynamique). Les innovations pédagogiques ou les projets de recherche qui exploitent, pour l'enseignement des mathématiques, ces nouveaux environnements font d'ailleurs souvent référence à la notion de laboratoire (voir en particulier Aldon *et al.* 2008). Les technologies donnent aussi un ensemble de moyens (tableau blanc interactif ou calculatrices interconnectées par exemple) pour faire fonctionner une classe en réseau, ce qui donne de nouvelles opportunités pour développer un débat scientifique dans la classe, élément nécessaire d'un laboratoire de mathématiques (§ 1). Il reste à concevoir des situations mathématiques qui permettent de stimuler la recherche (Trouche 2002) et des orchestrations qui permettent de mettre ces situations en œuvre, ce qui n'est pas si facile, comme on va le montrer sur un exemple.

Cet exemple provient de l'expérience d'un groupe de recherche (Hoyles *et al.* 2009), qui a pour objectif d'exploiter un environnement (TI-Navigator[2]) qui met en réseau les calculatrices individuelles des élèves (Figure 5). La situation mathématique, et son orchestration, ont été conçues dans ce groupe de recherche : il s'agit de déterminer l'aire d'un triangle isocèle ABC, sachant que les deux côtés égaux mesurent 10 cm. L'objectif de cette situation est d'introduire la notion de fonction, l'aire du triangle étant fonction de la mesure de sa base. L'orchestration de la situation a été soigneusement pensée. Elle a du faire des choix parmi de nombreuses possibilités (par exemple superposer tous les résultats des élèves dans le même repère, ou afficher sur l'écran commun, les uns à côté des autres, les fenêtres des calculatrices des élèves). Dans un premier temps, c'est la première solution qui est choisie par le professeur. Le travail des élèves passe par plusieurs étapes :

- utilisant des outils « anciens », le compas et la règle graduée, les élèves construisent des triangles ABC correspondant à des bases différentes, mesurent la hauteur, et en déduisent, par application de la formule qu'ils connaissent bien, l'aire du triangle. On dispose alors d'un ensemble de couples de nombres (base du triangle, aire du triangle), qui sont affichés par les élèves dans leur repère, et compilés par le professeur sur l'écran commun ;

[2] Voir aussi, sur cet environnement (Robutti, to appear).

- une discussion a alors lieu : devrait-on avoir un nuage de points, ou une « courbe » ?

- les élèves remettent en question la précision des mesures ; de nouvelles mesures sont prises, qui aboutissent à un nuage moins dispersé ;

- des élèves, devant la lourdeur des mesures, proposent d'automatiser le processus, en recherchant une formule qui permette de donner l'aire du triangle à partir de la donnée de la base ;

- différentes formules sont obtenues : la validation vient naturellement de l'ajustement des points déjà placés dans le repère par la courbe représentant la formule (Figure 5).

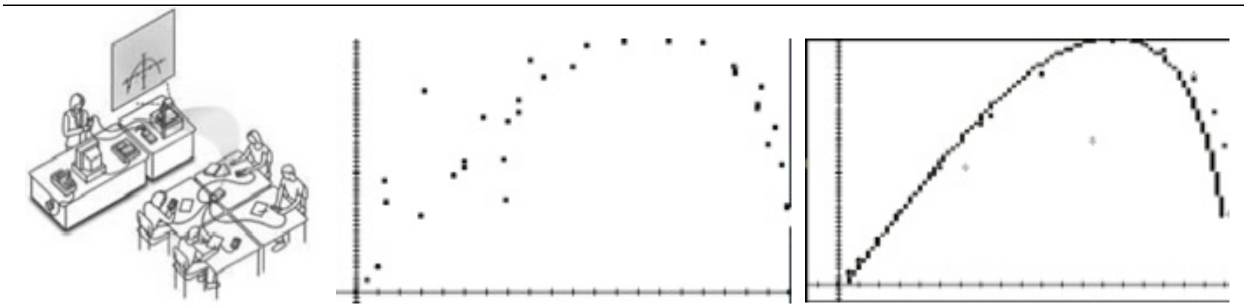

Figure 3. *L'environnement TI-Navigator et deux copies de l'écran commun de la classe au cours de la résolution du problème*

On voit bien, dans cet exemple, le renouvellement fort des conditions de l'émergence d'une nouvelle notion mathématique, qui vient d'une construction conjointe des élèves, dans laquelle les potentialités de l'environnement technologique prennent une place cruciale. La classe fonctionne alors comme un petit *laboratoire* de recherche, dans lequel chacun apporte sa pierre à la construction des nouveaux objets de savoir. On imagine la complexité aussi du travail du professeur, qui ne peut pas toujours prendre en compte, quand il ne les pas anticipés, les résultats des élèves (profusion de résultats apparaissant sur l'écran commun de la classe). Par exemple (première copie d'écran, Figure 5), ce n'est qu'*a posteriori* que le professeur réalise que l'existence de ce nuage de points n'est pas compatible avec le problème que l'on traite : il n'est, en effet, pas possible que deux triangles, avec les mêmes longueurs de côté, aient des aires différentes ; donc on ne peut pas avoir deux points différents sur la même colonne de pixels !

Si l'on veut mettre en place des moments de laboratoires mathématiques dans les classes, la donnée de « bons » outils technologiques et de « bonnes » situations mathématiques ne suffit pas, il est nécessaire de penser les conditions de conception de nouvelles ressources pour les professeurs, intégrant des propositions d'orchestration, et pouvant s'enrichir de l'expérience de leurs utilisateurs.

3) Non c'è laboratorio senza *una riorganizzazione profonda del curriculum*, il caso della prova pratica all'Esame di Stato (II ciclo) in Francia

Le développement d'une *démarche expérimentale* dans l'enseignement des mathématiques (Kuntz 2007) dépasse aujourd'hui le stade de programmes de recherche pour constituer les bases sur laquelle sont pensés les nouveaux programmes de mathématiques en France (2009), où les thématiques d'expérimentation, appuyées sur les TICE, sont largement présentes :

> « l'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement »[3].

On a coutume de dire, en France en tout cas où le baccalauréat, épreuve finale du lycée donnant accès à l'Université, a une place cruciale, que l'évaluation des élèves est à la fois le critère et la source des évolutions institutionnelles. Il est donc tout à fait remarquable que le Ministère de l'Education Nationale ait décidé, de façon expérimentale, de tester depuis 2007 une nouvelle épreuve, dite « pratique », à l'intérieur du baccalauréat actuel :

> Il gruppo di matematica degli ispettori del Ministero dell'istruzione sperimenta *una prova pratica di matematica* nell'Esame di Stato (II ciclo) in Francia dal 2007.
>
> «L'obiettivo della prova è quello di valutare le competenze degli allievi nell'utilizzo delle calcolatrici e di certi specifici software di matematica. Si tratta di valutare negli allievi la capacità di gestire le tecnologie dell'informatica e della comunicazione per l'insegnamento (TIC) per risolvere un problema matematico.

[3] http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/20/1/pgm2nde2009_109201.pdf

I temi proposti ai candidati sono esercizi di matematica dove l'uso delle TIC (calcolatrici grafiche programmabili, computers e software specifici, software liberi, fogli elettronici, tabulatori grafici, geometria dinamica, calcolo simbolico) *intervengono in modo significativo nella risoluzione del problema posto*» (MEN 2007).

Les énoncés, proposés aux élèves dans le cadre de cette épreuve pratique, traduisent une évolution importante des pratiques mathématiques scolaires (Tableau 1).

Sia *f* la seguente funzione definita su R $x \mapsto f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$

Sia *C* la curva rappresentativa di *f* in un sistema di riferimento ortogonale.

Sia *a* un numero reale qualsiasi, M e N i punti di C di ascissa rispettivamente *a* e *–a*.

1) Costruire la figura con un software di vostra scelta

Chiamare il commissario per la verifica della figura

2) Far variare *a* e formulare delle congetture rispettivamente sulla retta (MN) e sull'intersezione I delle tangenti a C in M e N.

Chiamare il commissario per la verifica delle congetture

3) Determinare le coordinate dei punti M e N in funzione di *a*. Giustificare le congetture formulate al punto 2).

Ciò che è richiesto

- Visualizzare sullo schermo il luogo del punto I
- Rispondere con argomentazioni alla domanda 3)

Tableau 1. *Exemple d'énoncé à l'épreuve pratique du baccalauréat*

On voit bien, à travers la lecture de cet énoncé particulier, l'importance des évolutions en jeu :

- ce n'est pas seulement le résultat final de l'élève qui est jugé, mais son activité de recherche, tout au long du problème ;

- l'évaluation est combinée avec une assistance du professeur, à plusieurs moments importants de l'activité ;

- ce qui est valorisé, c'est tout autant le raisonnement que l'aptitude à mobiliser les technologies pour construire des figures ou des courbes, l'aptitude à faire varier des paramètres, rechercher des invariants, conjecturer…

Il existe certainement une grande distance entre ce type de situation mathématique et les situations mathématiques ordinaires, que mettent en œuvre les professeurs dans leurs classes. C'est pour cela que les inspecteurs ont mis en place des groupes de travail, chargés de concevoir de nouvelles situations mathématiques adaptées à cette épreuve pratique. L'institution a alors mis en ligne des répertoires de sujets possibles, pour accompagner la préparation, par les professeurs, des élèves à cette épreuve.

Cette épreuve pratique a été mise en place à titre expérimental. Un premier bilan en a été tiré, par l'Inspection générale, il apparaît largement positif :

[Queste innovazioni] hanno diverse conseguenze.

1) Inducono un diverso rapporto degli allievi alla matematica, perché:

- questa prova dà spazio a ciò che si può considerare un'attività sperimentale per il fatto che l'allievo può realizzare diversi tentativi utilizzando le TIC nell'ambito del tema proposto;

- la valutazione porta l'attenzione sul processo, favorisce formulazioni analoghe a quelle delle "domande aperte", poiché. L'osservazione porta l'allievo a proporre una congettura, cosa che di solito non accade,

- il candidato è affiancato dal commissario durante la prova.

2) Sollecitano differenti pratiche di insegnamento, lasciando la possibilità di dar più spazio al processo di ricerca;

3) Mettono in gioco pratiche di valutazioni differenti: si tratta di valutare il candidato quando sta lavorando, apprezzare il suo modo di procedere, le sue qualità di sperimentatore, la sua perseveranza o il suo gusto di cercare, di prende delle iniziative.

[…] La généralisation de cette épreuve, qui reste dans le cadre des programmes, devrait faire évoluer l'enseignement des mathématiques vers une plus grande cohérence avec ses finalités : comment les mathématiques, avec les outils dont elles disposent actuellement, permettent de résoudre des problèmes, de développer l'expérimentation, le goût et la pratique de la recherche ? (Fort 2007).

Malgré ce bilan institutionnel largement positif, il n'y a pas de généralisation envisagée, pour cette épreuve expérimentale, avant 2013… Cette prudence de l'institution est sans doute le signe de problèmes profonds :

- le signe de la complexité de la mise en œuvre contrôlée de démarches expérimentales dans l'enseignement des mathématiques ;

- le signe de la complexité du renouvellement, par les professeurs, des ressources de leur enseignement. Il ne suffit sans doute pas de donner aux professeurs des répertoires de situations innovantes, il faut les rendre capables de construire, pour eux-mêmes et pour leurs collègues, des situations de ce type, ce qui suppose de penser de nouveaux modes de conception et de mutualisation de ressources.

4) Non c'è attività ricca per gli allievi senza *attività ricca per gli insegnanti*, il caso di Labomep (Sésamath) in Francia

Dans cette perspective de ressources renouvelant les pratiques d'enseignement des mathématiques, le développement de communautés « en ligne », donnant une nouvelle dimension au travail collectif des enseignants nous semble un fait majeur. Ce développement est porté par Internet (Pédauque 2006). Ainsi en France, depuis 2003, le développement de communautés d'enseignants « concepteurs et partageurs de ressources » est particulièrement visible. C'est en mathématiques que l'on trouve l'association la plus nombreuse : Sésamath (http://www.sesamath.net/), dont l'objectif est « Les mathématiques pour tous », et la devise « Travailler ensemble, s'entraider… communiquer » (Figure 4, un extrait de la page d'entrée du site), regroupe, au sein de l'association, une centaine de membres, et, dans une fédération de groupes de projets, plus de 5000 professeurs de mathématiques.

Figure 4. *Le travail collaboratif, un moyen de penser la qualité des ressources et le développement professionnel*

Dans un premier temps, Sésamath a mutualisé les ressources de ses membres ; dans un deuxième temps, elle a mis en place des groupes de projet qui ont conçu ensemble des ressources, aboutissant à un répertoire de plusieurs centaines de ressources, *Mathenpoche* ; dans un troisième temps, elle a mis en place des processus visant à l'amélioration continue de ces ressources, mises à l'épreuve et enrichies par des milliers d'enseignants. Dans la dernière étape (à ce jour), elle a mis en place une interface collaborative, *LaboMep* (pour « Laboratoire de Mathenpoche ») qui permet à des enseignants, individuellement ou collectivement, de puiser dans les ressources de l'association, de les expérimenter, de se les *approprier*, de les enrichir, et de les reverser éventuellement dans le pot commun. Dans ce mouvement, amélioration des ressources et développement professionnel vont de pair. On retrouve ainsi la métaphore de laboratoire, cette fois-ci pour décrire les conditions de travail des professeurs entre eux.

Figure 5. *Pierre, membre de Sésamath, conçoit sa classe comme un laboratoire*

On peut émettre l'hypothèse – à étudier – que le fait de travailler, entre professeurs, dans les conditions d'un laboratoire, est lié au fait de travailler, dans la classe, dans de telles conditions : la dynamique du laboratoire des professeurs encourage la dynamique du laboratoire dans la classe, et réciproquement. C'est, en tout cas, ce qui ressort du travail des professeurs de l'association que nous avons suivis dans leurs classes (Gueudet et Trouche, to appear), dont on peut voir (Figure 4) quelques aspects.

Pour les professeurs de l'association, le laboratoire est sans murs : la collaboration se réalise à distance, parfois en présence. Le travail de conception de ressources est un travail continu, il se nourrit à la fois des interactions avec les élèves dans la classe, et de la réflexion commune en dehors de la classe. Le travail dans la classe d'un professeur que nous avons suivi (Figure 5) exploite aussi des ressources à distance, dans la classe (nous avons ainsi observé le recours, par les élèves, à Google pour faire une multiplication, Figure 6) et hors la classe (par le biais d'un site d'échange sur des problèmes que le professeur a mis en place).

Figure 6. *Google exploité comme « outil à chercher des résultats mathématiques »*

Les situations que nous venons de décrire amènent à questionner la notion même de technologie, ancienne ou nouvelle. De fait, si on considère la variété des objets que les enseignants ou les élèves mobilisent dans leur travail, en classe ou hors classe, il est bien difficile de décider de ce qui rentrera dans la famille des technologies : la règle et le compas ? Internet ? Le tableau blanc interactif ? Les simulations que l'on peut activer sur Internet ? Le texte même des ressources en ligne ? Le développement du numérique pousse sans doute à une évolution du vocabulaire, et donc des concepts : il a favorisé l'émergence du concept de *ressources* (on parle par exemple de « ressources en ligne »), qui a tendance à supplanter celui de *technologies*.

Gueudet et Trouche (2009) proposent une définition large de ce terme, en considérant comme ressource tout ce qui est *disponible*, susceptible de *re-sourcer* l'activité du professeur, ce qui englobe des ressources matérielles (les manuels, les logiciels, les préparations de cours, les ressources en ligne, le tableau blanc interactif) ou non (par exemple les interactions avec les autres professeurs ou avec les élèves). Les ressources apparaissent alors comme un ressort et un produit de l'activité des professeurs, et celle-ci peut alors être vue comme un travail de développement de ressources, en classe et hors classe, que Gueudet et Trouche (ibidem) appellent le *travail documentaire*.

La métaphore des laboratoires est finalement très productive : elle invite à un nouveau regard sur le travail conjoint du professeur et des élèves dans la classe, elle invite aussi à un nouveau regard sur le travail collectif des professeurs entre eux. Elle ouvre des pistes de recherches nombreuses, qui questionnent les relations entre renouvellement de l'activité mathématiques dans les classes, renouvellement des situations mathématiques et orchestrations, développement des ressources pour l'enseignement, développement travail collaboratif dans la classe et hors la classe, entre les élèves, entre les élèves et le professeur, et entre professeurs. Autant de travaux en cours et à venir pour développer les laboratoires… des chercheurs !

Riferimenti bibliografici

Aldon G. *et al.* (2008), Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab, *Repères-IREM 72, French and English version at* http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/lecture/dossier_mutualisation/

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O. (2003), Matematica 2001. *La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica.* LUCCA: Matteoni Stampatore.

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 11-41.

Borel, E. (1904), *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire,* en ligne http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

Buisson, F. (1911), *Le nouveau dictionnaire pédagogique*, en ligne http://www.inrp.fr/.../dictionnaire-ferdinand-buisson/

Drijvers, P., Trouche, L. (2008), From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor, in K. Heid and G. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 363-392)*, Information Age., Charlotte, NC, Vol. 2. Cases and perspectives.*

Gueudet, G., Trouche, L. (2009), Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics* 71, 199-218, http://springerlink.metapress.com/content/6600hx1254664n74/

Gueudet, G., Trouche, L. (to appear), Genèses communautaires, genèses documentaires : histoires en miroir, in G. Gueudet, L. Trouche, *La documentation des professeurs de mathématiques*, INRP et PUR*.*

Hoyles, C., Kalas, I., Trouche, L., Hivon, L., Noss, R., Wilensky, U. (2009), Connectivity and Virtual Networks for Learning, in J.-B. Lagrange, C. Hoyles (eds.), *Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain, Proceedings of the 17th ICMI studies* (pp. 439-462), Springer, New York.

Janvier, M., Kahane, J.-P., Kuntz, J.-P., Ouvrier-Buffet, C. (2006), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom, Impressions d'après la 16ème étude ICMI*, en ligne http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes-en-ligne/icmi-16/

Fort, M. (2007), Rapport sur l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au bac S, MEN, en ligne http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/rapportep

Kahane, J.-P. (dir.) (2000), *Informatique et enseignement des mathématiques*, en ligne http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportInfoMath/RapportInfoMath.pdf

Kuntz, G. (dir.) (2007), Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques, in *Dossiers de la VST*, en ligne http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm

Maschietto, M. (2005). The Laboratory of Mathematical Machines of Modena. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *57*, 34-37.

Maschietto, M., Bartolini Bussi, M.G. (to appear), Mathematical Machines: from History to the Mathematics Classroom. In P. Sullivan & O. Zavlasky (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning.* Springer.

Maschietto, M., Trouche, L. (online), Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* http://www.springerlink.com/content/48045470220u4073/

Ministère de l'Education Nationale (MEN) (2007), *L'épreuve pratique du baccalauréat de la série scientifique*, en ligne http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_presentation.htm

Montessori, M. (1909), *La pédagogie scientifique*, Desclée de Brouwer, Paris, 1958

Pédauque, R.T. (2006), *Le document à la lumière du numérique*, C & F éditions, Caen.

Robutti, O. (to appear), Can we consider graphic calculator as an "old" technology, compared with a new one? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*

Trouche, L. (2002), Activités mathématiques et environnement calculatrice : ouvertures et fermetures. *Mathématiques et pédagogie* 135, 17-44.

Trouche, L. (2005), Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer l'usage des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques, *Actes de l'Université d'été « Le calcul sous toutes ses formes »*, Ministère de l'Education Nationale, en ligne http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm