On s'intéresse ici à la décomposition de 1 en plus de deux fractions.

suite

Cas de trois fractions

Remarque :

a, b et c sont non nuls et différents de 1 car : $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ étant une décomposition de 1, on peut décomposer $\frac{1}{2}$ en somme de deux inverses d'entiers :

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$$

Soit : $cd = 2(c + d)$ ou encore $c(d - 2) = 2d$

suite

Cas de trois fractions

- Si d et $d-2$ sont premiers entre eux, d divise c et $d = 2 + \dfrac{2}{k}$ et comme d est entier, $k = 1$ ou $k = 2$: ce qui donne comme solution : si $k = 1$ alors $d = c = 4$; si $k = 2$ alors $d = 3$ et $c = 6$.
- Si d et $d-2$ ne sont pas premiers entre eux, un diviseur commun divise leur différence, c'est à dire 2.
  Donc 2 divise d et $d-2$ et en posant $d = 2r$, il vient : $c = \dfrac{2r}{r-1}$ et comme r et $r-1$ sont premiers entre eux, $r-1 = 1$ ou $r-1 = 2$, ce qui donne : $d = 4$ et $c = 4$ ou $d = 6$ et $c = 3$.

suite

Cas de trois fractions

EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'École

EXPRIME

Cas de trois fractions

Au delà

Tous les cas sont ici étudiés, puisque $\frac{1}{2}$ est la plus grande fraction de numérateur 1, inférieure à 1 ; par conséquent si on décomposait une autre fraction en deux fractions, la distance séparant de l'unité ne pourrait pas être comblée par une fraction de numérateur 1.
Les seules solutions (à une permutation près) sont :

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

suite

Au delà

On peut envisager une génération de solutions d'ordre supérieur de plusieurs façons :

1. Partant d'une décomposition en 3 fractions, il suffit de multiplier les dénominateurs par 2 pour obtenir une décomposition de $\frac{1}{2}$ et par suite de 1 :

$$1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

suite

Au delà

2 Mais on peut aussi chercher la plus petite fraction dont la somme avec les précédentes est strictement inférieure à 1 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = 1 - \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = 1 - \frac{1}{1806}$$

et ainsi de suite...

suite

Au delà

3 D'autres questions, plus générales peuvent alors se poser :

- Combien y a-t-il de décompositions différentes à un ordre donné ?
- Existe-t-il des décompositions qui ne sont pas générées par les méthodes précédentes ?

retour à Analyse du problème