Enoncé

Existe-t-il deux entiers naturels non nuls distincts a et b tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

suite

Première démonstration

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ , est équivalent à : } a = \frac{b}{b-1}$$

Mais a est entier et comme b et $b-1$ sont premiers entre eux puisqu'on peut écrire la relation de Bezout : $b-(b-1)=1$ avec les deux entiers 1 et -1, $b-1$ est une unité et donc $b=2$.

Ce qui correspond au cas : $a=b=2$, exclu car $a \neq b$.

suite

Deuxième démonstration

On peut supposer :

$$2 \leq a < b$$

alors :

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$$

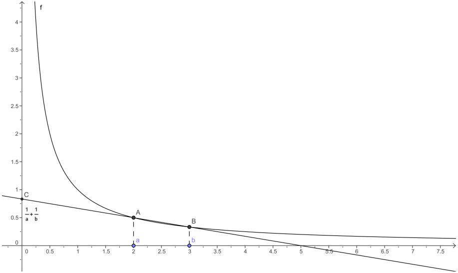
Par conséquent :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$$

suite

Troisième démonstration

On considère l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$, et les deux points de cette hyperbole d'abscisses a et b. La droite qui passe par ces deux points coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Comme $1 < a < b$, ce point est au dessus de 1 quelque soient a et b.



retour à Analyse du problème