Préliminaires.

La base 60 n'a pas finie de nous étonner...

Lors de la rencontre à l'INRP des 13 et 14 juin, le groupe EXPRIME (qui du groupe ?) m'a demandé si je connaissais les nombres parfaits ; c'était en lien avec la décomposition de 1 en fractions égyptiennes.
Eh oui le premier nombre parfait, $6 = 3 + 2 + 1$ (somme de ses diviseurs propres) permet de trouver, en divisant par 6, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; le deuxième parfait $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ permet de trouver $1 = \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.
Le soir je cherche les parfaits suivants, ce sont 496 puis 8128 ; le suivant est très très grand car quelques algorithmes plus tard et une heure plus tard je suis sûr qu'il a plus de 8 chiffres (en base 10). Mais il est évident que chaque nombre parfait nous donne immédiatement une décomposition de 1 en fractions égyptiennes.

J'interroge la base de données sur les suites (http ://www.research.att.com/ njas/sequences/) , elle me donne les résultats suivants :(33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, 2658455991569831744654692615953842176, 191561942608236107294793378084303638130997321548169216) et de nombreuses références, propriétés et conjectures sur les nombres parfaits.

▸ suite

En fait il faut souligner ici que cette base de données est un outil incontournable pour qui veut saisir ce que les ordinateurs et le "ouaibe" ont amené aux mathématiques à un niveau de l'expérimental : en clair par essais, vérifications, conjectures, ... on connait le début d'une suite ; le réflexe approprié est alors de consulter cette base de données, chose qui n'était pas possible au siècle dernier.
Oui l'expérimental s'accompagne toujours de "savoirs faire" ; ici je souligne l'importance de ce nouveau savoir-faire, récent. Jusqu'à très peu, en mathématique, les "savoirs faire" étaient associées à des techniques de preuves, des heuristiques, également à des recherches de savoirs et bibliographiques, etc. ; maintenant il faut "savoir" utiliser de nouveaux outils : c'est un "savoir-faire", autant nouveau qu'indispensable, qui colore l'expérimental en mathématique.

Et les abondants ?

Le lendemain matin, armé des résultats trouvés, j'annonce aux collègues, heureux du travail accompli, mais déçu par le résultat, "les nombres parfaits, c'est une bonne idée concernant la génération de 1 en somme de fractions égyptiennes, mais malheureusement ils sont rares, cela ne peut guère générer le foisonnement de décompositions en fractions égyptiennes de l'unité.

▸ suite

Et puis on sait que le nombre de décompositions de $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est donné par le nombre de diviseurs de n^2 plus petit que n, autrement dit si on savait classifier explicitement toutes les décompositions de 1 en fractions égyptiennes, on aurait résolu le problème de décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers ! Il ne faut pas rêver".
Mais ils sont têtus les copains, 3 heures après, "Eh, au lieu de prendre un nombre parfait, si on prend un nombre abondant, alors on peut écrire 1 comme somme de fractions égyptiennes". Il fallait y penser, merci les braves.
Toujours est-il que mon ordinateur a chauffé deux soirées ; en voici le produit : quelques résultats numériques puis un théorème (ce qui veut dire que le recours au papier et crayon pour écrire une preuve termine toujours un épisode expérimental fructueux) et enfin un questionnement sur les nombres "très abondants", comme 60 et 120, alimente ma réflexion sur les nombres.
Cependant, il ne faut toujours pas rêver, pas d'algorithme n'en sortira pour décomposer rapidement un nombre en ses facteurs premiers, donc pas de casse prévisible de codification de messages par une méthode du type "RSA".

suite

Sur les nombres abondants

Définition et notations : Un entier N est abondant si la somme de ses diviseurs propres est plus grande que N ; dans la suite nous dirons qu'un nombre est abondant (au sens large) s'il est abondant au sens strict ou s'il est parfait. Nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble des diviseurs propres s de N et $S(N)$ la somme de ces diviseurs propres.
Voici les premiers nombres abondants (ou parfaits) :
6, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100,102, 104, 108, 112, 114, 120, ...
Attention, tous les nombres abondants ne sont pas pairs ; le plus petit impair est $N = 945$, avec $S(945) = 975$.
Prenons maintenant une décomposition de l'unité en somme de fractions égyptiennes distinctes (FE) : $1 = \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \ldots + \dfrac{1}{n_k}$, avec : $1 < n_1 < n_2 < \ \ldots \ < n_k$.
On a le résultat suivant (immédiat à démontrer, mais remarqué qu'après un certain nombre de manipulations) :

Lemme : soit une FE (décomposition de 1 en fractions égyptiennes distinctes), alors $N = ppcm(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k)$ est abondant (au sens large).

suite

Pour la preuve, il suffit de multiplier par N l'équation (FE) :
$N = \frac{N}{n_1} + \frac{N}{n_2} + ... + \frac{N}{n_k}$ et de remarquer que les fractions $\frac{N}{n_i}$ sont des entiers distincts diviseurs de N, et donc $S(N) \geq N$.

Moralité : à toute décomposition de 1 en FE, on associe canoniquement un nombre abondant.

Questionnement : inversement, prenons un nombre abondant N, comment et combien de décompositions de 1 en FE peut-on obtenir ?
Autrement dit, soit N un abondant alors il faut résoudre l'équation :

$$N = \sum \epsilon_i \, s_i$$

pour $s_i \in \mathcal{S}$ et $\epsilon_i \in \{0, 1\}$.
Pour toute solution de cette équation on obtient une décomposition de 1 en FE. En particulier il est évident que pour tout nombre parfait on obtient une et une seule solution, donc une et une seule décomposition de 1 en FE.

suite

Voici un **programme** (relativement court, mis au point après d'autres programes plus simples), avec un logiciel de calcul formel qui permet de construire quelques solutions pour tout N, $N <= 120$: nous verrons après la difficulté liée au nombre abondant 120.

```
> with(numtheory,divisors) :
>sommes :=proc(n)
local a,b,c,A,j,k,m,v ;
a :={0} union (divisors(n) minus {n}) ;b :=nops(a) ;c :=convert(a,'+')-n ;
A :=NULL :
for j in a do if c-j in (a minus {j}) union {0} then
A :=A,map(u-¿u/n,a minus {c-j,j,0}) ;
elif c-j¿0 then for k in a minus {j} do if c-j-k in a minus {j,k}
then A :=A,map(u-¿u/n,a minus {c-j-k,j,k,0}) ;
else for m in a minus {j,k} do if c-j-k-m in a minus {j,k,m}
then A :=A,map(u-¿u/n,a minus {c-j-k-m,j,k,m,0}) ;
fi ;od :fi ;od :
fi ;
od :
A ;
end :
```

suite

On applique cette procédure aux premiers nombres abondants, ce qui donne :
>F := [6, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60] :
>seq([F[i],sommes(F[i])],i=1....14) ;

$$6, \{\{1/2, 1/6, 1/3\}\}$$

$$12, \{\{1/2, 1/6, 1/3\}\{1/12, 1/2, 1/6, 1/4\}\}$$

$$18, \{\{1/2, 1/6, 1/3\}, \{1/2, 1/3, 1/9, 1/18\}\}$$

$$20, \{\{1/2, 1/4, 1/5, 1/20\}\}$$

$$24, \{\{1/12, 1/24, 1/8, 1/6, 1/4, 1/3\}\{1/12, 1/2, 1/6, 1/4\}, \{1/2, 1/24, 1/8, 1/3\}, \{1/12, 1/2, 1/24, 1/8, 1/4\}\}$$

$$28, \{\{1/2, 1/4, 1/7, 1/14, 1/28\}\}$$

$$30, \{\{1/2, 1/6, 1/5, 1/10, 1/30\}, \{1/2, 1/3, 1/10, 1/15\}\}$$

$$36, \{\{1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 1/9, 1/18\}, \{1/2, 1/36, 1/6, 1/4, 1/18\},$$

$$\{1/12, 1/2, 1/36, 1/3, 1/18\}, \{1/12, 1/2, 1/4, 1/9, 1/18\}\}$$

$$40, \{\{1/2, 1/40, 1/8, 1/5, 1/20, 1/10\}, \{1/2, 1/40, 1/8, 1/4, 1/10\}, \{1/2, 1/4, 1/5, 1/20\}\}$$

$$42, \{\{1/2, 1/3, 1/42, 1/7\}\}$$

$$48, \{\{1/48, 1/24, 1/16, 1/8, 1/6, 1/4, 1/3\}, \{1/12, 1/24, 1/8, 1/6, 1/4, 1/3\},$$

$$\{1/2, 1/48, 1/24, 1/16, 1/8, 1/4\}, \{1/12, 1/2, 1/48, 1/24, 1/16, 1/8, 1/6\}\}$$

$$54, \{\{1/2, 1/3, 1/27, 1/54, 1/9\}, \{1/2, 1/3, 1/9, 1/18\}\}$$

$$56, \{\{1/2, 1/8, 1/4, 1/56, 1/14, 1/28\}, \{1/2, 1/4, 1/7, 1/14, 1/28\}\}$$

$$60, \{\{1/12, 1/6, 1/3, 1/5, 1/60, 1/10, 1/30, 1/\}, \{1/12, 1/6, 1/4, 1/3, 1/20, 1/60, 1/30, 1/15\}\}$$

▸ suite

Ainsi à chaque abondant on peut associer une ou plusieurs décomposition de 1 en somme de FE. Mais on ne les obtient pas tous au moyen de ce programme.
Quelques procédures plus tard, plus sophistiquées, longues à écrire mais plus rapides, on obtient toutes (?) les décompositions possibles de 1 en FE, pour $N < 120$. Il y en a quelques unes pour chaque abondant. (j'ai vérifié à la main pour les premiers abondants, il faut toujours se méfier des résultats donnés par un ordinateur, non pas pace qu'il se trompe, mais parce qu'on a pu mal programmer et donc il nous renvoie un résultat faux en soi, mais juste en fontion de ce qu'on lui a demandé d'accomplir).
Mais pour $N = 60$, on a 33 décompositions distinctes (est-ce exact ?).
Pouquoi tant, parce qu'il y a des nombres beaucoup plus abondants que d'autres ($S(N)$ grand par rapport à N) ; c'est le cas pour 60 et 120.
Pour 120, j'en ai trouvé déjà 276. Mais je ne sais pas si je les ai toutes obtenues.
A retenir donc trois choses :

- La classification des décompositions de 1 passe par les nombres abondants.
- Cette méthode permet de trouver toutes les décompositions de 1 en FE avec des dénominateurs bornés (par un N abondant choisi a priori).
- Le seul nombre abondant qui fut utilisé historiquement comme base de numération est le nombre 60 ; et il est très abondant ($S(60) = 108$). Ceci permet-il de mieux comprendre pourquoi la méthode des fractions égyptiennes fut utilisée empiriquement en lien avec cette numération en base 60 qui permet tant de partages différents ?

Evidemment il reste des questions, par exemple pourquoi 33 et non pas 19 ou 421 décompositions pour le nombre abondant 60 ? (Ecrit à Vaulx-en-Velin le 21 Juin 2007)

suite

Sur les nombres presque-parfaits

Reprise le 23 juin, avec la mise au point d'un programme simple et rapide qui donne "la plus petite décomposition de 1 en FE" à partir d'un abondant.
Deux suites de nombres qui posent questions se font jour :

- Une suite dont les premiers termes sont 70, 836 et 4030, paramétrant des abondants qui ne donnent pas lieu à une décomposition de 1 en FE ;
- Une suite dont les premiers termes sont 6, 20, 88, 104 et 272, paramétrant des abondants qui donnent une décomposition minimale dont le "ppcm" associé redonne l'abondant de départ.

Le réflexe immédiat fut d'interroger la base de données des suites (cf. plus haut) ; on trouve les suites nommées respectivement A006037 des abondants qui ne sont pas "presque-parfaits" et A006036 des "presque-parfaits primitifs".
Ces deux suites font référence à celle des "presque-parfaits" (A005835) qui est celle constituée des nombres ... :

Définition : Un entier est presque-parfait s'il est somme de certains de ses diviseurs distincts ;i.e. ce sont donc les nombres abondants (ou parfaits) donnant automatiquement lieu à une décomposition de 1 en FE. Autrement dit la boucle est bouclée, la connaissance des décompositions de 1 en FE est équivalente à la connaissance des nombres presque-parfaits ; il reste à expliciter cette correspondance (à ma connaissance rien dans la littérature).

▸ suite

Par ailleurs sur la page A005835 des nombres presque-parfaits figure un programme en "maple" pour les trouver ;je l'adapte pour les décompositions de 1 en FE, de fait il n'est pas plus rapide que ceux que j'ai mis au point mais il est plus complet : il trouve 34 (au lieu de 33) décompositions de 1 en FE pour le nombre 60 et 278 (au lieu de 276) pour le nombre 120.
Voici ce **programme** (attention très technique et peu lisible pour un non-initié au calcul formel)) :

```
> with(numtheory,divisors) :with(combinat) :
> semiparfait :=proc(n)
local A,a,S ; S :=subsets(divisors(n) minus n) :A :=NULL :
while not S[finished] do a :=S[nextvalue]() ; if convert(a,‘+‘)=n then A :=A,a ;
fi ; od ; return A
end :
> semiparfait(30) ;nops([semiparfait(70)]) ;nops([semiparfait(60)]) ;
5, 10, 15, 2, 3, 10, 15, 1, 3, 5, 6, 15
0
34
```

Il ne reste plus qu'à faire une synthèse sous la forme du théorème :

Théorème : A toute décomposition de 1 en somme de fractions égyptiennes, alors le ppcm des dénominateurs est un nombre presque-parfait ; inversement à tout nombre presque-parfait on associe canoniquement un ensemble de décompositions de 1 en somme de fractions égyptiennes, cet ensemble comprenant une décomposition dont le ppcm des dénominateurs est le nombre presque-parfait de départ.

▸ suite

Conclusions

- Par le théorème ci-dessus, les deux concepts de "décompositions de 1 en somme de fractions égyptiennes" et de "nombres presque-parfaits" sont non seulement reliés mais les rapports entre les deux sont explicités.
- Tout spécialiste en théorie des nombres dira, à juste titre, que le résultat (le théorème ci-dessus) est une trivialité, et il aura raison puisque les démonstrations sont à "deux sous", mais ce que ces experts oublient, c'est le fait que nous sommes partis du concept historique de fractions égyptiennes et de l'avoir situé, grâce à une approche originale, dans le cadre de la théorie des nombres. Est-ce que ce rapprochement permettra des reformulations pertinentes de certaines conjectures dans cette même théorie ? Je ne le pense pas, mais sait-on jamais !
- Si l'importance historique des fractions égyptiennes est attestée, il est intéressant de se poser la question de savoir ce que ce travail (d'un groupe) peut amener au point de vue épistémologique. De ce point de vue, il me semble qu'à travers cet exemple des fractions égyptiennes, le sens et le rôle de "l'expérimental en mathématiques" sont précisés, en tenant compte des nouvelles technologies (TICE)

J'espère que cette "narration de recherche" pourra permettre de mieux situer l'apport des TICE dans le domaine de l'expérimental en mathématiques qui a toujours été, et qui le restera toujours, le fait de s'appuyer sur des concepts naturalisés pour accéder et s'approprier de nouveaux concepts (plus abstraits) qui à leur tour seront naturalisés.

Le 25 juin 2007 Michel

▸ Retour aux Situations connexes