Le document suivant est extrait d'un ensemble de ressources plus vastes construites par un groupe de recherche INRP-IREM-IUFM-LIRDHIST. La problématique de ce groupe est centrée sur le questionnement suivant : En quoi les problèmes de recherche et la dimension expérimentale qu'ils contiennent permettent-ils des apprentissages mathématiques (et pas seulement transversaux).

L'ensemble des ressources sur ce thème sera à terme disponible sur le site educmath de l'INRP, educmath , et il sera possible par une navigation simple d'approfondir et de prolonger de très nombreuses notions abordées. Seront à disposition : des textes théoriques sur la dimension expérimentales en mathématiques, des ressources concernant le problème ouvert, des textes similaires à celui présenté ici mais concernant d'autres situations mathématiques, des approfondissements concernant cette situation.

retour au menu Fractions Egyptiennes

suite

Concernant ce document, son objectif premier est de faciliter la mise en oeuvre d'un problème particulièrement riche en mettant en particulier en évidence ses potentialités et celles qu'il dévoile chez les élèves.
Dans ce but, nous proposons une vue de l'ensemble des objets mathématiques que l'on peut espérer travailler lors de la mise en oeuvre de ce problème dit ici des "fractions égyptiennes".
Cette vue a pu être obtenue par une analyse approfondie s'appuyant sur de nombreuses expérimentations à tous les niveaux du collège et du lycée.
Cette situation peut irriguer plusieurs séances de mathématiques et ses prolongements permettre encore de nombreuses heures de découvertes mathématiques.

suite

La situation considérée est liée à l'énoncé ci-dessous :

Peux-tu trouver deux entiers naturels a et b distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ *?*

Peux-tu trouver trois entiers naturels a, b et c distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ *?*

Peux-tu trouver quatre entiers naturels a, b, c et d distincts tels que : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ *?*

Continue...

Sans trop approfondir pour l'instant, il est clair que ce problème est pour la plupart de nos élèves un problème de recherche. Avant de parler de sa mise en oeuvre, donnons tout d'abord quelques éléments de solution :

Pour tout $b > 1$, $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ équivaut à : $a = \frac{b}{b-1} = 1 + \frac{1}{b-1}$.
$b = 2$ donne $a = 2$, ce qui ne convient pas et tout autre entier b ne convient pas.
La réponse à la première question est donc « non, il n'existe pas deux tels entiers »

La réponse à la deuxième question est oui, avec une unique solution : (2,3,6).

La réponse aux questions suivantes est ensuite toujours oui avec 6 puis 72 puis 2320 puis 245765 puis 151182379 solutions avec des entiers tous distincts. Voici par exemple des n-uplets solutions à différents rangs :(2,3,10,15) ;(2,3,7,42) ;(2,4,5,6,20) ;(2,5,6,10,30) ;(2,3,7,43,1806) ;...

suite

Pour la première séance de 55 minutes, le début de scénario peut être le suivant :

Les élèves se sont installés par groupe de 4 ou 5 Ils font face au professeur	Le professeur Les élèves	Présente le type d'activité écoutent et prennent connaissance du type d'activité	
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Présente le problème et précise les outils disponibles écoutent et prennent connaissance du problème	Énoncé sur transparent
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Vérifie l'appropriation de la consigne en en demandant une reformulation Un reformule sur la demande du professeur Les autres écoutent	Énoncé sur transparent
Les élèves font face au professeur	Le professeur Les élèves	Demande aux élèves de poser toutes les questions qu'ils veulent sur cet énoncé. Gère des débats permettant de répondre à des questions du type : Qu'est qu'un entier naturel ? Que veut dire $1/a$? Posent éventuellement des questions puis débattent	Énoncé sur transparent
Les élèves sont en groupe de travail	Le professeur Les élèves	Donne le départ de la recherche Débutent la recherche	Papier Crayon Calculatrice ?
Les élèves sont en groupe de travail ▸ suite	Le professeur Les élèves	Reste à distance puis circule pour prendre de l'information sans intervenir lorsque les élèves sont absorbés par leur recherche Cherchent	Papier Crayon Calculatrice ?

Ces éléments étant donnés, présentons des pistes de mise en oeuvre envisageables.

Se posent ici plusieurs questions importantes : De quel matériel vont disposer les élèves ? Comment gére-t-on le premier cas ? Propose-t-on l'énoncé donné plus haut dans son intégralité ou morceau par morceau ou... ?

Comme on peut le voir plus loin, l'utilisation ou non de la calculatrice diversifie les procédures des élèves. Il est donc important de prévoir cet aspect matériel en fonction des objets mathématiques que l'on souhaite le plus voir émerger.

A l'issue de plusieurs expérimentations, on peut constater que le premier cas est difficile pour de nombreux élèves et donc délicat à gérer.

Nous proposons donc deux scénarios différents suivant les niveaux de classe.

Pour un travail en collège et pour des classes de seconde peu à l'aise on pourra faire une première mise en commun après environ 10 à 15minutes de recherche. Cette mise en commun aura pour but de faire le point sur les premières approches de ce premier cas difficile et donc de relancer par un débat une recherche qui s'enlise.

Pour un travail avec de bonnes classes de seconde et d'autres classes de lycée, une prise d'information par le professeur circulant dans les rangs en début de recherche devrait suffire pour vérifier que l'étude de ce cas ne bloque pas l'avancée des travaux.

▸ suite

Il semble difficile de morceler l'énoncé sans changer la nature du problème et en particulier sans risquer de fermer ce problème sur la question 1. On préfèrera donc une gestion différenciée comme proposée ci-dessus. Pour un public plus aguerri, on pourra éventuellement supprimer les deux premières questions, en gardant bien à l'esprit que les objets mathématiques travaillés seront différents.

Suivant les niveaux de classe et l'approfondissement attendu, la recherche se prolongera plus ou moins. Une première mise en commun, à partir de productions d'élève sur transparents ou affiches, ou directement lors d'un débat doit se dérouler en fin de première séance. Elle permet de faire le point rapidement sur les résultats obtenus (ou sur une partie seulement) en vue d'un développement lors de la deuxième séquence.

Le professeur recueille les productions qu'il va pouvoir analyser entre les deux séances. On peut utilement demander à chaque élève de rédiger un compte rendu personnel de recherche pour la prochaine séance.

Lors de celle-ci, les élèves reforment les groupes pour échanger, confronter leurs écrits et se replonger dans la situation. En s'appuyant sur les productions des élèves, le professeur prolonge le débat et met en avant les résultats, propriétés... qu'il souhaite mettre en évidence ou institutionnaliser.

Remarque : une mise en oeuvre lors de deux heures consécutives est plus simple et plus confortable pour l'enseignant avec éventuellement une pause entre les deux heures.

▸ suite

Comme cela a été rapidement évoqué plus haut, ce problème est un problème de recherche. La mise en oeuvre proposée est bien entendue liée à une attitude attendue des élèves et à une volonté du professeur de la faire vivre. Elle permet de travailler de nombreuses compétences.

Nous ne développerons pas ici d'analyse sur les compétences liées à l'activité de résolution de problème proprement dite (savoir mettre en oeuvre une démarche scientifique, savoir oser, réaliser des essais avec ou sans outils, dégager des sous-problèmes, changer de cadres, conjecturer, se poser le problème de la démonstration, de la preuve...). On renverra le lecteur intéressé à des ouvrages comme celui de Gilbert Arsac, Gilles Germain, Michel Mante sur le problème ouvert.

L'objectif ici est de proposer une liste d'objets, de propriétés, de raisonnements mathématiques que l'on sait susceptibles d'être mis en oeuvre lors d'une telle activité. Tous les éléments de cette liste ont été observés lors d'expérimentations dans de « vraies » classes, dans des conditions de fonctionnement habituel.

Cette présentation doit permettre d'aider le professeur à prévoir et repérer les apparitions de points intéressants dans le contexte de la recherche en classe et d'aider à préparer les mises en commun et synthèses avec les élèves.

La présentation suivante utilise des extraits de productions d'élèves ou des questionnements qui se sont fait jour lors des recherches... ▸ suite

Plutôt en collège...

- Inverse de 0 ?

  "$1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car 0 c'est rien"

  "$1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$ car $\frac{1}{0}$ ça n'existe pas"

- Ecriture décimale d'un rationnel, nombre décimal

  Que faire d'écritures décimales obtenues à la main ?

  Quelles opérations sur les écritures décimales ?
  Qu'est-ce qu'une écriture décimale ?

  Comparaison de travaux sur les décimaux et sur les écritures décimales ?
  Quelle différence dans les manipulations ?
  Qu'est-ce qu'une approximation d'un réel ?

  "Sachant que : $0,3 + 0,2 + 0,5 = 1$, est-ce que : $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1$?
  A-t-on : $\frac{1}{3} = 0,3$?" Qu'est-ce qu'on obtient avec la calculatrice ?

  Quelle approximation avec la calculatrice ?

- Somme de rationnels

  "A-t-on : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$? (à la calculatrice $0,9999...$).Comment le prouver ?"

  Puis un travail de preuve : comment prouver avec les fractions ?

suite

- Vers une perception de l'égalité comme équivalence

  "Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=0,5$ d'où une solution au rang supérieur"

- Cadre géométrique : une perception de découpages possibles du segment $[0;1]$

  "$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2}$ est la plus grande fraction de $[0;1]$ différente de 1, donc je ne peux remplacer le deuxième $\frac{1}{2}$ par une autre fraction qui convienne "

  La réalisation de croquis peut permettre de visualiser : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

- Conception sur les opérations

  A propos de $a+b=ab$: "le produit, c'est plus grand que la somme !"

- Décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$

  "Ce n'est pas possible d'obtenir 1 avec deux naturels distincts, car en ajoutant les deux plus grands résultats, on n'obtiendra que : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=0,833$".

- Possibilité de travailler les compétences en logique avant le symbolisme

  Difficulté pour débattre après l'obtention d'écriture de la forme : $0=0$.

suite

Plutôt en lycée...

- Inverse de O ?
- Somme et différence de rationnels

  "A-t-on : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$?(la calculatrice affichant 0,9999...). Comment le prouver ?"

  Transformation de : $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

  Calculs : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;... ; $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$!
- Décroissance de : $x \mapsto \frac{1}{x}$

  soit en acte comme au collège

  soit lors de l'étude de : $a = 1 + \frac{1}{b-1}$.
- Cadre plus géométrique : une perception de découpages possibles du segment $[0;1]$
- Vers une perception de l'égalité comme équivalence

  "$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est équivalent à $ab = a + b$ ou à $ab = 1 + 1$?"

  "Ici, je multiplie les dénominateurs par 2, j'obtiens : $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0,5$ d'où une solution au rang supérieur"

suite

- Essais successifs, adéquation des valeurs de deux fonctions.

  Cet aspect est mis particulièrement mis en évidence lors de tests sur des expressions de la forme : $\frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{b}$ ou $a + b = ab$

  Pour quatre inverses un élève prend $d = 2$ et teste : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c}$

  $ab + ac + bc = abc$

- Travail sur tableur pour trouver une décomposition en une somme de trois fractions

- Travail en logique

  Raisonnement par l'absurde : $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ donc...

  Impasse : $a = f(b)$; $b = f^{-1}(a)$; $a = f(f^{-1}(a)) = a$

  Exemples et contre exemple pour les problèmes existentiels "Que dire aux élèves qui recherche un contre-exemple pour montrer que : $a + b \neq ab$?"

- Conception concernant la recherche

  "Un « algorithme » existe pour les cas 2 et 3 donc il doit exister pour le cas 1."

  "Inutile de passer au cas 2 si on n'a pas trouvé pour le cas 1"

  Compétence travaillée : les phénomènes mathématiques ne sont pas uniformes.

Remarque 1 :

En lycée, un démarrage sans calculatrice et une utilisation rapide de l'algèbre amènent parfois à des blocages en ce qui concerne le problème. Les productions montrent bien évidemment un travail certain des élèves sur ces notions non encore naturalisées. Une mise en commun pour prolonger ces travaux permet de travailler les transformations d'égalité, l'utilité de mettre en oeuvre des essais et de tester l'adéquation des valeurs de deux fonctions ici de deux ou trois variables... Cette piste n'est donc pas à laisser de côté.

Remarque 2 :

Ont été présentées ci-dessus les pistes les plus fréquentes. De très nombreuses autres sont certainement envisageables suivant le contexte (travail sur les propriétés de divisibilité en arithmétique, utilisation de l'équation du second degré pour déterminer a et b de somme égal au produit avec une généralisation éventuelle...). En cherchant vous en trouverez sans doute bien d'autres.

suite

Nous proposons ci-dessous quelques documents à "l'état brut" qui peuvent vous permettre de prolonger la recherche. Des liens plus détaillés vers des pages ou des sites concernant ce problème et plus généralement les fractions égyptiennes seront proposés sur le site éducmath où la version définitive des ressources sera proposée.

- Des pistes concernant l'obtention de toutes les solutions

Programme d'exploration (somme de quatre termes) :

```
restart
n :=0 : liste :=NULL :
for i from 1 to 4 do
for j from i to 6 do
for k from j to 12 do
for l from k to 42 do
r :=1/i+1/j+1/k+1/l :
if r=1 then n :=n+1 : liste := liste , [i,j,k,l] :
fi
od :od :od :od :
n ; liste ;
```

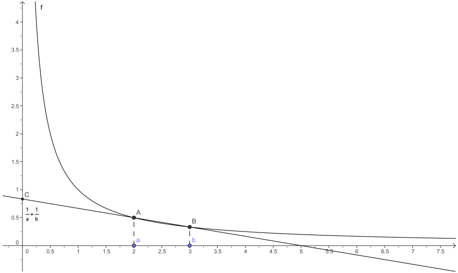
Si : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}=1$, alors : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1}<1$ et :
$1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$
Ceci donne le dénominateur des plus petites fractions susceptibles d'intervenir dans une décomposition de 1 : au rang 1 $\rightarrow$ 2, au rang 3 $\rightarrow$ 6, au rang 4 $\rightarrow$ 42, au rang 5 $\rightarrow$ 1806, au rang 6 $\rightarrow$ 3263442, et limite ainsi la zone d'exploration.

suite

- Fractions égyptiennes et hyperbole

  Une association interessante et accessible à certains de nos élèves :
  Les points A et B appartiennent à la courbe d'équation : $xy = 1$.
  Le point E a comme coordonnées : $(-1, 0)$
  La droite (EF) est perpendiculaire à la droite (AB)
  L'ordonnée de F est le produit des abscisses de A et de B.
  L'ordonnée à « l'origine » de (AB) est : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$

  La feuille à problèmes n°1



- Fractions égyptiennes et pavages

  Un pavage sera dit archimédien si ses pièces sont constituées de plusieurs sortes de polygones réguliers , et que tous ses sommets sont identiques.

  Dès lors autour d'un noeud d'un tel pavage on a la relation :

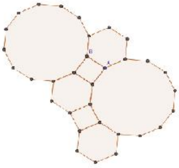
$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$$

  où k est le nombre de polygones et donc de secteurs angulaires autour d'un noeud et où a_i est la mesure en radian d'un des i secteurs.
  Si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i , on a alors :
  $a_i = \dfrac{n_i - 2}{n_i}\pi = (1 - \dfrac{2}{n_i})\pi$, et donc la relation précédente devient :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

suite

Pour $k = 3$, on obtient : $\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} = \dfrac{1}{2}$, qui donne des solutions : (4,8,8) , (4,6,12) ,... Ce qui donne des pavages avec des carrés et des octogones , ou , avec des carrés , des hexagones et des dodécagones . Par exemple :



Pour $k = 4$, on obtient : $\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} + \dfrac{1}{n_4} = 1$, qui donne d'autres pavages archimédiens possibles , dont le suivant :