Les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs : nombres trapézoïdaux

Analyse mathématique du problème :

Après avoir expérimenté sur des sommes d'entiers consécutifs, on conjecture que tous les entiers peuvent être décomposés en somme d'entiers consécutifs, sauf les puissances de 2 d'exposant supérieur ou égal à 1

Démonstration :

Elle utilise le résultat suivant : si n est un entier naturel,
$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On peut noter S_n cette somme.
(Cette démonstration permet de revoir ou d'introduire ce résultat, comme outil de résolution de problème)

N étant un entier naturel, on cherche s'il existe deux entiers naturels a et n tels que :
$N = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+n-1)$
$N = S_{a+n-1} - S_{a-1}$
$N = \dfrac{(a+n-1)(a+n)}{2} - \dfrac{(a-1)a}{2}$
Soit : $2N = (a+n)^2 - a - n - a^2 + a = n(2a+n-1)$

suite

On peut alors raisonner sur la parité de l'entier n :
si n est pair : $2a+n-1$ est impair
si n est impair : $2a+n-1$ est pair

Par conséquent, des deux entiers n et $2a+n-1$, l'un est pair et l'autre impair : leur produit étant égal à $2N$, cela entraîne que N possède un facteur premier impair : N n'est pas une puissance de 2.

Autre raisonnement, par l'absurde : si $N = 2^m$ alors on cherche a et n tels que : $2^{m+1} = n(2a+n-1)$, ceci est impossible car l'un des deux facteurs du second membre est impair.

Il reste encore à démontrer que tout nombre N qui n'est pas une puissance de 2 peut s'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

$2N$ est donc le produit d'un nombre impair i par un nombre pair p.
Alors : $2N = ip$ et $2N = n(2a+n-1)$ et
si : $i < p$, alors il suffit de poser : $n = i$ et $p = 2a+n-1$, soit : $a = \dfrac{p-i+1}{2}$
si : $i > p$, alors il suffit de poser : $n = p$ et $i = 2a+n-1$, soit : $a = \dfrac{i-p+1}{2}$

La conjecture est ainsi complètement démontrée, et cette démonstration donne un procédé pratique pour déterminer a et n entiers naturels tels que :
$N = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+n-1)$.

suite

Historique :

Gauss : somme d'entiers consécutifs.

L'anecdote de sa jeunesse : bien racontée dans l'ouvrage collectif :
"Les mathématiciens" à développer Bibliothèque Pour la science, diffusion Belin page 64

Son théorème sur les nombres triangulaires (même livre, page 66) "euréka !"

Liens :

▸ Université d'Orléans

Très intéressant, avec de nouveaux problèmes sur les nombres trapézoidaux :
▸ Récréomath

Site de Thérèse Eveilleau : "trucs" , "visualiser des formules" , "l'escalier des entiers" : ▸ Thérèse Eveilleau

▸ suite

Au collège :

Savoirs méthodologiques mobilisables :

- expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
- conjecturer
- dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
- se poser le problème de la démonstration, de la preuve

Savoirs mathématiques mobilisables :

- nombres entiers naturels
- entiers pairs, impairs (caractérisation "algébrique")
- calcul algébrique
- arithmétique : divisibilité (par 2, ici)

▸ suite

Au lycée :

Savoirs méthodologiques mobilisables :

- expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
- conjecturer
- dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
- se poser le problème de la démonstration, de la preuve
- observer des invariants et/ou des relations de récurrence
- revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples "génériques") qui ne donne pas une démonstration
- critiquer une démonstration, en percevoir les limites
- analyser les conditions de validité d'un calcul
- se poser un nouveau problème : pour un entier donné, combien a t-il de décompositions en somme d'entiers consécutifs ?
- utilisation d'un outil informatique : le tableur (adresses absolues et relatives)

suite

Savoirs mathématiques mobilisables :

- nombres entiers naturels
- entiers pairs, impairs (caractérisation "algébrique")
- calcul algébrique
- arithmétique : divisibilité (par 2, ici)
- somme des n premiers entiers naturels (ou suite arithmétique) et à ce propos, anecdote sur Gauss
- raisonnement par analyse-synthèse
- raisonnement "par le pair, et l'impair" : raisonnement par exhaustion
- raisonnement par l'absurde
- fonction de deux variables et tableau de valeurs de cette fonction sur un tableur

suite

Enoncés :

Trouver tous les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.

ou

Quels sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

Scénario au collège :

Durée de la séance : une heure de recherche.

Lecture de l'énoncé par le professeur. Demander s'il y a des termes qui posent problème. Le terme "entiers consécutifs" doit souvent être précisé (donner un exemple, et un contre-exemple).

Travail individuel : 10 minutes

Travail en petits groupes : 45 minutes

10 minutes avant la fin, distribution d'un transparent pour les conclusions dans chaque groupe.

Séance suivante : résumé des compte-rendus, correction des erreurs et quelques pistes de solutions partielles : la démonstration de la conjecture ne peut être abordée , celles de sous problèmes peuvent l'être : tous les entiers impairs sont solutions du problème, tous les multiples de 3 aussi.

suite

Scénario au lycée :

Durée de la séance : une heure de recherche.

Lecture de l'énoncé par le professeur. Demander s'il y a des termes qui posent problème. Le terme "entiers consécutifs" doit parfois être précisé (donner un exemple, et un contre-exemple).

Le matériel dont peuvent disposer les élèves est : la calculatrice, et le tableur. Il est à disposition, mais ne doit pas être imposé aux élèves.

Travail individuel : 10 minutes

Travail en petits groupes : 45 minutes

10 minutes avant la fin, distribution d'un transparent pour les conclusions dans chaque groupe.

Séance suivante : résumé des compte-rendus, correction des erreurs et quelques pistes de solutions partielles : la démonstration de la conjecture ne peut être abordée qu'en Première S ou terminale S , celles de sous problèmes peuvent l'être : tous les entiers impairs sont solutions du problème, tous les multiples de 3 aussi.

suite

Forme algorithmique des entiers solutions :

$n+(n+1)=2n+1$ " les impairs "

$n+(n+1)+(n+2)=3n+3$ " les multiples de 3 "

$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$

$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$

et mise en place de deux suites donnant les coefficients a et b de $an+b$.

Lors des séances suivantes, on peut aborder la démonstration de la conjecture, de sous-problèmes, l'aspect tableur, le prolongement sur le nombre de décompositions possibles pour un entier donné. La gestion peut se faire soit par des recherches en groupes en classe, soit en devoir à la maison individuel, en groupe, sur un temps long, avec des bilans intermédiaires.

suite

Compte-rendus au collège :

- Ce problème se prête facilement à l'expérimentation numérique. En essayant des sommes de deux, ou trois ou quatre entiers consécutifs (certains élèves ne se le permettent pas, et se limitent à la somme de deux entiers consécutifs), le travail de groupe enrichit vraiment le champ d'expérimentation, on arrive assez vite à la conjecture que tous les entiers conviennent, sauf les puissances de 2 (différentes de 1).

  Savoirs méthodologiques mobilisés :

  Expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
  Conjecturer

- Voici des conjectures émises au collège :

  $N = 2n+1$, $N = 3n+3$, $N = 4n+6$, $N = 5n+10$, $N = 6n+15$
  Tous les multiples d'un nombre premier impair conviennent
  Tous les nombres, sauf ceux qui sont seulement multiples de 4
  Tous les entiers, sauf les : $2x$, $x = 1, 2, 3, \ldots$
  Tous les entiers, sauf 0 et les 2^n , $n \neq 0$
  Les entiers impossibles sont 0 et tous les entiers pairs, multiples à la fois uniquement de 2 et de 4
  Tous les entiers, sauf les puissances de 2 et le nombre 136
  Des écritures algébriques, suivies d'une vérification sur un ou des exemples numériques

- Des sous-problèmes de ce problème voient le jour

  Savoirs méthodologiques :

  Dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
  Se poser le problème de la démonstration, de la preuve

- Le sous problème suivant est en général émis par de nombreux groupes : "tous les entiers impairs conviennent". sa démonstration utilise le calcul algébrique : soit n un entier naturel , $n+(n+1)=2n+1$, ce qui démontre que tout entier impair est la somme de deux entiers consécutifs.

Compte-rendus au lycée :

- Ce problème se prête facilement à l'expérimentation numérique. En essayant des sommes de deux, ou trois ou quatre entiers consécutifs (certains élèves ne se le permettent pas, et se limitent à la somme de deux entiers consécutifs), le travail de groupe enrichit vraiment le champ d'expérimentation, on arrive assez vite à la conjecture que tous les entiers conviennent, sauf les puissances de 2 (différentes de 1).

  Savoirs méthodologiques mobilisés :

  Expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
  Conjecturer

- Des sous-problèmes de ce problème voient le jour :

  Savoirs méthodologiques :

  Dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
  Se poser le problème de la démonstration, de la preuve

- Le sous problème suivant est en général émis par de nombreux groupes : "tous les entiers impairs conviennent". sa démonstration utilise le calcul algébrique : soit n un entier naturel , $n+(n+1)=2n+1$, ce qui démontre que tout entier impair est la somme de deux entiers consécutifs.

- Les élèves de lycée utilisant plus volontiers qu'au collège des lettes pour traiter de type de problème, ils écrivent les sommes de k entiers e partant de n pour $k=2$, puis 3, puis 4, etc. Ils se posent alors le problème suivant : "Peut-on trouver une méthode par récurrence pour décrire les entiers cherchés ?"

  Savoirs méthodologiques :

  Se poser le problème de la démonstration, de la preuve
  Dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
  Observer des invariants et/ou des relations de récurrence
  Revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples "génériques") , qui ne donne pas une démonstration

suite

Savoir mathématiques mobilisés :

Nombres entiers naturels
Entiers pairs, impairs (caractérisation "algébrique")
Calcul algébrique

$n + (n+1) = 2n + 1$ " *les impairs* "

$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$ " *les multiples de 3* "

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$

$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10$

On trouve alors expérimentalement une façon de déterminer les coefficients "rouges" et les coefficients "bleus" : les rouges augmentent de 1 à chaque ligne et les bleus sont égaux à la somme des deux coefficients (le rouge + le bleu) de la ligne précédente.
Ceci permet, en y mettant le prix, de trouver tous les entiers solutions.

- Pour aborder la démonstration du fait suivant : "tout entier N qui n'est pas une puissance de 2 est la somme de plusieurs entiers consécutifs", les élèves peuvent s'appuyer sur des exemples qu'ils vont "faire parler".

  Savoirs méthodologiques :

  Revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples "génériques") , qui ne donnent pas une démonstration
  Conjecturer

Expérimenter sur des valeurs numériques à la main,
à la calculatrice, au tableur
Se poser le problème de la démonstration, de la preuve
Observer des invariants
Critiquer une démonstration, en percevoir les limites
Analyser les conditions de validité d'un calcul

Savoirs mathématiques mobilisés :

Nombres entiers naturels
Calcul algébrique

$12 = 3 + 4 + 5$, $12 = 4 + 4 + 4$, $40 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$, $40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
si l'on essaye de généraliser cette idée issue de l'expérimentation sur des exemples, on obtient :

Si un nombre N s'écrit : $(2k + 1)n$, avec k et n entiers naturels, alors :
$N = (2k + 1)n$,avec $2k + 1$ termes égaux à n,

$N = (n - k) + (n - k + 1) + ... + (n - 1) + n + (n + 1) + ... + (n + k - 1) + (n + k)$
Les termes se regroupent deux à deux, avec pour somme $2n$:
$(n - k) + (n + k) = 2n$, $(n - k + 1) + (n + k - 1) = 2n$, etc.

On obtient donc k fois $2n$, auquel il faut ajouter n, le terme central, donc on retrouve bien : $N = (2k + 1)n$.

suite

La condition pour que les termes de la somme soient tous des entiers naturels est : $n \geq k$.

Il semble donc, à cette étape, que cette démonstration ne marche pas dans tous les cas, par exemple :

$10 = 5 \times 2 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$, correct, car ici : $n \geq k$
$14 = 7 \times 2 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, ne convient pas , car il y a un nombre entier négatif ! ici : $n < k$, ce qui est très fort, c'est que de la dernière égalité on peut tirer une autre égalité qui va convenir à notre problème , à savoir , comme : $-1 + 0 + 1 = 0$, on obtient : $14 = 2 + 3 + 4 + 5$.

Mais là, il n'est pas facile de rédiger une démonstration "générale".
On comprend pourtant aisément que ce calcul va pouvoir être possible dans tous les cas où $n < k$.
On peut parler d'un exemple générique, qui à lui seul convainc.

La démonstration experte peut être abordée par des élèves de Première ou de Terminale scientifique, mais pas en seconde.

On peut aussi envisager, dès lors que l'on obtient que tout nombre N solution s'écrit $N =$ envisager de construire une feuille de calcul sur tableur, pour y faire figurer les nombres entiers solutions, en fonction des entiers :

a (premier terme) et n (nombre de termes).

suite

Microsoft Excel - somme d'entiers consécutifs

J18 = =$A18*(2*J$1+$A18-1)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
4	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63
5	4	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86
6	5	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
7	6	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	117	123	129	135
8	7	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
9	8	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188
10	9	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216
11	10	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205	215	225	235	245
12	11	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275
13	12	78	90	102	114	126	138	150	162	174	186	198	210	222	234	246	258	270	282	294	306
14	13	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338
15	14	105	119	133	147	161	175	189	203	217	231	245	259	273	287	301	315	329	343	357	371
16	15	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405
17	16	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	440
18	17	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476
19	18	171	189	207	225	243	261	279	297	315	333	351	369	387	405	423	441	459	477	495	513
20	19	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551
21	20	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590

premier terme : a sur la ligne 1
nombre de termes de la somme : n dans la colonne A

Ce tableau Excel permet de conjecturer quels sont les entiers solutions du problème et aussi de déterminer, pour un nombre donné N du tableau, quels sont les sommes d'entiers qui lui sont égales.
Il peut permettre de travailler expérimentalement sur le problème suivant : pour un entier N qui n'est pas une puissance de 2, trouver toutes les décompositions de N en sommes d'entiers consécutifs.

suite

On "voit" en augmentant à droite la taille de ce tableau que :
$135 = 67 + 68$, $135 = 44 + 45 + 46$, $135 = 25 + 26 + 27 + 28 + 29$
$135 = 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25$, $135 = 11 + 12 + ... + 19$
$135 = 9 + 10 + ... + 18$, $135 = 2 + 3 + 4 + ... + 16$
Et c'est tout ! sept sommes possibles pour : $N = 135$.

Un nouveau problème peut être posé : pour un entier qui n'est pas une puissance de 2, combien a t-il de décomposition en somme d'entiers consécutifs ?

Dans la mise en commun, dans les bilans intermédiaires, un gros travail sur le raisonnement peut être fait :

- la réfutation de certaines conjectures erronées nécessite l'utilisation de contre-exemples
- la reconnaissance de conjectures équivalentes nécessite d'utiliser un raisonnement par analyse-synthèse, (ou double inclusion).

Un travail algébrique est aussi conduit :

- reconnaissance d'expressions algébriques différentes pour un même résultat.
- reconnaissance des différences et des rapports entre deux expressions :
- utilisation des lettres et leurs sens dans la situation

retour au menu Nombres Trapézoïdaux