TI-*n*spire Situation n Fiche professeur	*Le cavalier*

1) Les pré-requis mathématiques supposés

Distance, inégalité triangulaire, symétrie axiale, théorème de Thalès (la réciproque) ; confère infra une analyse a priori plus détaillée.

2) Les pré-requis techniques supposés

Construction de points libres, intersection, point sur objet, droites, segments, perpendiculaires, et déplacement de points.

3) La situation de la séance dans la progression annuelle

En début de la géométrie

4) Objectifs de la séance

4.1) Objectifs mathématiques

A un niveau métamathématique, mise en place d'heuristiques, de raisonnements ; formulation et formalisation d'une conjecture. Changements de registres.

Au niveau mathématique :

- propriété de la symétrie axiale, bissectrice et mesure d'angles
- mesure de distances, classement de données, comparaisons

4.2) Objectifs techniques

Maîtrise des commandes élémentaires de l'application géométrie

Mesure de longueurs, calcul de la somme de deux mesures

Lien et transfert de données entre applications

5) Le scenario de la séance

Première partie du travail papier/crayon : demander une conjecture qui sera contrôlée dans la deuxième partie en utilisant le fichier « tns » fourni quand les élèves auront proposé une solution.

- Organisation matérielle

- travail de groupe
- forme et localisation de l'énoncé élève (papier seulement)
- forme de la production attendue : une construction géométrique de la solution du problème sur la calculatrice et sur papier crayon

Ce que fait le prof	Ce que font les élèves	Temps
Début de la séance Consignes Recherche papier/crayon : Le but de ce problème est de déterminer l'endroit de la rivière où le cavalier doit faire boire son cheval. Mathématiquement, c'est le point M qui est tel que la distance CM+ME soit la plus courte possible en notant C, la position actuelle du cavalier et E la position de l'écurie.	Les élèves ont la première partie de la fiche élève.	
Déroulement de la séance • Recherche d'une conjecture en papier/crayon ; dès qu'un groupe a émis une conjecture, le professeur donne • le fichier tns • la deuxième page de la fiche élève technique ⚡ difficulté attendue difficultés (connues) de trouver une solution dans ce problème • Mise à l'épreuve de la conjecture sur la calculatrice ⚡ difficulté attendue :	Recherche papier/crayon, en groupe Transposition des travaux papier/crayon sur la machine puis confrontation avec la solution « boîte noire »	

Sur la machine : difficulté à transposer les recherches papier/crayon sur la machine ; passer d'un dessin aux propriétés caractéristiques de la figure géométrique sous-jacente On peut s'attendre à ce que les conjectures proposées ne soient pas correctes et donc à une nouvelle recherche soit directement sur la machine, soit sur le papier, soit avec des allers-retours papier-machine. ↯ difficulté attendue : blocage, pas de nouvelles pistes de recherche. Prévoir des relances suivant les recherches des élèves ; • Cas particulier (votre solution est elle valable dans un cas particulier ?) • Travailler sur un cas spécifique (en utilisant les mesures du dessin) avant de généraliser • Donner une stratégie de recherche en fonction de la suite prévue (solution géométrique, ou analytique) • Phase de démonstration/institutionnalisation Une phase avec la machine en rétroprojection Une phase sur le tableau	Recherche d'une autre solution avec des allers retours entre la machine et le papier. Risque de désinvestissement de la part des élèves. Relance de l'activité Ecriture d'une solution sur le cahier.	
Fin de séance		

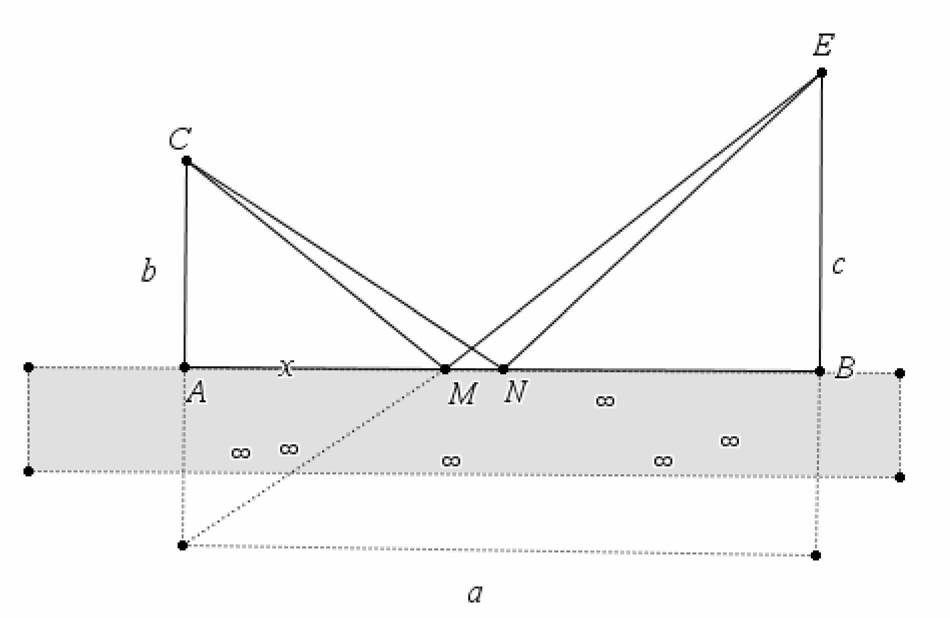
6) Après la séance, les prolongements possibles.

- Construction pour tous les élèves de la courbe représentative à partir d'une analyse du problème, et recherche du minimum sur la courbe ou en utilisant la fonction dérivée.
- Comparaison des différentes solutions géométriques
- Analogie avec les rayons de lumière et les connaissances en optique des élèves.

Dans la suite de ce document, on trouvera une analyse a priori de la séance.

ANALYSE A PRIORI DES SOLUTIONS PROPOSEES PAR LES ELEVES

1) LES STRATEGIES POSSIBLES DES ELEVES



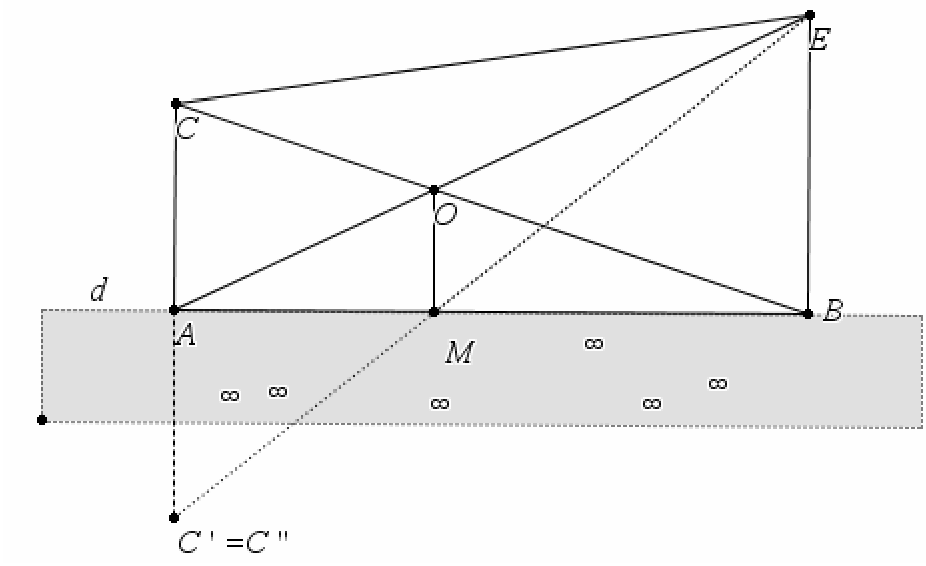
1) au début les élèves peuvent tracer les projections des points C et E sur la droite (d) (segment [AB])

2) Tracer le milieu du segment [AB] ou la médiatrice du segment [AB]

3) Tracer les diagonales du trapèze ABEC ; éventuellement projeter le point d'intersection des diagonales. Ce qui débouche sur une solution correcte au problème.

En revanche la démonstration est difficile et en tout cas utilise le symétrique de C par rapport à la droite d.

La démonstration.



Soit C' le symétrique de C par rapport à la droite d

Il faut montrer que $C'ME$ sont alignés

$$C'' = (EM) \cap (CA)$$

Dans les triangles BCA et BOM on peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{AC}{OM} = \frac{BM}{BA} = \frac{BC}{BO} = \frac{BO + OC}{BO} = 1 + \frac{OC}{BO}$$

Alors

$$\frac{AC}{OM} = 1 + \frac{OC}{BO} \qquad (1)$$

Dans les triangles AEC'' et OEM on peut faire les suivantes relations :

$$\frac{AC''}{OM} = \frac{EA}{EO} = \frac{EO + OA}{EO} = 1 + \frac{OA}{EO}$$

Alors

$$\frac{AC''}{OM} = 1 + \frac{OA}{EO} \qquad (2)$$

de (1) et (2) et des propriétés des diagonales du trapèze on a :

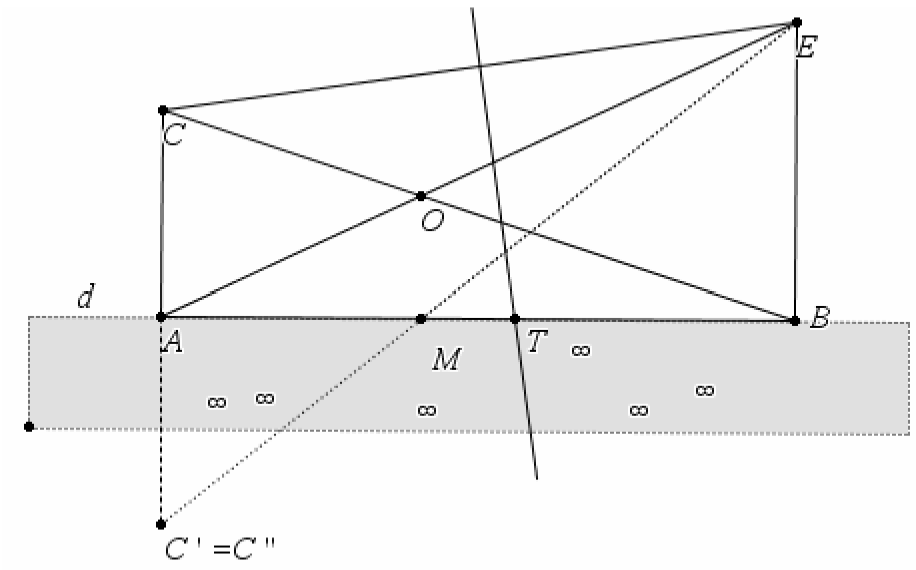
$$\frac{AC}{OM} = \frac{AC''}{OM}$$

Alors $AC = AC''$ donc $C = C''$

et comme AC=AC′ on a $C' = C''$

Pourtant M est l'endroit que le cavalier doit faire boire son cheval pour avoir la plus petite distance possible lors de retour à l'écurie.

4) Tracer la médiatrice de [CE] et son intersection avec [AB] qu'on nommé T ; solution vite écartée.



5) Avoir une approche numérique, c'est à dire placer plusieurs points M et mesurer les distances CM+ME : on peut s'attendre à ce qu'ils transposent cette stratégie sur la machine ; dans ce cas, il faudra s'assurer que les élèves sont capables :

- de mesurer un segment
- Afficher le calcul et le résultat du calcul. (voir fiche annexe A)

Cette approche débouche sur une solution analytique hors de portée des élèves de seconde, mais en revanche permettant de tisser un lien du problème à la définition de fonction, à la représentation graphique et à la recherche d'extremum.

Autre possibilité :

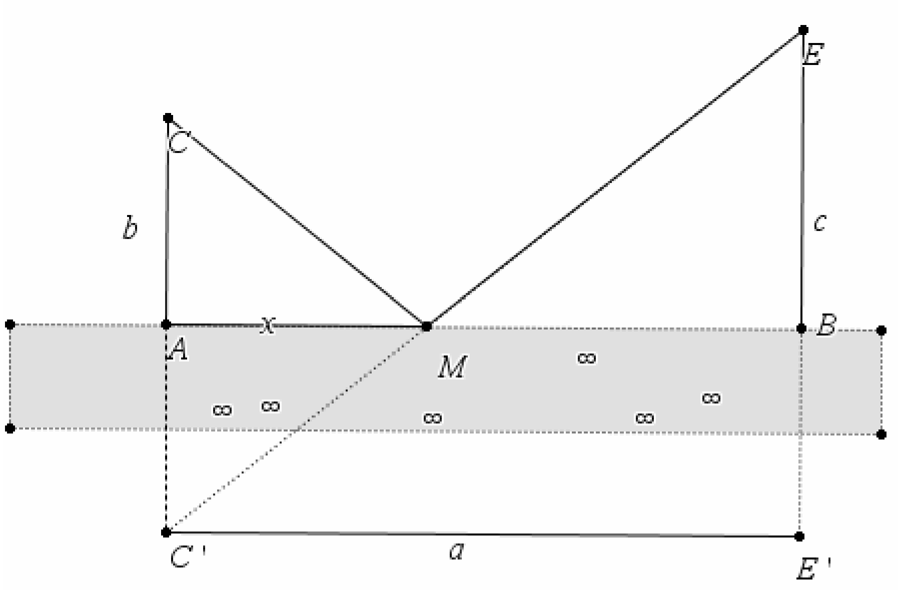
Traitement numérique du problème avec l'utilisation du tableur. (La solution de l'ingénieur, voir fiche annexe B ;-)

On peut imaginer un fichier prêt à être vidéo projeté par le prof. (voir fichier cavalier_analyse.tns)

2) Des solutions mathématiques

a) Analytiquement

On appelle x la distance AM, b la distance AC et c la distance BE. La distance CM+ME se calcule donc, en utilisant le théorème de Pythagore dans les deux triangles AMC et BEM comme :



$$CM + ME = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2}$$

$$f(x) = CM + ME$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2}$$

Pour minimiser le chemin il faut minimiser la fonction *f*. Pour minimiser la fonction *f* il faut trouver les zéros de la dérivée de *f* et faire l'étude du signe de cette dérivée pour conclure au plus petit chemin.

Soit

$$f(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2}$$

La dérivée de *f* est donnée par *:*

$$f'(x) = \frac{x-a}{\sqrt{(a-x)^2 + c^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

Alors on cherche les zéros de la dérivée de f, c'est à dire les solutions de l'équation $f'(x) = 0$; on obtient

$$x = \frac{ab}{b+c}\ et\ x = \frac{ab}{b-c}$$

On peut vérifier que *f'(ab/(b-c))* n'est pas nul. La solution $x = \frac{ab}{b-c}$ apparaît formellement dans la résolution de l'équation parce que la machine, pour résoudre une équation du type $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ la machine résout $A = B$ *;*

Maintenant on doit faire l'étude du signe de la dérivée. Si on calcule la dérivée seconde de *f* en $x = \frac{ab}{b+c}$, on trouve $f''(\frac{ab}{b+c}) > 0$ et donc x est le minimum de la fonction, qui permet de donner la distance du plus court chemin C M+ ME.

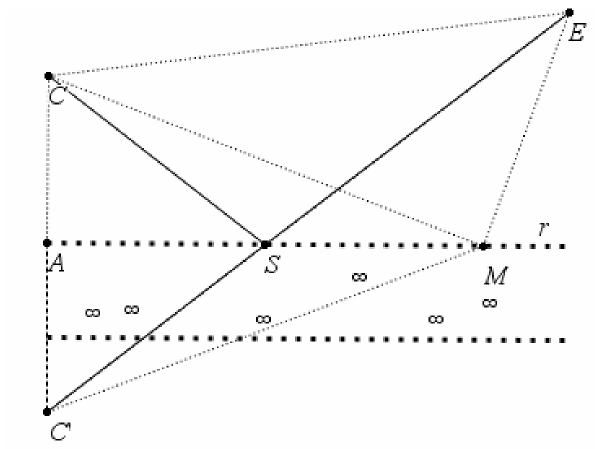
Pour des élèves de première, on montrera que la dérivée de *f* s'annule et change de signe en

$$x = \frac{ab}{b+c}$$

Pour des élèves de seconde, l'observation de la courbe suffira.

b) Géométriquement

Soit C′ le symétrique de C



On va appeler d la droite portée par la berge de la rivière. On considère le point C′ symétrique de C par rapport à la droite d.

Alors, comme la symétrie conserve les distances et que M est son propre symétrique puisqu'il est sur la droite d, on a :

$$MC = MC' \text{ donc } EM + MC = EM + MC'.$$

On trace la droite (EC′). Elle coupe la droite d en S.

On SC = SC′. De plus, d'après l'inégalité triangulaire, on peut dire que :

Quelque soit la position du point M :

$$EM + MC' \geq EC'$$

$$EM + MC' \geq ES + SC'.$$

$$\text{C'est-à-dire : } EM + MC \geq ES + SC$$

Ainsi la longueur du trajet EMC est la plus courte lorsque M est en S.

Ainsi la position du point cherché est le point S intersection de la droite (EC′) avec la droite donnée d.

c) En utilisant la notion de barycentre :

On considère le barycentre G du système {(A,c),(B(b)}. En utilisant le théorème de Thalès, on démontre que G est la solution cherchée.

Preuve
On appelle G′ le point d'intersection de EC′ et AB. G′′ le projeté de G′ sur [C′E′]. Il s'agit de montrer que G′=G.

Dans le triangle C′E′E, on a :

$$\frac{G'G''}{EE'} = \frac{b}{b+c} = \frac{C'G}{C'E}$$

Dans le quadrilatère AC′EE′, on a AG′/AB=C′G′/C′E=b/b+c

$$\frac{AG'}{AB} = \frac{AB}{C'G'} = \frac{b}{b+c}$$

Donc

$$\frac{G'G''}{C'E} = \frac{AG'}{AB} = \frac{b}{b+c}$$

Mais G est barycentre du système {(A,c),(B(b)}, donc

$$\frac{AG}{AB} = \frac{b}{b+c}$$

De ces deux dernières égalités, on déduit que G=G′ quod erat demonstrandum !

PHYSIQUEMENT

On peut considérer ce problème comme un problème de rayon de lumière et de réflexion sur un miroir ; la solution donne des angles d'incidence et de réflexion égaux ; l'expérience physique peut être faite avec un miroir et un rayon laser en visant l'écurie à partir de la position initiale et en réfléchissant sur la rivière !!!!

ANNEXE A

Fiche technique : comment mesurer la somme de deux segments et faire afficher le résultat :

On suppose deux segments [AB] et [BC] tracés dans l'application « géométrie »

	- Mesurer ces 2 segments.	- menu 7 1 puis cliquer sur le segment à mesurer. Déplacer ensuite la valeur de la mesure à l'aide de la souris et cliquer à l'endroit choisi pour l'afficher. Idem pour l'autre segment.
	- Faire afficher la somme des 2 longueurs CM + EM. Pour cela : 1) insérer le texte CM+EM dans la page ;	- menu 1 5 puis cliquer sur une zone libre de l'écran. Écrire C M + E M puis enter.
	2) Faire effectuer le calcul et l'afficher	- menu 1 7 puis cliquer sur le texte *CM+EM* puis cliquer sur le nombre correspondant à la longueur de *CM* puis sur celui correspondant à *EM* et enfin positionner le résultat à l'endroit voulu.

ANNEXE B

Utilisation du tableur et du grapheur pour approcher une solution du problème

Index	**Consignes**	**Manipulations et conseils**
	Construire A projeté de C sur la droite *d* Construire B projeté de E sur la droite *d*	menu 8 1 en cliquant sur le point C puis sur la droite d De même en cliquant sur le point C puis la droite d menu 6 3 puis cliquer successivement sur la droite d et la droite perpendiculaire passant par C ; pour nommer le point, tapez immédiatement son nom (ici CAPS A enter) puis sur la droite d et la droite perpendiculaire passant par E (nommer ce point B)
	Construire le segment [AB] Construire un point M sur le segment [AB] Construire les segments [CM] et [EM] et [AM]	menu 6 5 menu 6 2 et désigner le segment [AB]
	Mesurer les segments : [AM], [EM] et [MC]	menu 7 1 et désigner le segment choisis Déplacer la mesure affichée et cliquer pour la fixer à un endroit de l'écran
	Calcul de la somme des longueurs CM + ME : 1) insérer le texte CM+ME dans la page ; 2) Faire effectuer le calcul et l'afficher	menu 1 5 puis cliquer sur une zone libre de l'écran. Écrire C M + M E puis enter. menu 1 7 puis cliquer sur le texte CM+ME puis cliquer sur le nombre correspondant à CM puis sur celui correspondant à EM et enfin positionner le résultat à l'endroit voulu.

Index	Consignes	Manipulations et conseils
	Stocker les variables : On va stocker la valeur de la distance AM dans la variable x. Et la somme CM+ME dans y	Sélectionner la valeur AM et taper ctrl menu 5 puis taper x Sélectionner la valeur CM+ME affichée sur l'écran avec le pavé de navigation puis cliqué sur (la valeur sélectionnée est grisée) ctrl menu 5 puis y
	Créer une application tableur	ctrl I puis 3
	Utiliser les variables dans le tableur La variable x La variable y	Positionner la souris sur la colonne A menu 3 2 1 puis taper x puis enter puis référence de variable dans le menu qui s'ouvre. Positionner la souris sur la colonne B menu 3 2 1 puis taper y puis enter puis référence de variable dans le menu qui s'ouvre.
	Déplacer le point M dans l'application géométrie (les mesures sont automatiquement stockées dans le tableur)	ctrl ▶
	Combien semble-t-il y avoir d'endroits de la rivière répondant au problème posé ? Comment pouvez-vous indiquer la ou les positions trouvées ?	