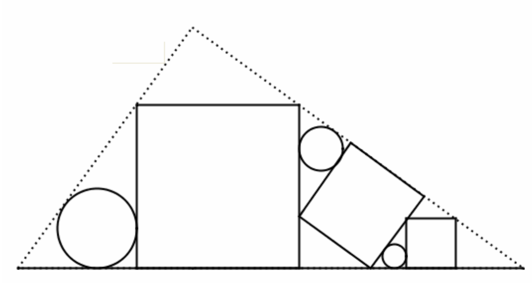
Seconde Devoir à la maison

Offrandes mathématiques au temps des samouraïs : les sangaku

Une pratique originale des mathématiques est apparue au Japon à partir du 17ème siècle : des tablettes de bois illustrant des problèmes mathématiques étaient offertes aux dieux et accrochées dans les temples. Ces tablettes furent appelées sangaku, ce qui littéralement peut signifier « tableau à calculs », mais aussi « trois angles » (triangle) ou encore « science des calculs ». Certaines étaient de véritables chefs d'oeuvre. Elles n'étaient pas réalisées uniquement par des mathématiciens professionnels, mais le plus souvent par des samouraïs, de riches fermiers ou des marchands.

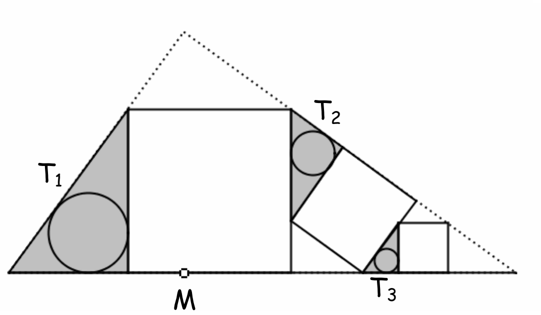
L'énoncé qui suit propose l'étude d'une sangaku représentée en page 1 du fichier « sangaku.tns ».



Partie I

La figure est constituée de carrés et de cercles inscrits dans un grand triangle rectangle.

1. Dénombrez les triangles semblables de la figure ; justifiez votre réponse.

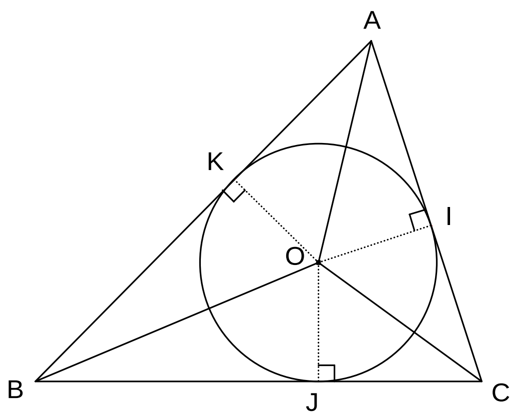


2. On considère les triangles T_1, T_2, T_3 grisés ci-contre, ainsi que les cercles inscrits dans ces triangles, nommés C_1, C_2, C_3 respectivement. Leurs rayons sont notés r_1, r_2, r_3.
M enfin est un point mobile situé sur l'hypoténuse du grand triangle.

a) Evaluez sur le fichier « sangaku.tns », avec les outils de mesure de la TI-nspire, le rapport d'agrandissement de T_2 à T_1 puis celui de T_3 à T_2 ; formulez une conjecture concernant ces rapports.

b) Conjecturez une relation entre le produit de deux des rayons r_1, r_2, r_3 et le troisième. Testez votre conjecture en déplaçant le point M.

Partie II



1. Un résultat préliminaire

On désigne par s l'aire du triangle ABC, p son périmètre et on note r le rayon de son cercle inscrit.

a) Démontrer la formule : $2s = r\,p$.

b) Soit A'B'C' un triangle semblable au triangle ABC. On note k le rapport de similitude $\frac{A'B'}{AB}$. Soit r' le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déduire de la question a) que $r' = k\,r$.

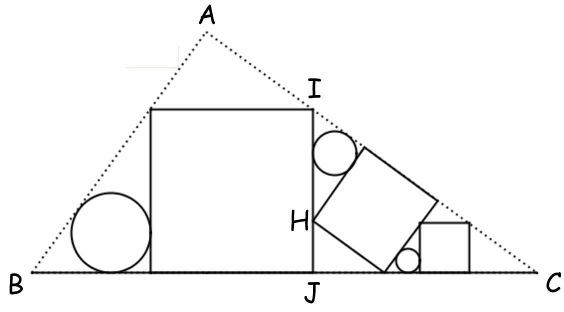
C. Bardini M.C. Combes J. Salles IREM Montpellier et INRP

2. Démonstration de la conjecture

On revient à la figure de la partie I, composée de triangles rectangles semblables, de trois carrés et de trois cercles, chacun étant inscrit dans le triangle qui le contient.

On note r_1, r_2, r_3 les rayons des trois cercles, du plus grand au plus petit, c_1, c_2, c_3 les côtés des carrés, dans le même ordre.

On désigne par α la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.



a) Démontrer que $c_1 = c_2 \left(\sin \alpha + \dfrac{1}{\cos \alpha} \right)$ (on pourra considérer le côté [IJ] du grand carré).

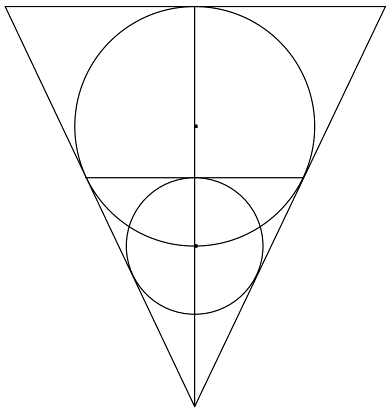
En déduire que $r_1 = r_2 \left(\sin \alpha + \dfrac{1}{\cos \alpha} \right)$.

b) Etablir une relation entre r_2, r_3 et α.

c) Déduire des deux relations obtenues précédemment la formule conjecturée liant r_1, r_2 et r_3.

A titre de complément, pour ceux que cela intéresse

Bien souvent, une sangaku se limitait à une seule illustration graphique d'un problème, le défi étant alors de formuler la propriété mathématique que le dessin était censé illustrer.



A votre avis, quelle propriété mathématique cette sangaku illustre-t-elle ?

Sauriez-vous la démontrer ?