Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER »

Yves MATHERON, ERTe 64 - GRIDIFE, IUFM Midi-Pyrénées, UMR-ADEF, IREM d'Aix-Marseille, France

yves.matheron@toulouse.iufm.fr

Robert NOIRFALISE, IREM de Clermont-Ferrand, France

robert.noirfalise@free.fr

Resumen

La Comisión interIREM-didáctica ha contratado siete equipos –seis equipos del IREM y uno del IUFM–, con el apoyo del INRP, para una investigación que pretende " Dinamizar el estudio de las matemáticas en la enseñanza secundaria (colegio y liceo) por medio de la implementación de AEI y de REI ". Para ello, hemos intentado tomar la perspectiva opuesta a aquella que originó los defectos observados en la enseñanza actual, sirviéndonos de herramientas suministradas por la TAD y la TSD; esto con el fin de concebir, analizar *a priori*, observar en las clases, analizar *a posteriori* y retocar las proposiciones de AEI y REI. Luego de exponer rápidamente algunos elementos de análisis que motivan esta investigación, presentamos sucesivamente a partir de exemplos, dos trabajos producto de este estudio. El objetivo perseguido es la concepción, y la difusión hacia los profesores de matemáticas, de proposiciones para una enseñanza viable fundada en cuestiones problemáticas, generatrices de estudio y de investigación.

Abstract

The didactical inter IREM commission hired seven teams – six from the IREM and one from the IUFM –, for a study realised in the aim of « dynamising the study of mathematics in middle and high schools through the introduction of AER and PER ». To this regard, we tried to overcome the shortcomings noticed in the present teaching. We used the tools that were brought by the TAD and TSD to make up and to analyse situations of teaching. After having briefly exposed some of the elements that explain why we focused on those researchs, we will present, as examples, two pieces of work related to that study. What we want to do here is to create and offer to mathematics teachers a set of propositions in order to foster a useful teaching based on actual issues producing studies and researchs.

I. **Motifs de la recherche : redonner du sens aux mathématiques enseignées dans le secondaire (élèves de 11 à 18 ans)**[1]

I. 1. Les mathématiques, discipline qui contribue à apporter un éclairage sur le monde ?

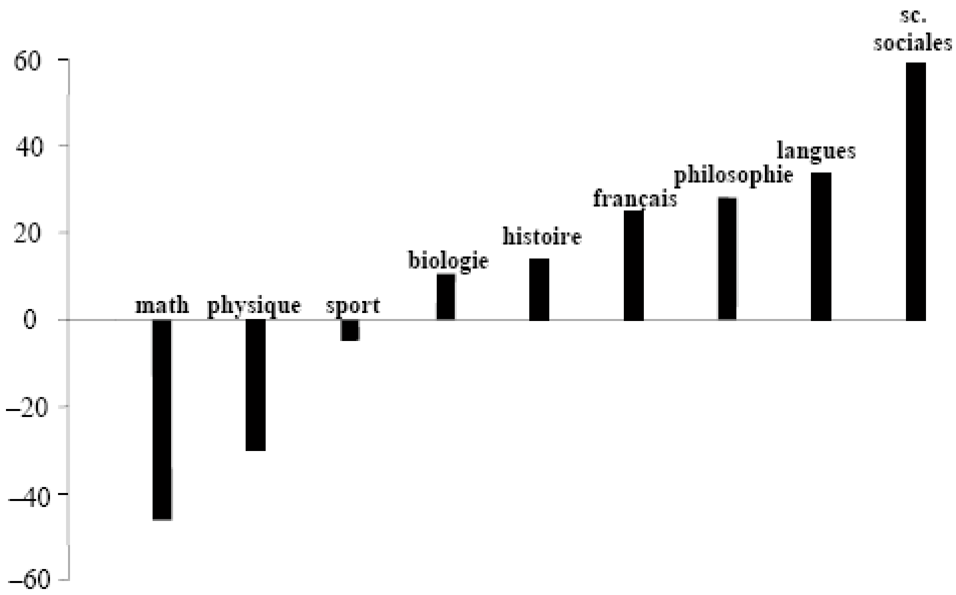
En 2005, les rédacteurs des programmes de mathématiques pour le Collège français (élèves de 11 à 15 ans), notent en introduction : *« A l'école primaire, une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Le maintien de cet intérêt pour les mathématiques doit être une préoccupation du collège* ». Est-ce à dire qu'actuellement, intérêt et plaisir s'étiolent au fur et à mesure de la progression des élèves

[1] L'enseignement secondaire général français est organisé selon deux niveaux : celui du Collège (élèves de 11 à 15 ans), puis celui du Lycée (élèves de 16 à 18 ans) qui se termine par l'examen du Baccalauréat dont l'obtention permet la poursuite d'études supérieures.

dans leur cursus secondaire ? Cette appréciation relève-t-elle seulement d'un sentiment qu'on pourrait croire nourri d'idéologie, et donc sujet à discussion et polémique ? Au contraire, parce qu'il est objectivable, le désamour des lycéens français pour les mathématiques (élèves de 15 à 18 ans) apparaît de façon nette à partir de la consultation de 1998. A cette époque, et afin d'instruire une réforme du Lycée, près de 2 millions de lycéens remplissent un questionnaire dont des synthèses partielles sont produites au niveau national. En 2005, un échantillon représentatif de 10 000 de ces questionnaires est constitué et analysé par une équipe de sociologues dirigée par Roger Establet[2].

Nous retenons de ce dernier travail quelques traits saillants. Il apparaît tout d'abord que pour les lycéens, les sciences ont avant tout un intérêt scolaire, et non culturel ; ce qui peut paraître paradoxal quand ces mêmes lycéens se disent simultanément attachés aux disciplines qui leur parlent du monde dans lequel ils vont entrer. Les sciences ne parleraient-elles plus du monde, ou bien la partie du monde qu'elles décrivent ne relèverait-elle plus que d'un faible intérêt ? Le graphique suivant fournit des indices pour apprécier quelques éléments du rapport aux disciplines établi par ces élèves.

[2] Roger Establet, Jean-Luc Fauguet, Georges Felouzis, Sylviane Feuilladieu, Pierre Vergès, *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée*, ESF, Paris, 2005



Il représente, pour chacune des disciplines enseignées, la différence entre citations positives et négatives. On peut noter qu'il est cruel pour les mathématiques et leur enseignement (op. cit p.65). Elles arrivent bonnes dernières, avec – 46 %, suivies en négatif par la physique et le sport ; les sciences sociales obtenant quant à elles le meilleur score : + 56 %.

On a aussi établi la valeur que les lycéens attribuent aux mathématiques. Ennui et inutilité prédominent, et l'importance de leur étude est trouvée dans leur nécessité pour réussir dans la vie… professionnelle, et non dans l'éclairage qu'elles fourniraient sur le monde. Le contraste est saisissant avec les proclamations des auteurs des programmes scientifiques du Collège : « *Elles [les mathématiques] se nourrissent des problèmes posés par la recherche d'une meilleure compréhension du monde.* »

I. 2. « La désaffection pour les études scientifiques »[3].

Ces dernières années ont vu l'émergence d'un débat vigoureux sur l'enseignement des mathématiques, et plus généralement sur celui des sciences. Des formules telles que « la

[3] Voir sur le sujet, l'étude bien documentée de Pierre Arnoux sur le site :

désaffection pour les sciences ou pour les études scientifiques » en constituent des emblèmes. Il conviendrait sûrement de regarder les chiffres de cette désaffection de plus près. On peut néanmoins voir dans les conclusions du travail d'Establet et *al.* ce que l'on nommera provisoirement « un désamour » pour l'étude des mathématiques. Les considérations précédentes portent sur les lycéens français ; on pourrait croire le mal circonscrit à ce seul pays. Il semble pourtant qu'il sévisse au-delà de ses frontières.

Un « High Level Group on Science Education », présidé par M. Rocard, a récemment remis à la Commission européenne un rapport faisant le point sur l'état de l'enseignement des sciences en Europe[4]. Après avoir relevé que l'enseignement scientifique est loin d'attirer les foules européennes et que, dans de nombreux pays, cette tendance empire, certaines des causes du phénomène sont mises en avant dans l'observation 3 : « The origins of this situation can be found, among other causes, in the way science is taught ». Un site français, consacré à l'École, résume ainsi le rapport : « la recommandation principale du groupe concerne un revirement de l'enseignement des sciences dans les écoles pour passer d'une méthode principalement déductive à une méthode basée sur le questionnement »[5].

I. 3. Nécrose des objets d'enseignement et activités insignifiantes

Sur bien des points, le constat rédigé en d'autres termes pour ce rapport rejoint par d'autres voies la conclusion de l'analyse produite il y a déjà quelques années depuis la didactique des mathématiques[6].

La place accordée à l'étude des triangles au Collège et au Lycée est, à titre de seul exemple, significative. Suivant la logique du questionnement préconisée par le rapport européen, mais

http://educmath.inrp.fr/Educmath/etudes/pierre-arnoux/
[4] http://ec.europa.eu/research/science-society/index.cfm?fuseaction=public.topic&id=1100
[5] http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/18062007Accueil.aspx
[6] Voir dans le bulletin APMEP n° 471, pages 439 à 461, le texte de la conférence d'Yves Chevallard donnée lors des journées 2006 de cette association de professeurs de mathématiques (APMEP)

en l'appliquant à d'autres qu'aux élèves, qui parmi les professeurs de mathématiques peut-il encore donner les raisons justifiant d'accorder tant d'importance à la géométrie du triangle dans le secondaire ? Les connaissances professionnelles enseignantes ne sont sûrement pas seules en cause. L'utilité des triangles pour des problèmes ayant trait aux affaires de hommes (la triangulation précisément) paraît désormais socialement peu visible aux citoyens, et par conséquent aux professeurs ; si tant est que la société considère que cette utilité demeure. Certains contenus de programme semblent alors perdurer parce que dans la tradition, l'héritage scolaire, que les enseigner apparaît « bel et bon ». Sur ce seul cas, et il y en a bien d'autres, on a perdu l'une des questions fondamentales : par exemple « pourquoi l'honnête homme du XXI^e^ siècle se devrait-il de savoir que la somme des angles d'un triangle vaut 180°? », et son corollaire « en quoi est-ce utile de le savoir ? »

Même si cela est parfois dur à l'oreille de ceux qui ne veulent entendre, l'une des raisons du « désamour » des lycéens pour les mathématiques – non pas la seule mais en tout cas l'une des principales – tient aussi, pour une bonne part et en liaison avec la cause précédente, à la forme actuelle de l'enseignement des mathématiques. Lorsqu'on observe cet enseignement depuis la France, quelques phénomènes peuvent être relevés qui contribuent à expliquer pour partie cette crise : « perte » des questions fondatrices de divers domaines des mathématiques induisant en retour une perte de sens des mathématiques chez les élèves, cloisonnement thématique – « autisme thématique », a pu dire Y. Chevallard[7] –, recours massif à l'ostension déguisée[8] – qui ne trompe personne, et surtout pas les élèves – à travers le recopiage et la passation en classe d'activités dites « introductives » trouvées dans les manuels.

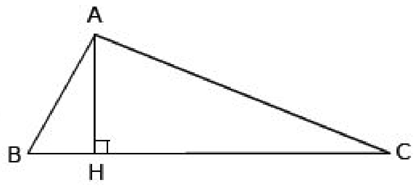
Beaucoup des activités mathématiques proposées aux élèves apparaissent non signifiantes, purement formelles. A titre d'exemple, que l'on pourrait multiplier à l'envi, nous

---

[7] « Domaines » et « thèmes » sont ici à considérer dans le sens qu'ils ont en théorie anthropologique

reproduisons une page d'un manuel en ligne (pour la classe de 5[e], élèves de 12 à 13 ans) éclairante d'un enseignement où l'on cherche en vain le sens du savoir.

Activité 1 : Du côté des triangles ...



a. Donne tous les noms possibles du triangle ABC.

b. Donne tous les noms possibles de l'angle $\widehat{ABC}$.

c. Quel angle du triangle AHB possède la plus petite mesure ?

d. Dans le triangle ABC, quel est le côté opposé au sommet B ?

e. Dans le triangle AHC, quel est le sommet opposé au côté [HC] ?

f. Quel est l'angle droit du triangle HAB ?

g. Quels sont les noms des trois angles du triangle ACH ?

h. Dans cette figure, quels sont les angles aigus, droits et obtus ?

i. Mickaël affirme que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 80°. A-t-il raison ? Pourquoi ?

Activité 2 : Du côté des triangles particuliers ...

Romuald doit construire un triangle IJK rectangle en I, Isabelle un triangle EFG isocèle en F, et Eddy un triangle équilatéral QRS.

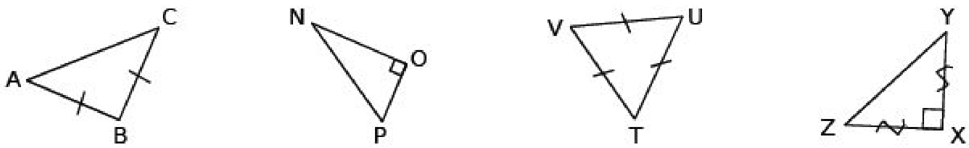
a. Trace trois figures à main levée pour représenter ces triangles. Code-les.

b. Dans le triangle IJK, quel nom donne t-on au côté [JK] ?

c. Dans le triangle EFG, quelle est la base ? Quel est le sommet principal ? Que peut-on dire des côtés [EF] et [GF] ? Que peut-on dire des angles $\widehat{FEG}$ et $\widehat{FGE}$?

d. Que peut-on dire des côtés du triangle QRS ? Et des angles ?

e. En observant le codage, indique la nature des triangles ci-dessous :



Par ailleurs, le découpage horaire des séquences confère à l'heure le rôle de mètre-étalon du temps d'enseignement : les mathématiques rencontrées dans l'heure se doivent en conséquence de former un tout. Si d'aventure une question problématique est soumise à l'étude en début d'heure, l'impératif catégorique découlant de la « tyrannie de l'heure »

---

[8] Voir Berthelot R. & Salin M-H. (1992) : *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité*

implique que la réponse soit donnée dans cette même heure, accompagnée si possible des exercices d'entraînement qui lui sont relatifs. On conçoit que ce déterminant pédagogique, dont on ne perçoit pas toujours l'importance, conduise souvent à des propositions d'activités insignifiantes, dans lesquelles on engage plus ou moins les élèves, parce qu'il convient de le faire dans le cadre du respect de la doctrine officielle, mais qui ne contribuent en aucune façon à enclencher dans la classe une dynamique d'étude et de recherche.

La TAD fournit un outil permettant la classification des conditions et contraintes sous lesquelles peut se dérouler l'étude d'un objet de savoir (Chevallard, 2005). On sait qu'en suivant l'échelle des niveaux de co-détermination didactique, et en allant du générique vers le spécifique, on rencontre les niveaux de la civilisation, la société, l'école, la pédagogie, la discipline, le domaine, le secteur, le thème et le sujet. Les lignes qui précèdent ont permis de dégager, en suivant un fil qui pouvait expliquer le « désamour » pour l'étude des mathématiques, quelques-unes des contraintes qui pèsent sur l'enseignement actuel. Contraintes relevant de la civilisation et de son histoire (tradition de l'étude de la géométrie du triangle depuis les Grecs, par exemple), ou de la société pensant l'organisation de son école, et qui se répercutent en premier lieu aux niveaux de la pédagogie (cours d'une heure engageant les élèves à être « actifs ») et de la discipline (présence ou absence dans le programme de certains objets mathématiques transposés, ouverture et clôture du sujet enseigné en une heure et conséquences sur la possibilité de faire rencontrer par les élèves les raisons motivant son étude). Ces contraintes induisent en retour des formes relativement stables d'enseignement et des manières de penser l'étude des mathématiques : découpage puis « enfermement » de l'enseignement dans des thèmes (de l'ordre du chapitre) affaiblissant la vision de leur articulation en organisations plus larges, rythme ternaire (activité, synthèse, exercices), absence de recours à des médias extérieurs à ceux, minimaux, qu'apportent le

obligatoire, thèse de l'Université Bordeaux I.

professeur et l'école (le cours ou le manuel, parfois la calculatrice), renvoi de l'étude à la sphère privée des élèves hors école, etc.

II Deux exemples de propositions pour un enseignement fondé sur des questions problématiques, génératrices d'étude et de recherche.

II. 1. Vers un autre type de processus d'étude

Le travail dans lequel sont engagés les membres de l'équipe AMPERES[9] vise à libérer l'enseignement de certaines des contraintes que nous venons d'évoquer, tout en en acceptant consciemment d'autres. Hormis celles sur lesquelles il est difficile d'agir, par exemple celle relative au découpage horaire, la contrainte principale tient dans le respect des contenus du programme de mathématiques qui, en France, est national. L'objectif consiste à proposer aux professeurs un système de conditions pour un processus d'étude des mathématiques d'un nouveau type, afin qu'elles prennent davantage de sens aux yeux des élèves.

Notre travail suit ainsi l'une des directions fondatrices de la didactique des mathématiques : la conception d'un enseignement favorisant dans la classe une genèse artificielle des savoirs mathématiques à étudier. Contre des activités non mathématiquement motivées, il s'agit d'en concevoir d'authentiques permettant l'étude par la construction collective du savoir comme recherche de réponse à une question dévolue à la classe. Contre le morcellement du savoir, il s'agit de développer des parcours d'étude permettant un recouvrement partiel de secteurs ou domaines du programme d'un ou plusieurs niveaux.

Pour faire contraste avec ce qui précède, nous poursuivons l'exemple de la géométrie du triangle en montrant sur ce même objet deux exemples de propositions d'enseignement qui

[9] Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Etude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire ; équipe regroupant au niveau national la Commission inter IREM de didactique et l'INRP (Institut National de Recherche Pédagogique), et au niveau local des équipes d'IREM et une équipe de l'IUFM de Toulouse.

tentent de remplir les fonctions inscrites dans la dynamique d'étude que nous venons de définir.

Dévoluer aux élèves la responsabilité de construire une réponse à une question est sans doute nécessaire si l'on souhaite « re-dynamiser l'enseignement des mathématiques » – c'est-à-dire rendre les élèves auteurs, et non spectateurs des mathématiques – mais cela reste encore partiellement insuffisant. Il est en effet nécessaire de se poser la question de l'utilité mathématique des triangles, au moins pour justifier qu'on les étudie en leur consacrant tant de place et de temps dans le système éducatif. De même, est-il tout autant nécessaire d'analyser les parties des mathématiques des programmes scolaires dans lesquelles on les rencontre, ou plutôt que leur étude peut engendrer ; tant aux plans didactique qu'épistémologique ou encore à celui de leur organisation après transposition didactique. On a alors davantage de chances de ne pas verser dans « l'autisme thématique » dont on connaît les effets : émiettement et parcellisation induisent une perte de sens.

En conséquence, la question à dévoluer mérite d'être posée – sur l'exemple des triangles comme sur bien d'autres –, non plus au niveau du thème *stricto sensu,* mais au niveau du domaine ; celui de la géométrie plane dans ce cas. Concevoir un enseignement des mathématiques bâti sur cette double préoccupation – dévoluer une question, mais une question qui soit ***suffisamment large*** pour générer « beaucoup » de mathématiques, celles que l'on rencontre dans des classes de plusieurs niveaux, afin que leur sens soit le moins possible perdu – revient à enseigner avec le souci de faire vivre dans ses classes l'étude et la construction par les élèves de savoirs en réponse à une grande question génératrice, reprise en plusieurs fois, sur plusieurs années peut-être ; cette étude engendrant sans doute la recherche de réponses à des sous-questions cruciales, car s'imposant en raison, pour l'instruction de la question génératrice. On aboutit ainsi à une forme d'enseignement qui génère non des organisations mathématiques locales, c'est-à-dire portant sur un seul thème, mais des savoirs organisés en un recouvrement partiel de secteurs, voire de domaines ; autrement dit à un recouvrement partiel d'organisations mathématiques régionales ou globales.

Plusieurs conséquences peuvent être tirées de cette orientation. La plus importante, et pourtant celle qui fait le plus défaut, suppose que l'on dispose soi-même de connaissances didactiques propres aux modélisations de ce champ afin d'identifier la crise, concevoir des dispositifs valides et robustes parce qu'outillés d'éléments théoriques, et expérimentés. Or, la didactique est encore largement ignorée de la profession enseignante, malgré les efforts de quelques IUFM (écoles formant les professeurs, en cours d'intégration à l'Université) depuis des années, accomplis en dépit des résistances et obstructions venues de toutes parts ; notamment de groupes reconnus institutionnellement compétents pour parler sur l'enseignement des mathématiques ! La profession ne possède donc ni les outils, ni le temps, permettant ce travail ; sans même évoquer la conscience de son urgente nécessité…

Face à cette situation, l'équipe AMPERES conçoit, expérimente et observe des propositions d'AER et de PER[10] bâties à partir de questions problématiques dévolues aux élèves. Le travail de recherche-développement actuellement entrepris doit aboutir à la publication de documents pour le professeur, utilisables dans ses classes, et intégrant des éléments de didactique permettant, à qui veut bien consentir à l'effort de les étudier, la compréhension et la maîtrise des propositions ainsi construites et des phénomènes susceptibles de se produire en classe afin de pouvoir les observer et les réguler.

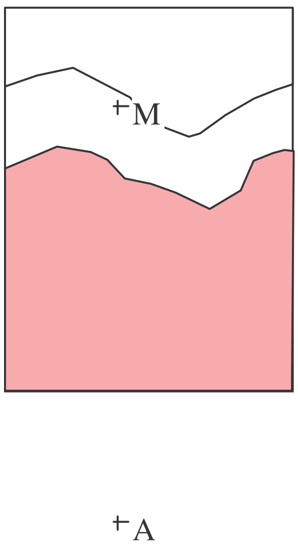
II. 2. Un premier exemple : une AER en 5^{e} (élèves de 12 à 13 ans)

Pour une classe de 5^{e}, et afin de motiver l'étude des triangles, Geneviève Le Quang et Robert Noirfalise de l'équipe clermontoise, ont proposé l'activité ci-dessous. Ils sont partis de l'idée qu'une des raisons d'être de l'étude des triangles peut être trouvée dans le rôle qu'ils jouent pour les techniques permettant la mesure de distances inaccessibles ; techniques qui ont longtemps vécu dans le curriculum de la première moitié du XXe siècle. C'est la question génératrice.

Voici un extrait du programme de 5e :

Construction de triangles et inégalité triangulaire	Construire un triangle connaissant : - la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, - les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, - les longueurs des trois côtés.

Cette partie de programme apparaît de prime abord comme le vestige d'une époque révolue où l'on étudiait les cas d'égalité des triangles, ce qui permettait de déterminer des longueurs et des angles, de démontrer des propriétés de configurations. Cette contrainte est issue de celle du respect du programme, mais nous avons tenté d'en re-dynamiser cette partie en faisant éprouver par les élèves l'intérêt des triangles pour la détermination de distances inaccessibles et, en motivant cet enseignement par une question problématique dont la recherche leur est dévolue : « Quelles données suffisent à caractériser un triangle ? »



Déterminer la longueur du segment [AM].
On n'a pas le droit de dépasser la berge
du fleuve qui est du côté du point A.

[10] AER : Activité d'Étude et de Recherche PER : Parcours d'Étude et de Recherche

Le dessin de gauche se trouvait sur une feuille 21 × 29,7 fournie par le professeur en tant que micro-espace modélisant un macro-espace évoqué. La consigne était écrite sur le cahier et la partie de la feuille sur laquelle les élèves étaient autorisés à travailler était recouverte d'une feuille rose. Les élèves disposaient de leurs instruments de géométrie et « d'appareils de visée » sommaires. Cette situation a pour fonction de simuler sur feuille de papier un problème effectif de détermination d'une distance inaccessible, problème qu'un géomètre topographe peut avoir à résoudre. Un commentaire du professeur évoque cette situation du monde, précisant que les topographes peuvent mesurer des distances entre points accessibles (l'accessibilité dépend des outils dont on dispose), effectuer des visées d'un point à un autre et mesurer des angles. Au passage, s'il existe bien d'autres outils, comme les laser mètres, pour déterminer des distances entre points, la triangulation et le recours aux propriétés du triangle et à la trigonométrie restent encore une pratique contemporaine des topographes.

Les élèves de 5^{e} ne pensent généralement pas à placer un point B et à faire les « relevés » nécessaires pour tracer un triangle A'B'M' « isométrique » du triangle ABM. Aussi le professeur leur montre-t-il comment faire, et justifie ainsi que l'on s'intéresse aux triangles et à leur détermination. D'où la nécessité d'une deuxième consigne bâtie selon un questionnement dynamique.

La consigne est distribuée question après question aux élèves. On « transpose » dans le méso-espace de la classe, par la nécessité de « ne pas se déplacer », l'impossibilité évoquée des mesures directes liée à « l'inaccessibilité » des distances réelles dans le macro-espace.

1 – Sur une feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm, 8 cm et 6,5 cm. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les angles de ce triangle ?

Cette question est traitée rapidement : les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas (nous sommes au mois de décembre) le triangle demandé et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils effectuent les mesures des angles et vérifient leur construction grâce au calque du professeur.

2 – Sur une deuxième feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les angles mesurent 59°, 74° et 47°. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les côtés de ce triangle ?

Pour cette deuxième question, les élèves poursuivent le travail commencé dans la question 1 et construisent un triangle connaissant ses trois angles. Certains se rendent compte très rapidement qu'il n'y aura pas superposabilité des figures – la longueur du premier segment tracé étant indéterminée – d'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues par deux voisins, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique et que, par conséquent, il n'est pas possible de donner les longueurs des côtés du triangle dessiné par le professeur. Les élèves dessinent alors un deuxième triangle ayant les mêmes angles que le précédent mais « beaucoup plus grand ou beaucoup plus petit » que le premier tracé.

Dans la classe, un travail sur la somme des angles d'un triangle avait déjà été fait: il apparaît, bien sûr mais *a posteriori*, que cela aurait pu faire partie de cette étude.

3 – Est-ce que 2 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Est-ce que 3 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Est-ce que 4 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Avant de donner ces questions, le professeur avait conduit les élèves à remarquer qu'on peut effectuer six mesures dans un triangle et que « déterminer un triangle » signifie obtenir des triangles tous superposables. Cette remarque pourrait donner lieu à une question cruciale que l'on pourra tenter de faire vivre ultérieurement, dans une autre classe confrontée pour la première fois à ce même travail ; ce qui induira peut-être les élèves à se poser des questions du type de la question 3.

Les élèves sont invités à faire des essais avec des valeurs de leur choix et il n'est plus fait référence au triangle de la première question, sauf pour éventuellement déboucher sur des impossibilités, des cas particuliers…

2 données : les élèves essaient 2 côtés, 2 angles, 1 côté et un angle et dessinent plusieurs triangles.

3 données :

3 côtés : les élèves font référence à la première question et proposent des valeurs pour les longueurs des côtés qui ne posent pas de problème. Il faudra, ultérieurement (après l'étude des trois « cas »), que le professeur relance l'étude en disant « si vous choisissez trois nombres au hasard, êtes-vous sûrs que vous pouvez construire un triangle dont les mesures des côtés sont ces trois nombres ? » C'est une nouvelle question cruciale qui surgira peut-être d'elle-même devant des tentatives d'élèves qui auraient échoué ; elle permet d'engager l'étude de l'inégalité triangulaire.

2 côtés, 1 angle :

Plusieurs élèves obtiennent une figure comme celle de l'exemple ci-contre qui est le cas attendu :

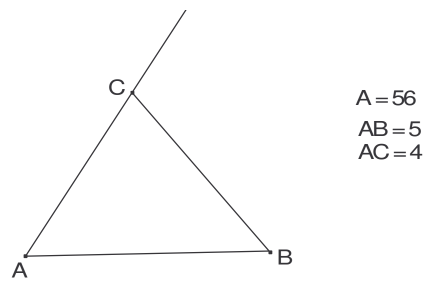


fig 1

D’autres élèves obtiennent la figure suivante (fig 2) : l’angle Â n’est pas l’angle compris entre les deux côtés donnés qui sont ici [AB] et [BC]. Il faut dans ce cas que le professeur invite les élèves à faire d’autres essais, voire propose lui-même des données afin de faire apparaître les figures 3 et 4.

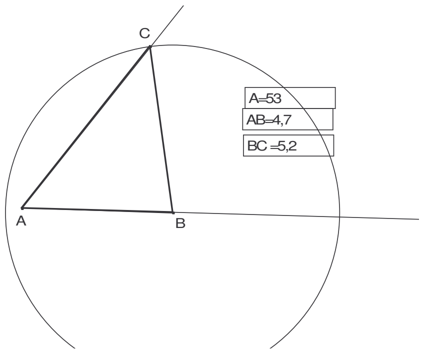


fig2

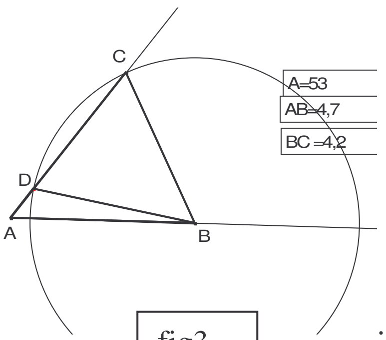


fig3

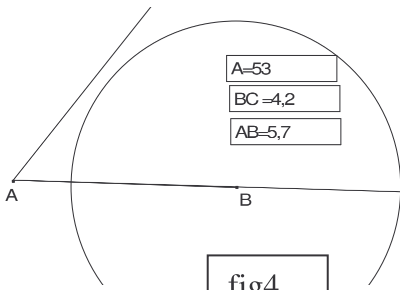


fig4

Une discussion et une institutionnalisation locale sont nécessaires pour ne pas retenir ce « cas ».

1 côté, deux angles : pas de difficultés particulières, mais cette fois encore c’est le professeur qui doit intervenir et demander si l’on peut choisir au hasard les deux nombres qui sont les mesures des angles. La troisième partie de la question 3 se règle oralement avec la classe entière. L’étude se poursuit par l’inégalité triangulaire et en conformité avec le programme de la classe de 5^{e}, des exercices classiques de construction.

Notons ici, en guise de transition avec ce qui suit, qu’on peut regretter – contrainte relative au programme obligeant - de ne pas pouvoir utiliser la dynamique ainsi produite en poursuivant par l'étude de triangles semblables. En effet, réduire pour déterminer une longueur comme AB dès lors que AB est grand est une idée à portée des élèves. De plus, certains élèves ont remarqué, au cours du travail précédent, que des triangles ayant trois angles égaux ne sont certes pas nécessairement superposables, mais qu'ils ne sont cependant pas sans lien entre eux…

II. 3. Un P.E.R. pour le théorème de Thalès en 4^{e}… et ce qui en découle ultérieurement

Il s'agit dans ce qui suit, de la présentation du début d'un PER conçu par Marie-Christine de Redon, Yves Matheron et Alain Mercier de l'équipe marseillaise de l'IREM et l'INRP, sur l'enseignement du théorème de Thalès en 4^{e}. Il rompt avec la présentation traditionnelle de ce théorème à ce niveau puisque nous avons choisi d'initier son enseignement par l'ébauche d'une étude de la similitude des triangles[11]. Elle se poursuit dans la suite du curriculum par la rencontre avec le théorème dans d'autres configurations, sa réciproque et les agrandissements / réductions pour le Collège, puis au Lycée par les cas de similitude, l'homothétie et les similitudes directe et inverse en tant que transformations. On dispose ainsi d'une esquisse de PER concernant les mathématiques de programmes s'étalant sur cinq à six années, et dont l'étude peut être relancée par des questions génératrices amenées par le professeur, en liaison avec les questions précédemment étudiées.

Dans le premier alinéa du programme de 4^{e} (élèves de 13 à 14 ans) concernant la géométrie, on trouve sous l'intitulé « triangles », et dans cet ordre, les paragraphes « milieux et parallèles », puis « triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes ». Cet ordre est généralement conservé dans les manuels ainsi que chez les enseignants.

Le choix de cette progression majoritaire ne trouve son origine que dans une transposition didactique s'appuyant sur l'idée qu'il est plus facile d'étudier d'abord le particulier pour arriver ensuite au général ; alors qu'en mathématiques, on décide souvent de l'attaque d'un problème par l'étude de sous-cas plus simples, la libération d'une contrainte par exemple. Pour l'enseignement du théorème de Thalès, une assez bonne familiarité des élèves avec la notion de milieu d'un segment engage ainsi à étudier d'abord le cas particulier de la droite des milieux des côtés d'un triangle. Du point de vue de l'enseignant, ce choix est renforcé par le fait que – comme le soulignent les commentaires du programme – cette propriété fournit une occasion de démonstration à la portée des élèves de 4^{e} en utilisant les connaissances enseignées en 5^{e} sur la symétrie centrale et le parallélogramme. Il en est de même pour la réciproque de cette propriété. C'est seulement après que ces deux propriétés ont été proprement démontrées, qu'on présente la propriété dite de Thalès comme une généralisation de la propriété dite des milieux ; on peut en démontrer quelques cas très particuliers, parfois une démonstration générale par les aires est proposée aux élèves. Enfin, on applique la propriété de Thalès dans quelques exercices de calcul de distances inaccessibles.

On voit assez bien comment les raisons qui motivent l'étude de ces propriétés ne sont pas transparentes pour les élèves : ils n'ont guère l'occasion de les rencontrer que lors des derniers exercices d'application du chapitre. Certains saisiront peut-être alors l'occasion d'une première rencontre avec le problème et feront pour eux-mêmes, dans un après-coup où l'enseignement prendra soudain du sens, le parcours d'étude à l'envers... Beaucoup d'autres, nous en sommes convaincus, considèreront une fois de plus que « les maths, on les fait parce qu'on nous dit de les faire », ou on y renonce...

Nous abordons cette partie du programme en en changeant l'ordre de progression : une première rencontre avec la propriété de Thalès dans les triangles, puis la propriété « parallèles et milieu » en tant que preuve partielle de ce théorème. Dans le domaine de la géométrie, le petit bout appelé « propriété de Thalès dans les triangles » est considéré comme modélisation

[11] Hilbert considérait le « théorème de Thalès » comme le théorème fondamental des similitudes

de problèmes de réduction et d'agrandissement, vue essentiellement à ce niveau, et de manière implicite, sous l'angle d'homothéties de rapports positifs.

Le problème posé aux élèves est l'étude des triangles en fonction de leurs angles : que peut-on dire d'un triangle dont on connaît un angle ? deux angles ? les trois angles ? On retrouve en ce point l'une des questions rencontrées dans l'AER précédente, et prise ainsi comme génératrice d'une nouvelle étude. On peut noter le « gain » procuré : économie « d'énergie cognitive » nécessaire à l'engagement dans une question nouvelle, atténuation de la déconcertation cognitive et de la perte de sens par l'articulation à des questions anciennes dont l'exploration se poursuit…

On rencontre alors la notion de triangles semblables, et on étudie expérimentalement les relations entre les longueurs des côtés de tels triangles en faisant vivre une dialectique entre géométrie expérimentale et géométrie théorique. On réduit la propriété observée à l'énoncé de la propriété de Thalès en conformité avec le programme.

Nous donnons ci-dessous les grandes lignes[12] de l'organisation didactique ainsi conçue et qui a servi de support aux séances passées dans plusieurs classes de 4e. Cette présentation intègre les éléments d'analyse *a posteriori* qui nous ont conduits à modifier quelques-unes des parties.

Titre du chapitre : Des triangles...

<u>Première étape</u>

La question présentée à la classe :

Qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles ?

---

[12] Une présentation plus détaillée se trouve dans le pré-rapport de l'équipe "Ampères" remis à l'INRP en juin 2007. Nous ne détaillons pas en particulier les moyens matériels à mettre en œuvre, ni l'ensemble des précautions qui, d'après nous importent, pour la réussite de ce parcours.

1. *Par exemple : Quand on fixe un angle.*

Sur la feuille de papier calque distribuée, chacun de vous trace un triangle dont un angle mesure 43°. Comparez votre triangle avec ceux de vos voisins de groupe. Que pouvez-vous dire ?

P laisse peu de temps aux groupes pour chercher ; les élèves ne trouvent rien de particulier à dire. Ils ont raison : les triangles qui ont un même angle ne montrent pas de particularité intéressante.

2. *Quand on fixe deux angles* ?

Sur une feuille de papier calque, construisez chacun un triangle ABC tel que $\hat{A}$ *= 43° et* $\hat{B}$ = *115°. Comparez votre triangle avec ceux de vos voisins de groupe. Que pouvez-vous dire ?*

Quoi qu'il en soit, très vite apparaît l'idée que deux angles donnés, c'est comme trois, car le troisième était fixé par la propriété de la somme des angles d'un triangle, propriété bien connue des élèves.

La configuration de Thalès apparaît dans l'expérience de comparaison des triangles par superposition des calques. Dès qu'elle apparaît dans quelques groupes, il faut interrompre le travail pour une mise en commun, et donner la parole à ceux qui l'ont trouvée ; ce sont d'ailleurs eux qui veulent parler, car la découverte est saisissante. Ceux qui ne l'avaient pas obtenue la recherchent alors, la trouvent facilement et l'explorent à partir des trois sommets ; ils tentent de superposer successivement les trois angles, un à un.

Institutionnalisation :

Propriété : la somme des angles d'un triangle est 180°.

Nous en déduisons la mesure du troisième angle : 180° - (43° + 115°) = 22°.

Cela nous permet par exemple de vérifier qu'on a bien construit les deux angles donnés

Propriété : Si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est déterminé.

Définition : Deux triangles qui ont les mêmes angles sont appelés triangles semblables.

Conjecture : Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.

Ce résultat a été établi dans le cadre d'une géométrie expérimentale : était-il prévisible, explicable, déductible du point de vue de la géométrie théorique dont on dispose ? Les droites sont-elles parallèles dans le cadre de cette géométrie ? Ce sera l'objet d'un travail à la maison dont on peut d'ores et déjà bâtir collectivement l'énoncé :

Trace un triangle ABC de ton choix et construis un triangle AEF, semblable au triangle ABC et tel que les côtés [AE] et [AB] aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés [AF] et [AC]. Les droites (BC) et (EF) sont-elles parallèles ?

<u>Deuxième étape</u>

Correction du travail donné à la maison : utilisation du théorème des angles correspondants égaux.

Institutionnalisation :

Propriété :

Si deux triangles ABC et AEF sont semblables, si E $\in$ [AB] et F $\in$ [AC], alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Travail donné à la maison, l'idée pouvant aussi venir d'élèves « rompus » à la pratique de la recherche d'une réciproque éventuelle :

Soient un triangle EFG et une droite parallèle à (FG) qui coupe [EF] en P, et [EG] en R. Peut-on affirmer que les triangles EFG et EPR sont semblables ? Prouvez votre réponse.

P annonce : « Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au **défi** de construire un triangle semblable aux autres, le plus grand possible, sur un calque de la même dimension. Vous avez exactement 10 minutes. C'est un travail individuel. »

Au bout des 10 minutes, dans chaque groupe, les élèves sélectionnent le plus grand des trois ou quatre triangles ; en même temps ils vérifient expérimentalement leur similitude. Puis, collectivement, ils déterminent au rétro-projecteur le plus grand triangle parmi ceux pré-sélectionnés.

P demande au vainqueur de présenter sa méthode et, si cela n'a pas été constaté et formulé par des élèves, fait remarquer que les trois côtés « semblent grandir ensemble » ; lorsque ce n'est pas le cas, c'est que les triangles ne sont en fait pas semblables. Ce résultat relève d'une géométrie expérimentale. Les élèves vérifient avec leurs triangles et tombent d'accord sur l'idée des trois côtés qui « grandissent ensemble ».

Il est temps de faire le point, sous la direction du professeur, à propos de la question initiale mise à l'étude et qui portait sur les angles : on peut conclure qu'on y a répondu (un, deux et trois angles), et on a découvert des propriétés relatives aux côtés (des parallèles) et à leurs longueurs (on peut trouver plus grand !)

Troisième étape

Correction du (deuxième) travail à la maison. On peut remarquer que le travail à réaliser hors classe remplit une double fonction : poursuivre évidemment l'entraînement à la technique relative à l'utilisation du théorème sur parallèles et angles, mais aussi le faire dans un but visible et non gratuit puisque intégré au ***développement de l'étude*** d'une question nouvelle, née du travail de recherche mené en classe.

Institutionnalisation :

Propriété :

Si dans un triangle EFG, une droite parallèle à (FG) coupe les côtés [EF] et [EG] respectivement en P et R, alors les triangles EFG et EPR sont semblables.

P a préparé, sur du papier épais ou du carton, le triangle semblable aux triangles que les élèves avaient dessinés sur papier calque, mais agrandi suffisamment pour qu'on ne puisse pas le dessiner sur un support A 3. Il s'agit maintenant d'utiliser le modèle « triangles semblables » pour prédire des résultats sur les longueurs par le calcul. Autrement dit d'utiliser la géométrie théorique pour prédire des résultats dans la géométrie expérimentale.

P annonce : « J'ai fabriqué moi aussi un triangle qui suit les mêmes contraintes que vous avez eues lors de la séance précédente (question 2) : triangle ABC tel que $\hat{A} = 43°$ et $\hat{B} = 115°$. » et présente le triangle découpé : « C'est bien un triangle semblable aux vôtres ? Vous pouvez vérifier si vous voulez (le triangle peut passer dans les groupes, mais P doit l'avoir récupéré lorsqu'il pose la question suivante !) J'ai choisi un côté [AC] de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? »

En présentant un « grand » triangle, on plonge les élèves dans un milieu où la notion d'agrandissement – réduction devrait apparaître : l'espace de la feuille A 4 habituelle et celui du grand triangle n'ont pas la même échelle, autrement dit on joue sur la dialectique du micro au méso espace. La situation contraint au changement d'échelle et de là, à l'utilisation de la propriété relative à la proportionnalité des côtés afin de « trouver » les longueurs.

On peut émettre des conjectures quant aux propositions faites par les élèves :

- Ajouter la même longueur à tous les côtés ; à partir d'un triangle déjà construit ou pas, on calcule la différence entre AC et 60 cm, puis on l'ajoute aux deux autres côtés : cette technique erronée n'a qu'une très brève existence dans le groupe, et l'idée de la proportionnalité gagne rapidement du terrain.

- Ceux qui se servent des triangles déjà construits trouvent généralement un coefficient rationnel ; dès lors que l'un d'entre eux a « la chance » d'avoir un coefficient décimal, ou mieux, entier, ou bien qu'un autre pense à construire un triangle *ad hoc*, l'idée diffuse très rapidement dans la classe (les rationnels ne sont pas encore suffisamment familiers et les élèves les évitent dès qu'ils le peuvent...) Ils passent alors de la mesure des côtés de leur triangle au calcul des côtés du grand triangle.

- Certains élèves peuvent être arrêtés dans leur travail lorsqu'ils ont à mesurer des longueurs sur leur feuille, pensant que ceci n'est pas valable, puisqu'il faut mesurer et non calculer ; ce n'est pas, d'après eux, ce que peut attendre le professeur. P les rassure en les renvoyant à la consigne qui n'indique pas de méthode.

- Une erreur possible : les élèves se trompent de côté, confondant AB et AC par exemple. Ils s'aperçoivent de leur erreur puis la corrigent lors de la mise en commun des résultats.

Lors de cette mise en commun on relève les propositions dans un tableau où sont inscrits longueurs des côtés des triangles ABC et coefficients de proportionnalité qui apparaissent, dans un sens et dans l'autre : multiplier par 1/10 pour passer du grand au petit, ou par 10 dans le sens contraire par exemple.

Lors de la mise en commun, plusieurs groupes trouvent les mêmes résultats, alors qu'ils ont pris des coefficients différents. La technique est alors retenue puisque expérimentalement valide, y compris par ceux qui ont fait des erreurs de calcul ou de choix de côtés et qui corrigent.

La conjecture de proportionnalité des longueurs des côtés des triangles semblables est forte et on peut l'institutionnaliser.

Conjecture : Si deux triangles sont semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

En particulier, pour des triangles ABC et AEF dans cette configuration (dessiner la configuration de Thalès), les longueurs AB et AE, AC et AF et BC et EF sont proportionnelles.

La conjecture est testée de nouveau par un :

Travail à la maison pour la prochaine séance : vérifier que vos deux triangles semblables déjà dessinés ont leurs côtés proportionnels

<u>Quatrième étape</u>

Pour la correction du travail à rechercher, on appelle $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ les deux triangles de chacun des élèves, on dispose les longueurs dans un tableau, on recherche le coefficient de proportionnalité pour arriver à l'égalité des rapports ; on écrit ensuite le théorème de Thalès dans les triangles.

Nous venons de vérifier sur plusieurs cas que

Si deux triangles ont :

- **Un sommet commun**

- **Deux côtés parallèles**
- **Les angles de sommet commun égaux,**

alors les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles

C'est ce que nous appelons le « théorème de Thalès dans les triangles »

Cette configuration géométrique est appelée « configuration de Thalès »

Figures et rapports écrits avec noms des côtés illustrent ce théorème qu'on peut encore écrire :

Dans un triangle ABC,

- **Si E appartient au segment [AB] et F appartient au segment [AC]**
- **Et si les droites (EF) et (BC) sont parallèles, alors on peut écrire :**

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} \quad \textbf{ou} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Si les élèves ne le relèvent pas, P peut poser la question « à quoi ça sert ? ». Pour le travail que l'on a réalisé on peut noter, à titre de synthèse, que ce théorème permet de déterminer des longueurs « non mesurables », parce que trop grandes pour les outils de mesure dont on dispose, ou encore « inaccessibles » parce que le « grand triangle » est resté au tableau, hors de portée. Un travail à la maison, relatif à cette question, permet de se convaincre définitivement de son efficacité pour certains problèmes de ce type.

<u>Cinquième étape : Recherche d'une preuve du théorème de Thalès dans un cas particulier.</u>

Pour des élèves rompus au passage de la géométrie expérimentale à la géométrie théorique, il est manifeste que le théorème énoncé n'est pas démontré ; pour les autres, P le signale. Dans tous les cas, c'est sans doute à lui d'indiquer que les mathématiciens choisissent parfois de démontrer un théorème dans des cas particuliers jusqu'à ce que l'un d'entre eux trouve les moyens de le prouver en général. C'est la première fois que les élèves rencontrent cette situation que l'on va explorer pour ce théorème.

La suggestion du milieu apparaît fréquemment chez les élèves. Le professeur, en posant des questions cruciales non développées ici, guide les élèves, et élabore avec eux le théorème de la droite des milieux et sa réciproque.

III. Conclusion

La recherche dont nous n'avons présenté qu'un petit échantillon du travail déjà réalisé est en cours ; bien des thèmes étudiés sont encore en chantier. Parmi ceux-ci on peut citer sans être exhaustif : *l'entrée dans l'algèbre au collège, les entiers relatifs, la statistique, médiatrices et cercle circonscrit au triangle, le programme de 6^{e} organisé en PER, des PER pour le programme de 2de, le produit scalaire et le barycentre en 1re S, la fonction exponentielle et les équations différentielles en TS, etc.*

Nous essayons systématiquement de trouver des conditions favorables pour enclencher une dynamique d'étude par un jeu de questions – qu'elles soient extra ou intra mathématiques – et en partant des raisons d'être des objets enseignés.

Le travail réalisé, les confrontations entre équipes, font apparaître quelques problèmes qui ne sont pas sans lien avec les thèmes des journées d'Uzès.

- S'essayant à fonder un enseignement à partir de questions génératrices d'études et de recherches, certains voudraient concevoir des situations suffisamment dé-didactifiables pour que les élèves puissent trouver, à l'aide de leur seul répertoire de connaissances disponibles, des réponses aux problèmes posés. Or, il apparaît que ce n'est pas toujours possible ; se posent alors des questions sur les « milieux » à mettre à disposition des élèves et les « médias » que le professeur peut indiquer ou mettre à disposition des élèves, afin qu’en retour les élèves puissent y puiser des questions, des réponses ou y trouver des milieux permettant d’éprouver l’adéquation de réponses aux questions. Cependant, pour juger d'une telle adéquation encore faut-il, *a minima*, qu’ils disposent de la question et l’aient faite leur ; nous conservons systématiquement cette préoccupation à l’esprit, mais y répondre est, dans bien des cas, moins évident qu’il n'y paraît.

- Dans cette façon d’enseigner, le professeur devient un directeur d’études et de recherche. Mettre à sa disposition des ***questions cruciales*** à poser pour s’adapter et réguler le travail des élèves, pour relancer le cas échéant la dynamique de l’étude, nous paraît des plus importants. Une AER et sa gestion par un enseignant ne se réduisent pas à l’énoncé d’un problème à poser aux élèves. Décrire ces questions, préciser leur usage font partie de ce que nous essayons de faire par la mise à disposition de guides de direction de l’étude ; tout en sachant que le réel des interactions dans une classe est inépuisable, et que la meilleure des analyses *a priori* ne pourra jamais tenir compte de l’irréductible partie relevant du contingent de ces interactions.

- Un problème important porte sur la diffusion de notre travail auprès de la profession. Quelles formes ? Quels médias ? Quelle culture professionnelle pour pouvoir le recevoir ? Ces questions sont à ce jour à l'étude en concertation avec les deux responsables de l’INRP qui suivent le projet. Si, comme le dit Y. Chevallard, ce qui est à l’ordre du jour est une révolution épistémologique à venir, comment y contribuer en armant la profession pour pouvoir l’affronter ?

Bibliographie :

B.O.E.N. N°5 du 25 Août 2005, Hors série, *Programmes des collèges, introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques*, Paris, Ministère de l'Education nationale.

Chevallard Y. (2005) Place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire in Animath (éd.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire,* brochure APMEP n° 168 Actes de l'université d'été d'Animath à Saint-Flour en Août 2004, Paris, APMEP, p. 239-263.

Chevallard Y. (2007) Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir, *Bulletin de l'APMEP*, 471, 439-461.

Establet R., Fauguet J. L, Felouzis G., Feuilladieu S., Vergès P.(2005), *Radiographie du peuple lycéen. Pour changer le lycée*. Paris, ESF.