Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes

Sauter Mireille, Combes Marie Claire, De Crozals Aurélia,
Droniou Jérome, Lacage Michel, Saumade Henri, Théret David.
IREM de Montpellier

« Au cœur même de la notion de culture mathématique se trouve la capacité de poser, de formuler et de résoudre des problèmes … les élèves devraient non seulement être à même de résoudre des problèmes, mais aussi de se les poser. »

Cette phrase extraite du rapport PISA[1], sur la culture mathématique, nous interpelle en tant qu'enseignant. Est-ce que dans nos pratiques nous favorisons cette attitude chez nos élèves ? Quels types de problèmes leur propose-t-on pour les mettre dans cette situation ? Avant de se poser à soi-même des questions, n'est-il pas plus facile de les poser à d'autres ?

Depuis quelques années, à l'IREM de Montpellier, nous pensons que l'évolution des pratiques des enseignants ne peut se faire qu'avec un accompagnement, au sein d'une communauté. Pour initialiser cette communauté, nous proposons une formation intitulée « Résolution collaborative à distance de problèmes ouverts » à l'intention d'enseignants de collèges et de lycées.

Initialement cette formation s'intégrait dans un dispositif appelé SFODEM[2] (Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques), dispositif mis en place dans l'Académie de Montpellier qui avait pour mission, à travers des stages de formation, d'accompagner les enseignants de Mathématiques dans leur pratique des TICE. Ce dispositif utilisait sur Internet une plateforme qui offrait aux formateurs et stagiaires les services d'une messagerie, d'un chat et d'un forum.

Actuellement, ce stage est toujours proposé au plan académique de formation dans l'Académie de Montpellier et progressivement, depuis plusieurs années, une communauté d'enseignants s'est constituée pour travailler collaborativement sur la recherche de problèmes ouverts. L'analyse du fonctionnement de cette communauté fait l'objet d'une recherche-action dans le cadre d'un partenariat avec l'INRP.

Dans cet article, nous allons présenter nos hypothèses d'enseignement, décrire les acteurs et le fonctionnement de cette communauté, l'organisation du travail collaboratif entre les enseignants et les élèves puis donner un exemple de ces recherches collaboratives dans les classes.

1. Une communauté d'enseignants

L'utilisation du mot communauté peut faire référence aux travaux sur les communautés de pratiques dont Wenger[3] donne la définition suivante : « *Une communauté de pratique est un groupe dont les membres s'engagent régulièrement dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs.»* Une communauté de pratique se caractérise par **l'engagement mutuel** de ses membres. Cet engagement mutuel est basé sur la complémentarité des compétences et sur la capacité des individus à communiquer efficacement leurs connaissances avec

[1] PISA Rapport http://www.pisa.oecd.org/

[2] Guin D., & Trouche L. (2004). Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. Repères-IREM n°55.

[3] Wenger E (1998) Communities of Practice : Leaning, Meaning and Identity Cambridge, University Press.

celles des autres. Il suppose un rapport d'entraide entre les participants, nécessaire au partage de connaissances sur la pratique. La communauté est soudée par une **entreprise commune** qui est le résultat d'un processus collectif permanent de négociations qui crée des relations de responsabilité mutuelle entre les personnes impliquées. Au cours du temps, la communauté crée des ressources qui forment **le répertoire partagé** constitué par la connaissance communautaire qui ne se réduit pas à la juxtaposition des connaissances individuelles mais qui s'élabore à partir de la mutualisation, l'innovation et la production de nouvelles connaissances en utilisant les savoirs et compétences de chacun. Ces communautés de pratique fonctionnent sur un mode de travail collaboratif, elles ne sont pas dirigées mais soutenues ; en général, tous les membres de la communauté n'ont pas le même niveau d'engagement et certains membres, appelés **facilitateurs,** ont un rôle particulier. Ils coordonnent et régulent les échanges entre les participants. Ils organisent et favorisent la collaboration, les interactions entre pairs ; ils deviennent metteurs en scène, animateurs, en veillant à la participation de tous les membres de la communauté afin d'éviter les abandons.

Notre communauté d'enseignants n'est pas encore une véritable communauté de pratique au sens de Wenger, mais d'année en année elle en acquiert progressivement les caractéristiques.

Ses membres sont des enseignants qui ont tous sensiblement les mêmes capacités et compétences, en ce qui concerne leurs pratiques enseignantes en classe. Leur objectif commun, qui fédère le groupe est la volonté d'évoluer dans leurs pratiques pédagogiques par la mise en œuvre de méthodes particulières.

Le levier de ce changement est la résolution de problèmes ouverts qui nécessite un travail collaboratif, où chacun a besoin des compétences des autres pour avancer. Les échanges autour de ces problèmes favorisent la communication, la recherche collective responsabilise chacun et demande l'instauration de nouvelles formes de travail ; de plus, l'utilisation d'une plateforme induit une meilleure intégration des TICE dans la pratique enseignante.

2. Les types de problèmes et les pratiques pédagogiques utilisés

Dans les classes, les recherches s'organisent en utilisant des pratiques pédagogiques centrées sur un modèle constructiviste de l'enseignement, comme par exemple les « problèmes ouverts »[4] (IREM de Lyon), les narrations de recherche[5] (IREM de Montpellier), le débat scientifique[6] (IREM de Grenoble, Marc Legrand).

Ces pratiques pédagogiques sont centrées sur la résolution de problèmes et ont un objectif commun, celui de placer l'élève dans la situation la plus caractéristique de l'activité mathématique, celle d'affronter un problème, se trouver dans la position d'un chercheur en mathématique.

Nous pensons que trouver la solution d'un problème n'est pas le but essentiel de sa résolution mais l'intérêt réside beaucoup dans le plaisir, la curiosité que l'on éprouve lors de sa recherche. C'est à travers les questions que l'on se pose sur l'énoncé, le raisonnement, la solution, c'est le regard rétrospectif que l'on porte sur le problème, qui engendre motivation et intérêt pour d'autres problèmes.

Dans le cadre de notre formation, nous présentons ces différentes pratiques, leurs spécificités et leurs complémentarités. Pour les mettre en œuvre, nous proposons de véritables problèmes ouverts de recherche, et non des problèmes fermés déguisés, où la réponse est unique et imposée. Les énoncés sont attractifs et compréhensibles par tous ; d'un contenu intuitif assez immédiat, leur formulation reste volontiers imprécise, cependant suffisamment simple, pour susciter la curiosité dans des domaines

[4] Arsac G., Germain G. & Mante M (1988), Problèmes ouverts et situation problème Brochure IREM Lyon.

[5] Bonafé F., Chevalier A., Combes M.-C. Deville A., Dray L., Robert J.-P. & Sauter M. (2002) Les Narrations de Recherche de l'école primaire au lycée. Co-édition Irem de Montpellier, Apmep n°151.

[6] Legrand M. Débat scientifique en cours de mathématiques Repères IREM n° 10.

abordables par tous. Toutefois leur complexité nécessite des échanges, une recherche en groupe et un travail collaboratif pour arriver à des résultats satisfaisants.

La durée de la recherche est nécessairement assez longue, étalée sur plusieurs semaines avec des moments de synthèse et de relance gérés par les animateurs ou les stagiaires.

Le démarrage est relativement aisé, mais les énoncés nécessitent un débat entre les chercheurs pour fixer des choix. Il peut être nécessaire de :

- définir les objets sur lesquels on travaille ;
- réaliser des premières modélisations suivant les choix adoptés ;
- s'interroger sur les résultats attendus : « Qu'est ce qu'une solution, une réponse satisfaisante ? ».

Une fois ces choix adoptés par tous, ces problèmes offrent un démarrage aisé, il n'y a pas de blocage. Une phase expérimentale (géométrique, numérique) est accessible à tous, les premières recherches sont riches de résultats variés.

L'évolution des recherches peut être très imprévisible, car ces problèmes sont évolutifs, « vivants », ils nécessitent des échanges entre pairs. Cette communication des divers résultats permet d'avancer, de relancer, de remotiver les recherches. Il peut y avoir une remise en cause des choix initiaux, une redéfinition des objets et des « bonnes réponses ». De nouvelles modélisations peuvent être proposées, et le problème offrira de nouvelles pistes entraînant l'étude de problèmes annexes ou de variantes.

De fait, la recherche n'est jamais terminée ; le problème peut rester ouvert, c'est-à-dire n'être jamais résolu ou bien avoir d'autres prolongements.

Pour préciser ces caractéristiques, nous allons présenter quelques problèmes qui ont été cherchés dans les classes.

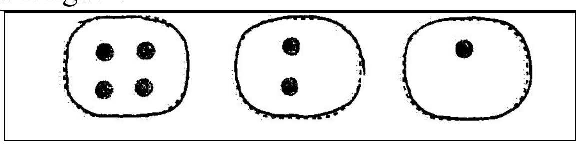
Problème des gardiens de musée (problème inventé par V. Klee en 1973)

On s'intéresse à la surveillance d'une salle de musée, dont les murs sont rectilignes : on y place des gardiens qui sont assis sur des chaises. Ces chaises sont fixées au sol (les gardiens ne peuvent donc pas se déplacer dans la salle), mais elles sont pivotantes (les gardiens peuvent donc voir dans toutes les directions à partir de leur position).
Quel est le nombre minimum de gardiens dont il faut disposer pour surveiller toute la salle, et où faut-il les placer ?

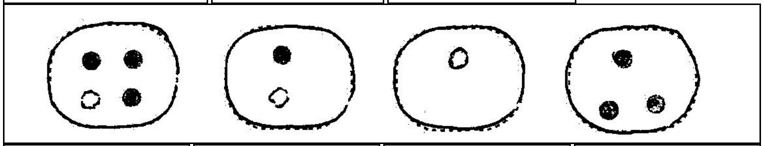
Situation bien concrète mais qui pose de nombreuses questions : quelle est la forme de la salle ? Combien a-t-elle de murs ? Y a-t-il des obstacles ? La résolution sera non optimale, on peut en trouver une en annexe 1 qui a été proposée aux enseignants.

Problème de la roulette hollandaise

On prend un certain nombre de cailloux. On les divise en un certain nombre de tas. On joue seul : on prend un caillou dans chaque tas et avec ces cailloux piochés on fait un nouveau tas. Et on recommence …..
Que se passe-t-il à la longue ?



un tas de 4 cailloux	un tas de 2 cailloux	un tas de 1 cailloux



un tas de 3 cailloux	un tas de 1 cailloux	un tas de 0 cailloux	nouveau tas de 3 cailloux

La règle du jeu est très simple, tout le monde peut jouer. Mais !! On ne connaît pas le nombre de cailloux, le nombre de tas, la répartition des cailloux dans les tas !!!
La question est floue « Que se passe-t-il ? » Est-ce que je dois jouer longtemps ? Quelle modélisation adopter ? »

De nombreuses décisions sont à prendre et il vaut mieux être nombreux pour avancer dans la résolution. Nous n'apporterons d'ailleurs que des solutions partielles à ce problème très complexe.

Problème des monnaies

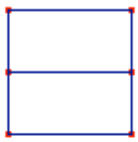
Serait-il possible d'utiliser un système de monnaie où il n'existerait que des pièces de valeur 9 et 11 ?

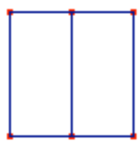
Ce problème inspiré d'un énoncé du rapport PISA présente des variantes suivant les valeurs des pièces, si l'on choisit de rendre ou non la monnaie. Le déroulement de sa recherche dans les classes a fait l'objet d'un article dans le bulletin n° 455 de l'APMEP.

Problème du carrelage

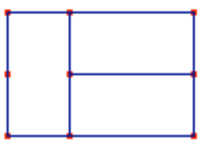
On veut carreler une forme rectangulaire de largeur m et de longueur n (multiples entiers d'une même unité de longueur) avec des carreaux identiques de largeur 1 et de longueur 2.
Est-ce possible ?
Et si oui, de combien de manières différentes peut-on le faire ?

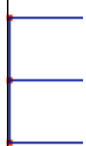
Exemples de pavages différents pour $m = n = 2$





Exemples de pavages différents pour $m = 2$ et $n = 3$





On ne connaît pas les dimensions de la forme rectangulaire : comment choisir m, n ? Va-t-on trouver une formule générale ? Rapidement, il apparaît que ce problème ne pourra être résolu que dans des cas particuliers.

3. Les acteurs de la communauté

Dans notre communauté trois groupes de personnes interagissent :

- les tuteurs, au nombre de cinq, quatre enseignants de collège et lycée et un universitaire ;
- les stagiaires : une quinzaine d'enseignants du second degré ;
- les élèves répartis dans une vingtaine de classes.

Quel est le rôle de chacun ?

Les tuteurs

La communauté a besoin d'être accompagnée, soutenue en particulier les premières années. Les tuteurs sont des « facilitateurs » de son fonctionnement et ils jouent essentiellement quatre rôles :

- **Un rôle pédagogique**

  Ils choisissent le problème, font des recherches documentaires. L'universitaire est le coordonnateur des recherches, il est le rédacteur des relances, du bilan et de la clôture du problème.

- **Un rôle social**

  Ils créent et entretiennent un climat de confiance, ils sont régulateurs et modérateurs d'un groupe de recherche. Ils accompagnement les stagiaires et les encouragent au travail collaboratif, prévenant les découragements ou risques d'abandon.

- **Un rôle organisationnel**

  Ils organisent le travail de l'année, décident du calendrier, des échéanciers, ils constituent les groupes de recherche.

- **Un rôle technique**

  Ils gèrent les accès à la plateforme, organisent le forum qui est la mémoire de travail de la communauté, facilitent et améliorent la communication entre les stagiaires.

  Il est à noter que les tuteurs, excepté l'universitaire, jouent un double rôle dans la communauté car en tant qu'enseignants ils engagent aussi une de leurs classes dans le travail collaboratif. Cette double fonction tuteur-stagiaire est un facteur important pour la cohésion du groupe et facilite la communication entre les membres.

Les stagiaires

Les stagiaires sont des enseignants de l'académie qui s'inscrivent volontairement à ces stages de formation continue ; mais ces stages leur demandent un engagement et une implication beaucoup plus grande qu'à l'accoutumée. Ils s'engagent à :

- Résoudre des problèmes ouverts en collaboration avec d'autres enseignants ;
- Faire résoudre des problèmes ouverts par une de leurs classes en collaboration avec d'autres classes ;
- Échanger régulièrement leurs travaux de recherche suivant un calendrier ;
- Utiliser les TICE comme moyen de communication.

Le travail collaboratif dans le groupe demande une responsabilisation importante de chacun, qui se traduit par le respect du calendrier des journées de réunion, des périodes de recherche, des dates des échanges. Chacun doit harmoniser sa progression dans sa classe, avec celle des autres et envoyer régulièrement la synthèse des recherches de ses travaux en la mettant sur le forum de la plateforme.

Pour que la communication dans le groupe circule d'une manière satisfaisante, chacun doit lire et traiter rapidement les informations qui lui parviennent par Internet.

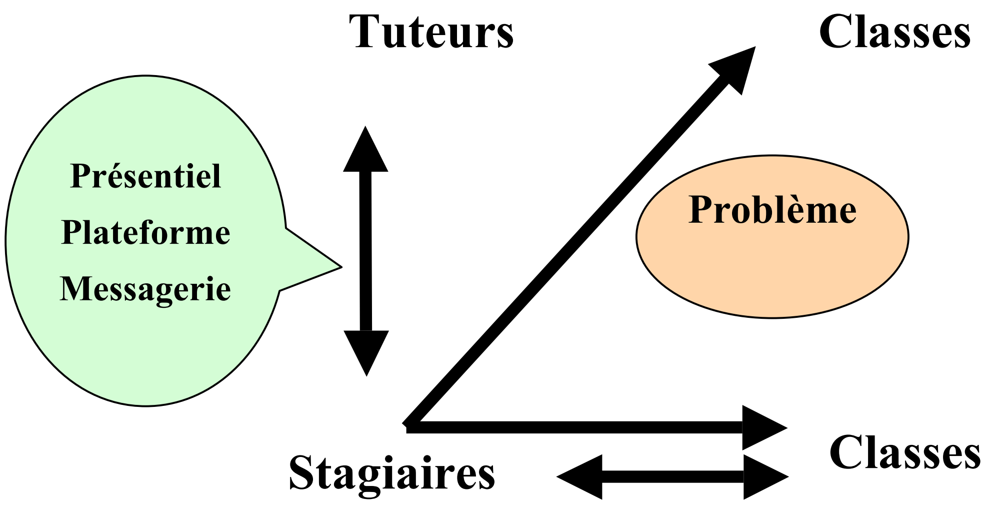
Les élèves

Les élèves sont répartis dans des classes de la sixième à la première dans des collèges, des lycées classiques ou professionnels.

Les groupes de recherche sont constitués de 3 à 4 classes de niveaux différents.

4. Les moyens de communication dans la communauté

La communication dans la communauté s'établit à travers des outils de communication synchrones comme les présentiels et les chats, et des outils de communications asynchrones sur internet, constitués par les messageries et le forum d'une plateforme.



Les présentiels

Trois journées, réparties sur l'année, regroupent tous les participants à la formation. Elles sont très importantes pour la régulation du travail collaboratif.

Le premier présentiel est essentiel, car nous avons remarqué que pour le bon fonctionnement de notre communauté un climat de confiance doit s'établir entre ses membres. Lors de cette première journée, les stagiaires se voient, se parlent ; ces échanges sont indispensables pour le bon déroulement ultérieur du stage. Dans la matinée les tuteurs organisent la recherche d'un problème ouvert, suivi d'un débat scientifique. Les stagiaires vivent en accéléré les situations qu'ils recréeront dans leurs classes et cette mise en pratique, suivie d'une analyse du vécu, permet aux formateurs de présenter le cadre théorique et les objectifs de la formation.

Lors de cette journée est mis en place le travail collaboratif avec négociation des échéanciers, des dates et heures des chats, du calendrier des recherches entre adultes et dans les classes.

La présentation et l'utilisation des divers moyens de communication, comme le forum de la plateforme, permettent de familiariser les enseignants à ces nouvelles formes d'échanges.

Les deuxième et troisième présentiels permettent la régulation et la renégociation des échéanciers, des bilans partiels sont alors établis. Ces temps de regroupements sont très appréciés par les stagiaires car ils sont redynamisants, ils sont l'occasion d'échanges sur les différentes organisations dans les classes, de discussions sur les difficultés rencontrées, les diverses pratiques pédagogiques mises en œuvre.

La messagerie

Un équipement informatique personnel est indispensable, pour la bonne participation à ce travail collaboratif car les échanges de courriels sont fréquents et les accès aux équipements informatiques dans les établissements trop aléatoires, bien qu'ils se soient nettement améliorés depuis peu de temps.

Le chat

La plateforme permet l'organisation de chats. A la suite d'un présentiel, un chat est souvent proposé entre adultes sur la recherche d'un problème. Ce moment de regroupement virtuel soude la communauté et renforce ce sentiment d'appartenance, il favorise des échanges très interactifs, rapides et immédiats, il initialise les travaux de recherche qui se poursuivront sur le forum.

Le choix des dates et heures des chats ne sont toutefois pas aisés pour satisfaire tout le monde.

Le forum

Sur la plateforme, le forum est le lieu d'échange des travaux de recherche, accessible à tous et à tout moment, il constitue le lieu de mémoire du groupe ; c'est la production « vivante » de la communauté.

Grâce à son arborescence, il est aisé de suivre les travaux des différents groupes, ces travaux sont archivés au fur et à mesure de l'avancée des recherches, organisés en « questions réponses » entre les différentes classes.

Un extrait du forum dédié à la recherche d'un problème est présenté dans l'annexe 2 ; il comporte une cinquantaine de fichiers, traduisant le volume et l'importance des échanges.

5. Organisation du travail collaboratif

Afin que le travail collaboratif entre les classes se déroule d'une manière satisfaisante, il faut tout d'abord que les stagiaires soient mis en confiance. Dans ce but, nous mettons en place successivement deux dispositifs lors du stage.

La première phase, dont l'objectif est la création de la communauté « tuteurs-stagiaires », s'organise autour de la recherche d'un problème ouvert entre adultes. Suite au premier présentiel, un chat est proposé, suivi d'une recherche de deux à trois semaines sur un problème ouvert. Le plaisir de la recherche fédère les stagiaires, leurs productions sont placées dans un forum de la plateforme. Ce travail commun entre adultes facilite grandement les échanges ultérieurs avec les élèves. Les stagiaires vivent ainsi par anticipation la situation de leurs élèves face à une véritable démarche scientifique. Ils comprennent la nécessité de l'élaboration d'un contrat pour organiser la communication et l'obligation de définir des critères concernant les documents à communiquer aux autres participants.

La deuxième phase met en jeu les classes pendant quatre à cinq semaines autour de la recherche d'un problème ouvert avec la mise des travaux sur un nouveau forum. Un deuxième présentiel se tient en milieu de recherche pour recentrer les diverses pistes suivies par les élèves. Une relance est alors envoyée par le tuteur universitaire. Le troisième présentiel, à la fin des cinq semaines, permet d'établir un bilan et de faire la clôture du problème.

Les groupes de recherche réunissent trois ou quatre classes de niveaux différents, de préférence, avec un tuteur qui aide, stimule, facilite les échanges. Les recherches d'un problème se déroulent à raison d'une séance en classe de 1 heure par semaine, selon le calendrier suivant :

1ère semaine : recherche en groupe dans la classe et envoi de questions aux autres classes du groupe.

2ème semaine : recherche sur les questions reçues des autres classes et envoi des réponses.

Fin de la semaine : le coordonnateur fait une relance à partir de ces questions pour que toutes les classes se recentrent sur les mêmes sujets de recherche.

3, 4 ou 5ième semaine : poursuite des recherches et des échanges avec un envoi à la fin de chaque semaine. Les élèves élaborent alors des conjectures, échangent des pistes de solutions et argumentent leurs raisonnements.

Fin de la recherche : le coordonnateur propose une clôture du problème que chaque enseignant adapte à sa classe. Ce bilan est indispensable pour qu'enseignants et élèves constatent tout le travail mathématique réalisé.

6. Un exemple de travail collaboratif : le problème des lemmings

Les différents problèmes travaillés ces dernières années font apparaître des régularités quant à l'activité mathématique menée par les différentes classes. Ces problèmes font entrer les élèves dans une véritable démarche scientifique et le déroulement de leur recherche suit les différentes étapes d'une démarche d'investigation dont le schéma est défini dans les programmes des collèges[7]. Le canevas d'une démarche d'investigation est le suivant :

- Choix d'une situation-problème proposée par le professeur ;
- Appropriation du problème par les élèves ;
- Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives ;
- Investigation ou résolution du problème ;
- Echanges argumentés ;
- Acquisition et structuration des connaissances.

Nous allons suivre ce schéma pour décrire le travail collaboratif réalisé l'an dernier par une trentaine de classes sur le problème des lemmings ; tous les travaux d'élèves présentés ci-dessous sont extraits du forum de la plateforme dédié à ce problème.

Le choix du problème : L'écologie des lemmings

L'écologie des lemmings

Le lemming est un petit rongeur qui vit dans les régions nordiques (Suède, Finlande, Sibérie, Canada…). C'est un animal extrêmement prolifique, il devient mature quelques semaines à peine après sa naissance, et les femelles peuvent avoir plusieurs portées par an. Il a divers prédateurs naturels : renards, hermines, loups, faucons… Au Canada, le lemming vit en particulier dans l'archipel arctique, constitué d'une centaine d'îles principales (un peu plus de 1 km² chacune) et de milliers d'îles secondaires.

On cherche justement à prévoir l'évolution de la population d'une de ces îles. On sait qu'il y avait, en 2005, 3000 individus environ sur l'île en question, et on a constaté que le lemming a un taux de natalité (nombre de naissances par an divisé par le nombre d'individus) égal à 110% et un taux de mortalité (nombre de décès par an divisé par le nombre d'individus) égal à 60%. Peut-on prévoir la

[7] B. O. n°5 25 Août 2005 Programmes des collèges Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques Annexe 1.

population dans les années futures? Que peut-on en conclure ? Est-ce possible de prévoir la population au milieu (ou au quart, au tiers…) d'une année donnée ? Et si l'on s'intéresse à la même espèce de lemmings qui vivent en Sibérie, le problème change-t-il de nature ?

On peut remarquer que cet énoncé est sensiblement différent des précédents ; nous présentons depuis deux ans des problèmes tirés de situations concrètes qui demandent des choix de modélisation, choix qui peuvent être remis en cause en confrontant les résultats obtenus à la réalité.

De plus ce problème, se situant dans un domaine proche de la réalité, répond aux injonctions du socle commun de connaissances et compétences : « *La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par* ***la résolution de problèmes****, notamment à partir de* ***situations proches de la réalité*** ». Il permet aussi un travail interdisciplinaire qui peut être développé dans un thème de convergence.

Ce travail interdisciplinaire s'est effectué dans certaines classes avec la collaboration d'autres enseignants, il a porté essentiellement :

- En Français sur le vocabulaire et la compréhension du texte de l'énoncé ;
- En Sciences et Vie de la Terre au sujet de la reproduction des rongeurs, leur classification et leur reproduction ;
- En Géographie sur leurs lieux de vie (pays nordiques), les taux d'accroissement d'une population ;
- Au CDI pour faire des recherches documentaires avec l'utilisation d'Internet.

L'appropriation du problème par les élèves

L'appropriation du problème se fait à travers les questions-réponses échangées pendant les deux premières semaines entres les classes.

Certaines questions peuvent paraître annexes et secondaires au problème mais elles constituent une première approche, essentielle pour les élèves. Cette étape ne doit pas être occultée, car ce questionnement, s'il n'est pas discuté puis évacué par des choix judicieux, peut parasiter très longtemps la recherche de certains d'entre eux.

Le premier travail de l'enseignant est donc de faire surgir ces questions mais aussi de les amener à voir que certaines ne sont pas pertinentes du point de vue mathématique.

Questions des élèves de 6ème A du collège de Castelnaudary 17 Novembre 2006

Combien d'années vivent-ils ?
Combien de fois une femelle lemming peut-elle être enceinte ?
Est-ce que les prédateurs sont plus nombreux que les lemmings en Sibérie ?
Pourquoi cette île ?
Y a-t-il une différence entre les lemmings de Suède, Sibérie, Canada ?

Par certaines questions les élèves « entrent ensuite dans les mathématiques », des décisions doivent être prises, des choix de modélisation du problème adoptés par tous.

Questions des élèves de 6ème A du collège de Castelnaudary 17 Novembre 2006

Est-ce que le taux d'accroissement naturel restera pareil ?

Est-ce que le taux de natalité va augmenter dans les années à venir ?
Comment calculer la population de lemmings si elle est toujours instable ?
Comment est-ce qu'on saura si par exemple ils se reproduisent par 10 fois plus en 2008 ?

La deuxième semaine, l'appropriation du problème continue à travers les réponses envoyées aux questions des autres classes.

Réponses des élèves de la 6ème 6 de St Mathieu à la 5ème 4 de Clermont l'Hérault 22 Novembre 2006

Arthur a dit que cela revenait à dire que les « lemmings » étaient en augmentation de 50% par an qu'en pensez vous ?
Il a raison car le taux d'accroissement c'est la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité le professeur de géographie nous l'avait expliqué et nous l'avons vérifié en math.

Mais certains groupes posent la question de savoir si après 2006 on doit conserver ou pas le même taux de natalité de 110% et de mortalité de 60% par an.
Si nous voulons continuer le problème nous allons garder le même taux de natalité et de mortalité mais peut être que nous changerons dans quelques années.

Quelques élèves pensent que le problème des « lemmings » ne changerait pas s'il était question à la place de « chats » ou de « lapins »
Nous avons des avis partagés, avec des lapins ce serait le même problème : c'est l'étude de l'évolution d'une population, seuls les taux changent.
Mais certains pensent que ce ne serait pas vraiment le même problème car on connaît mieux les lapins, les chats que les lemmings, on ne connaît pas bien les prédateurs des lemmings, on peut moins prévoir.

L'investigation ou résolution du problème - Formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives - Echanges argumentés

A la suite des premiers échanges, les élèves ont bien senti qu'ils ne se trouvaient pas dans un domaine de certitudes, l'évolution des lemmings dépendant de nombreux facteurs ; mais dans un premier temps, pour continuer les recherches, il est nécessaire de faire un choix en posant une **hypothèse** :

Supposons que les taux de mortalité et de natalité soient constants dans les années à venir.

Avec cette hypothèse ils ont décidé de s'intéresser aux questions suivantes :
- Quelle est la population des lemmings en 2006, 2007, 2015, 2020 ?
- Peut-on trouver une formule pour la calculer au bout de n années ?
- Est-ce un modèle de proportionnalité ?
- Quelle est la population des lemmings au bout de 6 mois, 3 mois ?
- Voyant l'augmentation de la population, on peut s'intéresser à l'espace vital de l'animal, la densité (combien de lemming dans un espace comparable à la salle de classe suivant les années ?), que se passera-t-il sur l'île ?

Troisième semaine de recherche de la 5ème E de Jacou 7 Décembre 2006

Cette semaine nous avons lu vos réponses ; nous nous documentons toujours sur la vie des lemmings, certains deviennent des spécialistes.

Avec l'hypothèse que **les taux restent constants***, nous avons calculé le nombre de lemmings en 2006, 2007 …2010..2020*

Nous avons repris le tableau de Clermont l'Hérault en faisant des additions et en 2020 :
- un groupe a trouvé 1 313 638 lemmings
- un autre groupe a trouvé 1 347 346 lemmings

Combien avez-vous trouvé ?

Nous avons aussi cherché comment calculer la population d'une année à la suivante nous avons trouvé plusieurs stratégies :
on ajoute chaque fois la moitié du nombre de Lemmings
on divise le nombre de lemming par 2 puis on multiplie par 3
on multiplie le nombre de lemmings par 1,5

Que pensez vous de nos stratégies ?

Certains pensent qu'il va y avoir surpopulation sur l'île et que les lemmings n'arriveront plus à manger, un groupe a commencé à calculer quel était leur espace vital en divisant la surface de l'île par le nombre de lemmings.

La semaine prochaine nous allons continuer nos recherches et faire peut être des affiches pour rassembler tous nos résultats.

A bientôt

L'organisation des recherches s'effectue en général en groupe dans les classes ; les conjectures et résultats sont discutés entre les élèves et envoyés aux autres classes. Pour valider ou infirmer les conjectures, un travail très important sur la notion de contre-exemple ou la nécessité de démonstration est fait.

Le mélange de différents niveaux de classes dans les groupes de recherche permet à certains élèves d'approcher certaines notions qu'ils étudieront par la suite dans leur scolarité.

Débat dans la 6ème 6 des Escholiers de La Mosson Montpellier 6 Décembre 2006

On a remarqué que pour passer de 2005 à 2006, on a multiplié par 1,5 ; de 2005 à 2007 par 2,25 ; de 2005 à 2008 par 3,375… Mais on n'a pas trouvé de formule.
Par contre, quelques élèves ont remarqué ceci :

N = 2005	3000 lemmings
N + 1 = 2006	4500 = 3000 × 1,5
N + 2 = 2007	6750 = 4500 × 1,5 = 3000 × 1,5 × 1,5
N + 95 = 2100	$3000 \times 1{,}5 \times \underbrace{\ldots \times 1{,}5}_{\text{95 fois}}$

La formule pour calculer le nombre de lemmings dans plusieurs années est :

$$3000 \times (\underbrace{1{,}5 \times 1{,}5 \times \ldots . \times 1{,}5}_{n \text{ fois = nombre d'années après 2005}})$$

Grâce aux $4^{ème}$ et à quelques élèves qui avaient cherché chez eux, on a vu que cela se notait :
$3000 \times 1{,}5^n$ (1,5 puissance n)
On a remarqué que pour passer de 2005 à 2007, on a multiplié par 2,25.
Ce qui veut dire que $1{,}5^2 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$

Le coordinateur chercheur a un regard extérieur et neutre sur les travaux des élèves, il intervient plusieurs fois en rédigeant, d'abord une relance, vers le milieu du temps de recherche du problème. Puis il envoie une clôture du problème à tous les enseignants.

Extrait de la relance
Bonjour à tous.
..........Lorsqu'un scientifique aborde une problématique, celle-ci est rarement balisée ; la première étape d'une recherche consiste à comprendre la problématique qu'on se pose, à en délimiter (ne serait-ce que grossièrement) les contours………… Dans vos premières semaines de réflexion, c'est précisément ce que vous avez fait : vous vous êtes posés (à vous-même ainsi qu'aux autres classes) des questions diverses et variées afin de faire votre ce problème. Certains se sont bien rendus comptes qu'il allait falloir faire des choix si l'on veut avancer un peu (par exemple : décider que les taux de natalité et de mortalité restent fixes dans les années à venir ; ça n'est probablement pas entièrement correct, mais c'est un départ, et si on arrive à obtenir des résultats dans ce cas particulier peut-être aura-t-on des idées pour un cas plus général avec des taux variables). Cette étape de "simplification" du problème est présente dans 95% des recherches que l'on fait en sciences.
Je pense que vous avez maintenant quelques idées pour avancer et obtenir des résultats au moins partiels. Il ne faut pas hésiter, quand on a obtenu ces premiers résultats, à revenir éventuellement sur les questions initiales qu'on s'était posé, ou à s'en poser de nouvelles (quand on répond à une question, on ouvre souvent la voie à plus de questions !). Il faut aussi avoir un regard critique sur les résultats qu'on a obtenu et les interpréter, essayer de comprendre ce qu'ils veulent dire : la réflexion ne s'arrête pas quand on a écrit le chiffre qui répond à la question initialement posée.
Bon courage pour la suite, je continuerai à lire vos productions.

En calculant la densité des lemmings sur l'île, les élèves ont compris que le choix du modèle à taux constant devait être remis en question. Dans ce problème, les mathématiques mises en œuvre permettent de donner des réponses partielles. Il est nécessaire de s'interroger sur les résultats obtenus pour remettre en question les choix initiaux.

Acquisition et structuration des connaissances

Pour tout problème cherché ainsi pendant 4 à 5 semaines dans les classes, un bilan est indispensable pour les enseignants qui engagent leurs élèves dans ces recherches, car ils prennent alors conscience du travail accompli. En plus d'un travail sur la démarche scientifique (conjectures, contre exemple…), suivant leur niveau, les élèves ont réinvesti des notions déjà abordées, ont acquis des connaissances qu'ils pourront approfondir ou bien ils ont approché et fréquenté de futurs concepts, qu'ils étudieront dans la suite de leur scolarité.

Le problème doit également être clôturé dans les classes, par une synthèse sur les résultats obtenus, bien qu'en général le problème ne soit jamais vraiment clos, car il y a rarement une solution unique et bien des prolongements sont possibles. Ce bilan est différent et adapté à chaque classe.

Le problème des lemmings a des solutions partielles dont il faut bien faire prendre conscience aux élèves et on peut aussi relever un travail sur :

- les nombres : fractions, pourcentages, valeur approchée ;
- les opérations (ajouter 50%, multiplier par 1,5) ;

- les puissances ;
- les unités d'aire ;
- la proportionnalité ;
- les formules et calcul littéral ;
- les représentations graphiques, les diagrammes en bâtons ;
- la fonction exponentielle ;
- les suites ;
- le tableur.

Pour les enseignants, une extension mathématique du problème leur a été envoyée, que l'on peut lire dans l'annexe 3.

7. Bilan

Depuis plusieurs années, des enseignants de l'Académie de Montpellier s'inscrivent assez régulièrement à ces stages de formation continue. Une petite communauté de pratique s'est ainsi constituée où chacun est en confiance, trouvant le plaisir de faire des mathématiques « autrement » avec ses élèves. Les enseignants prennent conscience de nouvelles capacités de leurs élèves qui découvrent avec plaisir des moments de travail de groupe et de débat. Nous pouvons citer la remarque de l'un des enseignants concernant le travail de sa classe : " Ce travail a changé ma vision de la classe. Je les croyais faibles et subissant les mathématiques pour la plupart. Le fait de réussir ce problème que j'avais annoncé comme étant très difficile leur a donné confiance en eux. "

L'organisation peut sembler lourde au lecteur, mais de telles recherches collaboratives de problème peuvent s'effectuer au sein d'équipes très réduites de 3 à 4 enseignants ; à l'intérieur d'un même établissement ou bien entre enseignants qui se connaissent et communiquent grâce à une plateforme sur Internet.

La recherche de tels problèmes s'inscrit totalement dans les instructions du socle commun et des programmes, car elles préconisent de créer dans les classes des situations où les élèves doivent prendre des initiatives et mettre en œuvre de véritables démarches scientifiques.

Enfin la meilleure manière de clore cet article nous semble de citer ce proverbe indien :

Partager une valeur financière implique qu'on la divise.

La connaissance est la seule valeur qui augmente, lorsqu'on la partage.

Bibliographie

Arsac, G., Germain, G. & Mante, (1988) M. Problèmes ouverts et situation problème Brochure IREM Lyon.

Bonafé, F., Chevalier, A., Combes, M.-C. Deville, A., Dray, L., Robert, J.-P. & Sauter, M. (2002) Les Narrations de Recherche de l'école primaire au lycée. Co-édition Irem de Montpellier, Apmep n°151.

Guin, D., & Trouche, L. (2004). Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. Repères-IREM n°55.

Legrand, M. Débat scientifique en cours de mathématiques Repères IREM n° 10.

PISA Rapport http://www.pisa.oecd.org/

Sauter M. & Saumade H. ITEM (2003) (http://www.reims.iufm.fr) Résolution collaborative à distance de problèmes ouverts (classes en réseau).

Wenger,E (1998) Communities of Practice: Leaning, Meaning and Identity Cambridge University Press.

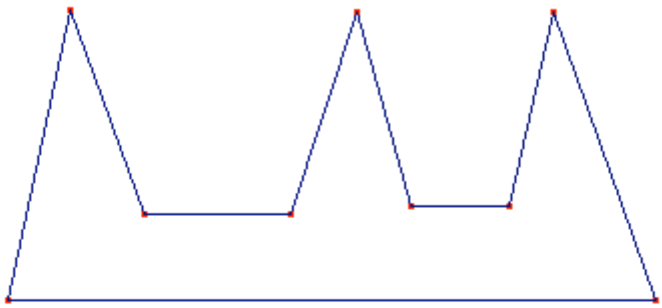
Annexe 1 : Une solution au problème des gardiens de musée

Nous allons considérer ici une salle plane, polygonale, sans trous ni obstacles. On l'a modélisée par un polygone ayant un nombre fini de côtés. Tel quel, ce problème fut posé par V. Klee en 1973. Le résultat que nous allons examiner est dû à V. Chvatal (1975), mais la preuve présentée ici est celle de S. Fisk (1978).

Le résultat de Chvatal est le suivant :
On considère une salle polygonale à n côtés. Alors E(n/3) gardiens suffisent.

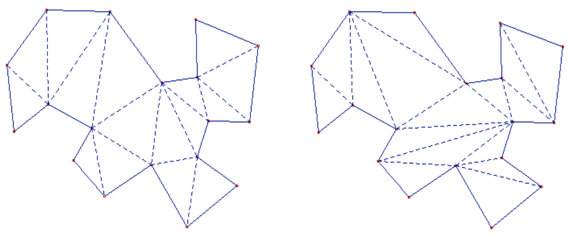
Ici E(n/3) désigne la partie entière de n/3 : c'est le plus grand entier inférieur à n/3.

Voici un exemple de salle à 9 murs, qui nécessite effectivement 3 gardiens:

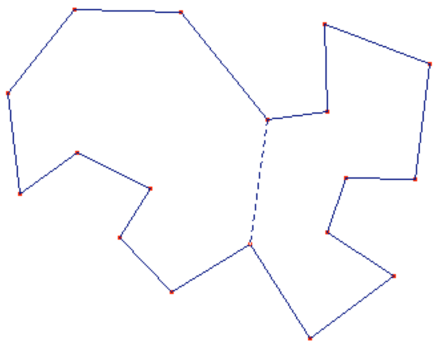


Démonstration. L'idée est de découper la salle en triangles (le plus simple des polygones convexes), et de placer les gardiens à certains sommets de ces triangles de sorte qu'il y ait un gardien au moins par triangle.

Triangulation de la salle. Il s'agit de découper la salle en triangles… Pour obtenir un petit nombre de triangles, on essaie de ne pas introduire de sommets supplémentaires : les sommets des triangles seront les sommets du polygone. Pour une même salle, plusieurs telles triangulations sont possibles. Par exemple :

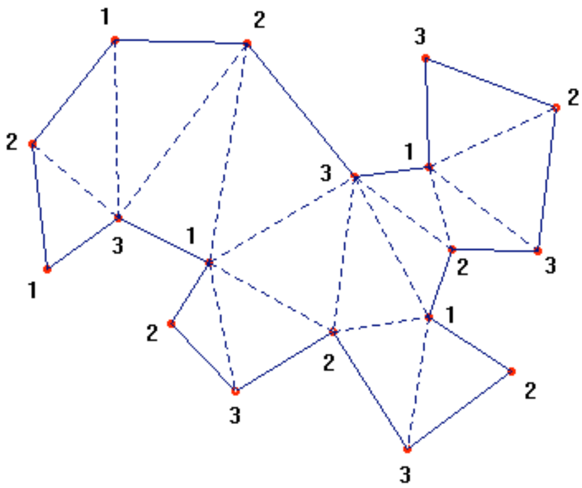


Sur un plan de salle particulier, on se convainc facilement qu'une telle triangulation est possible. Mais comment le démontrer ? Il y a sans doute plusieurs manières de le faire. Voici une idée qui marche : procéder par récurrence sur le nombre de côtés de la salle polygonale. Pour la mettre en œuvre, il suffit de montrer que tout polygone admet une *diagonale*, c'est-à-dire un segment dont les extrémités sont des sommets du polygone, et qui sépare le polygone en deux parties :



Voyez-vous comment démontrer qu'il existe toujours une telle diagonale ?
Une fois qu'une diagonale a été trouvée, on peut imaginer que l'on obtient deux salles polygonales collées l'une à l'autre le long de cette diagonale. Dans la suite, ces salles plus petites seront appelées les *sous-salles.* Par récurrence, on peut trianguler chacune des deux sous-salles (qui ont moins de côtés que la salle initiale). La juxtaposition des deux triangulations donne une triangulation de la salle initiale.

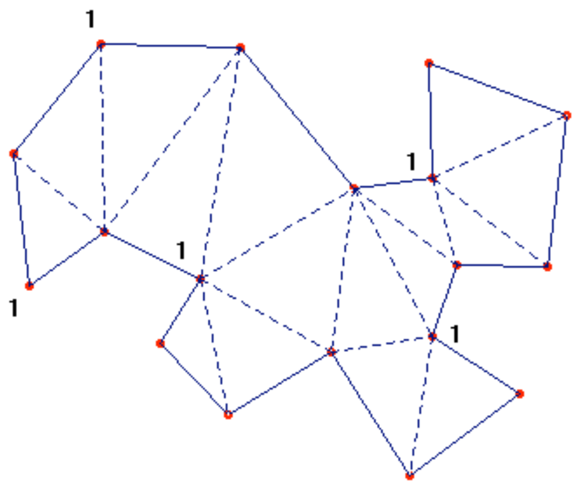
Coloriage du graphe obtenu. Après triangulation du polygone, on a obtenu un graphe dont les sommets sont les sommets du polygone, et dont les arêtes sont les côtés des triangles de la triangulation. On va maintenant *colorier* ce graphe, c'est-à-dire attribuer une " couleur " à chaque sommet du graphe, de sorte que deux sommets joints par une arête soient toujours de couleurs distinctes avec le moins de couleurs possibles. Sur le plan suivant, les couleurs ont été remplacées par des numéros…



Le résultat général est que *trois couleurs suffisent* ! Par exemple sur le plan ci-dessus, seuls trois numéros ont été utilisés. Pour montrer ce résultat, on peut raisonner par récurrence comme dans l'étape de triangulation. Si on sait colorier avec trois couleurs chacune des deux sous-salles triangulées séparées par une diagonale, on a envie de juxtaposer les deux coloriages pour obtenir un coloriage de la salle initiale triangulée. En juxtaposant, on peut rencontrer le problème suivant : les deux sommets de la diagonale ne sont pas de la même couleur dans l'une et dans l'autre sous-salles. Pour surmonter ce problème, il suffit de permuter les couleurs sur l'une des deux sous-salles, de sorte que les couleurs coïncident aux extrémités de la diagonale.

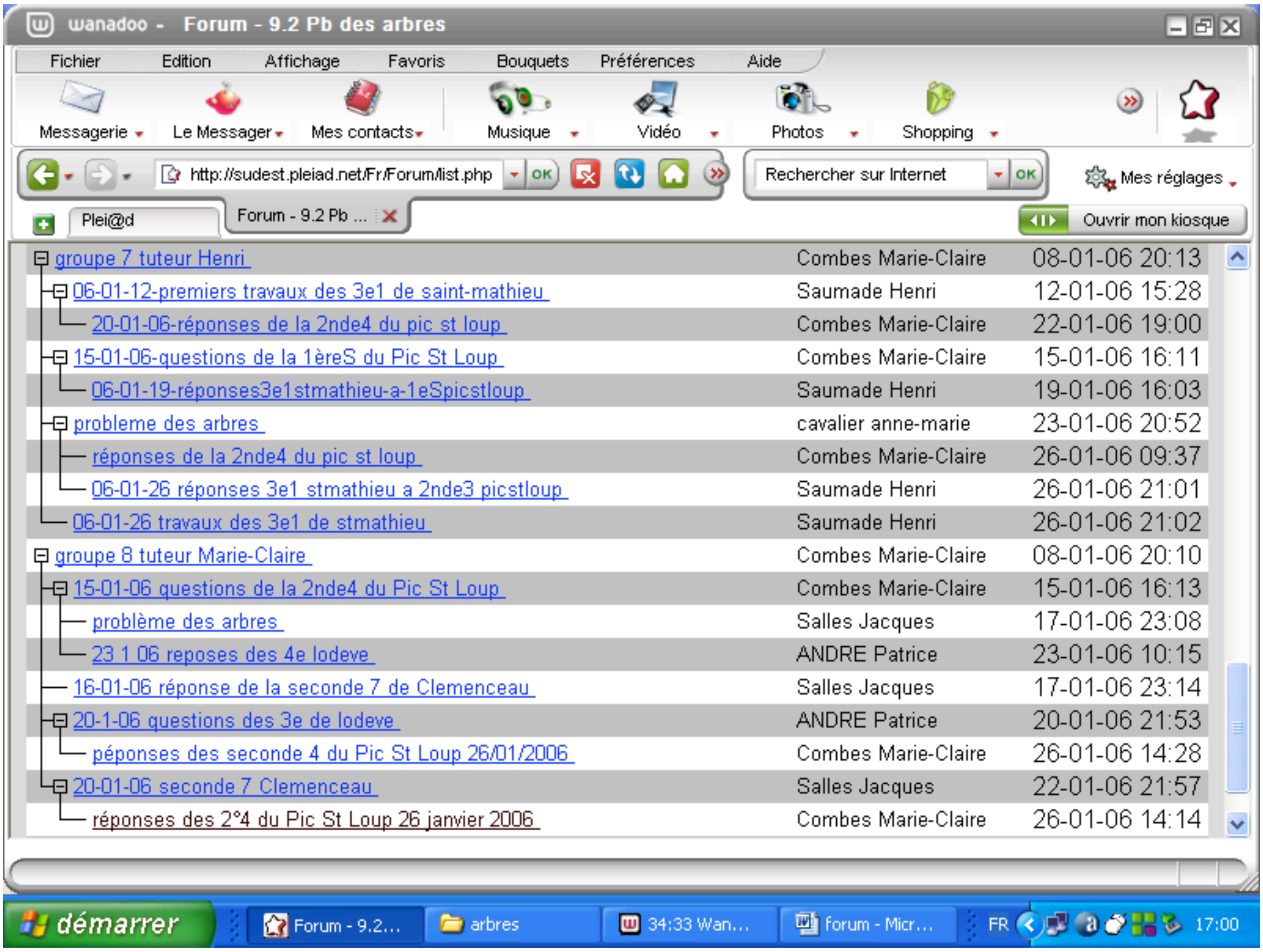
Etape finale : disposition des gardiens. Le polygone initial possède n côtés, donc aussi n sommets. On a utilisé trois couleurs pour colorier ces sommets. Il est nécessaire que l'une au moins de ces couleurs soit représentée moins de n/3 fois ! Plaçons un gardien à chaque

sommet de cette couleur : il y a au plus E(n/3) gardiens ; et puisque chaque triangle de la triangulation a nécessairement un sommet de chaque couleur, il y a au moins un gardien pour chaque triangle.
Sur le coloriage précédent, la couleur 1 est représentée 5 fois ; la couleur 2, l'est 7 fois ; et la couleur 3, 6 fois. La couleur 1 est donc la moins représentée (on vérifie au passage que 5 est bien inférieur ou égal à la partie entière de n/3=6). Si on place un gardien à chaque sommet de couleur 1, on obtient une surveillance de toute la salle, comme promis.



Notons que cette méthode donne des résultats différents suivant la triangulation choisie, et qu'elle n'est pas optimale en général : pouvez-vous faire l'économie de certains gardiens dans l'exemple ci-dessus ?

Annexe 2 : Extrait d'un forum



groupe 7 tuteur Henri	Combes Marie-Claire	08-01-06 20:13
06-01-12-premiers travaux des 3e1 de saint-mathieu	Saumade Henri	12-01-06 15:28
20-01-06-réponses de la 2nde4 du pic st loup	Combes Marie-Claire	22-01-06 19:00
15-01-06-questions de la 1èreS du Pic St Loup	Combes Marie-Claire	15-01-06 16:11
06-01-19-réponses3e1stmathieu-a-1eSpicstloup	Saumade Henri	19-01-06 16:03
probleme des arbres	cavalier anne-marie	23-01-06 20:52
réponses de la 2nde4 du pic st loup	Combes Marie-Claire	26-01-06 09:37
06-01-26 réponses 3e1 stmathieu a 2nde3 picstloup	Saumade Henri	26-01-06 21:01
06-01-26 travaux des 3e1 de stmathieu	Saumade Henri	26-01-06 21:02
groupe 8 tuteur Marie-Claire	Combes Marie-Claire	08-01-06 20:10
15-01-06 questions de la 2nde4 du Pic St Loup	Combes Marie-Claire	15-01-06 16:13
problème des arbres	Salles Jacques	17-01-06 23:08
23 1 06 reposes des 4e lodeve	ANDRE Patrice	23-01-06 10:15
16-01-06 réponse de la seconde 7 de Clemenceau	Salles Jacques	17-01-06 23:14
20-1-06 questions des 3e de lodeve	ANDRE Patrice	20-01-06 21:53
péponses des seconde 4 du Pic St Loup 26/01/2006	Combes Marie-Claire	26-01-06 14:28
20-01-06 seconde 7 Clemenceau	Salles Jacques	22-01-06 21:57
réponses des 2°4 du Pic St Loup 26 janvier 2006	Combes Marie-Claire	26-01-06 14:14

Annexe 3 : Extension mathématique au problème des lemmings

1 Première version discrète

Situation de départ : *le taux de croissance de X est l'augmentation de X par an et par unité de X présente cette année-là. On suppose que l'on a un taux constant égal à ζ.*

On a alors, si X_n est la quantité de X à l'année n,

$$X_{n+1} = X_n + \zeta X_n = (1+\zeta)\, X_n \qquad \textbf{(1)}$$

et donc

$$X_n = (1+\zeta)^n X_0 \qquad \textbf{(2)}$$

Cela ne donne les valeurs de X qu'aux années entières, mais si l'on suppose une interpolation linéaire sur chaque année, on peut avoir la quantité de X en milieu d'année : au milieu de l'année n (entre n et $n+1$), on aura une quantité $\frac{X_n + X_{n+1}}{2}$ de X. Ces quantités “ en milieu d'année ” suivent la même loi que les quantités aux années “ entières ” : entre le milieu de l'année n et le milieu de l'année $n+1$, on a bien multiplié par 1,5 la quantité de X : $\frac{X_n + X_{n+1}}{2} = (1+\zeta)\frac{X_{n+1} + X_{n+2}}{2}$

(cela se voit grâce à **(1)**).

Si l'on regarde maintenant ce qui se passe entre le début de l'année n (on a une quantité X_n) et le milieu de cette année n $\left(\text{on a une quantité } \frac{X_n + X_{n+1}}{2}\right)$, grâce à **(1)** on voit que

$$\frac{X_n + X_{n+1}}{2} = \left(1 + \frac{\zeta}{2}\right) X_n$$

Le taux de croissance sur les 6 premiers mois est donc de $\frac{\zeta}{2}$, ce qui peut être assez intuitif. Mais si l'on regarde les 6 mois suivants, on tombe sur un couac : sur ces 6 mois suivants (qui n'ont pas de raison d'être différents des 6 mois précédents) on s'attend à un taux de croissance de $\frac{\zeta}{2}$ encore ... Mais cela donnerait alors, en début d'année $n+1$, une quantité

$$\left(1 + \frac{\zeta}{2}\right)\frac{X_n + X_{n+1}}{2} = \left(1 + \frac{\zeta}{2}\right)^2 X_n$$

Et, rigoureusement, ceci n'est pas égal à $X_{n+1} = (1+\zeta)\, X_n$ (sauf si $\zeta = 0$...). Le problème vient de ce que dans la définition de taux ci-dessus, on ne parle que d'un taux par an : l'unité “ année ” joue un rôle particulier, et les quantités que l'on peut calculer ne seront donc valables qu'aux années entières, toute interpolation entre deux années est hasardeuse avec ce modèle.

2 Deuxième version discrète, et passage au continu

On change légèrement la définition de “ taux ” : le taux d’augmentation de X est la quantité de X gagnée par unité de temps et par unité de X présent à l’instant considéré. On suppose que l’on a un taux constant égal à γ ([8]).

En fixant un temps h et en notant $X(t)$ la quantité de X a l’instant t, on a donc

$$X(t + h) = X(t) + \gamma X(t)h \qquad \textbf{(3)}$$

(γ = augmentation de X divisée par X et par le temps qu’on laisse s’écouler, temps pendant lequel on mesure l’augmentation). On arrive alors, en prenant des temps multiples de h, à $X(nh) = (1 + \gamma h)^n X(0)$, ce qui se réécrit : pour tout temps T multiple de h,

$$X(T) = (1 + \gamma h)^{T/h} X(0).$$

Cela ne donne X qu’à certains temps discrets (les multiples de h), de même que, dans le premier modèle discret, on n’avait X qu’aux années entières... Mais on est cette fois un peu plus maître des temps discrets auxquels on connaît X. Si l’on veut obtenir X aux plus de temps possibles (avoir le plus de temps discrets possibles), il faut prendre h le plus petit possible (on découpe le temps continu en beaucoup de *petits* intervalles discrets).

En constatant que $(1 + \gamma h)^{T/h} = e^{\frac{T}{h}\ln(1+\tilde{a}h)}$ et que $\ln(1 + \gamma h) \approx \gamma h$ lorsque h est petit (approximation du logarithme par sa tangente en 1), on voit que, lorsque T est fixé, $(1 + \gamma h)^{T/h} \to e^{\gamma T}$ lorsque $h \to 0$.

On peut donc prendre, comme formule de X valable à tout temps :

$$X(T) = e^{\gamma T} X(0) \qquad \textbf{(4)}$$

3 Discussion

La formule **(4)** semble différente de **(2)**, mais en fait pas tant que cela. On peut écrire **(2)** comme suit :

$$X_n = \mathrm{e}^{n \ln(1 + \zeta)} X_0$$

et comme X_n représente la quantité de X à l’année n, on aimerait que $X_n = X(n)$ (avec $X(\cdot)$ issu de la formule **(4)**) pour tout n, soit $\mathrm{e}^{n \ln(1 + \zeta)} = e^{\gamma n}$. C’est bien sûr tout à fait possible en posant $\gamma = \ln(1 + \zeta)$.

Ainsi, les modèles continus et discrets se rejoignent, mais avec des taux différents : le taux annuel dans le modèle continu (ζ) n’est pas le taux intervenant dans le modèle discret (γ), mais ils sont reliés (notons aussi que, si ces taux ne sont pas trop importants, on a $\zeta \approx \gamma$, toujours par l’approximation du logarithme par sa tangente en 1).

D’ailleurs, que signifie le taux dans le modèle continu ? Visiblement, le considérer comme un taux “ par unité de temps ” ne marche pas vraiment : sinon, en le multipliant par une unité (ici l’année), on devrait retomber sur le taux annuel !

---

[8] Vous comprendrez plus loin pourquoi on a changé le nom de l’inconnue qui représente le taux.

En fait, à partir de **(3)** on a $\frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \gamma\, X(t)$ et en faisant $h \to 0$, on trouve $X'(t) = \gamma X(t)$ (cela s'obtient aussi en partant de **(4)**). Bref, $\gamma = \frac{X'(t)}{X(t)}$. Le taux γ du modèle continu est donc un taux par unité de temps correspondant à un accroissement infinitésimal ($X'(t)$ est justement l'accroissement infinitésimal par unité de temps de X). C'est un taux " instantané " ... qui donne bien un taux annuel (le taux annuel est ζ tel que $\ln(1 + \zeta) = \gamma$, c'est-à-dire $\zeta = e^{\gamma} - 1$).

D'ailleurs, γ permet aussi de calculer des taux semestriels ou sur toute autre période. En fait, les propriétés de l'exponentielle permettent de voir que, si on se fixe un intervalle de temps A, on peut définir un taux d'accroissement *constant* sur la durée A : cela signifie que quel que soit le temps t choisi, l'accroissement relatif $\frac{X(t+A) - X(t)}{X(t)}$ ne dépend que de A, pas de t ;
en effet, on a :

$$\frac{X(t+A) - X(t)}{X(t)} = \frac{e^{\gamma(t+A)}\, X(0) - e^{\gamma t}\, X(0)}{e^{\gamma t}\, X(0)} = \frac{e^{\gamma t}\, e^{\gamma A}\, X(0) - e^{\gamma t}\, X(0)}{e^{\gamma t}\, X(0)} = e^{\gamma A} - 1$$

(et on retrouve bien, quand $A = 1$ an, le taux $e^{\gamma} - 1$ que l'on avait plus haut).
Un dernier mot sur le fait que l'on considère ici des taux constants. C'est cette hypothèse qui mène à une solution X sous forme exponentielle ; cependant, dans le cadre d'une étude de population, cette solution devient irréaliste au bout d'un moment (cela a été constaté dans les classes : trop de lemmings dans le futur...). Ce modèle de taux constant est appelé modèle de Malthus, et n'est vraiment intéressant qu'à horizon fini ; lorsque l'on veut des modèles qui prennent mieux en compte les " longs temps " et surtout le fait que les ressources du milieu peuvent finir par manquer, on utilise des modèles où le taux de croissance dépend de la population présente de sorte que, si la population devient trop importante, le taux a tendance à diminuer (voire devenir négatif, ce qui indique une diminution de la population).
Un de ces modèles est le modèle logistique, dans lequel le taux instantané de croissance est $r\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)$, avec r et K constants (K est la capacité biotique du milieu, elle indique le niveau optimal de population que le milieu peut supporter). Dans le modèle logistique, on a donc $\frac{X'(t)}{X(t)} = r\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)$, soit $X'(t) = r\, X(t)\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)$. On peut calculer les solutions de cette équation différentielle et on se rend compte que, quelle que soit la population de départ, $\lim_{t \to \infty} X(t) = K$. Ce modèle est donc un peu plus réaliste (la population n'explose plus...), mais il reste simple et ne prend en compte qu'un nombre restreint de facteurs réels (la population tend à se stabiliser autour d'un équilibre, or c'est rarement le cas).