La place des TICE dans une démarche expérimentale en mathématiques

Aldon Gilles,
Professeur de mathématiques
INRP et IREM

Introduction

Le travail présenté dans cette conférence repose essentiellement sur le travail d’une équipe de recherche, regroupant des mathématiciens, des formateurs, des didacticiens et des professeurs de lycée travaillant dans différents laboratoires de l’INRP, de l’IUFM et de l’IREM de Lyon. Le travail conduit porte sur la démarche expérimentale dans les problèmes de recherche et même s’il n’est pas directement lié à l’utilisation des TICE, je montrerai en quoi et comment les TICE peuvent intervenir dans la démarche expérimentale en mathématiques, et pourquoi, aussi, ce n’est pas si simple…

Pour ce faire, dans une première partie je m’attarderai sur ce qu’est l’expérience en mathématiques et sur les questions mises à l’épreuve dans des expérimentations menées en classe. Dans la deuxième partie je m’appuierai sur un exemple pour dégager des éléments importants de ce que peut être la dimension expérimentale dans la recherche de problèmes en mathématiques que j’appliquerai dans la troisième partie en m’appuyant sur des résultats d’observation et en reprenant le rôle que peuvent jouer les TICE dans des « expériences mathématiques ». Enfin, dans une quatrième partie, je montrerai les ressources élaborées dans le cadre de ce travail.

Expérimenter en mathématiques
Un exemple en guise d’introduction

Je voudrais juste m’arrêter sur ces deux opérations :

$$\begin{array}{r} 2\,3\,7\,5 \\ \times \qquad 7 \\ \hline 1\,6\,6\,2\,5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\,3\,7\,5 \\ \times \qquad 7 \\ \hline 2\,1\,3\,5\,3 \end{array}$$

On va pouvoir décider assez rapidement que la première opération est juste, en cherchant un ordre de grandeur du résultat, en vérifiant que le chiffre des unités convient, en mettant en œuvre des moyens de contrôle disponibles dès lors que l’on a une familiarité suffisante avec les nombres naturels et les opérations élémentaires. En revanche, pour la deuxième opération, si l’on peut facilement décider que l’opération en base 10 est fausse, les indices permettant de décider de la correction de cette opération lorsqu’on sait qu’elle a été écrite en base 8, ne sont plus aussi accessibles ! Cet exemple montre bien comment un simple décalage bouleverse les moyens de contrôle immédiatement accessibles et mobilisables dans un domaine pourtant familier.

Références théoriques

Les références théoriques sur lesquelles l’équipe de recherche s’appuie sont d’une part la théorie des situations de Guy Brousseau (Brousseau, 1986) et d’autre part la place et le rôle des objets mathématiques utilisés en s’appuyant sur les travaux des logiciens Quine et Frege repris, notamment par Jean-Louis Gardies (Gardies, 2004).

On gardera en mémoire la phrase de Jean Yves Girard (Girard, 2007) :

« *Une réponse est un peu comme le but convenu d'une promenade, il en faut bien un, mais le véritable intérêt réside dans la promenade elle-même* »
Très souvent, les problèmes de recherche dans les classes ont été utilisés pour développer des méthodes scientifiques, des heuristiques, des raisonnements, mais très peu pour travailler les notions mathématiques sous-jacentes aux problèmes traités, et pour donner un cadre permettant une construction par les élèves de ces connaissances. Or une hypothèse forte de notre travail est qu'un frein important à la diffusion dans les classes des problèmes de recherche réside précisément dans le fait que leur usage dans la classe s'appuie principalement sur le développement de compétences transversales plutôt que sur l'apprentissage et la mise à l'épreuve de contenus mathématiques. La difficulté à repérer ce qui relève des notions mathématiques à enseigner dans l'activité des élèves empêchent la diffusion dans les classes de cet outil d'enseignement.

Méthodologie et démarche

Nous revisitons des problèmes classiques[1] pour en extraire les concepts mathématiques qui, *à un niveau donné* sont susceptibles d'être mobilisés et par suite, travaillés et institutionnalisés. La démarche suivie nous conduit à partir de situations mathématiques pour aller vers des situations de recherche pour la classe dans lesquelles nous nous intéressons à la part expérimentale mise en œuvre dans les phases de recherche. Un deuxième aspect de notre travail est l'élaboration de problèmes (ou de champs de problèmes) qui permettront de mettre en place un milieu susceptible de faciliter pour les élèves les allers-retours entre l'expérience et la construction de connaissances.
Enfin, dans un besoin de diffusion et d 'analyse, nous construisons des outils permettant de comprendre « *comment la toile mathématique est tissée autour des objets mobilisés dans la résolution de problèmes* » (Viviane Durand-Guerrier, Gilles Aldon, 2006).
Les résultats décrits ici s'appuient sur des observations de classes, à des niveaux différents : une même situation mathématique solide[2] permettant de construire des situations de classes à différents niveaux.

Trois exemples

Les situations mathématiques sur lesquelles je m'appuierai dans la suite sont de natures différentes : un problème de dénombrement construit sur une situation géométrique, un problème d'algèbre et un problème de probabilité appuyé sur des statistiques :

Régionnement de cercle

Combien de régions au maximum peuvent être délimitées dans le disque en construisant les cordes à partir de n points d'un cercle.

Les fractions égyptiennes[3]

Décomposer 1 en somme de fractions de numérateur 1.

Les urnes de Polya

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On choisit une boule au hasard et on remet dans l'urne la boule tirée avec une boule de même couleur. Etude de la composition de l'urne.

Pour préciser une définition de la dimension expérimentale je me référerai à cette définition de Viviane Durand-Guerrier et à la citation de Jacques Treiner :

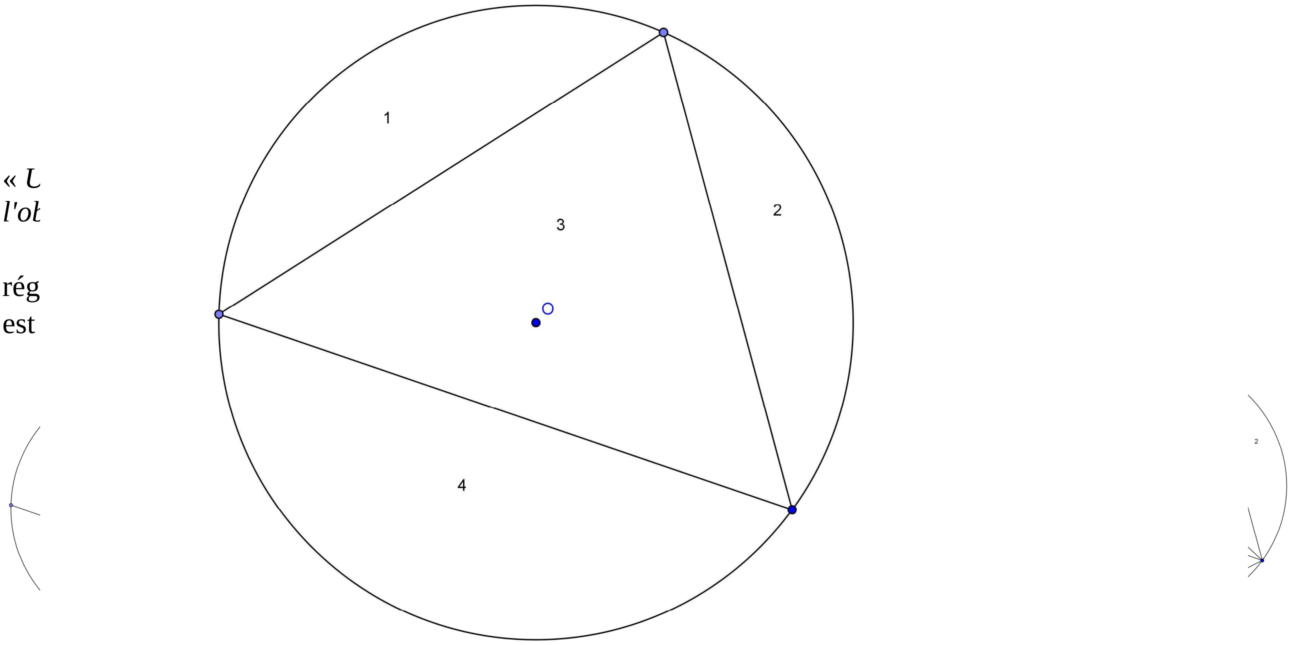
« *Ce qui caractérise la dimension expérimentale en mathématiques, c'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets.* »

---

[1] en ce sens qu'ils ont déjà été observés et analysés.
[2] Nous dirons qu'une situation mathématique est solide lorsqu'elle permet de déboucher sur des problèmes pouvant être traités à différents niveaux.
[3] On trouvera dans le compte-rendu de l'atelier de Michel Mizony un développement de cette situation mathématique.

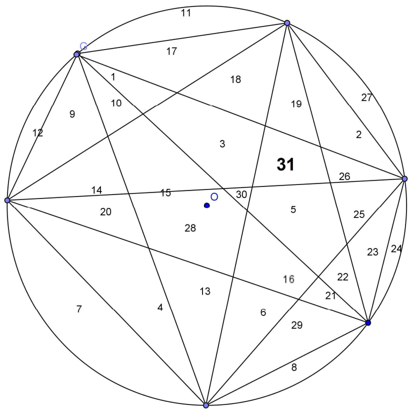
« U
l'ob

rég
est



Deux points	Trois points	Quatre points	Cinq points
2 régions	4 régions	8 régions	16 régions

Cette première investigation fait apparaître une règle liant le nombre de points au nombre de régions possibles, règle qui est démentie par le comptage suivant :



L'expérience mise en œuvre par un comptage des régions permet une réfutation d'une conjecture mais ne donne pas d'explication sur le résultat (surprenant) obtenu ; il est alors possible de reprendre l'expérience en reliant chaque étape à un raisonnement combinatoire :

Au départ, il y a un point et une région : le disque entier. En rajoutant un point, on rajoute une arête qui rajoute donc une région (deux point : une arête, deux régions). En rajoutant un point, on peut construire 3 arêtes, comme le nombre de combinaisons de 2 parmi 3, chaque arête rajoutant une région : il y en a donc 1 + 3 = 4. A cette étape, un raisonnement commence à se construire : compter les régions revient à compter les arêtes, c'est à dire compter les combinaisons de 2 parmi n points. Cependant, l'étape suivante montre encore l'insuffisance de ce raisonnement lié à l'intersection possible des arêtes ; il suffit alors de noter qu'il existe autant de points d'intersections que de quadrilatères, comptés comme le nombre de combinaisons de 4 parmi n, qui permet alors de faire apparaître une formule générale :

$$nb_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1$$

Dans cette démarche, l’expérience a réellement été construite sur des allers retours entre comptage et théorie du dénombrement et en ce sens a dépassé la simple observation pour construire un raisonnement.

A un autre niveau, il est également possible de regarder cette situation comme le dénombrement des faces d’un graphe planaire dont on pourrait calculer le nombre d’arêtes et de sommets ; pour rendre le dessin comme représentation d’un graphe planaire, il est nécessaire d’ajouter des sommets à toutes les intersections des arêtes construites. Un raisonnement similaire à celui donné ci-dessus donne :

Nombre de sommets : $\binom{n}{4} + n$

Nombre d’arêtes : $n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$

Et, en utilisant la formule d’Euler (F = A - S + 2 où F représente le nombre de faces, A, le nombre d’arêtes et S le nombre de sommets), on obtient le résultat souhaité.

Le champ d’expérience se construit sur les connaissances naturalisées du sujet, c’est à dire les connaissances mobilisables et utilisables pour permettre, par des allers-retours, de participer à la construction d’une connaissance nouvelle. Dans l’extrait de dialogue qui suit, issue d’une observation d’un groupe d’élèves de première S cherchant le problème des fractions égyptiennes[4], le champ d’expérience choisi a été d’emblée l’algèbre, insuffisamment maîtrisé à ce moment de l’année pour déboucher sur un résultat et qui débouche au contraire sur un désengagement vis à vis du problème qui apparaît comme un problème scolaire.

- 1/a + 1/b = 1 donc a - b = ab
- Non a + b = ab
- donc -a - b = - ab
- On a bien avancé *(rires)*
- J'espère qu'on n'aura pas ça dans le contrôle

Le deuxième dialogue, toujours recueilli dans une classe de première scientifique montre la grande réussite de Vincent qui expérimente les calculs de fractions dans le domaine géométrique en « mimant » les fractions comme longueurs de segments, s’appuyant sur des connaissances numériques calculatoires effectives dans le domaine des fractions ; cette réussite s’oppose à l’incompréhension de ses camarades qui réagissent et expérimentent dans le domaine des nombres décimaux et qui n’ont pas à disposition cette représentation géométrique des fractions.

- V : La fraction la plus petite avec des entiers c'est 1/2 ; tu peux pas avoir une fraction d'entiers plus petite.
- V : le 1 c'est pas possible, la fraction la plus petite c'est 1/2 .
- T : Tu peux expliquer ?
- V : Pour 2, c'est a = 2; b = 3; c = 6 pour 3
- a = 2; b = 3; c = 9; d = 18
- R : Pourquoi le 1 il est pas possible ?
- V : on met les premières *(fractions de numérateurs 1)*
- R : Pourquoi c'est impossible
- V : De toutes façons, a ça sera 2
- R : Y'a bien une autre fraction sur 1 qui va faire 0,5...

[4] L’énoncé donné aux élèves était le suivant :
Peux-tu trouver deux entiers naturels a et b distincts tels que : 1 = 1/a + 1/b ?
Peux-tu trouver trois entiers naturels a , b et c distincts tels que : 1 = 1/a + 1/b + 1 ?
Peux-tu trouver quatre entiers naturels a , b , c et d distincts tels que : 1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d ?
Continue ...

Ces deux dialogues montrent en action des expériences construites sur des objets mathématiques manipulés, les fractions, la représentation numérique, géométrique ou algébrique des fractions, les nombres décimaux, ainsi que les relations existant entre ces objets, plus ou moins existantes ou distendues. L'expérience débouche sur la création de connaissance lorsque les manipulations d'objets entrent en résonnance avec les théories mathématiques sous-jacentes.

Enfin, une difficulté importante réside dans la transformation d'une situation mathématique féconde en une situation d'enseignement féconde :

« *L'organisation par le professeur d'un milieu permettant de favoriser le recours à l'expérience est une tâche complexe et exigeante* » (Viviane Durand-Guerrier, 2007)

La difficulté à créer à partir de la situation des urnes de Polya une situation de classe féconde en est une illustration.

Expérimenter avec les TIC

Cette constatation est encore vraie dans le cas de l'utilisation d'outils, notamment d'outils technologiques. Un outil ne pourra apporter une aide que dans la mesure où

- son usage est suffisamment naturalisé,
- les interprétations des rétroactions ne sont pas un frein à l'interprétation mathématique des résultats obtenus,
- les objets manipulés sont suffisamment délimités.

L'exemple suivant recueilli lors de l'expérimentation des épreuves pratiques de mathématiques est significatif des difficultés qui peuvent être rencontrées, et symptomatique d'un problème inhérent à l'utilisation de logiciels qui manipulent des objets simulant les objets mathématiques. En l'occurrence, cette élève ayant créé deux droites comme représentations graphiques de fonctions et demandant le point d'intersection de ces deux droites, s'est trouvée devant l'impossibilité de comprendre la rétroaction du logiciel signalant que « l'objet courbe ne convient pas ici ». Les droites créées étaient de « type courbe » puisque représentation graphique d'une fonction et non pas de « type droite » ce qui aurait permis de définir le point d'intersection. Cet exemple n'est pas seulement anecdotique concernant l'utilisation d'un logiciel particulier mais plus fondamentalement met en évidence la nécessaire distinction des objets sur lequel le logiciel travaille ; dans un même ordre d'idée, tel logiciel de calcul formel ne pourra décider de la vérité d'une phrase comme 2 < 3/2 parce que le type des objets n'est pas le même : 2 est de type entier et 3/2 est de type fraction.

Illustration

Dans les exemples qui suivent, les travaux des élèves illustrent à la fois le rapport de l'expérience à la connaissance, le passage délicat de l'observation à l'expérience puis de l'expérience à la construction d'une théorie locale. Le problème cherché est la recherche du nombre de zéros à la fin de factoriel n, dans une classe de première S équipée de calculatrices formelles TI92.

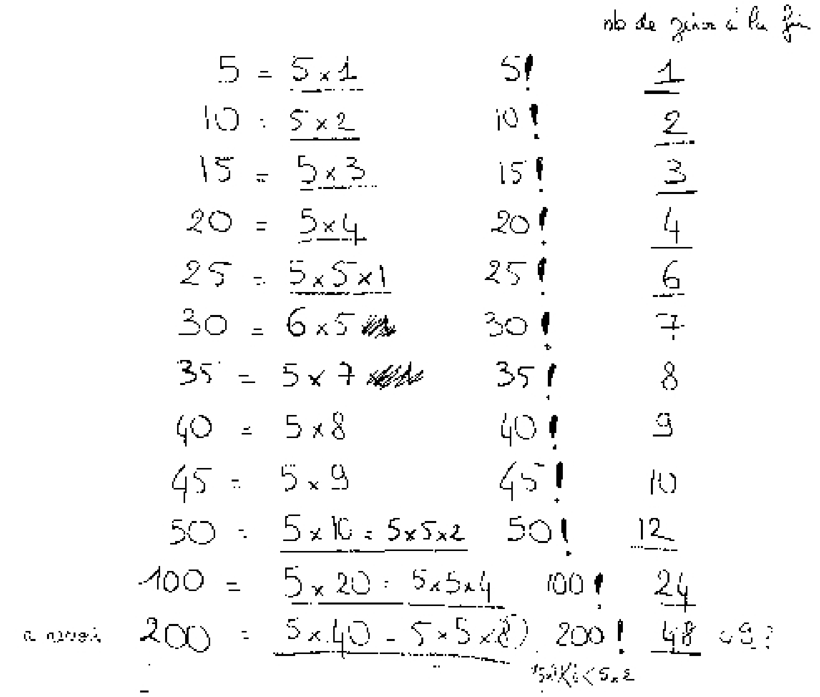
Experiences

Avec la calculatrice on effectue un grand nombre de "n !" puis on inscrit les resultats dans le tableau suivant :

Intervalles	nombre de zero
$0 \leq n \leq 4$	0
$5 \leq n \leq 9$	1
$10 \leq n \leq 14$	2
$15 \leq n \leq 19$	3
$20 \leq n \leq 24$	4
	il n'existe pas 5 zeros
$25 \leq n \leq 29$	6
$30 \leq n \leq 34$	7
$35 \leq n \leq 39$	8
$40 \leq n \leq 44$	9
$45 \leq n \leq 49$	10
	il n'existe pas 11 zeros
$50 \leq n \leq 54$	12
$55 \leq n \leq 59$	13
$60 \leq n \leq 64$	14
$65 \leq n \leq 69$	15
$70 \leq n \leq 74$	16
	il n'existe pas 17 zeros
$75 \leq n \leq 79$	18
$80 \leq n \leq 84$	19
$85 \leq n \leq 89$	20
$90 \leq n \leq 94$	21
$95 \leq n \leq 99$	22
	il n'existe pas 23 zeros

- Tous les 5 intervalles le nombre de zero augmente de +1. Cela est juste jusqu'a l'intervalle [$120 \leq n \leq 124$] où la le nombre de zero augmente de +2 pour intervalle suivant. mais après cela redivient comme avant jusqu'a l'infini, je pense.

La conclusion montre que le stade de l'observation n'est pas dépassé et les allers-retours entre ces observations et des explications possibles du phénomène qui aurait pu faire rentrer dans une expérience ne sont pas acquis. En revanche, l'extrait suivant montre cette observation raisonnée permettant tour à tour d'infirmer ou de confirmer des hypothèses émises :



			nb de zéros à la fin
5	= 5 x 1	5!	1
10	= 5 x 2	10!	2
15	= 5 x 3	15!	3
20	= 5 x 4	20!	4
25	= 5 x 5 x 1	25!	6
30	= 6 x 5	30!	7
35	= 5 x 7	35!	8
40	= 5 x 8	40!	9
45	= 5 x 9	45!	10
50	= 5 x 10 = 5 x 5 x 2	50!	12
100	= 5 x 20 = 5 x 5 x 4	100!	24
200	= 5 x 40 = 5 x 5 x 8	200!	48

Conclusion

Les observations fines du travail des élèves dans des situations de recherche de problèmes, que ce soit avec le papier/crayon ou en utilisant les technologies, montrent bien le rôle de l'expérience, au sens d'une manipulation d'objets familiers dans un contexte logico-mathématique naturalisé pour construire des connaissances nouvelles. L'usage des technologies n'échappe pas à ce constat et participe à la construction des connaissances, pourvu que les élèves puissent utiliser ces outils pour élaborer des allers-retours entre l'expérience et les concepts mathématiques sous-jacents, mais aussi en prenant conscience de la distance entre les objets mathématiques en jeu et leur simulation sur machine.

Bibliographie

Aldon G., Duchet P., Feurly-Reynaud J., Legrand M., Mizony M., Payan C., Tisseron C. (1997) *Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques,* IREM de Lyon

Aldon G., Tisseron C. (1998) *Des situations pour mettre en oeuvre une démarche scientifique au lycée*, Colloque Recherche et Formation, Actes, IUFM de Grenoble

Arsac G., Germain G., Mante M. (1988) *Problème ouvert et situation-problèmes,* IREM de Lyon

Arsac G. & al. (1992) Initiation au raisonnement déductif au collège. Presses Universitaires de Lyon et IREM. de Lyon

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage

Chevallard Y. (1992) *Le caractère expérimental de l'activité mathématique*, Petit x, 30, p. 5-15.

Chevallard Y. (2004) *Pour une nouvelle épistémologie scolaire,* Les cahiers Pédagogiques, n°427, 34-36

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) *Expérimenter pour apprendre en mathématiques,* Repères IREM, 60, pp. 61-78

Douaire J. (2004) *Argumentation et disciplines scolaires*, INRP

Duchet P., Mainguené J., *Les apprentis-chercheurs de MATh.en.JEANS*, Actes des Journées COPIRELEM, La Roche sur Yon, 17-19 Mai 2002, IREM des Pays de Loire

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'Articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique,* IREM de Lyon

Durand-Guerrier V. *Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques, à la lumière de la théorie des modèles de Tarski, à paraître dans les actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ?,* Bordeaux ,25 - 27 mai 2005

Durand-Guerrier V. & al. (eds.) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe,* à paraître aux PUL en 2005

ERMEL (1999) *Vrai, faux, on en débat*, INRP

Leberre M., Mulet-Marquis R. (2006) *50 problèmes et plus si affinités*, IREM de Lyon

Legrand M. (1993) *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse,* in Repères IREM, 10, pp. 123-158

Mercier A., Sensevy G. (1999) *Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ?,* in Le Télémaque, n°15 –Enseigner les sciences –

Payan C. & Grenier D. *Situations de recherche en « classe ». essaide caractérisation et proposition de modélisation,* in Durand-Guerrier, V. & Tisseron, C. (eds) Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques, année 2002, IREM de Paris 7

Mounier G. *Débat mathématique, débat démocratique*, Repères IREM, 60, pp. 47-56

Peix A & Tisseron C. (2003) *Concepts didactiques pour analyser et réorganiser ne formation à la conduite de problèmes de recherches à l'école élémentaire,* in Durand-Guerrier, V. & Tisseron, C. (eds) Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques, année 2002, IREM de Paris 7

Polya G. (1958) *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Paris : Gauthier-Villars

Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars

Adresse(s) de site(s) internet

Educmath : http://educmath.inrp.fr

EXPRIME : Viviane Durand-Guerrier, Gilles Aldon, 2006,
http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/dim_expe

Prototype de ressources :
http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/equipes_associees/dim_expe/ressource/index.pdf

La feuille à problèmes : http://irem-fpb.univ-lyon1.fr