

Des outils de calcul aux *instruments* du travail mathématique



Une approche de la pratique, de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques dans des environnements numériques

luc.trouche@inrp.fr

L'UE eCulture

Les questions suivantes seront traitées :

- quelles sont les ressources nécessaires pour concevoir un enseignement de mathématiques ? Quel est le travail sur les ressources que fait un enseignant ? Comment analyser la participation des élèves à ce travail ? Quelle est la contribution des technologies, anciennes ou nouvelles, à ce travail ?
- comment comprendre le bouleversement qu'Internet introduit, dans les systèmes d'information et de communication en général, dans la documentation des enseignants de mathématiques en particulier ?
- quelle compétence en jeu pour les enseignants ? Comment les développer, comment les certifier ?
- plus généralement, quelles nouvelles articulations entre ressources, pratiques, et développement professionnel, individuel et collectif, des enseignants ?

Plus précisément...

Séance 1 : une première approche, pratique et théorique, des outils pour enseigner les mathématiques ; organisation de l'UE

Séance 2 : (G. Aldon), interactions mathématiques, interactions entre applications ; initiation à LaTeX

Séance 3 : (P. Benech et C. Loisy), outils du Web 2.0 au service de la construction des compétences

Séance 4 : (S. Soury-Lavergne), les logiciels de géométrie dynamique, en quoi ils modifient les conditions de l'enseignement

Séance 5 : (J. Trgalova), analyse de ressources et conception de ressources pour la classe (géométrie, algèbre)

09-sept	3h (LT)	2h (LT)
16-sept		2h (GA)
23-sept	2h (GA)	2h (GA)
07-oct	1h (CL)	2h (CL/PB)
14-oct	2h (SSL)	2h (SSL)
21-oct		2h (SSL)
18-nov	2h (JT)	2h (JT)
25-nov		2h (JT)
02-déc		2h (LT)
09-déc		2h (CL/PB)

L'évaluation de l'UE

Un travail collaboratif réalisé en binôme, avec une part personnelle

Le dossier comprendra :

- un espace commenté (outil à convenance) de ressources web pour enseigner un thème donné à un niveau donné (par exemple la symétrie centrale en 5^{ème}) ;
- un scénario d'exploitation (outil à convenance) de ce répertoire pour une heure d'enseignement de ce thème ;
- une vidéo commune de bilan du travail de binôme ;
- un point de vue personnel (deux pages) sur les apports de l'UE pour l'enseignement des mathématiques, dans un contexte de eCulture

Il exploitera la plateforme Spiral et ses outils.

Le programme de la journée

Cours

- réflexion sur l'eCulture
- les outils pour les mathématiques, leur enseignement
- les effets des outils
- exemples...
- les approches théoriques pour approcher l'enseignement des mathématiques et la place des outils dans cet enseignement

TD

- traitement de problèmes dans des environnements numériques, exemples en analyse et en géométrie
- recherche de ressources Internet pour préparer un cours, l'exemple du théorème de Pythagore

Réflexions sur l'eCulture

Web [Images](#) [Videos](#) [Maps](#) [Books](#) [Translate](#) [Mail](#) [more](#) ▼

luc.trouche@wanadoo.fr | [Web History](#) | [Setting](#)



e-culture

Search

About 225,000,000 results (0.08 seconds)

[Advanced search](#)

Everything

▼ More

▼ Show search tools

[MultimediaN N9C Eculture Project Homepage](#) ☆

11 Dec 2008 ... The objective of this project is the development of a set of **e-culture** demonstrators providing multimedia access to distributed collections ...

[e-culture.multimediant.nl/](#) - [Cached](#) - [Similar](#)

[PDF] [From ICT to E-culture](#) ☆

File Format: PDF/Adobe Acrobat - [Quick View](#)

English version of the Council's advisory report on **e-culture**, as should address in order to benefit from the opportunities **e-culture** offers.

...
[www.cultuur.nl/files/pdf/adviezen/E-cultuur_engels.pdf](#) - [Similar](#)

[ECU | Overview : ECULTURE : Conferences](#) ☆

27 Aug 2010 ... **ECULTURE** 2010. This conference provides staff and students with the opportunity to showcase innovation in the field of learning and teaching ...

[www.ecu.edu.au/conferences/eculture](#) - [Cached](#)

[eculture - Wikipédia](#) ☆ - 12:16am - [[Translate this page](#)]

L'expression **eCulture** désigne les comportements et pratiques dans un écosystème numérique, tant au niveau individuel que collectif. ...

[fr.wikipedia.org/wiki/ECulture](#) - [Cached](#) - [Similar](#)

Sponsored links

[Culture & Identity](#)

Understand issues in **culture** and identity here!
[issues.tigweb.org/](#)

[See your ad here »](#)

Réflexions sur l'eCulture

Nouvelles fonctionnalités  [Créer un compte](#) ou [se connecter](#)

ncipale



WIKIPÉDIA
L'encyclopédie libre

[Accueil](#)
[Portails thématiques](#)
[Index alphabétique](#)
[Un article au hasard](#)
[Contacter Wikipédia](#)

▼ [Contribuer](#)
[Aide](#)

Article **Discussion** Lire Modifier ▼

eculture

L'expression **eCulture** désigne les comportements et pratiques dans un écosystème numérique, tant au niveau individuel que collectif. Par exemple la manière de traiter les courriels, de partager des informations sur le web, de gérer la formation à distance, d'animer une communauté virtuelle...

L'eCulture est un domaine **transdisciplinaire**, à cheval entre plusieurs sciences sociales et techniques.

Sémantiquement, eCulture est le condensé de « **culture** de la **communication** par voie numérique ». Le "e" symbolise l'**électronique numérique**, comme dans eCommerce, ePortfolio...

Réflexions sur l'eCulture

Web [Images](#) [Videos](#) [Maps](#) [Books](#) [Translate](#) [Mail](#) [more](#) ▼

luc.trouche@wanadoo.fr | [Web History](#) | [S](#)



e-culture mathematiques

Search

About 1,880,000 results (0.15 seconds)

[Advanced search](#)

Everything

More

Show search tools

[Académie de Strasbourg: Accompagnement et culture mathématiques](#) ☆

- [\[Translate this page \]](#)

Liens vers des ressources **mathématiques** de tout niveau **et** notamment le site de l'ENS.

[www.ac-strasbourg.fr/.../mathematiques/...de.../agrave_ne_pas_rate/](#) - [Cached](#)

[L'évolution des acquis des élèves de 15 ans en culture ...](#) ☆

- [\[Translate this page \]](#)

En 2006, 4 700 élèves de 15 ans scolarisés au collège ou au lycée ont participé à l'enquête internationale PISA visant à évaluer principalement la **culture ...**

[www.education.gouv.fr > ... > Les publications](#) - [Cached](#) - [Similar](#)

[Mathématiques et culture au Goethe Institut Nancy | Emilangues](#) ☆

- [\[Translate this page \]](#)

8 janv. 2010 ... Le Goethe Institut Nancy propose une programmation **culturelle** ciblée sur le thème des **mathématiques en** janvier **et** février 2010.

[www.emilangues.education.fr/.../mathematiques-et-culture-au-goethe-institut-nancy](#) -

[Cached](#) - [Similar](#)

[L'option sciences ou DCS \(démarche et culture scientifique ...](#) ☆

- [\[Translate this page \]](#)

5 juil. 2010 ... L' Option Sciences, une des innovations de l'APMEP Exemple de mise **en** œuvre dans l'académie de Montpellier sous le sigle « Démarches **et** ...

[webpeda.ac-montpellier.fr/mathematiques/spip.php?article177](#) - [Cached](#)

Réflexions sur l'eCulture

Web Images Videos Maps Books Translate Mail more ▼

luc.trouche@wanadoo.fr | Web History |



e-culture mathematics

Search

About 8,120,000 results (0.40 seconds)

[Advanced search](#)

Everything

More

Show search tools

[MultimediaN N9C Eculture Project Homepage](#) ☆

11 Dec 2008 ... The Centre of **Mathematics** and Computer Science (CWI) in Amsterdam is ...
The project team of **E-Culture** (MultimediaN subproject N9C) is ...
[e-culture.multimedien.nl/news.shtml](#) - [Cached](#)

[Gender, culture, and mathematics performance — PNAS](#) ☆

by JS Hyde - 2009 - [Cited by 16](#) - [Related articles](#)

Gender, **culture**, and **mathematics** performance. Janet S. Hydea,¹ and; Janet E. Mertz. b.
aDepartment of Psychology, University of Wisconsin, Madison, WI 53706; ...
[www.pnas.org/content/106/22/8801.abstract](#) - [Similar](#)

[Category:Mathematics and culture - Wikipedia, the free encyclopedia](#) ☆

[x] Cellular automata in popular **culture** (10 P). E. [+] M. C. Escher (1 C, 5 P, 34 F) ... Pages
in category "**Mathematics and culture**" ...
[en.wikipedia.org/wiki/Category:Mathematics_and_culture](#) - [Cached](#) - [Similar](#)

[E-culture Fair 2010 Day 3 Music Added](#) ☆

E-culture Fair 2010 Day 3 Music Added - from WN Network. ... Bridges Pécs 2010 -
European Capital of Culture World Conference **Mathematics**, Music, Art, ...
[wn.com/E-Culture_Fair_2010_Day_3_music_added](#) - [Cached](#)

Réflexions sur l'eCulture

L'UE questionnera les nouvelles manières de faire, d'apprendre et d'enseigner les mathématiques à *l'ère du numérique*

L'avènement du numérique constitue un bouleversement des façons de s'informer et de communiquer, aussi important que l'avènement de l'écriture (Pédauque 2006) et [de l'imprimerie](#)

Il y a une *logique* de l'écriture (Goody 1985) : listes, tableaux, formules, schéma ; il y a une *logique* du numérique : programme, hypertexte, lecture-écriture, pensée en réseau

Cela touche nécessairement la pratique des mathématiques à tous les niveaux (relation forte entre le développement de l'écriture et le développement des mathématiques)

Ressources numériques pour les mathématiques (logiciels, supports variés, problèmes et bases d'exercices en ligne...)

Réflexions sur l'eCulture

Ce que révèle et amplifie le numérique : tout travail de conception est un travail de re-conception



Le déjeuner sur l'herbe, de Manet (1862) à Picasso (1961)

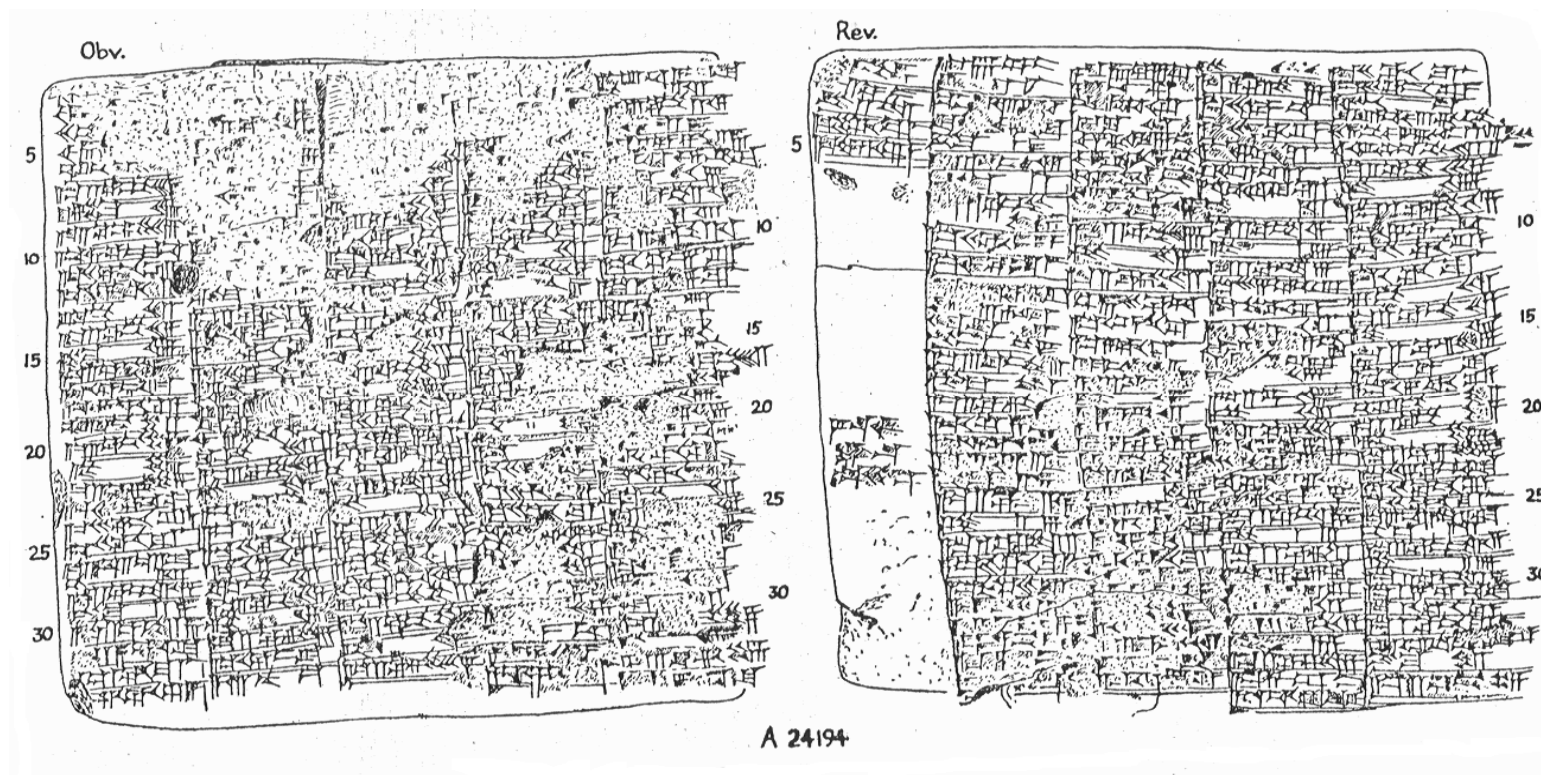
Les outils pour les mathématiques



Des outils toujours présents :
outils de *comptes* pour la
société, outils de *calcul* pour les
savants, *issus* de l'expérience et
assistant l'activité des hommes.

Ci-contre, le timith, outil de
'calcul automatique' du blé
« *Le calcul, on le voit, se fait tout
seul* » (Bourdieu 2003)

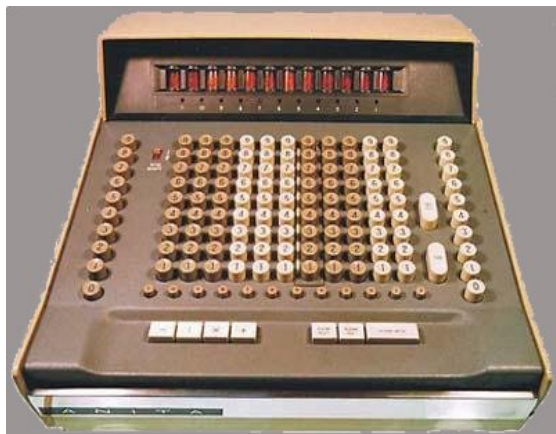
Les outils pour les mathématiques



Ci-dessus, une tablette de problèmes (deuxième millénaire avant notre ère, 10cm x 10 cm, plusieurs centaines de problèmes).

Des outils hautement structurés, concentrant des connaissances, articulés avec un ensemble d'artefacts (Neugebauer & Sachs 1945)

Les outils pour les mathématiques



Des évolutions notables avec les outils informatiques :

- ✓ le *regroupement* des outils dans une même enveloppe ;
- ✓ des outils '*de poche*', polyvalents
- ✓ la multiplication des *images* ;
- ✓ le changement de paradigme (de la *flèche* au *filet*).

Les outils pour les mathématiques

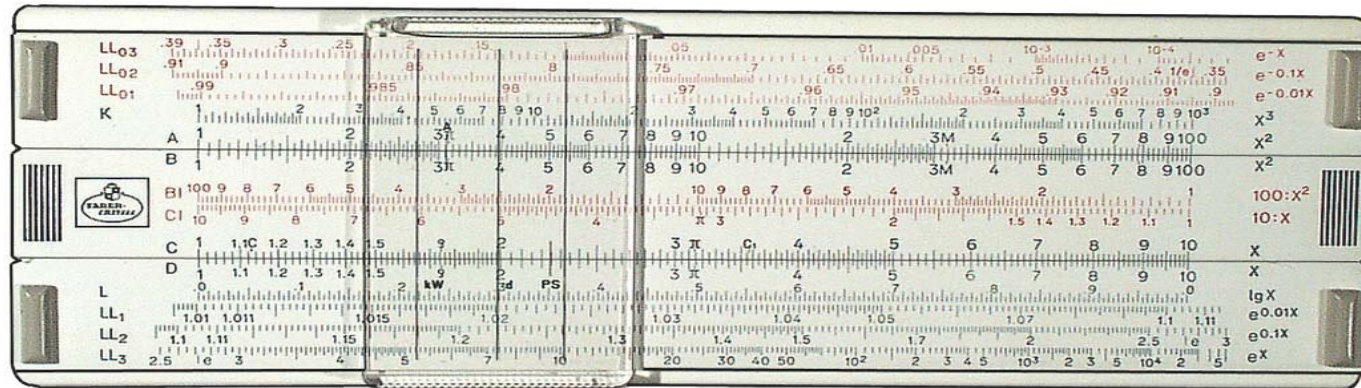


L'allégorie « TYPUS ARITHMETICAE », BM de Rouen

Une superposition permanente entre anciens et nouveaux outils, des phases de transition qui peuvent être longue

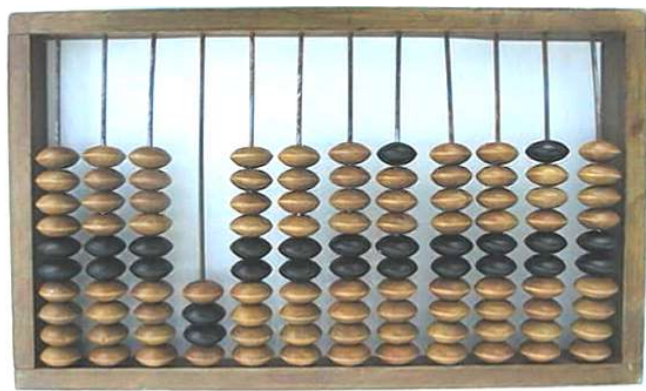
Illustration ci-contre : plusieurs siècles en France pour passer du calcul à jetons au calcul à plume

Les outils pour les mathématiques



Ou des superpositions courtes (une dizaine d'années de cohabitation entre règles à calcul et calculatrices...)

Les outils dans l'enseignement



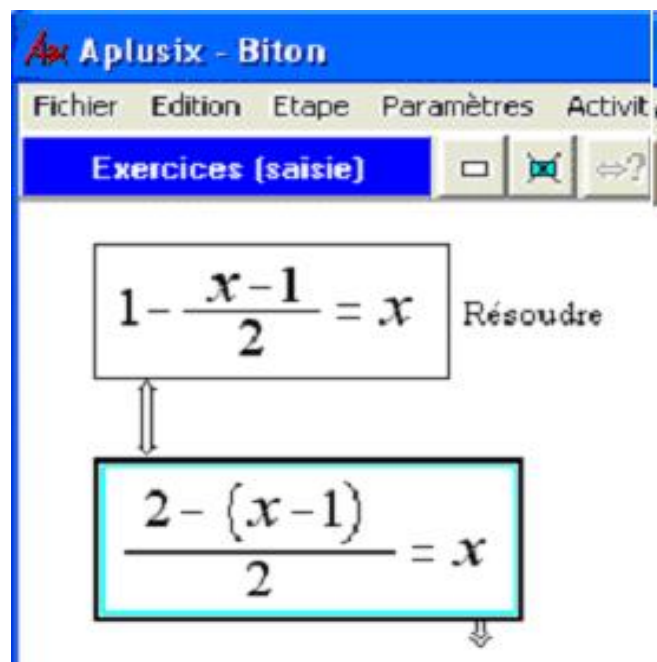
Extrait de la rubrique *le boulier-compteur, le boulier numérateur*, etc. dans le dictionnaire pédagogique de F. Buisson (1911)

Un sujet de controverse ancien...

« Le boulier corrompt l'enseignement de l'arithmétique. La principale utilité de cet enseignement est d'exercer de bonne heure, chez l'enfant, les capacités d'abstraction, de lui apprendre à voir *de tête*, par les yeux de l'esprit. Lui mettre les choses sous *les yeux de la chair*, c'est d'aller directement contre l'esprit de cet enseignement.

La nature a donné aux enfants leurs dix doigts pour boulier ; au lieu de leur en donner un second, il faut leur apprendre à se passer du premier ».

Les outils dans l'enseignement



Alain, 1932, *Propos sur l'éducation*.

Mathema, connaissance et pensée pure...

« Puisqu'une machine à compter est possible, une machine à raisonner est possible. Et l'algèbre est déjà une sorte de machine à raisonner : vous tournez la manivelle, et vous obtenez sans fatigue un résultat auquel la pensée n'arriverait qu'avec des peines infinies.

L'algèbre ressemble à un tunnel : vous passez sous la montagne, sans vous occuper des villages et des chemins tournants, vous êtes de l'autre côté et vous n'avez rien vu »

Les outils dans l'enseignement

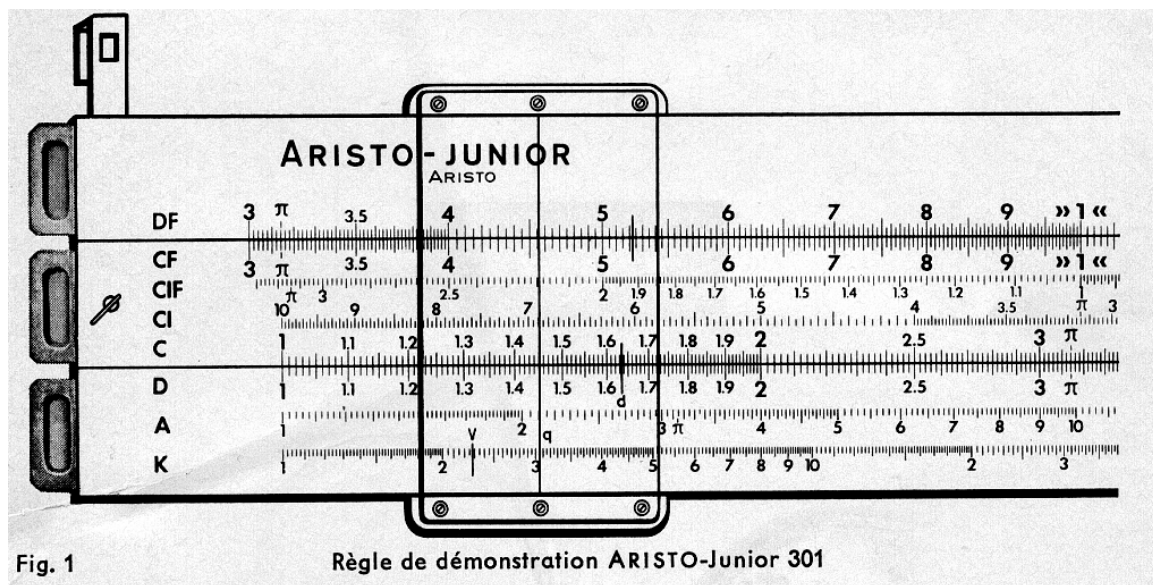


Fig. 1

Règle de démonstration ARISTO-Junior 301

Aristo, Bulletin
d'information
pour le corps
enseignant
(1971)

« Pour le professeur formé aux rigueurs de la discipline mathématique, l'introduction de la règle à calcul dès les classes moyennes peut poser un vrai cas de conscience ».

Les effets des outils

Effets sur la *production* des mathématiques, exemples :

- le théorème de Mohr (1672) - Mascheroni (1797) : toute construction à la règle et au compas peut être réalisée au compas seul http://en.wikipedia.org/wiki/Mohr-Mascheroni_theorem
- les aspects expérimentaux (Zagier 2005).

Effets sur les *programmes d'étude*, exemples :

- le passage de la plume d'oie à la plume de fer et l'arithmétique
- l'introduction des calculatrices graphiques et l'analyse

Effets sur le travail enseignant :

- foisonnement de ressources et accélération technologique ;
- nouvelles opportunités de collaboration

Potentialités et contraintes des outils pour l'apprentissage des math

De nouveaux moyens :

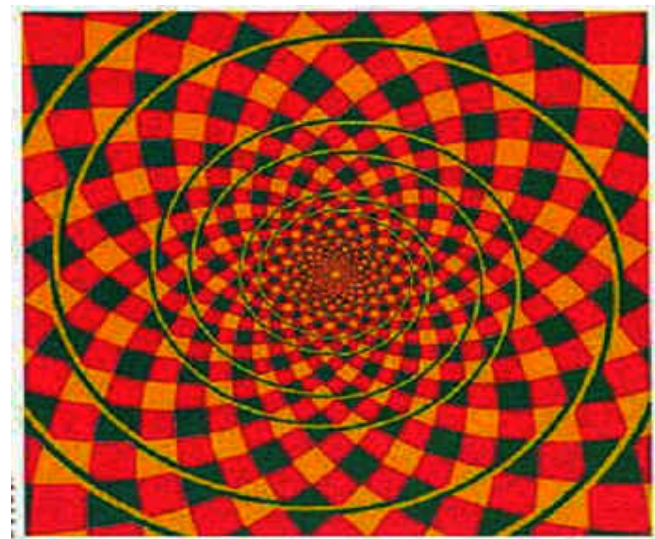
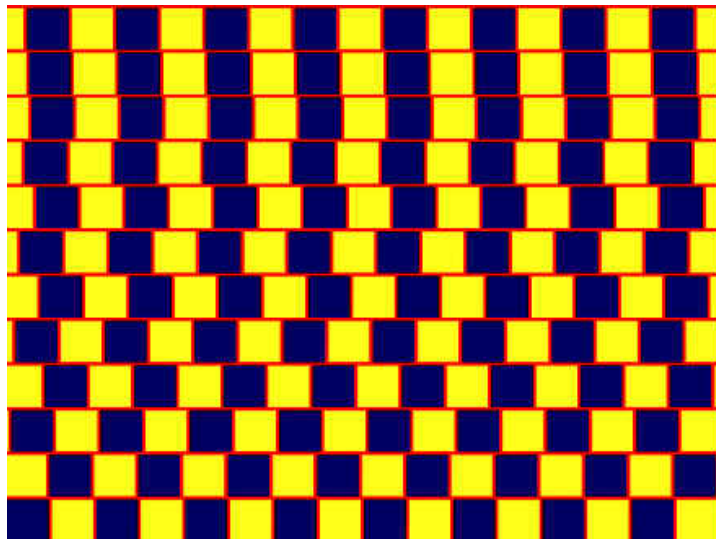
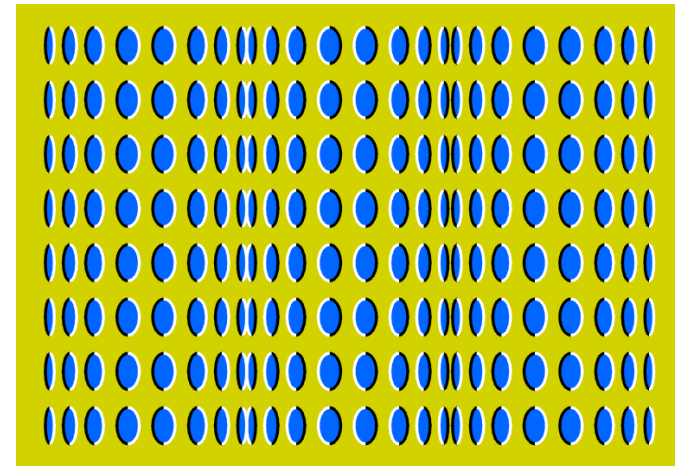
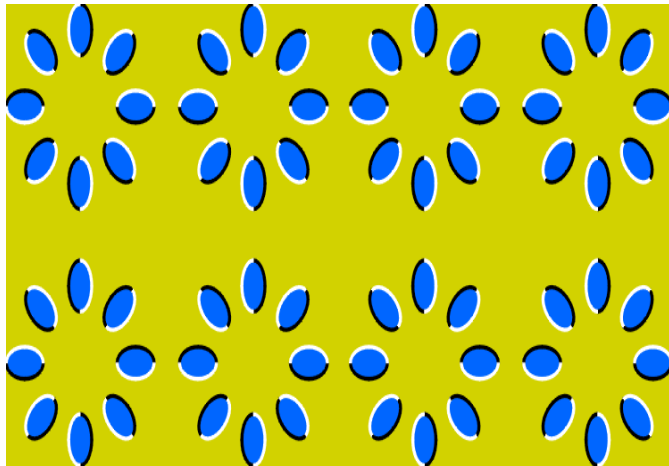
- de représentation des connaissances ;
- de manipulation des objets ;
- d'exploration des problèmes ;
- de validation des solutions ;
- de collaboration (élèves, professeurs).

Effets sur les *modes de travail des élèves* et la *conceptualisation* des mathématiques :

- le paradigme du filet ;
- les effets des images, la confusion entre les objets et leur représentation (« c'est tout vu... »).

Exemple...

Exemple 1 : « Magie et image ont mêmes lettres... »



Exemple...

Exemple 2 : les problèmes de représentation et de calcul

```

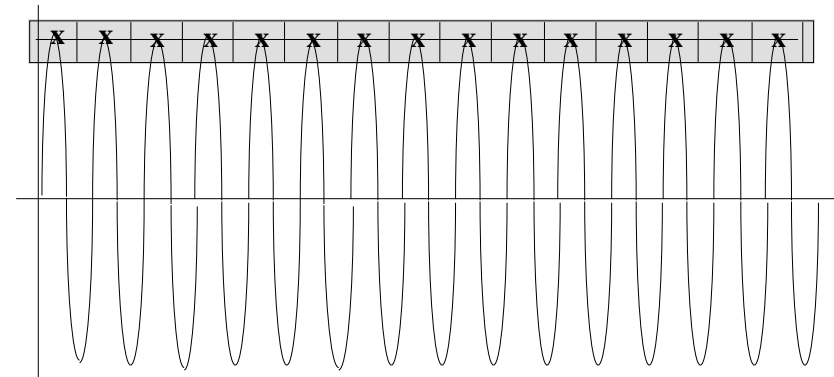
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
▪  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2} + \frac{2}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 6$  false
▪  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2} + \frac{2}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 6$  false
▪  $\text{expand}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2} + \frac{2}{\sqrt{5}+2}\right) = \sqrt{10} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 6$  true
expand((J(2)-1)/(J(5)-2)+2/(J...
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z...
▪  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$  true
▪  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$  true
▪  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$  false
cos(pi/8)=J(J(2)+2)/2
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30
  
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7
Zoom Trace ReGraph Math Draw
MAIN RAD EXACT FUNC
  
```

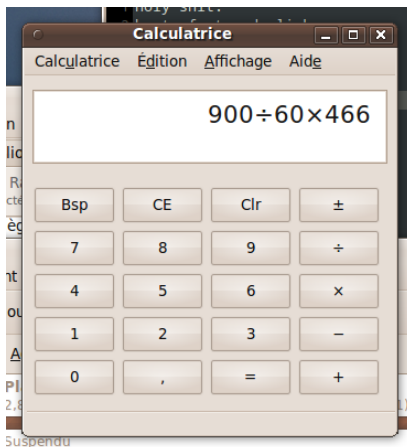


x : Pixels sollicités par l'algorithme

Exemples...

Exemple 3 : faire une multiplication

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 47 \\ \hline 483 \\ 2760 \\ \hline 3243 \end{array}$$



Web [Images](#) [Videos](#) [Maps](#) [Books](#) [Translate](#) [Mail](#) [more](#) ▼

luc.trouche@wanadoo.fr |

Google

69*47

Search

[Advanced search](#)

Everything

▼ More



69 * 47 = 3 243

[More about calculator.](#)

▼ Show search tools

Search for documents containing the terms **[69*47](#)**.

69*47

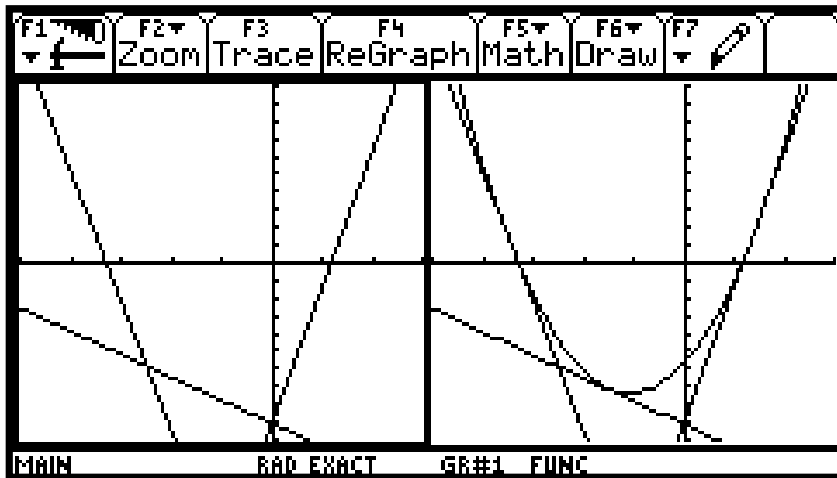
Search

[Search Help](#)

[Give us feedback](#)

Exemples...

Exemple 3 : trouver une parabole tangente à trois droites données (Trouche 1995)



$$y = -7,3x - 24,075$$

$$y = -1,3x - 9,075$$

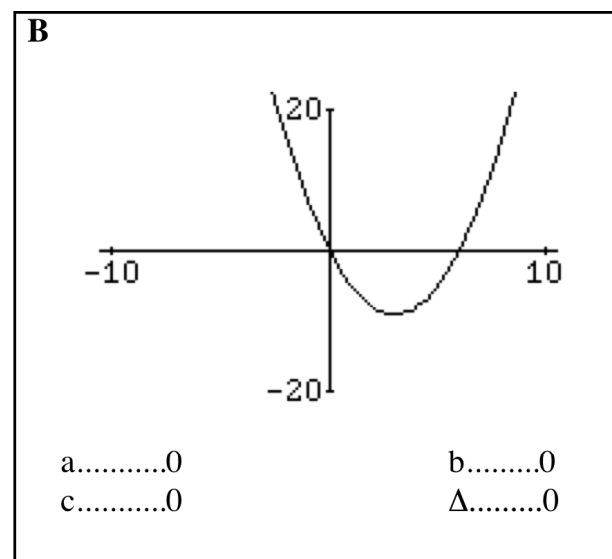
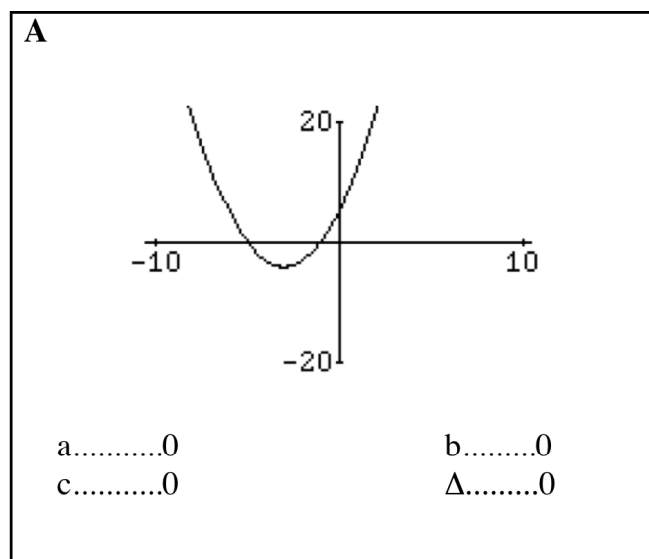
$$y = 7,7x - 9,075$$

Exemples...

Exemple de « définition d'une tangente » qui émerge : « *une droite est d'autant plus tangente à une courbe qu'elle a plus de points communs avec elle* »

Définition liée aux modes de validation de la solution graphique

Une définition *dynamique* du coefficient c , liée aux modes d'action sur la figure



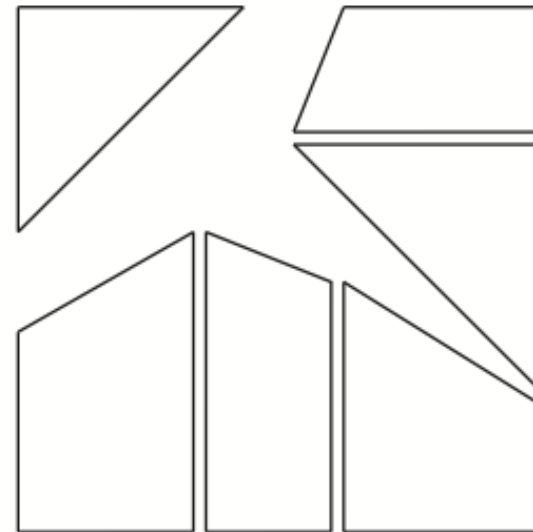
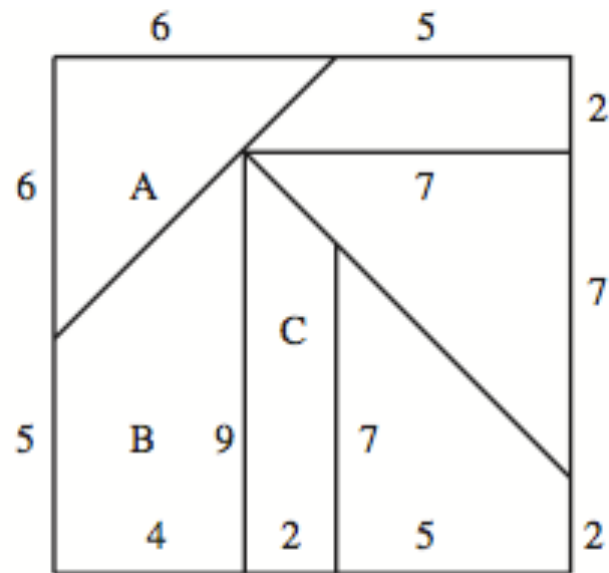
Exemples...

Exemple 4 : ABC est un triangle isocèle, avec $AB = AC = 5$.
Comment varie l'aire de ce triangle en fonction de BC ? Quelle est l'aire maximale ?

Traiter le problème avec le logiciel de votre choix

Quelques concepts théoriques...

Pour penser l'apprentissage des mathématiques, un exemple



Description de l'activité : les élèves sont mis par groupe de 6 et chaque groupe doit faire un agrandissement d'une pièce du puzzle. A la fin, on regroupe les pièces pour reconstituer le puzzle. La consigne est : le côté du puzzle qui mesure 4 cm doit mesurer 7 cm sur le puzzle que vous devez construire (Brousseau 2005).

Quelques concepts théoriques...

Pour penser l'apprentissage des mathématiques, la théorie des situations (Brousseau)

- une connaissance mathématique peut être modélisée par une *situation*, un problème, dont la résolution suppose précisément la construction de cette connaissance
- le professeur, en organisant l'étude de cette situation dans la classe (et avec la classe), constitue un *milieu* pour la construction de cette connaissance
- les élèves interagissent avec le milieu
- ce sont les *rétroactions* de ce milieu qui permettent de *valider*, ou non, les solutions construites par les élèves
- c'est ce *jeu* avec le milieu qui assure la construction des connaissances mathématiques par les élèves

Quelques concepts théoriques...

Pour penser l'intégration des outils dans l'apprentissage des mathématiques, l'approche instrumentale (Trouche 2000)



Relations dialectiques entre les sujets et les artefacts qu'ils utilisent

Les *artefacts* : des propositions

Les *instruments* : des constructions individuelles

Deux processus en étroite relation, *instrumentation* et *instrumentalisation*

Un instrument, entité mixte (matérielle et psychologique), résultat d'une genèse

Quelques concepts théoriques...

Un schème = organisation invariante de l'activité pour réaliser un type de tâche (Piaget, Vergnaud)

Le développement humain repose sur le développement d'un répertoire de schèmes :

- schème du saut à la perche ;
- schème de descente d'un escalier ;
- schème de l'ouverture d'une poignée
- schème de résolution d'une équation algébrique...

Schème = des gestes structurés par des connaissances

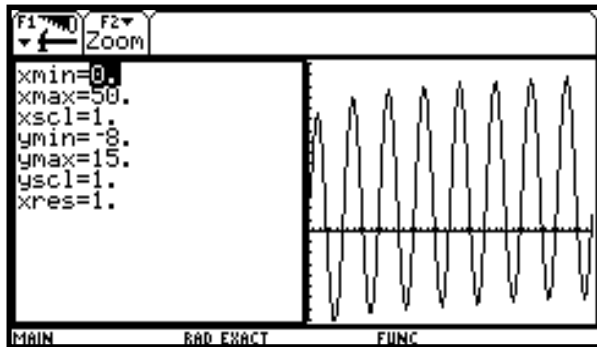
Dans le cas des mathématiques, ces connaissances sont des « théorèmes-en-actes » et des « concepts-en-actes », bien souvent implicites (Vergnaud 1999)

Petit exercice d'illustration : recherche des triangles rectangles ABC tels que AB est le carré de AC

Quelques concepts théoriques...



Instrumentation



“Si la fonction augmente rapidement, c’est bon. Par contre, si la fonction oscille fortement, alors pas de limite infinie”. On peut émettre l’hypothèse que le schème de l’étudiant intègre un théorème en acte du type “si la limite de f est infinie, alors f est nécessairement croissante”.

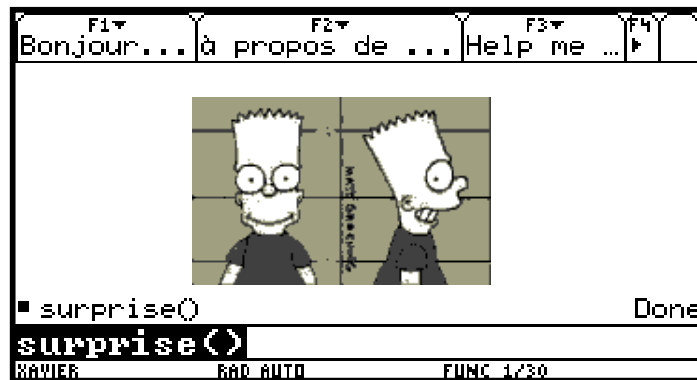
L’instrumentation est un processus par lequel les contraintes et potentialités de l’artefact *conforment* l’activité du sujet. Il se développe à travers l’émergence et l’évolution de schèmes pour la réalisation de tâches

Exemple, étudier, avec une calculatrice graphique, la limite en $+\infty$ de la fonction qui, à x , associe $f(x) = \ln(x) + 100 \sin(x)$

Quelques concepts théoriques...



Instrumentalisation



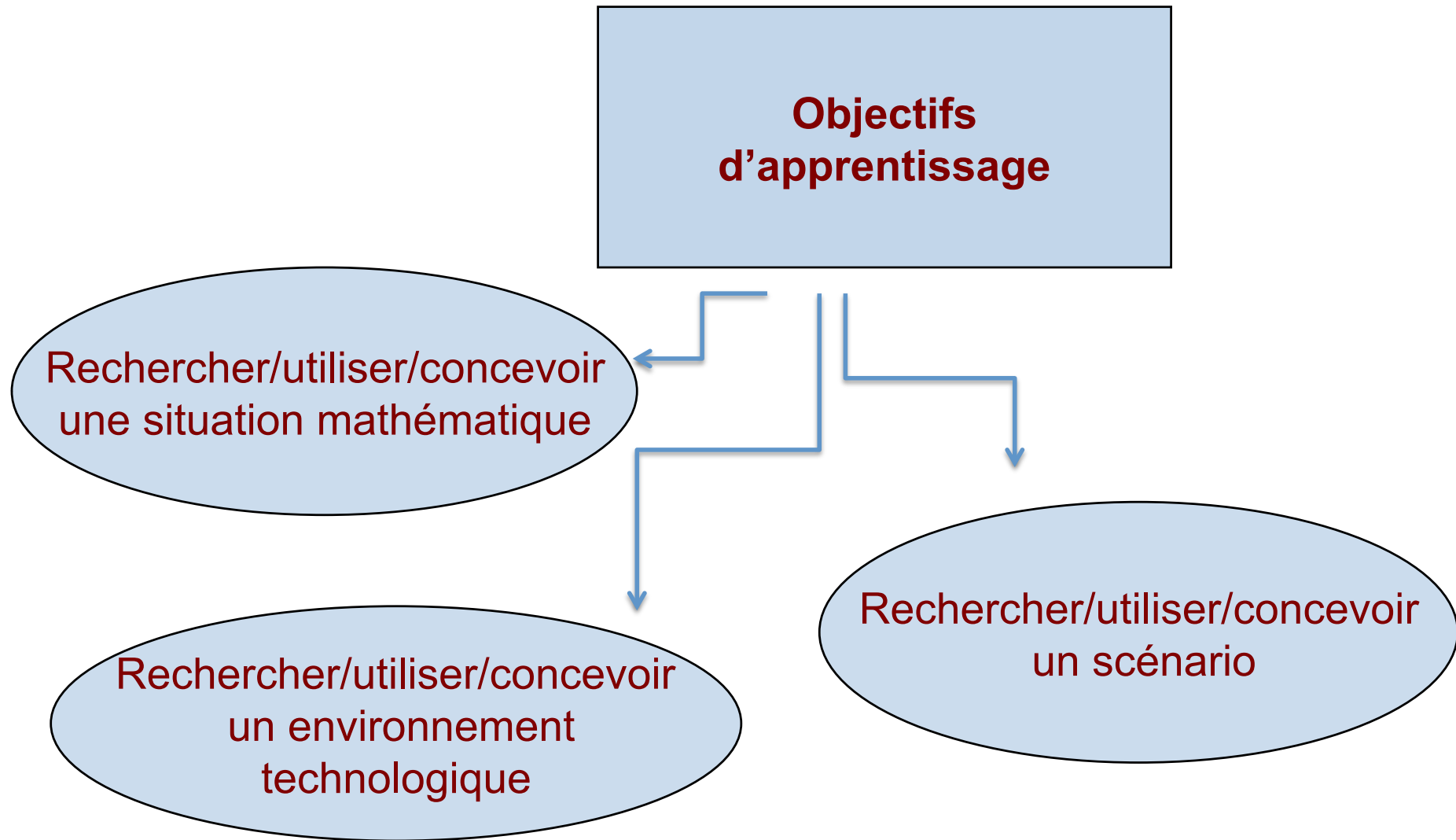
Faire sien un objet, c'est « y mettre du sien »

Ni une diversion, ni un braconnage...
mais une contribution essentielle au développement des artefacts

Comme conséquence, l'idée d'une conception *continuée* et *distribuée* des artefacts (logiciels, ressources pour les exploiter) : tout utilisateur est un concepteur...

Les ressorts des communautés d'utilisateurs, de développeurs...

Enfin, le rôle du professeur...



TD 1

Problème de géométrie : peut-on construire un polygone connaissant le milieu de ses côtés ? (environnement technologique : GeoGebra)

- étude mathématique du problème ;
- construction d'un scénario pour des élèves de ...

TD 2

Recherche de ressources Internet pour préparer un cours, l'exemple du théorème de Pythagore : un répertoire de 5 ressources commentées pour un professeur de collège

Références

Bourdieu, P. (2003). *Images d'Algérie: une affinité élective*. Arles : Actes sud

Brousseau, G. (2005). Recherches en éducation mathématique, *APMEP* 457, 213-224, <http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Brousseau.pdf>

Buisson, F. (dir.) (1911). *Le nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, INRP
<http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/>

Goody, J. (1985). *La logique de l'écriture*. Paris : Armand Colin

Neugebauer, O., & Sachs, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: American oriental society.

Pédauque, R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. Caen : C & F éditions

Trouche, L. (1995). E pur, si muove. *Repères-IREM*, 20, 16-28.

Trouche, L. (2000), La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur, éléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes, *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 239-264, <http://www.springerlink.com/index/N1HP281710152520.pdf>

Trouche, L. (2005). Des outils de calcul aux instruments du travail mathématique, conférence à l'université d'été *Le calcul sous toutes ses formes* http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

Vergnaud, G. (1999). A quoi sert la didactique, *Sciences humaines* 24, http://www.scienceshumaines.com/a-quoi-sert-la-didactique-fr_11865.html

Zagier, D. (2005). Les aspects expérimentaux en théorie des nombres, conférence à l'université d'été *Le calcul sous toutes ses formes* http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm