GRENOBLE 1
UNIVERSITE
JOSEPH FOURIER
SCIENCES, TECHNOLOGIE, MEDECINE

**Master 2 Didactique des sciences**

# A la découverte des triangles : de la manipulation de segments dans un logiciel de géométrie dynamique à la construction à la règle et au compas.

Anne VOLTOLINI

Lundi 1er juillet 2013

**Directeur** :

Sophie Soury-Lavergne

**Examinateurs** :

Hamid Chaachoua

Sophie Soury-Lavergne

Jana Trgalova

# Merci...

A Sophie Soury-Lavergne pour m'avoir ouvert les portes de la didactique en m'orientant vers le master 2 de didactique des sciences de Grenoble et en encadrant ce travail de mémoire. Je la remercie pour son aide à me poser régulièrement les bonnes questions, à clarifier mes idées ainsi que pour ses réponses à mes questions et les précieux conseils qu'elle m'a donné.

A Jana Trgalova et Hamid Chaachoua d'avoir accepté d'étudier ce travail et de participer à mon jury.

A Anne Calpe pour sa précieuse aide informatique lors de la création des cahiers.

A la classe de CM2 de l'école Marcel Cachin et à Géraldine leur maîtresse pour leur participation à l'expérimentation.

A Géraldine, Maelle, Yasmina, Catherine, et Aristide pour leurs remarques constructives lors des réunions du groupe Mallette Madyp.

A Sébastien pour son aide à la mise en page de ce mémoire.

A mon papa pour sa relecture attentive.

## Table des matières

# Introduction

Les moyens de communication pour apprendre évoluent très rapidement aussi bien à l'école qu'en dehors de l'école. L'institution préconise l'usage des TICE dans nos cours.

*«Le recours aux TICE devient habituel dans notre enseignement.»*(Programmes de l'école primaire 2008 p 22)

*«Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cours de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribuent à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre. (...) On travaillera à la fois les constructions sur papier par les outils de dessin traditionnels et les constructions sur écran à l'aide d'un logiciel de géométrie.»* (Programmes de mathématiques 2008 classe de 6e p 16 et 17)

Ainsi il nous semble important de réfléchir au défi de l'intégration des TICE dans notre enseignement des mathématiques. Lors d'activités utilisant ces technologies, dans un environnement de géométrie dynamique, ou avec un tableur les élèves font ils réellement des mathématiques ? Ils manipulent, ont des actions à destination de la machine, mais s'engagent t-ils forcément dans une démarche mathématique ?

Dans ce mémoire nous nous interrogerons sur :

- la contribution des TICE dans les apprentissages : les contraintes, les nécessités, les opportunités d'une situation utilisant les technologies ;
- l'apport possible des TICE dans le contrôle mathématique de l'activité par l'élève ;

afin que l'ordinateur prenne sa place de partenaire de l'apprentissage.

Ce mémoire s'inscrit dans les projets de recherche MaDyp et Mallette de l'équipe EducTice-S2HEP de l'IFE : Mathématiques Dynamiques à l'école Primaire et Mallette de ressources pour l'École.

Ces actions de recherche partagent des objectifs communs :

- développer des activités utilisant les TICE qui incluent une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur pour l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et primaire ;
- accompagner les enseignants dans l'appropriation et l'utilisation de ces ressources en leurs proposant des scénarios prêts pour la classe, pouvant être modifiés et adaptés en fonction de leurs objectifs pédagogiques.

Mon travail de mémoire s'inscrit dans le premier axe de cette recherche. Il portera sur la géométrie au cycle 3 de l'école primaire autour du thème des triangles et les apports de la technologie à cette notion.

# 1. Cadre théorique et Problématique

## 1.1 Les fondements de l'apprentissage

*« Le maître doit effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu, et s'il fini par gagner, l'apprentissage s'opère. »* (Brousseau 1986 cité par Johsua et Dupin 1993 p 260)

Pour Brousseau (2003) « la communication didactique a pour objet de donner à son destinataire un moyen de contrôle ou de régulation sur un certain milieu ». Brousseau définit le milieu comme le système antagoniste de l'actant. C'est tout ce qui agit sur l'élève et/ou ce sur quoi l'élève agit. Il précise que « la conscience qu'un sujet peut avoir de sa capacité de contrôle sur une situation ou un milieu est repéré comme sa connaissance ». « L'élève apprend par des régulations de ses rapports avec son milieu, en corrigeant ses actions et en anticipant leurs effets. »

**Une première hypothèse de travail :**
**HT1 : Les connaissances du sujet s'élaborent via ses interactions avec un certain milieu.**

Vergnaud (1990) précise que « c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquière du sens pour l'enfant ». Il explique qu'une « situation didactique est d'abord une mise en scène intéressante et riche,(...) et que ce sont les situations qui donnent du sens au concept mais le sens n'est pas dans les situations ». « Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Ce sont les schèmes évoqués chez le sujet par une situation ou un signifiant qui en constituent le sens. » Ainsi Vergnaud (1990) considère t-il que c'est l'action du sujet en situation et les schèmes qui organisent sa conduite qui constituent la source et le critère de la conceptualisation.

**Une deuxième hypothèse de travail :**
**HT2 : Le sens renvoie à un sous ensemble de schèmes.**

## 1.2 Géométrie plane au cycle 3 de l'école élémentaire

Au cycle 3 de l'école élémentaire la géométrie du sensible et de l'observation s'enrichit progressivement par l'identification de certaines caractéristiques des objets. Les prémisses de la dialectique dessin figure (Laborde et Capponi, 1994) commencent à apparaître. Pour Laborde et Capponi (op.cit), le dessin est considéré comme un signifiant d'un référent théorique (l'objet géométrique). La figure géométrique est définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier étant le référent, le second étant un des dessins qui le représente pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Par exemple dans le cas du triangle, le référent est le triangle théorique de la géométrie euclidienne. Le signifiant peut être n'importe quel dessin dans tous les espaces graphiques possibles : dessin à main levée, dessin aux instruments dans un environnement papier-crayon ou dessin réalisé avec un logiciel de géométrie dynamique. Le signifié, que le sujet se construit au cours de son apprentissage, est le lien entre le référent triangle théorique de la géométrie euclidienne et tous les dessins possibles. Ceci fait apparaître que la figure géométrique est une construction intellectuelle du sujet qui est progressive au cours de la scolarité.

Les constructions aux instruments basées sur l'analyse des propriétés géométriques des objets et des propriétés géométriques relatives aux instruments est une étape dans le passage du dessin à la figure. Dans les problèmes de constructions, l'enjeu est le processus de construction qui permet le tracé d'un dessin, d'un représentant de la figure. Par exemple dans la construction géométrique d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés, l'enjeu est de produire un dessin respectant les contraintes sur les longueurs des côtés. L'activité de construction consiste à effectuer des tracés associés à l'utilisation de certaines propriétés géométriques. Dans le cas du triangle de longueurs des côtés données, il s'agit de tracer un segment d'une longueur donnée représentant un côté du triangle, puis de construire les arcs de cercle en référence à la propriété : Si un point est à une distance R d'un point O il appartient au cercle de centre O et de rayon R.

## 1.3 Déconstruction dimensionnelle des formes

Duval (2005) insiste sur la déconstruction dimensionnelle des formes comme processus central de la visualisation géométrique. Pour faire de la géométrie il faut décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. Duval distingue la division méréologique des formes de la déconstruction dimensionnelle des formes. Dans le cas de la division méréologique, la figure est décomposée en unités figurales de même dimension que la figure de départ. La figure est alors regardée comme un puzzle. La déconstruction dimensionnelle des formes permet la descente dans les dimensions, avec, dans le cadre de la géométrie plane, le passage des surfaces (dimension 2) aux lignes (dimension 1) puis aux points (dimension 0). Le champ réel du travail sur les figures est principalement constitué par la trame des unités figurales 1D et 0D et les propriétés qui les relient et pas seulement par les unités figurales 2D qui sont souvent introduites comme des figures de base.

Duval et Godin (2005) expliquent que l'activité de construction ou de reproduction de figures repose sur leur déconstruction en tracés. La production de chaque tracé correspond à une instruction formulable et à la mobilisation d'une propriété géométrique en relation avec l'instrument utilisé. Ce n'est pas tant la tâche de reproduction qui est importante mais le type d'instrument choisi pour cette reproduction. La variation des instruments est une variable didactique importante. L'utilisation de certains outils oblige à une déconstruction dimensionnelle des formes lors d'activités de reproductions de figures. De plus c'est l'utilisation d'instruments différents, qui permettent de transporter des informations 2D ou 1D, qui favorise l'entrée des élèves dans la déconstruction dimensionnelle des formes, laquelle est une condition pour l'explicitation des connaissances géométriques.

**Une troisième hypothèse de travail :**
**HT3 : La déconstruction dimensionnelle des formes est un processus central de la visualisation géométrique.**

## 1.4 Déconstruction dimensionnelle du triangle

Un triangle peut être vu comme un contour, une surface intérieure, trois segments, trois sommets, trois angles. La déconstruction dimensionnelle du triangle permet de faire apparaître les sous objets qui le composent, les trois angles, les trois côtés et les trois sommets.

Dans la tâche de construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés, deux décompositions dimensionnelles peuvent être envisagées.

D'une forme 2D à des formes 1D.

La déconstruction dimensionnelle du triangle peut se faire uniquement en passant du triangle (forme 2D) aux trois côtés (forme 1D). Le premier segment tracé représente un côté du triangle. Dans la suite de la construction il est possible de voir les deux autres côtés comme les rayons de deux cercles comme sur la figures 1.

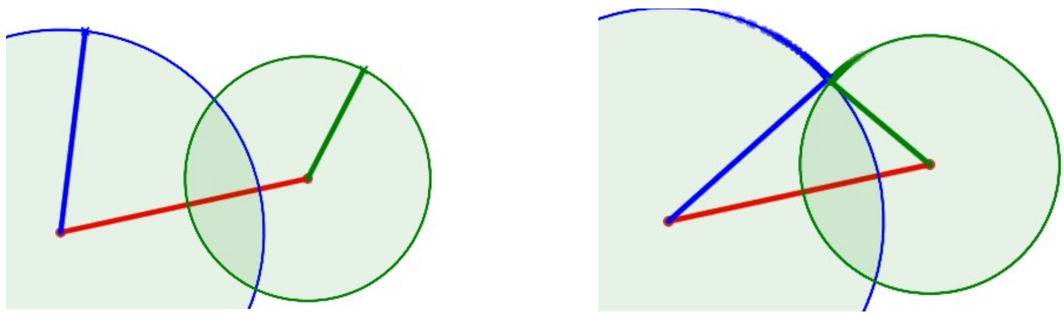


Figure 1

D'une forme 2D à des formes 0D.

Le premier segment tracé contribue également à l'obtention de deux des trois sommets du triangle. Pour obtenir le troisième sommet il faut placer un point à une certaine distance de chacun des deux premiers sommets comme sur la figures 2. Dans ce cas la déconstruction dimensionnelle du triangle se fait en passant du triangle (forme 2D) aux trois sommets (forme 0D). Pour obtenir le triangle il faudra tracer les deux autres côtés.

Figure 2

Dans une autre tâche possible de construction d'un triangle : construire un triangle connaissant la mesure de ses trois angles, il n'y a pas de déconstruction dimensionnelle, puisque la construction requiert le passage d'une forme 2D à des formes 2D. Pour construire un triangle dont les trois mesures d'angles sont données l'analyse visuelle est faite en terme d'assemblage de figures 2D. En effet un angle est une figure 2D et le triangle à construire est aussi une figure 2D.

## 1.5 La ligne brisée comme étape de la déconstruction dimensionnelle du triangle

Comme nous venons de l'exposer dans le paragraphe ci dessus plusieurs déconstructions dimensionnelles du triangle sont possibles :

- 3 angles : du 2D au 2D.
- 3 côtés : du 2D au 1D.

Dans le cadre de la construction géométrique d'un triangle connaissant les trois longueurs des cotés il nous semble utile de s'intéresser plus en détail à la déconstruction dimensionnelle du triangle qui permet de passer du triangle 2D aux trois côtés 1D.Une étape de cette déconstruction dimensionnelle du triangle peut être la ligne brisée. La ligne brisée peut être considérée comme une forme 1D obtenue à partir du contour en «ouvrant» un sommet. (figure3)

Figure 3

Inversement lorsqu'on a trois segments de longueurs données, on peut former une ligne brisée avec ces trois segments puis par manipulations successives obtenir le triangle. (figure 4)

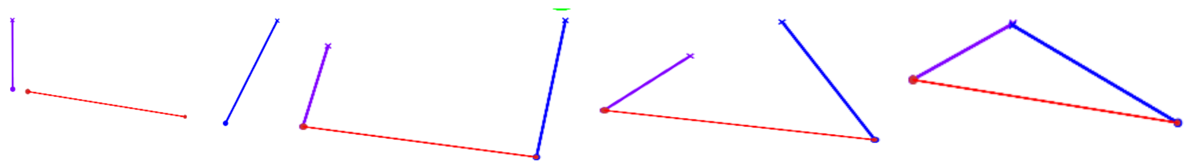


Figure 4

Le passage par la ligne brisée constituée des trois segments est une piste pour amener la construction géométrique du triangle. En effet les segments extrêmes de la ligne brisée qui pivotent pour former le triangle peuvent être un moyen d'amener l'usage du compas dans la construction géométrique des triangles.

Le cahier informatique «A la découverte des triangles» qui sera décrit et analysé plus loin repose ainsi sur la manipulation d'une déconstruction dimensionnelle du triangle.

## 1.6 Constructions géométriques aux instruments

Au cycle 3 de l'école élémentaire il s'agit de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où le contrôle se fait par les instruments porteurs de propriétés géométriques. Offre, Perin-Glorian et Verbaere (2006) soulignent que la production de figures géométriques à l'aide des instruments nécessite une articulation entre la connaissance de propriétés géométriques des objets et des connaissances sur les instruments de tracés. Cette articulation entre propriétés géométriques et usage des instruments est à élaborer pour les élèves de cours moyen de l'école élémentaire.

« Ils [de nombreux travaux] mettent en évidence l'impact des instruments sur la conceptualisation et soulignent que l'analyse de leurs propriétés est une nécessité pour l'enseignant s'il veut atteindre ses objectifs didactiques de conceptualisation. » (Rabardel, 1999 p 204) Rabardel explique qu'un instrument est une ressource pour la réalisation d'une tâche mais qu'il comporte aussi des contraintes dont il faut tenir compte dans son utilisation.

## 1.7 Notion d'instrument

Pour Rabardel (1995) l'instrument est une totalité comprenant deux composantes :

– une composante matérielle qui est l'artefact ou une partie de l'artefact, l'outil ;
– une composante psychologique constituée des schèmes d'utilisation que le sujet va développer en situation.

Vergnaud (1990 p 136) définit un schème comme « l'organisation invariante de la conduite [d'une personne] pour une classe de situations données. » Un schème est composé de quatre éléments :

- le but qui se décline en sous buts et en anticipations ;
- les règles d'action, de prise d'information et de contrôle du type si... alors... qui permettent d'engendrer la suite des actions du sujet ;
- les invariants opératoires : les théorèmes en actes, les concepts en actes qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation et la prise d'informations sur la situation à traiter ;
- des inférences qui sont la clé des adaptations en situation, qui permettent de « calculer » les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariant opératoire dont dispose le sujet.

Vergnaud précise que « c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. » (op. cit) Le fonctionnement cognitif de l'élève comporte des opérations qui s'automatisent progressivement et des décisions conscientes qui permettent de tenir compte des valeurs particulières des variables de situation. Les enfants découvrent de nouveaux schèmes en situation.

L'acquisition des schèmes d'utilisation d'un instrument est liée aux concepts visés dans un apprentissage et donc à la résolution de problèmes. Un instrument dépend du sujet qui le construit et de la tâche qu'il cherche à résoudre. La construction de l'instrument est le produit de l'activité du sujet. Rabardel (1995 p 119) explique que « la position instrumentale de l'artefact est relative à son statut au sein de l'action. L'artefact n'est pas en soi instrument ou composante d'un instrument, il est institué comme instrument par le sujet qui lui donne le statut de moyen pour atteindre les buts de son action. » « Pour le sujet un artefact s'enrichit des situations dans lesquelles il a été inséré en tant que moyen d'action. » « Ainsi se constitue le champs instrumental de l'artefact pour le sujet c'est à dire l'ensemble des schèmes d'utilisation de l'artefact, l'ensemble des objets sur lesquels il permet d'agir, l'ensemble des transformations, des changements d'état qu'il permet de réaliser. »

Les artefacts sont le plus souvent préexistants mais sont transformés en instruments par le sujet au cours de processus de genèse instrumentale. Les schèmes sont le plus souvent issus du répertoire du sujet et généralisés ou accommodés au nouvel artefact. Parfois des schèmes entièrement nouveaux doivent être construits.

**Une quatrième hypothèse de travail :**
**HT4 : Le sujet s'approprie l'artefact et le transforme en instrument pour résoudre une tâche.**

## 1.8 Le compas : artefact, schèmes et concepts associés

**L'artefact compas**

L'artefact compas est constitué de :

- deux branches articulées ayant une extrémité commune ;
- deux extrémités :

- une pointe ;
- un crayon.

L'objet matériel compas est conçu pour :

- reporter des longueurs ou vérifier l'égalité de deux longueurs ;
- tracer des cercles ou des arcs de cercle.

**Schèmes sociaux d'utilisation du compas**

Rabardel (1995) distingue deux niveaux de schèmes d'utilisation :

- Les schèmes d'usage sont liés à l'artefact et à son utilisation, à son adaptation et aux modifications faites par le sujet.
- Les schèmes d'action instrumentée qui dépendent de l'activité dans laquelle ils s'insèrent et du but à atteindre.

Les schèmes d'utilisation ont à la fois une dimension privée et une dimension sociale. La dimension privée est propre à chaque individu. La dimension sociale tient à ce que les schèmes s'élaborent au cours d'un processus où le sujet n'est pas isolé. Les autres utilisateurs, les concepteurs de l'artefact contribuent à cette émergence de schèmes. Rabardel qualifie les schèmes d'utilisation de schèmes sociaux d'utilisation.

<u>Schèmes d'usage du compas</u> :

- écarter les branches et maintenir l'écartement dans l'usage,
- piquer la pointe et la maintenir fixe,
- appuyer le crayon,
- faire pivoter et produire une trace visible.

<u>Schèmes d'action instrumentée du compas</u> : deux exemples relatifs à deux tâches différentes.

- Pour tracer un cercle de centre et de rayon donné :
    - choisir un point qui sera le centre du cercle ;
    - écarter les branches du compas d'un écartement correspondant au rayon ;

- piquer la pointe du compas sur le point choisi pour le centre ;
- appuyer le crayon et faire pivoter pour obtenir la trace visible du cercle.

– Pour reporter une longueur donnée par un segment tracé à partir d'un point donné :
  - tracer une droite et placer un point sur cette droite ;
  - écarter les branches du compas d'un écartement correspondant à la longueur à reporter en faisant correspondre les deux extrémités du compas aux deux extrémités du segment donné;
  - piquer la pointe sur le point placé sur la droite ;
  - appuyer le crayon et faire pivoter le compas pour tracer un arc de cercle qui intercepte la droite.

**Les concepts associés**

L'utilisation de l'instrument compas dans les deux tâches précédentes, tracer un cercle ou reporter une longueur, s'appuie sur les deux concepts suivant:

– le concept de cercle ;
– le concept de longueur, de distance.

La maîtrise de l'instrument compas se construit au cours d'un processus de genèse instrumentale composé de deux processus évoluant en interaction, le processus d'instrumentalisation et le processus d'instrumentation. (Rabardel 1995)

**Le processus d'instrumentalisation**

Le processus d'instrumentalisation est un processus de personnalisation de l'artefact qui fait émerger les composantes de l'artefact (op cit) :

– 2 branches ;
– 2 sortes d'extrémités : une pointe et un crayon ;
– différents écartements possibles.

**Le processus d'instrumentation**

Le processus d'instrumentation est relatif à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation. (op cit)

En lien avec l'objet cercle le compas peut servir à :

- tracer un rond ;
- tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné ;
- tracer un cercle de centre donné et de rayon donné.

En lien avec la notion de distance le compas peut servir à :

- comparer des longueurs ;
- reporter une longueur ;
- placer plusieurs points à une même distance d'un point donné ;
- tracer un triangle.

Le compas est un instrument qui permet de tracer des cercles et aussi un instrument de report et de comparaison de longueurs. Il matérialise la propriété de conservation des distances.

Artigue et Robinet (1982) ont remarqué que pour les élèves, le compas ne sert pas à tracer l'ensemble des points à distance constante d'un point fixe. Il s'agit plutôt d'un instrument qui sert à tracer des cercles, la taille du cercle correspond à l'écartement des branches. Le fait que le cercle soit exclusivement considéré comme une courbe contribue à ce que certaines propriétés n'aient jamais l'occasion d'être nettement institutionnalisées.

Par exemple : Si un point est sur le cercle de centre O et de rayon R il est à une distance R de O. Et réciproquement si un point est à une distance R de O il appartient au cercle de centre O et de rayon R. Artigue et Robinet (1992) expliquent que les élèves associent principalement l'usage du compas aux cercles et que très rarement à des problèmes de distances, de report ou de comparaison de longueurs. L'écartement du compas n'est pas vu par les élèves comme un segment d'une certaine longueur, ou comme une distance entre deux points. C'est pourtant cette caractéristique du compas, comme instrument qui permet de reporter des longueurs, qui devra être utilisée dans la construction géométrique du triangle à la règle et au compas.

## 1.9 Élaboration d'un instrument compas dans la construction géométrique du triangle

La construction géométrique du triangle à la règle et au compas est une situation d'activité instrumentée. (Rabardel 1995) Des interactions entre les trois pôles, sujet, instrument compas et objet côté du triangle vont se produire au cours de l'activité. Le compas sera un intermédiaire, un médiateur entre le sujet utilisateur du compas, et l'objet triangle qui est à construire. L'instrument compas, associé à la construction géométrique du triangle, est à la fois un moyen d'action dirigée vers la construction du triangle et il permet aussi la connaissance de l'objet triangle.

Plusieurs types de difficultés peuvent être mises en évidence quant à l'usage du compas dans la construction d'un triangle :

- le compas n'est pas l'instrument qui permet de tracer le contour du triangle ;
- le compas est utilisé dans sa fonction de report de longueurs ;
- l'écartement du compas ne rend pas visible le segment de longueur donnée à reporter ;
- le compas trace des arcs de cercle (formes géométriques de dimension 1) et c'est le point d'intersection (forme géométrique de dimension 0) de ces arcs de cercle qui est nécessaire pour obtenir le triangle.

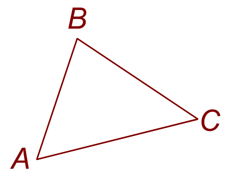
Lors de l'usage du compas les rétroactions sont les arcs de cercles. Le côté du triangle n'est pas rendu visible lors de l'usage du compas.

## 1.10 A propos de triangles

Dans ce mémoire nous travaillons sur les triangles dans un environnement de géométrie dynamique. Nous allons étudier les caractéristiques des différentes représentations des triangles qui seront possibles d'utiliser dans un tel environnement.

**Triangle constructible**

Inégalité triangulaire



$$AB < AC + CB$$
$$BC < BA + AC$$
$$CA < CB + BA$$

Propriété: Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Remarque : Si $AB = AC + CB$, alors *A*, *B* et *C* sont alignés et le triangle ABC est un triangle plat.

Réciproquement, étant données trois longueurs, si elles vérifient l'inégalité triangulaire il est possible de construire un triangle ayant ces longueurs de côtés. La vérification de ces inégalités peut être faite en comparant seulement la plus grande des trois longueurs avec la somme des deux autres, car, dans ce cas là, les deux autres inégalités sont nécessairement vraies. On dit alors que le triangle est constructible.

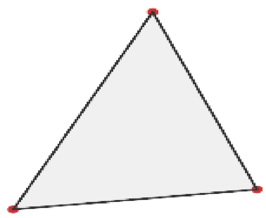
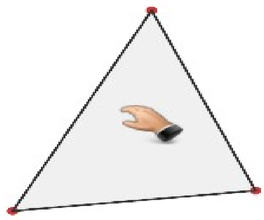
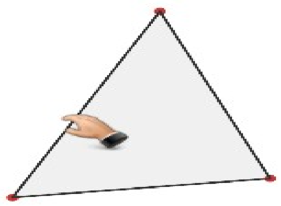
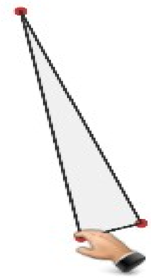
Si la longueur d'un côté est supérieure à la somme des longueurs des deux autres côtés alors le triangle n'est pas constructible, il est impossible de former un triangle avec ces trois longueurs. Pour le triangle, inconstructible signifie inexistant.

**Triangle robuste, triangle mou**

Dans un environnement de géométrie dynamique, Soury-Lavergne (2011) définit une construction robuste comme une figure générale qui s'actualise en dessins particuliers qui tous vérifient une propriété donnée. La construction robuste est définie par rapport à une propriété mathématique donnée, que tous les dessins qui sont obtenus avec cette figure construction vérifient. Par exemple, la construction d'un rectangle est une figure robuste par rapport à la propriété « ce quadrilatère est un rectangle », mais pas par rapport à la propriété « ce quadrilatère est un carré ». On considère la même figure, obtenue par le même processus de construction, mais par rapport à une propriété elle est robuste, par rapport à une autre elle ne l'est pas.

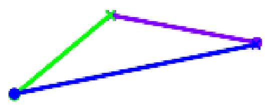
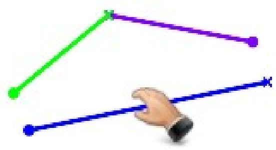
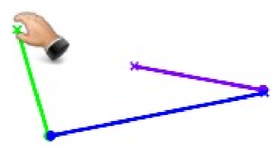
Dans une construction robuste d'une figure, les caractéristiques de la figure se conservent par déplacement alors que dans une construction molle à chaque déplacement un nouveau dessin est obtenu qui peut être ou pas la représentation de cette figure. Dans une construction molle au moins une des représentations obtenues est celle de la figure.

Qu'est ce qu'un triangle robuste ?

| Un triangle | Déplacement du triangle en saisissant son intérieure. | Déplacement d'un côté . | Déplacement d'un sommet. |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

Dans l'environnement Cabri Elem lors du déplacement du triangle ou d'un de ses côtés, le déplacement se fait par translation et le triangle reste identique au triangle de départ. Lors du déplacement d'un de ses sommets, le triangle reste un triangle mais n'est plus identique au triangle de départ. Ainsi le triangle ci-dessus est un triangle robuste au sens de la propriété « être triangle » mais c'est un triangle mou par rapport à la propriété « un triangle de longueurs des côtés données » ou « de mesures d'angles données ».

Un autre exemple :

| Un triangle | Déplacement d'un côté | Déplacement d'un sommet |
|---|---|---|
|  |  |  |

Ce triangle est un triangle mou par rapport à la propriété « être un triangle ». Par contre la construction est robuste par rapport aux longueurs des côtés qui restent identiques quelque soit le déplacement.

**Triangle perceptible**

Dans un environnement de géométrie dynamique, lorsqu'un triangle est formé par déplacements et ajustements de trois segments, le triangle peut être perceptivement obtenu bien que les extrémités ne coïncident pas. La superposition des extrémités des segments n'est réalisée qu'à quelques dixièmes de millimètres près ou quelques pixels près. La précision n'est pas toujours visible à l'interface de l'ordinateur du fait de la grosseur des extrémités des segments. Ainsi un triangle perceptible à l'interface pourrait en théorie être inconstructible. Par exemple le triplet de segments dont les longueurs mesurent 5cm, 3cm et 1,9cm ne permet pas d'obtenir un triangle. Or à l'écran de l'ordinateur, du fait de la grosseur des extrémités des segments et du niveau de précision dans le déplacement, ce triangle pourrait être formé perceptivement. De même le triplet de longueurs (0,1cm ; 0,1cm ; 0,1cm) permet d'avoir un triangle théoriquement constructible. Mais à l'écran de l'ordinateur des segments aussi petits ne peuvent être tracés et un tel triangle n'est pas perceptible. Ou encore, le triangle dont les côtés mesurent 3m, 5m et 6m est constructible théoriquement mais ne peut être tracé à l'interface de l'ordinateur car les longueurs sont trop grandes.

## 1.11 Problématique

Nous avons étudié ci-dessus des explications possibles aux difficultés de l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données.

Lors de l'usage du compas, les rétroactions sont les arcs de cercle. Le côté du triangle n'est pas visible et l'obtention du troisième sommet nécessite une déconstruction dimensionnelle du triangle passant du 2D au 0D. En revanche des segments côtés du triangle sont des objets 1D. Ainsi des manipulations directes de segments de longueurs données, dans un environnement de mathématiques dynamiques, permettraient elles un contrôle sur l'objet côté du triangle facilitant la construction du triangle ?

A partir des quatre hypothèses de travail suivantes :

- HT1 : Les connaissances du sujet s'élaborent via ses interactions avec un certain milieu ;
- HT2 : Le sens renvoie à un sous ensemble de schèmes ;
- HT3 : La déconstruction dimensionnelle des formes est un processus central de la visualisation géométrique ;
- HT4 : Le sujet s'approprie l'artefact et le transforme en instrument pour résoudre une tâche ;

nous allons développer dans ce mémoire la problématique suivante que nous déclinons en trois questions de recherche.

**Q1 : Est-il possible de construire une situation, dans un environnement de mathématiques dynamiques, pour amener la construction géométrique à la règle et au compas d'un triangle de longueurs des côtés données ?**

**Q2 : Quelles types de rétroactions l'environnement de mathématiques dynamiques doit-il renvoyer pour permettre le contrôle mathématique de l'activité par l'élève ?**

**Q3 : Comment un environnement de mathématiques dynamiques participe-t-il à la création d'un milieu favorisant les apprentissages ?**

## 1.12 Méthodologie

A partir du cadre théorique et des hypothèses de travail nous mettrons en place la méthodologie suivante.

Nous allons concevoir une situation de travail sur les triangles dont l'objectif est la construction à la règle et au compas d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données.

**Élaboration d'un premier cahier « A la découverte des triangles »**

A l'aide du logiciel Cabri Elem Créator[1], ayant des fonctionnalités de géométrie dynamique (Laborde et Laborde, 2011) nous élaborons un cahier d'activités informatisé qui repose sur le passage par la ligne brisée pour former un triangle. Ce premier cahier comprend deux tâches :

- Tâche 1 : Former des triangles par manipulation directe de segments de longueurs données.
- Tâche 2 : Déterminer si trois segments de longueurs données peuvent être les trois côtés d'un triangle.

Cette deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui finalise la recherche et la formation de triangles et donc le recours aux déplacements des segments.

Dans le cadre de ce travail de mémoire, nous incluons dans le cahier une première et une dernière page pour interroger les élèves sur leurs conceptions à propos de l'existence ou non d'un triangle dont les côtés sont donnés.

**Analyse a priori du premier cahier: "A la découverte des triangles"**

Nous définirons les différentes variables didactiques et nous analyserons les différentes stratégies possibles pour former un triangle ainsi que les différentes stratégies permettant de savoir si trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Enfin nous regarderons les différents types de rétroactions renvoyées par l'environnement de mathématiques dynamiques et en quoi elles permettent le contrôle mathématique de l'activité par l'élève.

**Expérimentation du cahier " A la découverte des triangles"**

Nous mettrons en œuvre une expérimentation dans une classe de CM2. Le cahier de chaque élève sera enregistré à la fin de son travail. De plus toutes les actions de l'élève lors de la réalisation du cahier seront enregistrées grâce au logiciel Camtasia. Quatre élèves ainsi que leurs écrans seront filmés par un caméscope. Nous confronterons l'analyse a priori des stratégies possibles et les observations des actions des élèves, en particulier leur manipulation des segments. Nous observerons

1 Le logiciel Cabri Elem créator et Player est un logiciel développé par la société Cabrilog partenaire dans les projets Madyp et Mallette.

les manipulations réalisées par les élèves et l'évolution de ces manipulations par la prise en compte des rétroactions associées pour déterminer si le cahier peut constituer un milieu qui engage l'élève dans une démarche mathématique porteuse de sens pour l'utilisation du compas dans la construction géométrique d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données.

**Construction d'un deuxième cahier**

Nous réaliserons ensuite un deuxième cahier qui poursuit le travail pour aboutir à l'usage du compas et à la nécessité de tracer des arcs de cercle dans la construction géométrique des triangles de longueurs des côtés données.

# 2. Description et analyse a priori du cahier "A la découverte des triangles" version 22 utilisée pour l'expérimentation

Le cahier « A la découverte des triangles » version 22 conçu et utilisé pour l'expérimentation comprend neuf pages. Cinq pages d'activités pour l'élève, une page d'accueil, une page d'aide à la manipulation des segments et deux pages permettant au chercheur d’interroger l'élève sur ses connaissances. Une version du cahier diffusable auprès des enseignants comprendra la page d'accueil, les cinq pages d'activités pour l'élève, la page d'aide à la manipulation des segments et des pages de commentaires spécifiques pour les enseignants.

## 2.1 Objectifs d'apprentissage

Le cahier « A la découverte des triangles » est le premier cahier d'une situation dont l'objectif d'apprentissage est d'initier la construction géométrique d'un triangle, à la règle et au compas, les trois longueurs de ses côtés étant données. Ce premier cahier comprend deux tâches :

- Tâche 1 : Former des triangles par manipulation directe de segments de longueurs données.
- Tâche 2 : Déterminer si trois segments de longueurs données peuvent être les trois côtés d'un triangle.

Cette deuxième tâche à propos de l’existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui finalise la recherche et la formation de triangles et donc le recours aux déplacements des segments.

## 2.2 Variables didactiques de la situation

### 2.2.1 Les longueurs des segments

a, b et c désignant les trois longueurs, trois valeurs sont associées à cette variable :

1. (a,b,a+b) : le triangle plat.
2. (a,b,c) avec $c > a+b$ : le triangle n'existe pas.
3. (a,b,c) avec $c < a+b$ ; $b < a+c$ et $a < b+c$ : les trois longueurs vérifient l'inégalité triangulaire et le triangle existe.

Dans les différentes pages du cahier « A la découverte des triangles », les longueurs des segments proposés, permettent à l'élève de rencontrer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire, et d'autres qui ne la vérifient pas. Ainsi dans certains cas le triangle existe dans d'autres il n'existe pas. Le triangle plat peut aussi être rencontré. En revanche les longueurs sont choisies de manière à ce que tous les triangles perceptibles à l'écran de l'ordinateur soient théoriquement constructibles. En effet les cas limites dans lesquels il serait possible de former perceptivement un triangle à l'écran alors que les longueurs ne vérifient pas l'inégalité triangulaire sont exclus.

### 2.2.2 Les déplacements des segments

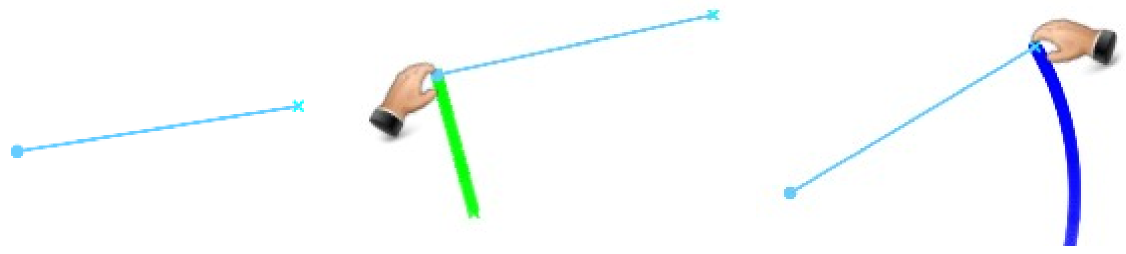
Quatre valeurs sont associées à cette variable.

1. Translation et rotation autour d'une extrémité.
2. Translation uniquement.
3. Rotation uniquement.
4. Fixes

**Les procédures de déplacement des segments (figure 5)**

La nécessité de l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle sera initiée, dans ce premier cahier, à partir de manipulations de segments de longueurs données selon deux déplacements. Les segments proposés sont asymétriques dans le mouvement ainsi qu'à l'écran. Un segment peut être manipulé selon deux déplacements.

1) Déplacement par translation.
   En attrapant le segment ou son extrémité ronde on déplace le segment par translation.
2) Déplacement par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe.
   En attrapant le segment par son extrémité cruciforme on peut le faire pivoter autour de l'extrémité ronde.

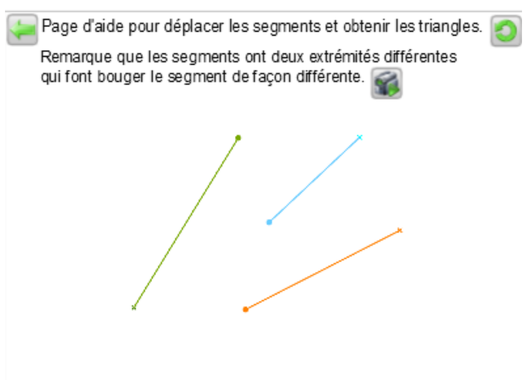


Segment asymétrique — Déplacement par translation — Déplacement par rotation

Figure 5

**Page d'aide à la manipulation des segments (figure 6)**

Sur chaque page du cahier un bouton avec une icône de bouée renvoie à une page d'aide à la manipulation des segments. Sur cette page d'aide il est indiqué que les segments ont deux extrémités différentes qui permettent de bouger le segment de deux façons différentes.




Page d'aide à la manipulation des segments

Figure 6

Il est possible d'expérimenter les deux déplacements avec les segments proposés. Il est aussi possible d'activer une animation à l'aide du bouton caméra qui va montrer successivement une vidéo de chaque déplacement.
Le retour à la page courante de travail se fait en cliquant sur le bouton retour en arrière.

### 2.2.3 Les outils

- Les outils disponibles : Segment, triangle, longueur, règle, équerre, compas, et calculette .
- Les outils non disponibles : le cercle : apparaîtra dans le 2e cahier.

Dans le cahier « A la découverte des triangles » les outils ne sont pas nécessaires. Ils sont là pour constituer une « boite à outils » à l'élève en vue du deuxième cahier dans lequel il y aura nécessité d'utiliser certains d'entre eux.

## 2.3 Les différentes rétroactions

Laborde et Capponi (1994 p 167) précisent que « c'est par des actions sur le milieu et par l'interprétation de rétroactions du milieu susceptible de fournir des éléments de validation de sa solution, dans la répétition d'essais de résolution d'un même problème, que l'élève élabore des adaptations nouvelles à la situation qui lui pose problème. »
Laborde et Laborde (2011) différencient trois types de rétroactions :

- les rétroactions de manipulation directe ;
- les rétroactions d'évaluation : réponse correcte ou incorrecte ;
- les rétroactions liées à la stratégie.

Le cahier « A la découverte des triangles » comprend surtout des rétroactions de manipulation directe d'objets à l'écran et des rétroactions d'évaluation.

### 2.3.1 Les rétroactions liées à la manipulation directe des objets à l'écran

- L'affichage continu du segment au cours du déplacement.
- Les positions successives du segment.
- La trajectoire de l'extrémité dans le déplacement par rotation.

- La superposition des extrémités de deux segments pour former un sommet du triangle.
- L'apparition d'un triangle de contour continu.
- L'apparition d'un questionnaire « oui non » en pages 4 et 5 du cahier.

### 2.3.2 Les rétroactions d'évaluation du système

Les évaluations des productions par le système doivent être demandées par l'utilisateur en activant le bouton validation. Le système ne prend en compte que les productions obtenues avec les segments existants sur chaque page. Le système ne prend pas en compte les productions réalisées en utilisant les outils de construction.

Il y a plusieurs modalités différentes de rétroactions d'évaluation du système:

- Affichage d'images :

  Images de triangles en page 3, le système valide chaque triangle formé par l'affichage d'une image du triangle dans une taille réduite proportionnellement. Un triangle est considéré comme formé si le triangle est constructible, c'est-à-dire si les longueurs des côtés vérifient l'inégalité triangulaire, et s'il est formé à l'écran avec les extrémités des segments comme sommets. Les extrémités des segments forment un sommet au sens du système si leur distance est inférieure à un millimètre.

  Images de smileys : sur la page 7 des smileys s'affichent à chaque bonne réponse en complément des phrases et des animations.

- Affichage de textes comme par exemple :

  « Je ne reconnais pas un triangle dont les sommets sont les extrémités des segments » si l'élève a tracé un triangle dont les côtés ne sont pas les segments entiers ou si les extrémités des segments ne se superposent pas assez précisément pour former les sommets.

  « Tu as déjà trouvé ce triangle» si l'élève reproduit un triangle déjà obtenu.

  « BRAVO » ou « Bonne réponse »

- Lancement d'animations :

  Dans les cas où les segments manipulés par l'élève ne permettent pas de former un triangle une animation est proposée. Les deux plus petits segments tournent autour des extrémités du plus grand. Les extrémités libres qui tournent laissent apparaître une trace pour visualiser qu'on ne peut pas former le 3e sommet du triangle. (figure 7)

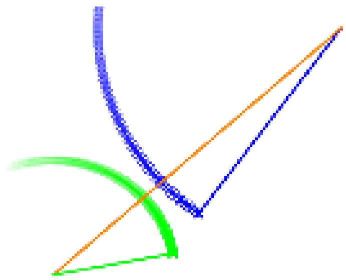


Figure 7

## 2.4 Description des pages 3 à 7 du cahier

Nous allons décrire les cinq pages d'activités pour l'élève, avec les choix de valeurs de variables didactiques retenues. Les autres choix de valeurs de variables et leurs conséquences sur les stratégies sont présentées en annexe 1.

### 2.4.1 Page 3. Une première tâche : former un triangle (figure 8)

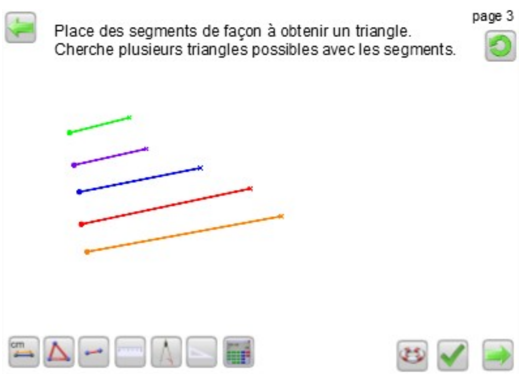



Figure 8

Cinq segments de longueurs données sont affichés sur la page. Il est demandé :

- de placer des segments de façon à obtenir un triangle ;
- de chercher plusieurs triangles.

Les cinq segments peuvent être déplacés selon les deux déplacements, par translation et rotation autour de l'extrémité ronde.

En bas de la page, comme sur toutes les autres pages, sont présents les boutons suivants :

- les sept boutons outils (longueur, triangle, segment, règle, compas, équerre, calculatrice) ;
- le bouton avec une icône de bouée qui permet d'afficher la page d'aide à la manipulation des segments ;
- le bouton avec une icône de « coche » qui permet de demander l'évaluation de la production par le système ;
- le bouton avec une icône de « flèche droite » qui permet de passer à la page suivante.

D'autres boutons sont aussi présents sur toutes les pages du cahier :

- le bouton avec une icône de « flèche gauche » qui permet de revenir à la page précédente ;
- le bouton avec une icône de « flèche ronde » qui permet de réinitialiser les positions des segments sur la page.

<u>Les objectifs de cette page.</u>
Cette première page permet d'entrer dans la situation, de découvrir les différents outils disponibles, de manipuler des segments selon les deux déplacements, de former plusieurs triangles, d'apprécier la précision nécessaire à la reconnaissance du triangle par le système, de développer une stratégie efficace pour former un triangle.

**Description des différentes stratégies pour former un triangle**

**Stratégie "ajustements successifs"**

- Sélectionner un premier segment et le déplacer dans la zone libre.
- Sélectionner un deuxième segment et le déplacer de manière à positionner une de ses extrémités sur une des extrémités du premier segment en ayant anticipé la place nécessaire pour le troisième segment.
- Sélectionner le troisième segment et le déplacer pour le placer dans l'espace prévu.

– Ajuster la position de chaque segment petit à petit par manipulation des extrémités ou du segment jusqu'à ce que les extrémités des segments soient précisément superposées pour former le triangle.

La figure 9 illustre une telle stratégie.

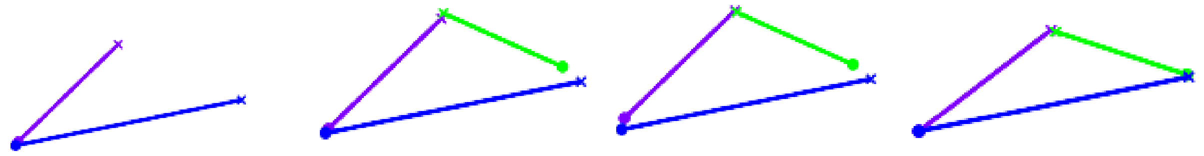


Figure 9

<u>Déplacements mobilisés dans une telle stratégie</u>

Dans cette stratégie par ajustements successifs, les deux déplacements, par translation et par rotation, sont utilisés en alternance. Une fois les trois segments globalement en place, ils sont déplacés par petits mouvements, une fois un puis l'autre dans le but de faire coïncider simultanément les deux derniers sommets.

Ainsi cette stratégie, qui permet de former le triangle, est coûteuse en déplacements. Elles nécessite, la plupart du temps, un grand nombre de déplacements successifs pour former le triangle.

**Stratégies "ligne brisée"**

– Choisir et sélectionner un premier segment.
– Le déplacer dans la zone libre.
– Choisir et sélectionner un deuxième segment et le déplacer de manière à positionner une de ses extrémités sur une des extrémités du premier segment. Il y a alors deux options, faire coïncider soit l'extrémité cruciforme soit l'extrémité ronde du nouveau segment avec une extrémité du segment déjà en place.
– Choisir et sélectionner un troisième segment et procéder de même que pour le deuxième segment. Comme précédemment il est possible de placer l'extrémité ronde ou l'extrémité cruciforme de ce troisième segment sur une des extrémités libres de la ligne brisée. (figures 10 et 11)

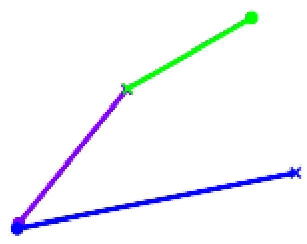


Figure 10
Ligne brisée ayant au moins une extrémité ronde

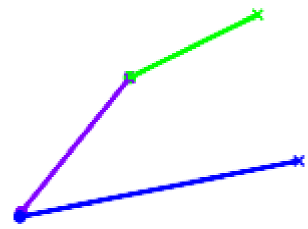


Figure 11
Ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes

On peut distinguer quatre stratégies "ligne brisée" différentes :

- La stratégie "ligne brisée" par translation uniquement avec au moins l'une des extrémités ronde : Lbto. Cette stratégie ne permet pas de former le triangle.
- La stratégie "ligne brisée" par translation uniquement avec les deux extrémités cruciformes : Lbtx . Sans mobiliser le deuxième déplacement pour faire pivoter les deux extrémités de la ligne brisée le triangle ne peut être formé.
- La stratégie "ligne brisée" mobilisant les deux déplacements avec au moins l'une des extrémités ronde : Lbo. (Figure 10) Cette stratégie ne permet pas de former le triangle.
- La stratégie "ligne brisée" mobilisant les deux déplacements avec les deux extrémités cruciformes : Lbx. (Figure 11) Cette stratégie permet de former le triangle.

Déplacements mobilisés pour former une ligne brisée :

Une ligne brisée peut être obtenue en déplaçant les segments uniquement par translation. Elle peut aussi être obtenue en mobilisant les deux déplacements. Elle ne peut par contre absolument pas être formée en utilisant uniquement le déplacement par rotation.

Ainsi la seule stratégie "ligne brisée" qui permet de former un triangle, est celle qui mobilise les deux déplacements. De plus pour former le triangle une fois la ligne brisée obtenue, le déplacement par rotation est obligatoire.

Une stratégie plus efficace : la stratégie LBx

Avec trois segments, il est possible de former six lignes brisées, dont les deux extrémités sont cruciformes qui diffèrent en fonction de l'ordre des segments. Les lignes brisées avec le segment le plus long placé entre les deux autres sont plus efficaces. Cette configuration permet d'anticiper plus facilement la position du troisième sommet du triangle. Dans cette configuration le troisième sommet est dans la bande centrale de la ligne brisée. (Figure 12)

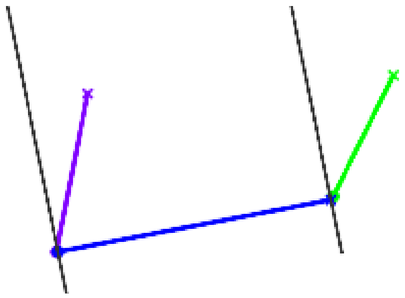


Figure 12

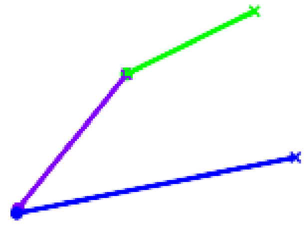


Figure 13

Dans le cas de la figure 13, ce n'est pas le plus grand segment qui est au centre de la ligne brisée, et il est plus difficile d'anticiper la position du troisième sommet.
Ainsi dans des configurations comme la figure 13 il y aura plus de tâtonnement et plus de déplacements que dans les cas de la figure 12 pour former le triangle.
Cette stratégie "ligne brisée" dont les deux extrémités sont cruciformes avec le plus grand segment entre les deux autres sera notée LBx.

Dans toute stratégie "ligne brisée" valide (Lbx ou LBx) les deux déplacements, par translation et par rotation, sont sollicités. Le déplacement par rotation est indispensable pour former un triangle à partir d'une ligne brisée. C'est ce déplacement par rotation qui amènera l'usage du compas dans la construction géométrique du triangle.
L'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements contrairement aux manipulations dans un environnement sensible, avec des pailles ou des baguettes par exemple, dans lequel les déplacements sont réalisés simultanément.

**Stratégie "Intersection"**

- Sélectionner un premier segment.
- Le déplacer dans la zone libre.
- Sélectionner un deuxième segment et le déplacer de manière à positionner une de ses extrémités sur une des extrémités du premier segment.
- Sélectionner un troisième segment, le déplacer et le positionner de manière à obtenir une zone triangle à l'intérieur des segments.

Cette stratégie permet d'obtenir un triangle dont les côtés ne sont pas les segments entiers comme sur les figures 14 et 15.

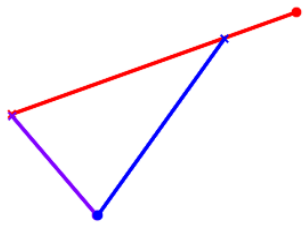


Figure 14

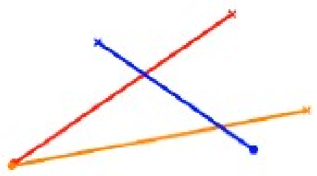


Figure 15

<u>Déplacements mobilisés dans cette stratégie</u>

Des figures comme les figures 14 et 15 peuvent être obtenues en mobilisant les deux déplacements translation et rotation.

Les triangles obtenus avec cette stratégie ne correspondent pas aux triangles reconnus par le système. En effet dans cette situation il s'agit de former des triangles dont les sommets sont les extrémités des segments.

**Stratégie "figures complexes"**

Lorsque plus de trois segments sont disponibles il est possible de former une figure complexe telle que la figure 16 ci-dessous dans laquelle plusieurs triangles sont formés. Cette figure complexe peut être obtenue soit en utilisant la stratégie par ajustement successifs, soit en utilisant la stratégie "ligne brisée" avec les extrémités de la ligne brisée cruciformes.

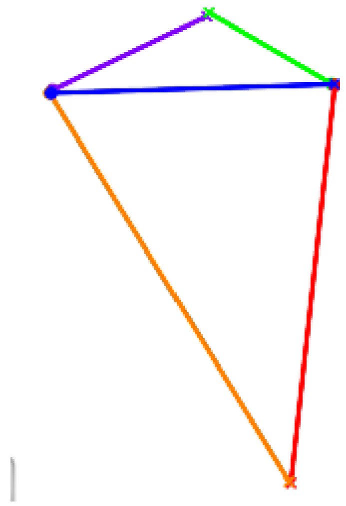


Figure 16

**Stratégies "Outils"**

En bas de page, sur toutes les pages, sont disponibles un certain nombre d'outils classiques de la géométrie dynamique : les outils segment, triangle, longueur, règle, compas, équerre et calculatrice. Ces outils permettent par exemple de faire des tracés supplémentaires, de mesurer les longueurs des segments proposés, de construire des triangles. Aucune production réalisée avec les outils ne sera reconnue donc évaluée par le système.

Voici quelques utilisations des outils pour former un triangle.

1) Utiliser l'outil triangle pour tracer un triangle.
   L'outil triangle permet de tracer un triangle. Ce triangle est robuste par rapport à la propriété « être un triangle » mais les longueurs de ses côtés ne seront pas invariantes au cours du déplacement.
2) Utiliser l'outil segment pour tracer un triangle.
   L'outil segment peut être utilisé pour tracer un premier segment puis un deuxième à partir d'une extrémité du premier puis un troisième à partir de l'extrémité libre du deuxième qui a aussi pour extrémité l'extrémité restée libre du premier segment. Le triangle ainsi obtenu est similaire à celui obtenu avec l'outil triangle, il est robuste au sens du triangle mais les longueurs des côtés sont modifiées au cours du déplacement.
   Il est aussi possible d'utiliser l'outil segment pour tracer un triplet de segments

avec lesquels former un triangle. Le triangle obtenu est un triangle mou. Il ne résiste pas au déplacement, il se défait lors du déplacement d'un côté ou d'un sommet.

3) Utiliser les outils règle et compas pour effectuer la construction d'un triangle comme dans l'environnement papier-crayon.
   Un triangle robuste peut être obtenu par construction à l'aide des outils règle et compas.

#### 2.4.2 Pages 4 et 5. Une deuxième tâche : trois segments de longueurs données peuvent ils être les trois côtés d'un triangle ? (figures 17 et 18)

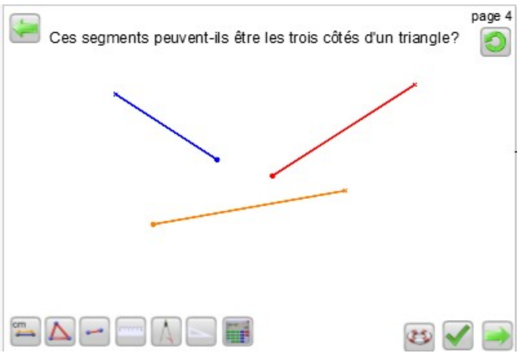



Figure 17

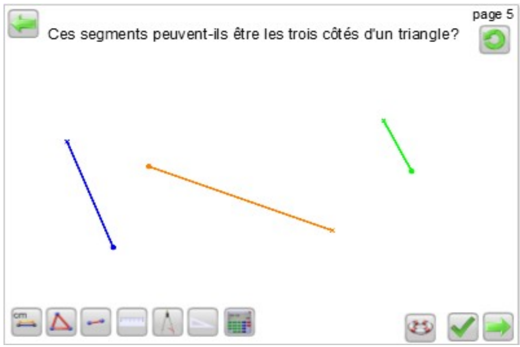



Figure 18

Dans ces deux pages il s'agit de savoir s'il est possible d'obtenir un triangle avec les trois segments de longueurs données proposés sur chaque page. Dans le premier cas, page 4 (figure 17), le triangle est constructible, les trois longueurs des segments vérifient l'inégalité triangulaire alors que dans le deuxième cas, page 5 (figure 18), le triangle n'existe pas, la longueur du segment orange est supérieure à la somme des longueurs bleue et verte. Il est possible, sur ces deux pages, de manipuler les trois segments selon les deux déplacements, translation et rotation autour de l'extrémité ronde.

Sur ces deux pages, une question, avec comme possibilité de réponse oui ou non s'affiche dès qu'une ligne brisée est formée par l'élève. L'évaluation du système porte à la fois sur la figure formée par l'élève et la réponse à la question. Ce qui est attendu par le système et qui est considéré comme significatif, c'est la configuration obtenue par l'élève à la suite des différentes manipulations des segments associée à la réponse à la question. Page 4 il est attendu que le triangle soit formé et que la réponse à la question soit oui. Page 5 il est attendu qu'une ligne brisée soit formée et que la réponse à la question soit non.

Les objectifs de ces deux pages

Ces deux pages permettent de poursuivre le travail de manipulation des segments tel qu'engagé page 3. Le double déplacement est autorisé dans le but de mettre au point la stratégie gagnante pour former un triangle :

- former une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes;
- faire pivoter les extrémités de la ligne brisée pour observer s'il est possible de former le troisième sommet du triangle.

La page 5 permettra en plus de constater qu'avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle.

**Description des différentes stratégies**

Nous rappelons que sur ces deux pages 4 et 5 les deux déplacements par translation et par rotation pour chaque segment sont possibles.

**Stratégies former le triangle**

Cas des triangles constructibles

Une des stratégies "ajustements successifs ", ou "ligne brisée " mobilisant les deux déplacements avec les deux extrémités cruciformes, Lbx, ou LBx si le plus grand segment est placé entre les deux autres, décrites précédemment peuvent être utilisées.

Cas où le triplet de segments ne permet pas de former un triangle

On peut distinguer deux configurations de ligne brisée :

- Figure 19, stratégie LBx, la ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes avec le segment le plus long placé entre les deux autres permet de visualiser en faisant pivoter les extrémités qu'elles ne se rencontreront jamais donc qu'il n'est pas possible de former le troisième sommet du triangle.

- Figure 20, stratégie Lbx, une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes sans que le segment le plus long soit placé entre les deux autres. Cette configuration fait appel à l'inégalité triangulaire en acte : la somme des longueurs des deux petits segments est inférieure à la longueur du grand segment donc le triangle n'existe pas.

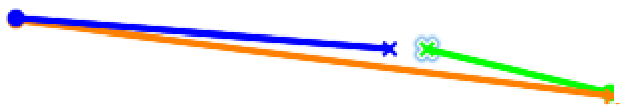


Figure 19

Figure 20

**Stratégies "comparer" la somme des longueurs des petits segments avec celle du plus grand**

Cette stratégie consiste à placer les deux petits segments parallèlement au grand pour comparer les longueurs comme sur les figures 21, 22, 23 et 24.

Cas où le triangle existe

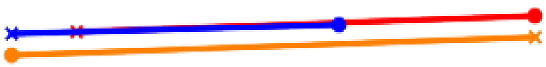


Figure 21

Figure 22

Cas ou le triangle n'existe pas

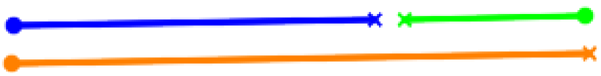


Figure 23

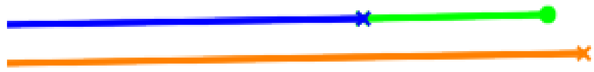


Figure 24

Il y deux façons de comparer les longueurs :

- Stratégie Cal : aligner une extrémité de chaque segment court avec les extrémités du plus grand segment (figure 21 et 23)

- si les deux segments courts se superposent le triangle peut être formé ;
- si les deux segments courts ne se rencontrent pas le triangle ne peut être formé.

– Stratégie Cit : juxtaposer les deux segments courts et comparer la longueur totale à la longueur du grand segment (figure 22 et 24)
    - si la somme des longueurs des petits segments est supérieure à la longueur du grand segment le triangle peut être formé ;
    - si la somme des longueurs des petits segments est inférieure à la longueur du grand segment le triangle ne peut pas être formé.

Dans ces différentes stratégies, "ligne brisée" ou "comparer ", l'inégalité triangulaire est présente en acte. Sur chaque figure il y a confrontation de la longueur du grand segment avec les deux autres longueurs.

**Stratégies "outils"**

<u>Tracer ou construire un triangle.</u>

Il est possible d'utiliser les outils à disposition pour tracer ou construire un triangle comme décrit précédemment.

<u>Utiliser l'inégalité triangulaire.</u>

Il est aussi possible ici d'utiliser les outils pour répondre à la question sans former le triangle. Par exemple en utilisant l'inégalité triangulaire. L'outil longueur peut permettre de mesurer la longueur de chaque segment. Avec les longueurs il est possible de vérifier l'inégalité triangulaire et de répondre s'il est possible de former ou non un triangle avec les trois segments.

### 2.4.3 Page 6 . Seul le déplacement par translation est possible (figure 25)

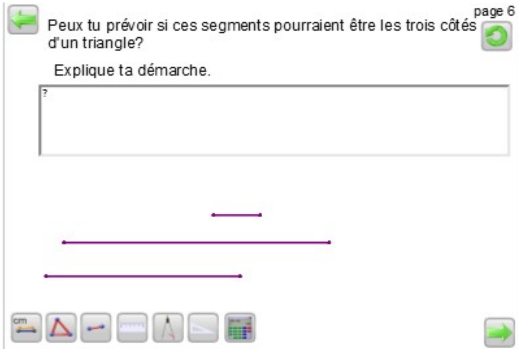



Figure 25

Les trois segments, dont les deux extrémités sont rondes, de longueurs fixes sont tous parallèles et ne peuvent plus qu'être déplacés par translation. Ils ne peuvent plus pivoter autour d'une de leurs extrémités. Il s'agit de savoir s'il est possible de prévoir si les segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Il s'agit d'une situation d'anticipation. Avec pour seul déplacement des segments la translation, il n'est donc plus possible de former le triangle. Il faut donc mettre en œuvre une autre stratégie. La démarche et la stratégie mise en œuvre doivent être expliquées dans le cadre prévu à cet effet. Aucune évaluation de la production n'est faite par le système sur cette page.

A chaque réinitialisation de la page le système propose trois nouveaux segments de longueurs différentes que précédemment. Ces longueurs sont générées de manière aléatoire. Il est donc possible d'observer plusieurs cas de figures avant de mettre en place une stratégie de réponse.

<u>Les objectifs de cette page</u>
Cette page permet de mettre en place des stratégies d'anticipation pour reconnaître dans quels cas il est possible de former un triangle avec trois segments de longueurs données et dans quels cas cela n'est pas possible. L'inégalité triangulaire en acte est sous-jacente à certaines de ces stratégies.

**Description des différentes stratégies**

**Stratégies "comparer" la somme des longueurs des petits segments avec celle du plus grand**

Ces stratégies consistent à déplacer par translation les deux petits segments pour les placer parallèlement au grand pour comparer les longueurs comme sur les figures 21, 22, 23 et 24.

**Stratégie "déplacement mental" des segments**

Elle consiste à répondre à l'aide d'une image mentale du triangle. Si les trois longueurs des segments sont proches l'une de l'autre le triangle est constructible à coup sur. Cette stratégie est moins sûre lorsqu'une des trois longueurs est beaucoup plus petite ou beaucoup plus grande que les deux autres.

**Stratégies "outils"**

Comme précédemment il est possible d'utiliser les outils à disposition pour mesurer des longueurs, faire des tracés et constructions de triangles comme décrit ci dessus.

## 2.4.4 Page 7 (figure 26)

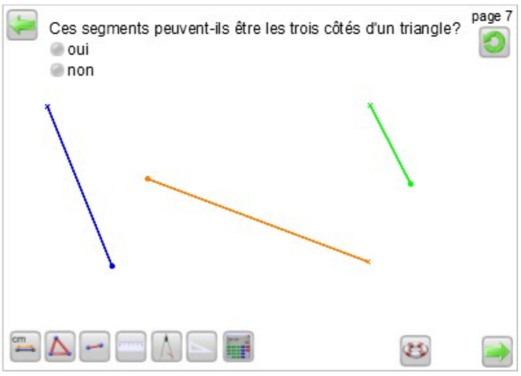



Figure 26

Enfin, sur la dernière page il s'agit à nouveau de savoir s'il est possible d'obtenir un triangle avec trois segments de longueurs données proposés sur la page. Le questionnaire « oui non » est présent à l'ouverture de la page. Plusieurs triplets de segments peuvent être affichés en pressant le bouton réinitialiser. Les triplets de segments sont générés aléatoirement.

Les segments peuvent à nouveau être déplacés selon les deux déplacements : par translation et par rotation autour de l'extrémité ronde.

Cette page regroupe les cas des pages précédentes :

1. Le triangle est constructible ou non, il peut éventuellement être plat.
2. Les deux déplacements peuvent être utilisés.
3. Les stratégies pouvant être utilisées sont toutes celles des pages précédentes :
   - former une ligne brisée permettant de faire pivoter les extrémités ;
   - comparer la somme des longueurs des petits segments avec le plus grand ;
   - utiliser les outils ;
   - répondre grâce à une image mentale ;
   - répondre au hasard.

<u>Les objectifs de la page</u>

Cette page permet de revenir sur les stratégies mises en œuvre dans les pages précédentes. Il est possible ici de mettre à l'épreuve les différentes stratégies mises en œuvre dans les pages précédentes et d'établir des comparaisons. La présence du questionnaire de réponse « oui non » à l'ouverture de la page autorise les réponses au hasard sans manipulation des segments. Cette stratégie est économique et permet une bonne réussite de la tâche. Pour l'instant nous ne savons pas comment surmonter cette difficulté et la seule issue actuelle est de supprimer le questionnaire en « oui non ».

### 2.4.5 La génération aléatoire des segments

Sur les pages 6 et 7 les segments sont générés de manière aléatoire. A chaque réinitialisation de la page le système calcule trois nouvelles longueurs pour les segments. La plus petite longueur est comprise entre 1,5 cm et 4,5 cm, la deuxième longueur est comprise entre 4 cm et 10 cm et enfin la troisième longueur est obtenue en ajoutant une valeur aléatoire comprise entre 2 et 4 à la deuxième longueur. Dans cette génération aléatoire des longueurs, les segments sont toujours disposés de la même manière sur la page. Dans la disposition de la page 6 c'est toujours le plus grand segment qui est positionné entre les deux autres, le plus petit est toujours celui du dessus. Dans la disposition de la page 7 le segment orange est toujours le plus grand, et le vert est toujours le plus petit.

De plus, si la différence entre la plus grande longueur et la somme des deux autres longueurs est comprise entre 0 cm et 0,5 cm une nouvelle génération de trois longueurs est enclenchée. Ceci permet d'éviter les cas pour lesquels les longueurs des segments ne vérifient pas l'inégalité triangulaire mais qui paraîtrait perceptivement constructibles à l'interface de l'ordinateur.

## 2.5 Les autres pages présentes dans le cahier « A la découverte des triangles » version 22

### 2.5.1 Page d'accueil (figures 27 et 28)

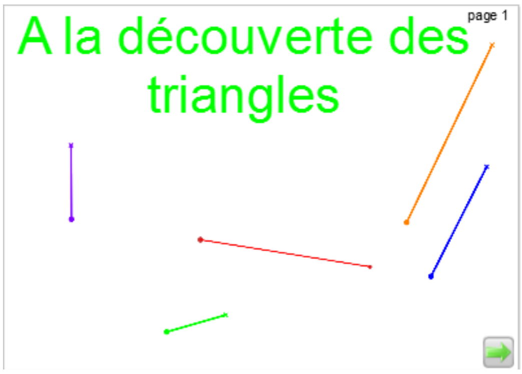



Figure 27

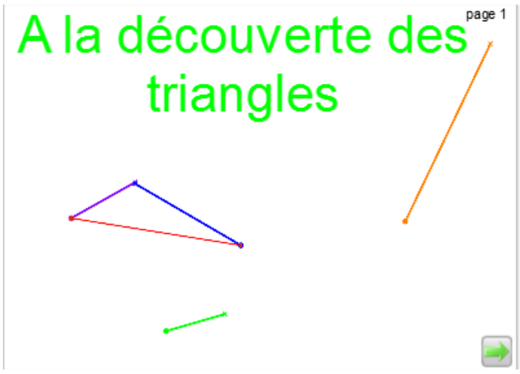



Figure 28

A l'ouverture du cahier la page d'accueil est affichée. Sur cette page une animation démarre avec trois des cinq segments proposés. Un triangle est formé. Les deux autres segments restent à leur position initiale.

### 2.5.2 Deux pages pour interroger l'élève (figures 29 et 30)

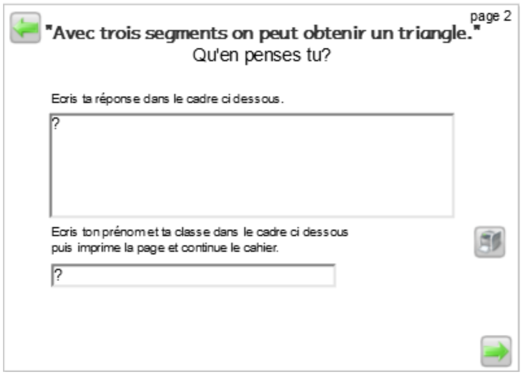



Figure 29

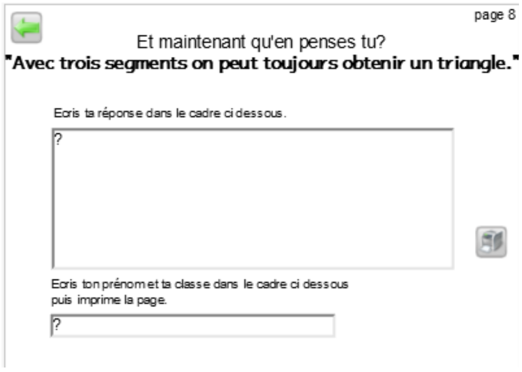



Figure 30

Avant que l'élève ne démarre les pages d'activités on lui demande page 2 : « Avec trois segments on peut obtenir un triangle. » Qu'en penses tu ?

Après que l'élève ait fait les cinq pages d'activités décrites ci dessus on le réinterroge page 8 : Et maintenant qu'en penses tu ? « Avec trois segments peut-on toujours obtenir un triangle ? »

Les différentes possibilités de réponses des élèves.

| Réponse à la page 2 | Réponse à la page 8 | |
|---|---|---|
| Oui | Non | Dans ce cas les connaissances des élèves ont évoluées au cours des pages du cahier. L'élève a pris conscience qu'avec trois segments on ne peut pas toujours obtenir un triangle. |
| Oui | Oui | Les connaissances des élèves n'ont pas changé. Les configurations des triangles inconstructibles n'ont pas permis de faire évoluer les connaissances des élèves. |
| Non | Non | Les élèves étaient conscients avant de traiter les tâches du cahier qu'avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle. |
| Non | Oui | Cas de figure improblable. |

## 2.6 Conclusion de l'analyse a priori

**Quatre points importants**

De cette analyse nous voulons faire ressortir quatre points importants qui sont apparus dans l'étude des deux tâches du cahier « A la découverte des triangles » : former un triangle et déterminer si trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle.

1) La dissociation des deux mouvements translation et rotation dans la manipulation des segments est enrichissante.
   La manipulation des segments dans l'environnement informatique Cabri Elem impose la dissociation des deux mouvements par translation et par rotation. Ces deux déplacements sont toujours disjoints dans l'environnement informatique proposé par le cahier. L'élève choisi de translater le segment ou de le faire pivoter autour d'une extrémité qui reste fixe. Lors de manipulations d'objets sensibles, comme des pailles ou des baguettes, pour former un triangle les deux mouvements sont réalisés simultanément. La rotation n'est donc pas mise en évidence.

2) La rotation est indispensable pour former un triangle.
   Nous avons montré que pour former un triangle reconnaissable par le système on peut procéder par ajustements successifs ou déplacer les segments et les associer par leurs extrémités pour obtenir une ligne brisée, puis faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée pour former le troisième sommet du triangle. Quelle que soit la stratégie, la rotation des segments est obligatoire pour former un triangle.

3) La ligne brisée est la stratégie gagnante efficace pour former un triangle.
   La ligne brisée est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle. Les manipulations des segments pour former la ligne brisée puis le triangle sont une reconstruction du triangle qui repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D à la ligne brisée 1D.

4) Les critères d'existence ou non du triangle apparaissent.

   L'existence ou non du triangle problématise la recherche de la formation des triangles et donc le recours aux déplacements des segments. De plus la manipulation des segments est plus efficace lorsqu'elle donne au grand segment un rôle particulier comme dans la stratégie "ligne brisée" avec le grand segment placé entre les deux autres LBx. Cette stratégie qui, est la plus efficace pour former le triangle, est aussi très efficace pour montrer la non existence d'un triangle. C'est cette stratégie qui sera transposée dans l'environnement papier-crayon pour la construction d'un triangle à la règle et au compas.

**Rôle des rétroactions**

Les rétroactions renvoyées par l'environnement de mathématiques dynamiques jouent un rôle dans la régulation des apprentissages :

– Les rétroactions relatives aux actions de manipulations directes des segments selon un double déplacement par translation et par rotation autour d'une des extrémités, permettent l'élaboration d'une stratégie passant par la formation d'une ligne brisée ayant les deux extrémités cruciformes qui pourront pivoter pour former le triangle. Lors de ces manipulations, le contrôle de l'utilisateur se fait sur les positions successives du segment côté du triangle qui est déjà là mais pas dans la bonne position. Comme Laborde et Marcheteau (2009) nous pouvons dire que les manipulations des segments dans l'environnement Cabri Elem, servent à produire la solution et fournissent des rétroactions porteuses d'informations. Elles constituent un milieu qui engage l'élève dans une démarche mathématique qui lui permettra de s'approprier la nécessité de la rotation dans la phase de formation d'un triangle et qui amènera l'usage du compas dans les constructions géométriques des triangles.

– La restriction du déplacement des segments à la translation uniquement oblige à s'adapter à une nouvelle situation. Il n'est plus possible de former le triangle pour répondre, il faut mettre en place une autre stratégie. Cette nouvelle stratégie qui est une adaptation au milieu, sera porteuse de nouvelles connaissances. C'est au travers de ces stratégies que l'inégalité triangulaire en acte peut émerger.

- L'animation qui s'affiche lorsque le triplet de segments ne permet pas de former un triangle permet de visualiser qu'il est effectivement impossible de former un triangle avec les trois segments proposés. La trace des extrémités des segments qui tournent favorise la visualisation du fait que les extrémités ne se rencontrent jamais et révèle les cercles sous-jacents à la construction du triangle à la règle et au compas qui seront mis en évidence dans le deuxième cahier.

# 3. Expérimentation et résultats

## 3.1 Le scénario

Le cahier « A la découverte des triangles » a été testé avec des élèves d'une classe de CM2. L'enseignante a engagé sa séquence sur la construction géométrique du triangle à la règle et au compas à partir de ce cahier. Quatorze élèves de la classe ont participé à l'expérimentation. Les autres élèves de la classe on fait le cahier un autre jour avec leur enseignante.

Durant l'expérimentation, sept élèves étaient présents en même temps dans une salle avec deux expérimentateurs. L'enseignante était dans sa salle, voisine de la salle d'expérimentation, avec les autres élèves de la classe qui effectuaient un autre travail. Elle est venue deux fois quelques minutes voir si tout allait bien. Chaque élève était seul devant un ordinateur. Les échanges entre eux en chuchotant étaient autorisés.

Pour chaque élève le cahier a été enregistré à la fin de son travail et une capture vidéo de toutes ses actions a été réalisée grâce au logiciel Camtasia. De plus, deux vidéos au camescope ont été réalisées. Sur chacune on voit deux élèves avec leurs deux ordinateurs et on visualise le contenu des deux écrans.

Avant que ne démarre l'expérimentation l'enseignante avait expliqué à toute la classe qu'ils allaient faire un travail sur les triangles, qu'il s'agissait d'un petit cahier informatique. Elle avait aussi expliqué quelques aspects du fonctionnement du cahier en le projetant sur son TNI, présentant des boutons : page suivante, page précédente, réinitialisation de la page, et demande d'évaluation du travail. Les autres boutons présents sur les différentes pages n'ont pas été présentés. Rien sur l'aspect mathématique de la situation n'a été présenté aux élèves avant l'expérimentation.

## 3.2 Le déroulement

Les élèves sont tous entrés dans l'activité. Ils ont rapidement produit des actions à destination de la machine : déplacer les segments proposés sur la page, tester les différents outils. Les quatorze élèves ont eu le temps de traiter toutes les pages du cahier. Ils y ont passé entre 15 et 30 minutes chacun.

Aucun élève n'a utilisé le bouton aide qui permet d'accéder à une page d'aide pour la manipulation des segments. Certains élèves sont revenus sur la page d'accueil pour voir l'animation qui forme la ligne brisée et le triangle. Peu d'élèves ont fait le cahier de manière linéaire, dans l'ordre de succession des pages. La plupart ont fait des retours en arrières pour modifier leurs productions précédentes en fonction de ce qu'ils faisaient sur une page suivante.

## 3.3 Les observables

Nous nous intéresserons dans un premier temps aux trois points suivants.

- Avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle.
  - Les élèves étaient-ils conscient de cela avant de travailler sur le cahier ?
  - Les élèves ont-ils découvert cette propriété en traitant les tâches du cahier?
  - Les élèves ont-ils fait apparaître l'inégalité triangulaire en acte, ou d'autres conceptions dans leurs réponses ?

- Amener l'usage du compas dans la construction géométrique du triangle.
  - Les élèves ont-ils utilisés le double déplacement des segments, par translation et par rotation ?
  - Pour former un triangle à partir des segments proposés, les élèves ont-ils mis en place les stratégies décrites dans l'analyse a priori :
    - Lbx : former une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes et donc peuvent pivoter ;
    - LBx : former une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes avec le segment le plus long placé entre les deux autres.

- Les élèves qui ont fait apparaître l'inégalité triangulaire en acte dans leurs réponses page 6 et 8 ont-ils aussi favorisé la stratégie LBx par rapport à la stratégie Lbx ?

Dans un deuxième temps nous analyserons d'autres observables.

- Une figure complexe : former une figure avec les cinq segments proposés sur la première page.
- L'utilisation des outils disponibles.
- Les réactions aux rétroactions. Comment sont elles prises en compte par l'élève ?

## 3.4 Analyse des productions des élèves

Un tableau de synthèse des différentes productions est fourni en annexe 2.

### 3.4.1 Avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle

Dans le cadre de cette recherche, nous avons interrogé les élèves avant qu'ils travaillent sur le cahier et après avoir traité les deux tâches du cahier.

- Avant la première page d'activité, nous avons demandé à l'élève : Avec trois segments on peut obtenir un triangle. Qu'en penses tu ?

Tous les élèves répondent que oui avec trois segments ont peut former un triangle.

- A la fin du cahier, les élèves étaient réinterrogé. Et maintenant qu'en penses tu ? Avec trois segments on peut toujours obtenir un triangle.

Seule une élève répond oui et tous les autres répondent non.

Les explications du non sont les suivantes :

- Un élève (élève 12) explique : « Dans le 2e exercice il y avait 3 segments et sa ne marcher pas ».
- Un élève (élève 2) justifie sa réponse à l'aide de l'inégalité triangulaire en acte : « Les deux petits segments doivent être plus grand que le grand segment ».

- Cinq élèves font apparaître un autre argument dans leur explication : « Parfois un segment est trop grand ou trop petit pour faire un triangle ».
- Les autres élèves ne justifient pas leur réponse.

L'inégalité triangulaire en acte

Nous avons aussi analysé les écrits des élèves page 6 qui nous renseignent aussi sur les conceptions des élèves liées à l'inégalité triangulaire. Page 6 du cahier, les trois segments sont parallèles et ne peuvent être déplacés que par translation. L'élève ne peut donc plus former le triangle, puisque le déplacement par rotation est indispensable pour former un triangle. On demande à l'élève s'il peut prévoir si ces segments pourraient être les trois côtés d'un triangle. L'élève est invité à expliquer sa réponse.

Quatre élèves expliquent leur démarche en faisant référence à l'inégalité triangulaire en acte. Ils expriment un lien entre les deux petits segments et le plus grand.

Élève 2 : « Les deux petits segement doive etre plus grand que le grand segement. »

Élève 5 : « Il faut que le petit et le 2e plus grand des segments doivent atteindre le plus grand. »

Élève 6 : « On doit placer le petit segment puis on colle le moyen avec le petit, puis on colle le grand avec le petit et on colle le grand avec le moyen. »

Élève 13 : « En mettant le grand à côté du moyen et en rassemblant le petit. »

Un autre argument

En analysant les réponses des élèves page 6 sept élèves justifient que l'on ne peut pas nécessairement obtenir un triangle avec trois segments en expliquant :

Élève 3 : « Non on ne peux pas il en a un qui est trop petit. »

Élève 4 : « On ne peut pas faire un triangle avec ces segments car il y a un segment trop petit et les autre sont bien plus grand. »

Élève 8 : « il faut qui ont à pe près les même mesure. »

Élève 9 : « Ils ne peuvent pas être les trois côtés d'un triangle car il y en a un qui est trop grand un qui est tout petit, un qui et moyen. »

Élève 10 : « Non le premier segment et beaucoup trop petit pour les deux autres. »

Élève 11 : « Non il y a des très plus grand et plus petits donc on peu pas obtenir un triangle. »

Élève 12 : « Non aucun segment ont la même longueur. »

Ces élèves utilisent un argument sur les longueurs des trois segments, et même il s'agit de longueurs relatives mais ce n'est pas le bon argument qui est complexe à exprimer.

RESULTATS

Avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle.

- avant de traiter le cahier : 0 élèves sur 14 ;
- après le cahier : 13 élèves sur 14.

Présence de l'inégalité triangulaire en acte ou d'autres arguments dans les réponses :

- inégalité triangulaire en acte : 4 élèves sur 14
- un segment trop petit ou trop grand : 7 élèves sur 14
- aucune explication : 3 élèves sur 14.

Ainsi nous pouvons dire que les élèves n'étaient pas conscients avant de traiter le cahier qu'avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle. Le cahier a permis à la majorité d'entre eux de découvrir cette propriété.

Nous avons pu observer que si les deux déplacements des segments sont autorisés la plupart des élèves essaient de former le triangle pour répondre à la question : Ces segments peuvent-ils être les trois côtés d'un triangle ?

Dans une situation nécessitant une anticipation, lorsqu'il s'agit de prévoir si les segments proposés pourraient être les trois côtés d'un triangle sans pouvoir former le triangle, nous avons pu observer que quatre élèves font apparaître l'inégalité triangulaire en acte. Dans une telle situation, la moitié des élèves fait appel à un autre argument : si un segment est trop petit ou un segment est trop grand par rapport aux deux autres il n'est pas possible de former le triangle. Cet argument pourra être mis en défaut par des constructions de triangles ayant un côté beaucoup plus petit ou plus long que les deux autres. Il sera aussi mis en défaut lors de l'apprentissage de l'inégalité triangulaire en classe de 5e de collège.

### 3.4.2 La manipulation des segments et la mise en œuvre d'une stratégie gagnante : former une ligne brisées dont les deux extrémités sont cruciformes, pour former un triangle

Le double déplacement

Tous les élèves découvrent les deux déplacements possibles de chaque segment : l'extrémité ronde permet de déplacer le segment par translation alors que l'extrémité cruciforme permet de le faire pivoter autour de l'autre extrémité qui reste fixe. Aucun n'utilise l'aide pour cela. La plupart découvre ces deux déplacements seuls en essayant de bouger le segment en l'attrapant par l'une ou l'autre des extrémités. Certains l'observent sur l'écran de leur voisin.

Stratégies mises en places pour former un triangle

Former le triangle par ajustements successifs

Durant l'expérimentation, quatre élèves (les élèves 7, 8, 13 et 14) ont utilisé la stratégie par ajustements successifs pour former un triangle sur toutes les pages du cahier. Les segments sont aussi bien déplacés par translation que par rotation. Les deux déplacements s'alternent jusqu'à obtenir le triangle.

Pour ces quatre élèves nous avons pu observer que cette stratégie donne souvent un triangle pour lequel les extrémités des segments ne sont pas bien superposées. Dans ce cas le système ne reconnaît pas le triangle et renvoie à l'élève une rétroaction sous forme de phrase lui demandant de poursuivre sa recherche pour obtenir un triangle dont les sommets sont les extrémités des segments. Cette stratégie est coûteuse en temps car le déplacement d'un segment entraîne souvent le déplacement d'un autre et ainsi de suite.

Former une ligne brisée Lbx ou LBx puis la fermer pour obtenir le triangle

Les deux déplacements par translation et rotation des segments permettent de former une ligne brisées dont les deux extrémités sont cruciformes ce qui permet de faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée pour former le triangle. En faisant pivoter les segments extrêmes le troisième sommet du triangle est formé.

Sept élèves ont mis en place cette stratégie pour former les triangles. Parmi eux les élèves 1, 2, 4, 5, 6 et 9 mettent en place cette stratégie dès la première page d'activité (page 3) et la maintiennent sur toutes les autres pages. L'élève 10 forme dans un premier temps des lignes brisées avec une ou deux extrémités rondes puis il met en place une procédure systématique : mettre l'extrémité ronde d'un segment sur l'extrémité cruciforme du précédent. (figure 31). Puis pour former le triangle il tourne un des segments pour obtenir une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes.

Figure 31

Il ne ressort pas de cette expérimentation que les élèves construisent la ligne brisée avec le plus grand segment entre les deux autres (stratégie LBx) de préférence à une autre ligne brisée. (stratégie Lbx).

Dans ces stratégies, les extrémités sont superposées une à la fois et une après l'autre donc on peut être précis dans la manipulation. Ces stratégies sont ainsi moins coûteuses en manipulations et en temps. Le triangle est obtenu plus rapidement.

Des triangles mixtes

Deux élèves ont formés des triangles en utilisant certains segments proposés et des segments qu'ils ont tracés avec les outils à leur disposition. (figures 32 et 33)

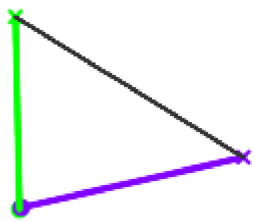


Figure 32

L'élève 12 a formé le triangle de la figure 32 avec deux segments, le vert et le violet, proposés sur la page. Le segment noir a été tracé en utilisant l'outil segment disponible sur la page.

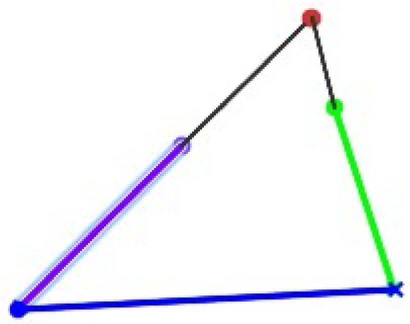


Figure 33

L'élève 11 a formé le triangle de la figure 33 avec trois segments proposés sur la page, le bleu, le vert et le violet. Puis il l'a complété par deux segments noirs tracés avec l'outil segment disponible sur la page.

L'élève 11 n'ayant pas formé une ligne brisée dont les extrémités sont des croix, il ne peut pas faire pivoter les segments vert et violet pour former le troisième sommet. Pour obtenir le troisième sommet il a trouvé la solution des tracés supplémentaires.

L'élève 3 semble avoir procédé par tâtonnement. Il forme des lignes brisées qui n'ont pas d'extrémité cruciforme et comme il est bloqué il réinitialise la page et essaie de former le triangle par ajustements. Il utilise aussi les outils sans qu'il soit possible de déterminer son but. Dès qu'il a un questionnaire « oui non » il répond sans bouger les segments.

RESULTATS

Stratégie par ajustements successifs : 4 élèves sur 14.

Stratégie ligne brisée dont les extrémités sont des croix : 7élèves sur 14.

Stratégie ligne brisée avec au moins une extrémité ronde : 1 élève sur 14

Stratégie triangle mixte : 2 élèves sur 14.

Ainsi nous pouvons dire que le double déplacement des segments par translation et rotation a été utilisé par tous les élèves pour bouger les segments. Que le triangle soit formé par ajustements successifs ou à partir d'une ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix le déplacement par rotation est majoritairement bien utilisé par les élèves comme prévu dans l'analyse a priori.

### 3.4.3 Les productions de deux élèves

<u>Élève 2</u>
Après avoir essayé les différents outils et observé ce que chacun permet de produire cet élève se concentre sur la manipulation des segments affichés sur la page 3. Il découvre rapidement le double déplacement et utilise ces deux déplacements pour former une ligne brisée. Il forme successivement plusieurs lignes brisées dont une au moins des extrémités est ronde ce qui ne lui permet pas de faire pivoter le segment pour former le triangle. Puis il met en place la stratégie "ligne brisée" dont les deux extrémités sont cruciformes. Il maintiendra cette stratégie pour former un triangle sur les autres pages du cahier.

Page 6 cette élève n'essaie pas de faire pivoter les segments. Il juxtapose le petit segment et le moyen parallèlement au grand comme sur la figure 34.

Figure 34

Enfin il explique sa démarche : « les deux petit segement doive etre plus grand que le grand segement ».

C'est ce même argument qu'il utilisera page 8 pour justifier que l'on ne peut pas toujours former un triangle avec trois segments.

Cet élève a mis en œuvre la stratégie gagnante pour former un triangle : former une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes. De plus ses arguments pour prévoir et justifier que trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle font référence à l'inégalité triangulaire en acte.

Élève 9

Après avoir tracé un triangle à l'aide de l'outil triangle, cet élève attrape un des segments affichés sur la page 3 par une puis l'autre de ses extrémités. Ainsi il découvre le double déplacement. Il utilise ces deux déplacements pour former une ligne brisée dont les deux extrémités sont cruciformes et former le triangle. Cette stratégie sera maintenue pour former un triangle sur toutes les pages du cahier.

Page 6 cet élève ne déplace aucun des segments proposés. Il explique sa démarche en disant : « non il ne peuvent pas etre les 3 coté un triangle car il y a un qui est trop grand un qui est tout petit, un qui et moyen »

C'est ce même argument qu'il utilisera page 8 : « non parfois il y en a un qui est trop grand, un moyen et un petit dans ce qu'a sa ne peux etre un triangle mais si non en général sa marche »

Cet élève a mis en place très rapidement la stratégie gagnante : former une ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix puis faire pivoter les extrémités cruciformes pour former le triangle. Ses arguments pour prévoir et justifier que trois segments peuvent être trois côtés d'un triangle font référence aux longueurs des segments qui ne doivent pas être trop différentes les unes des autres pour que le triangle existe.

### 3.4.4 Une figure complexe

Lors de cette expérimentation nous avons aussi pu constater que sur la première page d'activité (page 3) sept des quatorze élèves réalisent une figure avec les cinq segments telle qu'un quadrilatère avec une diagonale comme sur la figure 35 ci dessous.

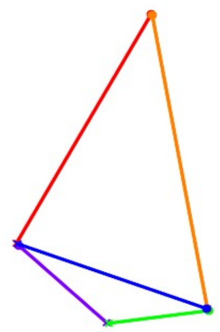


Figure 35

Dans ce cas le système prend en compte les deux triangles réalisés lorsque l'élève demande l'évaluation de sa production.

### 3.4.5 Utilisation des outils disponibles sur chaque page

**Utilisation ou non des outils par les élèves**

Nous avons pu observer que onze élèves ont essayé les différents outils à leur disposition sur la page 3. Parmi eux, trois continuent à les utiliser pour répondre aux questions des pages suivantes. Deux élèves pour former des triangles mixtes et un élève qui semble en difficultés et qui tâtonne beaucoup pour finalement ne réaliser aucun triangle. Les neuf autres ne les utiliseront pas sur les pages 4 et suivantes.

Deux élèves n'ont jamais activé les boutons outils à leur disposition sur chaque page et une élève ne les a utilisés que sur la page 6 lorsque seul le déplacement par translation des segments est autorisé. Elle essaie de faire pivoter les segments à l'aide de l'outil compas.

**Nombre d'élèves utilisant chaque outil sur chaque page**

Le tableau qui suit fait apparaître que les outils sont principalement utilisés sur la page 3 comme nous l'avons indiqué ci-dessus. Les outils les plus utilisés sont triangle, règle et compas.

| Outils | Page 3 | Page 4 | Page 5 | Page 6 | Page 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| longueur | 5 | | | | |
| triangle | 7 | | | | |
| segment | 4 | 1 | 1 | 2 | |
| règle | 7 | 1 | 1 | | |
| compas | 6 | | | 3 | |
| équerre | 5 | 7 | | 1 | |
| calculette | | | | | |

L'outil triangle

L'outil triangle est utilisé pour tracer un ou des triangles sur la page.

L'outil règle

La règle est utilisée pour tracer d'autres segments et former des triangles mixtes comme nous l'avons décrit plus haut. Page 3, elle est aussi utilisée dans le but de faire pivoter les segments existants. En effet l'outil règle de l'environnement Cabri Elem permet de tracer un segment de longueur donnée et cela dans n'importe quelle position car elle pivote autour de son zéro de graduation. Ainsi avant de découvrir le déplacement par rotation des segments affichés certains élèves on essayé de les faire pivoter avec cet outil.

L'outil compas

De la même manière que la règle, l'outil compas a été utilisé dans le but de faire pivoter les segments (ce qu'il ne permet pas), ceci avant que l'élève ne découvre le déplacement par rotation des segments affichés page 3. Trois élèves ont à nouveau voulu l'utiliser page 6 dans le même but, faire pivoter les segments, lorsque le déplacement par rotation n'est plus possible.

**Nécessité ou non de ces boutons outils sur chaque page.**

Il nous semble important de se poser la question de la nécessité de ces outils sur chaque page.

Arguments en défaveur d'outils disponibles sur chaque page

Le système ne peut évaluer les productions réalisées avec ces outils. De plus si ce cahier est une première étape à la construction géométrique des triangles à la règle et au compas les élèves ne sont pas sensés utiliser les outils pour faire des constructions géométriques de triangles.

Les enregistrements faits durant l'expérimentation ont montré que les élèves ont utilisé un outil puis un autre mais il est difficile d'analyser pour quoi faire réellement.

Arguments en faveur d'outils disponibles sur chaque page

Il s'agit de créer une boite à outils disponible sur chaque page de chaque cahier géométrique. Ainsi ces outils seront disponibles au moment nécessaire et leur présence à ce moment là ne sera pas porteuse d'une injonction à être utilisé.
La majorité des élèves ne les ont pas utilisés au delà de la page 3. Il semble donc que les élèves ne se sentent pas obligés de les utiliser s'ils n'en ont pas besoin et que cela ne gène pas leur résolution de tache.

### 3.4.6 Réactions au rétroactions

Les rétroactions de manipulation directes liées aux actions de déplacements

La distinction graphique des deux extrémités d'un segment, ronde ou cruciforme, est rapidement prise en compte par les élèves. Nous avons pu observer que certains élèves essaient de déplacer un premier segment en l'attrapant par une extrémité puis par l'autre. Ces élèves renouvellent leur expérience sur un deuxième segment avant de se lancer dans la tâche de formation d'un triangle.

D'autres élèves découvrent ces distinctions graphiques, ronde ou cruciforme, des extrémités des segments et les déplacements qui leurs sont associés, au cours des tentatives mises en place pour former un triangle lorsqu'apparaît le besoin de faire pivoter certains segments.

Lorsque seul le déplacement des segments par translation n'est possible (page 6) les deux extrémités de chaque segment sont rondes. Six élèves attrapent le segment par chacune d'elles pour essayer de faire pivoter le segment. Trois élèves utilisent l'outil compas pour tenter de faire pivoter les segments. La pointe du compas est placée sur une extrémité du segment et le crayon sur l'autre puis le compas est pivoté.

Les rétroactions d'évaluation du système

Il est difficile de faire une analyse précise de la façon dont ces rétroactions d'évaluation du système sont prises en compte par les élèves lorsqu'ils n'ont pas la production attendue. L'animation proposée dans les cas où les segments ne permettent pas de former un triangle avec les deux petits segments qui tournent autour des extrémités du grand en laissant une trace semble mieux prise en compte que les phrases. Cette animation est aussi une rétroaction de stratégie. Elle renvoie à une stratégie de formation du triangle ou de test de l'impossibilité de le former.

Les rétroactions d'évaluation du système sont nécessaire pour éviter que ce soit à l'enseignant de le faire. Mais si ces évaluations du système apportent quelque chose à la mise en place de stratégies, à l'activité mathématique, elles sont d'autant plus pertinentes.

## 3.5 Conclusion de l'expérimentation

L'analyse des différentes observations faites durant l'expérimentation du cahier avec des élèves de CM2 nous a montré que les objectifs mathématiques du cahier sont atteints par les élèves. Tous ont découvert le double déplacement des segments par translation et par rotation autour d'une extrémité. Pour former les triangles, la moitié des élèves a mis en place la stratégie ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix pour pouvoir pivoter les deux segments extrêmes et ainsi former le triangle. Lors de la phase de synthèse par l'enseignante cette stratégie a été reconnue comme la stratégie gagnante pour former un triangle. La nécessité de la rotation dans la phase de formation d'un triangle a été mise en évidence par les élèves et les a conduit à citer le compas comme instrument nécessaire dans les constructions géométriques des triangles.

Il nous semble important aussi de revenir sur le deuxième objectif : avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle. L'inégalité triangulaire n'est pas au programme de CM2. Elle ne sera abordée qu'en classe de 5e de collège. On peut alors se demander s'il est pertinent dans ce cahier de faire découvrir aux élèves de CM2 qu'avec trois segments de longueurs données on ne peut pas toujours former un triangle. Comme nous l'avons déjà dit, cette existence ou non du triangle finalise la tentative de formation des triangles et donc le recours aux déplacements des segments. D'autre part, il est maintenant admis par les élèves que certains triangles n'existent pas donc qu'on ne pourra pas les construire.

Enfin, certains élèves ont mis en évidence l'inégalité triangulaire en acte. Lors de la phase de synthèse celle-ci a été partagée avec tous les élèves. Il est alors possible de s'appuyer dessus pour la mise en place de la stratégie la plus efficace pour former un triangle, la stratégie LBx, ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix avec le plus grand segment placé entre les deux autres. Comme nous l'avons expliqué dans l'analyse a priori, mettre le plus grand segment entre les deux autres permet d'anticiper la position du troisième sommet dans une bande dont la largeur est donnée par la longueur du plus grand segment. Cette stratégie est aussi la plus efficace pour constater que le triangle ne peut être formé comme dans l'animation page 5.

# 4. Un deuxième cahier : « Construire des triangles »

L'objectif de notre situation est la construction, à la règle et au compas, d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés. Le cahier « A la découverte des triangles » est une première étape à cet objectif permettant la construction de l'instrument « rotation d'un segment » pour former un triangle. Nous allons comparer cet instrument « rotation d'un segment » avec l'usage du compas dans la construction du triangle. Sur la base de cette étude nous proposons un second cahier d'activités informatiques qui abouti à l'usage du compas. Ce cahier n'a pas été expérimenté dans le cadre du travail de master.

## 4.1 De l'instrument « rotation d'un segment » au compas

Au cours des manipulations des segments dans le cahier « A la découverte des triangles » le sujet construit un instrument « rotation d'un segment » qui va lui permettre de former des triangles. Inscrit dans un usage cet instrument « rotation d'un segment » a un statut de moyen d'action pour le sujet, moyen pour atteindre un but : former un triangle.
Dans le processus de genèse instrumentale qui permet de construire cet instrument « rotation d'un segment » dans la tâche former un triangle le sujet développe des schèmes d'utilisation.

Identification de schèmes d'utilisation de l'instrument « rotation d'un segment » et de l'instrument compas dans les tâches :

- former un triangle à partir de trois segments de longueurs données ;
- construire un triangle à la règle et au compas.

| Instrument rotation d'un segment | Instrument compas |
|---|---|
| **Schèmes d'usage** | |
| • distinguer l'extrémité croix du segment<br>• attraper le segment par la croix<br>• déplacer la croix pour faire pivoter le segment | • écarter les branches<br>• piquer la pointe et appuyer le crayon<br>• faire pivoter et produire une trace visible |
| **Schèmes d'action instrumentée centrés sur la tâche** | |
| **Former une ligne brisée: trois schèmes possibles**<br>• Schème translation segment :<br>attraper le segment et le translater<br>• Schème translation extrémité :<br>attraper le segment par l'extrémité ronde et le translater<br>• Schème rotation :<br>attraper le segment par la croix et le faire tourner<br><br>**Former le triangle à partir de la ligne brisée : un schème rotation appliqué à chaque segment extrême de la ligne brisée**<br>• choisir un segment extrême de la ligne brisée<br>• attraper le segment par la croix et le faire tourner<br>• attraper l'autre segment extrême de la ligne brisée par la croix pour le faire tourner<br>• faire pivoter alternativement les segments pour obtenir le triangle | **Tracer un premier côté du triangle:**<br>• Tracer à la règle un segment de longueur un côté du triangle<br><br>**Construire le 3e sommet du triangle: un schème reporter une longueur au compas, appliqué deux fois**<br>• écarter les branches du compas de la longueur du 2e côté du triangle à reporter<br>• piquer la pointe sur une extrémité du segment déja tracé et appuyer le crayon<br>• faire pivoter le compas sans bouger l'écartement pour tracer un arc de cercle<br>• écarter les branches du compas de la longueur du 3e côté du triangle à reporter<br>• piquer la pointe sur l'autre extrémité du segments déja tracé et appuyer le crayon<br>• faire pivoter le compas sans bouger l'écartement pour tracer un arc de cercle qui intersepte le premier<br>**Tracer à la règle les deux derniers côtés du triangle** |

En attrapant le segment par la croix on le fait pivoter autour de l'extrémité ronde de la même manière que le compas pivote autour de sa pointe pour laisser la trace d'un arc de cercle. Ainsi les schèmes d'utilisation évoqués chez le sujet au cours de la construction de l'instrument « rotation d'un segment » peuvent être associés à des schèmes d'utilisation de l'instrument compas.

| |
|---|
| Lors de l'usage de l'instrument « rotation d'un segment » les rétroactions sont les positions successives du côté ainsi que la trajectoire de l'extrémité du segment.<br>Le contrôle de l'utilisateur se fait sur l'objet côté du triangle qui est déjà là mais pas dans la bonne position.<br>Lors de l'usage du compas, dans sa fonction de report de longueur, les rétroactions sont les arcs de cercle. Le segment qui représente le côté du triangle n'est pas visible. |

Ainsi les schèmes associé à l'instrument « rotation d'un segment » tout comme les rétroactions qu'il produit seront porteur de sens pour l'utilisation du compas dans la construction géométrique du triangle.

## 4.2 Le second cahier « Construire des triangles »

L'objectif de ce cahier est de permettre l'apprentissage de la construction, à la règle et au compas, d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données en s'appuyant sur les schèmes de manipulation des segments élaborés lors de l'utilisation du premier cahier. Il s'agit d'aboutir à l'usage du compas pour tracer des arcs de cercle dont l'intersection sera le troisième sommet du triangle.

L'objectif de ce cahier est de faire apparaître,

- la trajectoire des extrémités des segments ;
- les cercles sous-jacents à la construction d'un triangle ;
- la nécessité de tracer des arcs de cercles pour construire un triangle.

Il s'agit de trouver le troisième sommet du triangle par une méthode et non plus par tâtonnement

Dans ce cahier on repart de la ligne brisée, constituée de trois segments, qui a pu être formée dans le cahier « A la découverte des triangles ». Le passage de la ligne brisée au triangle se fait en pivotant les deux segments extrêmes de la ligne brisée.

Le cahier « Construire des triangles » se décompose en deux tâches comme suit.
Tâche 1 : former un triangle à partir d'une ligne brisée et faire apparaître :

- la trace des extrémités ;
- les cercles sous-jacents et le troisième sommet du triangle comme intersection de ces cercles.(il y a deux solutions)

Tâche 2 : construire des triangles à l'aide des outils compas ou cercles disponibles dans une boite à outils à disposition.

### 4.2.1 Une première tâche : former un triangle à partir d'une ligne brisée

**Page d'accueil (figure 36)**


Figure 36

A l'ouverture de la page, une animation démarre: une ligne brisée formée de trois segments se referme pour former un triangle. La trace des extrémités des segments qui pivotent s'affiche.

**Page 1 et 2 (figure 37)**


Figure 37

Trois segments de couleurs différentes et une ligne brisée constituée à partir des trois segments sont affichés à l'écran. Il s'agit de former un triangle à partir de cette ligne brisée. Le triangle est obtenu en faisant pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée. La trace des extrémités qui pivotent s'affiche. Ceci permet de faire apparaître les cercles sous-jacents à la construction géométrique des triangles.

Il est possible de modifier chaque longueur des trois segments qui sont affichés en haut à gauche de chaque page. Pour cela il suffit d'attraper l'extrémité droite d'un segment (le vert, le bleu, le rouge) et de la déplacer.

Page 2, en plus de la ligne brisée les cercles dont les rayons sont les deux segments extrêmes de la ligne brisée sont apparents. Le troisième sommet du triangle peut donc être visible comme intersection des deux cercles. Pour former le triangle, il suffit de faire pivoter chaque segment extrême jusqu'au troisième sommet apparent.

Dans la configuration à l'ouverture de la page 2 les cercles n'ont pas de point d'intersection donc le triangle ne peut pas être formé. Une ou plusieurs longueurs doivent être modifiées pour pouvoir former le triangle.

### 4.2.2 Caractériser les triangles robustes

Dans la suite du cahier la tâche sera de construire des triangles sans que les segments potentiellement côté du triangle ne soient donnés. Les triangles attendus doivent être robustes, ils doivent résister au déplacement.

**Page 3 (figure 38)**

Un triangle bleu et un triangle rouge ainsi qu'un point noir sont affichés sur la page. L'élève doit déplacer chaque triangle sur le point noir. Cette page permet de faire la distinction entre un triangle mou (triangle rouge) et un triangle robuste (triangle bleu). Le triangle bleu résiste au déplacement : il reste triangle lors du déplacement d'un sommet ou d'un côté. Le triangle rouge lui ne résiste pas au déplacement : il se disloque lors du déplacement d'un sommet ou d'un côté.

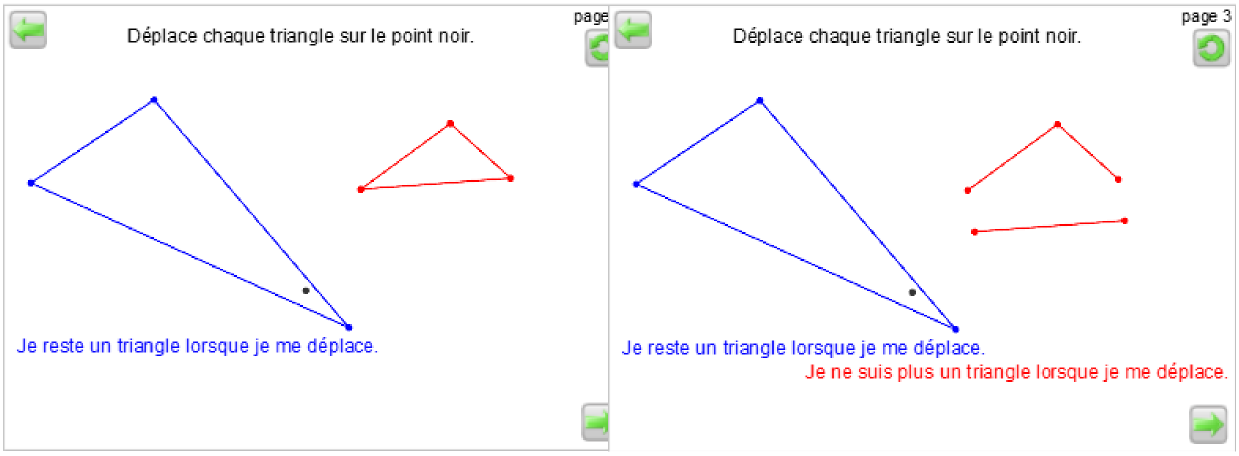



Figure 38

### 4.2.3 Une deuxième tâche : construire un triangle avec trois segments de longueurs données

**Page 4 (figure 39)**

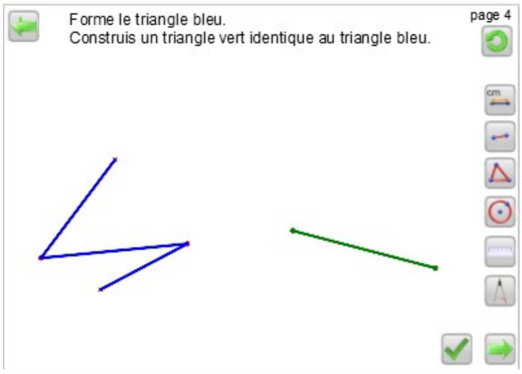



Figure 39

Une ligne brisée bleue, sans cercle sous-jacent apparent, et un segment vert sont proposés sur la page. Il s'agit de former le triangle bleu à partir de la ligne brisée et de construire un triangle vert identique au bleu à partir du segment vert. Le triangle vert doit être robuste au sens du triangle et aussi pour la longueur de ses côtés.

Des outils sont disponibles sur la droite de la page. On retrouve les outils longueurs, segment, triangle, règle et compas déjà présents dans le premier cahier « A la découverte des triangles ». L'outil cercle est maintenant disponible.

Il n'est pas possible de superposer le segment vert et le triangle bleu. Le système bloque une manipulation directe qui aurait pu être obtenue par déplacement du segment vert ou du triangle bleu.

**Page 5 (figure 40)**

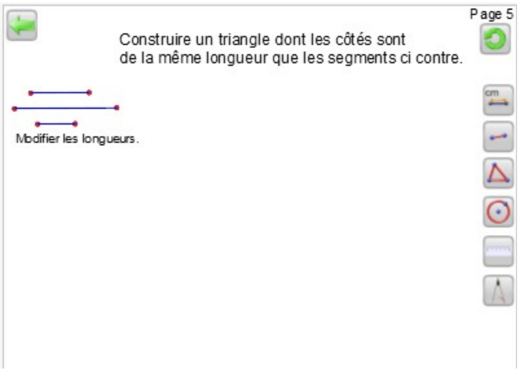



Figure 40

Trois segments de longueurs modulables sont affichés sur la page. Il s'agit de faire la construction géométrique d'un triangle dont les trois longueurs sont données sous forme de segments. Les mêmes outils que sur la page précédente sont disponibles : longueur, triangle, segment, cercle, règle, compas.

**Stratégies pour construire un triangle**

Pour construire un triangle, les stratégies valides sont celles qui utilisent les outils cercles ou compas. En effet ces deux outils permettent de construire un triangle robuste au sens du triangle et des longueurs des côtés.

L'outil triangle permet de construire un triangle robuste au sens du triangle mais ce triangle sera mou pour les longueurs des côtés.

Les outils longueur, segment, règle permettent de tracer un triangle qui sera mou au sens du triangle et des longueurs des côtés.

# 5. Conclusion et ouvertures

Le but de ce travail était d'élaborer une situation utilisant un environnement de mathématiques dynamiques pour initier la construction à la règle et au compas d'un triangle dont les longueurs des trois côtés sont données. Tout au long de cette étude nous avons voulu vérifier l'influence des rétroactions renvoyées par l'environnement de mathématiques dynamiques sur le contrôle mathématique de l'activité par l'élève ainsi que l'apport de l'environnement informatique dans la création d'un milieu favorisant les apprentissages.

## Deux cahiers pour une situation (QR1)

Nous avons construit une situation de travail sur les triangles, basée sur l'utilisation de deux cahiers d'activités informatisés développés avec le logiciel Cabri Elem. Dans le premier cahier, objet principal de notre étude, il s'agit de former des triangles par manipulation directe de segments de longueurs données selon deux déplacements (par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe) ainsi que de déterminer si trois segments de longueurs données peuvent être les trois côtés d'un triangle.
Le deuxième cahier « Construire des triangles » poursuit le travail pour aboutir à la nécessité de tracer des arcs de cercle pour construire un triangle dont les longueurs des côtés sont données.

## Un milieu favorable aux apprentissages (QR3)

L'analyse a priori du premier cahier « A la découverte des triangles » nous a permis de dégager plusieurs faits marquants :

- L'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements, par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe, ce qui n'est pas le cas lors de manipulations dans l'environnement des objets matériels dans lequel les déplacements sont réalisés simultanément.

- Le déplacement par rotation est indispensable pour former un triangle dans l'environnement informatique.
- Dans l'environnement de mathématiques dynamiques, lors du déplacement du segment par rotation, le contrôle tout au long de l'action se fait sur le côté du triangle qui est déjà présent dans le segment manipulé, mais pas dans la bonne position.

De plus nous avons mis en évidence le passage par une ligne brisée comme étant la stratégie gagnante efficace pour former un triangle dans ce premier cahier. Or la ligne brisée est une première étape d'une déconstruction dimensionnelle du triangle. Dans l'environnement de mathématiques dynamiques, la reconstruction du triangle à partir de trois segments, de longueurs données, repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D à la ligne brisée 1D. Il s'agit d'un intermédiaire à la déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au point d'intersection 0D des deux arcs de cercle, nécessaire à la construction géométrique du triangle à la règle et au compas. C'est ce qui fait de ce premier cahier d'activités informatisé une étape utile dans l'apprentissage de la construction du triangle au compas. Enfin nous avons utilisé la question de l'existence ou non du triangle pour problématiser et finaliser la formation du triangle et donc le recours aux déplacements.

A travers l'étude des productions des élèves et les résultats de l'expérimentation du cahier « A la découverte des triangles » dans une classe de CM2 nous avons obtenu que :

- il est maintenant admis par tous les élèves que certains triangles n'existent pas donc qu'on ne pourra pas les construire ;
- tous les élèves ont vu et utilisé le double déplacement des segments pour former un triangle;
- le passage par la ligne brisée pour former le triangle est la stratégie la plus utilisée, de plus elle est reconnue comme la stratégie gagnante efficace par les élèves dans la phase de synthèse du cahier .

L'analyse des productions des élèves nous permet donc de confirmer ce que nous annoncions dans l'analyse a priori : les manipulations et les rétroactions associées constituent un milieu qui engage l'élève dans une démarche mathématique favorisant les apprentissages. Il lui permet de s'approprier la nécessité de la rotation dans la phase de formation d'un triangle et amène l'usage du compas dans les constructions géométriques des triangles.

### Des rétroactions porteuses de sens (QR2)

Nous avons aussi pu constater, lors de l'expérimentation, que les rétroactions de manipulation directe, telles que les positions successives du segment au cours du déplacement ou la trajectoire de l’extrémité cruciforme qui pivote sont prises en compte par l'élève dans la mise en œuvre d'une stratégie gagnante. Nous retenons que l'instrument « rotation d'un segment » que l'élève élabore dans la tâche de formation d'un triangle et les rétroactions qu'il produit sont porteurs de sens pour l'utilisation du compas dans la construction géométrique du triangle. En revanche les rétroactions d'évaluation proposées par le système ne semblent pas alimenter le raisonnement ni provoquer des modifications de stratégies.

Suite à cette expérimentation nous nous interrogeons sur l'efficacité de telles rétroactions d'évaluation. Des rétroactions liées à la stratégie mise en œuvre, telles que l'animation des segments en rotation semblent nettement plus pertinentes que des rétroactions d'évaluation.

### Des nouvelles questions de recherche

Nous pouvons envisager un prolongement au travail que nous avons mené dans ce mémoire au sujet des différents types de rétroactions : rétroactions de manipulation directe, rétroaction d'évaluation et rétroaction liées à la stratégie mise en œuvre par l'élève. Quelles rétroactions intermédiaires l'environnement pourrait-il renvoyer pour révéler à l'élève des incohérences dans ses actions ou des éléments non pris en compte ?

Nous pouvons aussi envisager un prolongement à ce travail en créant une autre situation autour de l'inégalité triangulaire pour le collège. Le cahier « A la découverte des triangles » pourrait il être une première étape à l'apprentissage de l'inégalité triangulaire ?.

Enfin nous pourrions étudier l'appropriation de ce type de cahiers d'activités informatiques par les professeurs des écoles et les professeurs de collège : quelle utilisation, quelles adaptations possibles pour l'enseignant de ces environnements virtuels de manipulation ?

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


Artigue M. , Robinet J. (1982) Conception du cercle chez les enfants de l'école élémentaire. *Recherche en Didactique des mathématiques.* Vol 3 (1) p 5-64.

Brousseau G. (2003). L*a théorie des situations didactiques,* Cours donné à l'université de Montréal pour le titre de Docteur Honoris Causa. Publié dans Interactions Didactiques Genève.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives* vol 10. p 5 à 53.

Duval R., Godin M. (2005) Les changements de regard nécessaire sur les figures. *Grand N* n°76 p 7 à 27.

Johsua S., Dupin JJ. (1993), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Paris, PUF.

Laborde C. , Capponi B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* Vol 14 (1.2), 165-210.

Laborde C., Laborde JM. (2011) Interactivity in dynamic mathematics environnements : what does that mean? *16th Asian Technology Conference of Mathematics,* Bolu, Turkey.

Laborde C., Marchetteau A. (2009) L'incontro tra réale e virtuale in Cabri Elem per attività matemativhe nella scuola primaria. *La matematica e la sua Didattica,* 23 n°1, p 19-34.

Offre B., Perrin-Glorian MJ., Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en CM2. *Grand N* n°77 p7 à 34.

Rabardel P. (1995) L*es hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Rabardel P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 9e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* Houlgate.

Soury-Lavergne S. (2011) De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique.
*Les Nouvelles Technologies pour l'Enseignement des Mathématiques.* n°27.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques* vol 10 (2-3) p 133-170.

**Programmes**

Programmes de l'école primaire : Bulletin officiel spécial n°3 du 19 juin 2008
Programmes de collège : Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

# Annexe 1

## Conséquences des choix de variables sur les stratégies de résolution

**Stratégies en rapport avec les déplacements des segments proposés sur chaque page**

**1.Déplacements des segments par translation et rotation autour d'une extrémité**

– 1.1 Les trois segments bougent selon les deux déplacements.

- Stratégies "ligne brisée"

Stratégie Lbx: former une ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix puis faire pivoter les extrémités pour essayer de former le triangle. Dans le cas où le triangle ne peut être formé cette stratégie est une visualisation de l'inégalité triangulaire.

Stratégie LBx: former une ligne brisée dont les deux extrémités sont des croix avec le plus long segment entre les deux autres. La stratégie LBx est plus efficace que la stratégie Lbx.

- dans le cas où le triangle existe, une ligne brisée avec le plus grand segment au centre facilite la visualisation de la zone où va se situer le troisième sommet du triangle ;
- dans le cas où le triangle n'existe pas, une ligne brisée avec le plus grand segment au centre permet de constater visuellement que les deux extrémités de la ligne brisée ne peuvent pas se rencontrer pour former le troisième sommet du triangle ;
- dans le cas où le triangle est plat, la visualisation du fait que les deux petits segments sont superposés sur le grand segment est aussi plus aisée lorsque la ligne brisée est formée avec le plus grand segment au centre.

- Stratégies comparer la somme des longueurs des petits segments avec celle du plus grand

Stratégie Cal: comparer la somme des longueurs des petits segments avec le plus grand comme sur les figures a et b.

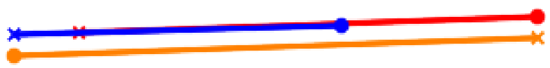


Figure a

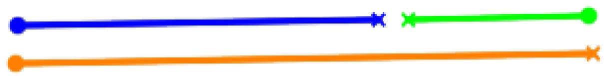


Figure b

– Stratégie Cit : comparer la somme des longueurs des petits segments avec le plus grand comme sur les figures c et d.

Figure c

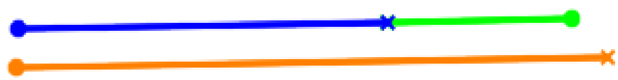


Figure d

Dans le cas où le triangle existe les stratégies Cit et Cal sont équivalentes. Dans le cas où le triangle n'existe pas la stratégie Cal qui est proche d'une stratégie Ligne brisée avec le grand segment entre les deux autres facilite la visualisation du fait que le troisième sommet du triangle ne peut être formé. Dans le cas du triangle plat on ne peut distinguer les deux stratégies Cal et Cit.

– 1.2 Un segment fixe et les deux autres pouvant être déplacés selon les deux déplacements.

- Stratégies ligne brisée.

- Le plus grand segment est fixe.

Stratégie LBx : former une ligne brisée dont les extrémités sont des croix avec le segment fixe entre les deux autres segments et faire pivoter les extrémités pour former le triangle.

- Le segment fixe n'est pas le plus grand.

Stratégie Lbx : former une ligne brisée dont les extrémités sont des croix avec le segment fixe entre les deux autres segments et faire pivoter les extrémités pour former le triangle.

Dans le cas où le triangle existe, comme nous l'avons dit dans le paragraphe 1.1 ci dessus la stratégie LBx avec le plus grand segment au centre est plus efficace et nécessite moins d'ajustements pour former le troisième sommet du triangle que la stratégie Lbx.

Dans le cas où le triangle n'existe pas, le choix de fixer le plus grand segment contraint la ligne brisée avec le plus grand segment entre les deux autres et permet de visualiser que les deux extrémités ne se rencontrent pas et qu'il n'est pas possible de former le troisième sommet du triangle. Le choix de fixer un segment qui ne soit pas le plus long contraint l'utilisation de l'inégalité triangulaire en acte.

Dans le cas où le triangle est plat, la ligne brisée avec le grand segment placé entre les deux autres sera plus efficace. Il sera plus aisé de superposer les deux petits segments sur le grand. Le choix de fixer un segment qui ne soit pas le plus long contraint de venir superposer le grand segment sur les deux autres qui auront été précédemment alignés.

- Stratégies comparer la somme des longueurs des petits segments avec celle du plus grand

Quelle que soit le segment fixe il est possible d'utiliser l'une des stratégies Cal et Cit avec les mêmes conséquences que celles décrites dans le paragraphe 1.1 ci dessus.

**2.Déplacement par translation uniquement**

Dans ce cas il n'est plus possible de former le triangle. Pour former le triangle le déplacement par rotation est indispensable. Lorsque le seul déplacement autorisé est la translation il s'agit donc de savoir s'il est possible de prévoir si les trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle.

– 2.1 Les segments ne sont pas parallèles.

<u>Stratégies Ligne brisée .</u>

En déplaçant les segments par translation il est possible de former une ligne brisée comme sur les figures e et f. Mais les segments ne pouvant plus pivoter il ne sera pas possible de former un triangle.

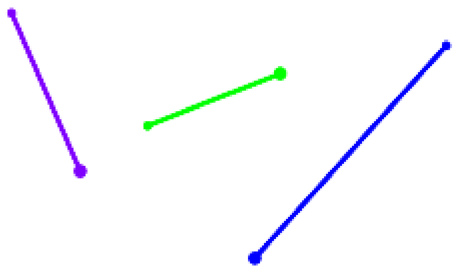


Figure e

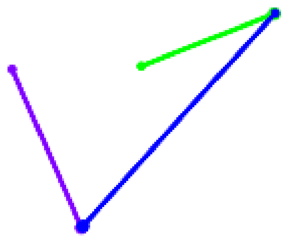


Figure f

<u>Stratégies comparer la somme des longueurs des petits segments avec celle du plus grand.</u>

Sans faire pivoter les segments il n'est pas possible de positionner les deux petits segments parallèlement au grand comme sur les figures a,b,c et d. Il n'est donc pas possible de comparer la somme des longueurs des petits segments avec le plus grand.

Lorsque le seul déplacement autorisé est le déplacement par translation, si les segments ne sont pas parallèles il n'est pas possible, uniquement en manipulant les segments, de savoir s'ils peuvent être les trois côtés d'un triangle.

– 2.2 Les segments sont parallèles.

<u>Stratégies Ligne brisée.</u>

La seule ligne brisée qu'il est possible de former est celle des trois segments alignés et comme précisé plus haut sans le déplacement par rotation il ne sera pas possible de former le triangle.

Stratégies comparer la somme des longueurs des petits segments avec celle du plus grand.

Que tous les segments puissent être déplacés ou qu'un segment soit fixe il est possible ici d'utiliser l'une des deux stratégies Cal et Cit comme indiqué sur les figures g,h et i.

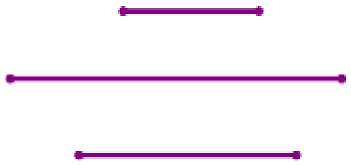


Figure g Figure h Figure i

**3.Déplacement par rotation uniquement**

Le déplacement par rotation est indispensable pour former un triangle mais il n'est pas suffisant tant que la ligne brisée n'est pas formée. Le déplacement par rotation seul ne permet pas non plus de prévoir si les trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Ce déplacement seul sera mobilisé sur certaines pages du deuxième cahier pour amener la nécessité de l'usage du compas dans la construction géométrique du triangle. Dans ce cas la configuration ligne brisée est proposée à l'ouverture de la page. (figure j)

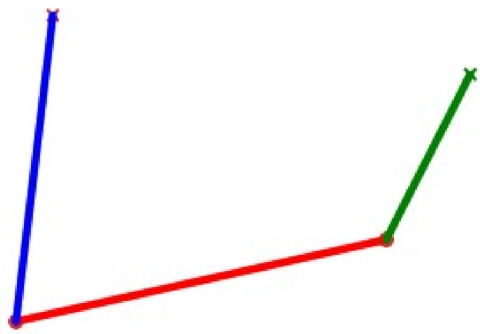


Figure j

**4.Aucun déplacement possible des segments**

Dans ce cas les stratégies ne sont plus en lien avec le déplacement. L'élève doit utiliser les outils qui sont à sa disposition.

**Stratégies utilisant les outils**

Le choix de donner des outils en libre utilisation a été fait dans le but de fournir une boite à outils. Cette boite à outils comprend les trois instruments de tracés géométriques de l'école primaire, règle équerre compas, ainsi que la calculette que l'élève utilise en cours de mathématiques. En plus, trois outils de géométrie dynamique en rapport avec la situation sont aussi disponibles : l'outil segment, l'outil triangle et l'outil longueur.

**1.Stratégies de tracés**

- Avec l'outil triangle
  L'outil triangle permet de tracer des triangles robustes par rapport à la propriété « être un triangle ».
- Avec l'outil segment (non asymétrique contrairement à ceux affichés)
  L'outil segment permet de tracer un triangle robuste par rapport à la propriété « être un triangle » si chaque nouveau segment est tracé à partir d'une extrémité du précédent. L'outil segment permet aussi de tracer un triplet de segments que l'on peut assembler pour former un triangle. Ce triangle est mou par rapport à la propriété « être un triangle ».

**2.Stratégies de constructions**

- Avec les outils règle et compas il est possible de construire un triangle.
- Le cercle n'est pas un outil disponible dans le premier cahier. En effet un des objectifs du cahier est d'amener l'usage du compas dans la construction géométrique des triangles. Les cercles sous-jacents à la construction géométrique des triangles seront mis en évidence dans le second cahier dans lequel l'outil cercle sera disponible.

### 3.Stratégies de mesures

- Avec l'outil longueur il est possible de mesurer la longueur de chaque segment. Il est alors possible de vérifier si chaque segment vérifie l'inégalité triangulaire. Cette stratégie permet de prévoir si trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle.

# Annexe 2

**Tableau de synthèse des productions des élèves lors de l'expérimentation**

**Stratégies pour former un triangle :**

On utilisera les sigles Lbx pour la stratégie ligne brisée avec les deux extrémités cruciformes, As pour la stratégie par ajustements successifs, M pour les triangles mixtes et T pour tâtonnement.

**Les questions posées sont notées :**

**P2:** page 2. Avec trois segments on peut obtenir un triangle. Qu'en penses tu?

**P8:** page 8. Et maintenant qu'en penses tu? Avec trois segments on peut toujours former un triangle.

**P6 :** page 6. Arguments pour expliquer comment prévoir que trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle.

Nous qualifions d'argument longueur toutes les réponses du type : un segment est trop grand ou un segment est trop petit ou les trois segments doivent avoir à peu près la même taille.

| Élèves | Stratégies | P2 | P8 | P6 |
|---|---|---|---|---|
| E1 | Lbx | Oui | Non | Pas d'explication |
| E2 | Lbx | Oui | Non + inégalité triangulaire en acte | Inégalité triangulaire en acte |
| E3 | T | Oui | Non | Argument longueur |
| E4 | Lbx | Oui | Non | Argument longueur |
| E5 | Lbx | Oui | Plus maintenant | Inégalité triangulaire en acte |
| E6 | Lbx | Oui | Des fois oui, des fois non | Inégalité triangulaire en acte |
| E7 | As | Oui | Pas toujours | Pas d'explication |
| E8 | As | Oui | Oui | Argument longueur |
| E9 | Lbx | Oui | Des fois non + argument longueur | Argument longueur |
| E10 | Lbx | Oui | Non + argument longueur | Argument longueur |
| E11 | M | Oui | Non et oui ça dépend des segments | Argument longueur |
| E12 | M | Oui | Non car page 5 ça ne marchait pas | Argument longueur |
| E13 | As | Oui | Non + argument longueur | Inégalité triangulaire en acte |
| E14 | As | Oui | Non + argument longueur | Pas d'explication |