LES TECHNOLOGIES POUR LA GÉOMÉTRIE À L'ECOLE PRIMAIRE

Sophie SOURY-LAVERGNE
Maître de Conférences, INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION
S2HEP
Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Résumé
La géométrie dynamique est une technologie dont les apports pour l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire ont été étudiés depuis une dizaine d'années. Récemment de nouveaux développements à la fois didactiques, à propos des déconstructions dimensionnelles d'une figure, et technologiques, avec l'apparition de la technologie Cabri Elem, ont permis de concevoir de nouvelles situations qui mettent en relation différents espaces, l'espace sensible des objets, l'espace graphique des représentations et l'espace dynamique de la technologie.

Cette contribution à la table ronde dresse un panorama des nouvelles possibilités et des nouvelles tâches qu'offre l'intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. A partir d'exemples d'usages pionniers ou plus récents, elle présente quelques idées-clefs pour comprendre les apports possibles des technologies à l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire : la déconstruction dimensionnelle introduite par Duval (2005) pour décrire le travail nécessaire chez l'élève pour une approche géométrique des figures, l'interaction entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques au cœur des apprentissages à l'école primaire (Perrin-Glorian & Salin, 2010), le rôle du déplacement et des différentes rétroactions dans l'utilisation d'un environnement informatique pour apprendre (Soury-Lavergne, 2006) (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013) et pour finir le rôle de la manipulation directe d'objets tangibles et de représentations informatisées de ces objets (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013).

I. LES DÉBUTS HISTORIQUES AVEC LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Le projet MAGI, Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique, a démarré en 2003 pour étudier les intérêts et les possibilités de la géométrie dynamique dès l'école élémentaire, alors que ces logiciels étaient déjà largement connus et utilisés au niveau secondaire depuis plusieurs années. Ce projet avait pour objectif de concevoir et d'analyser des situations possibles pour tous les niveaux de l'école élémentaire et au début du collège, mais aussi d'étudier l'intégration de la technologie dans les pratiques des enseignants (Laborde, 2004) (Assude, Grugeon, Laborde, & Soury-Lavergne, 2006).

1. Les constructions robustes

Les usages les plus répandus de la géométrie dynamique consistent à faire construire aux élèves des figures géométriques qui conserveront leurs propriétés au cours du déplacement des points qui les forment. Par exemple, si l'on considère la tâche de construction d'un rectangle, il est attendu que la figure soit construite en utilisant certaines de ses propriétés géométriques, qui sont mises en œuvre dans l'environnement par l'utilisation d'outils. Par exemple, pour construire un rectangle, il faut utiliser l'outil droite perpendiculaire à trois reprises, ou toute autre combinaison d'outils permettant que le quadrilatère obtenu soit un rectangle. La construction du rectangle est validée par le fait que le déplacement des points mobiles produit des états graphiques successifs d'un rectangle (Figure 1, états a, b et c). Il s'agit alors d'une construction robuste du rectangle. En revanche, une figure obtenue à l'écran par ajustement perceptif des quatre sommets et qui se déforme dès qu'un sommet est déplacé (Figure 1, états d, e et f), est appelée construction molle du rectangle (Soury-Lavergne, 2011) et n'est pas considérée comme valide.

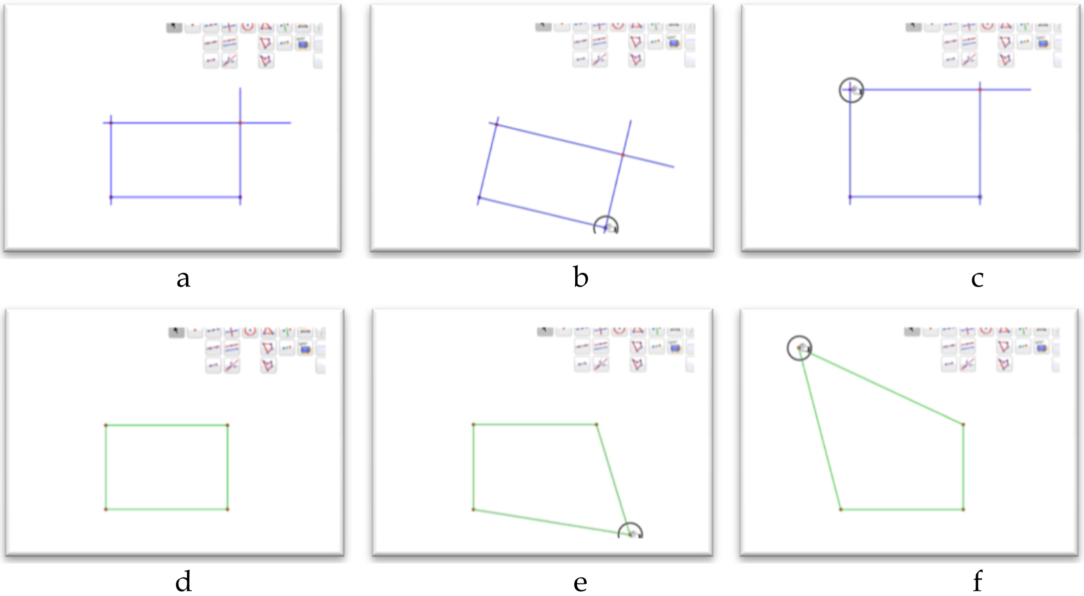

Figure 1. Trois états successifs de deux constructions différentes d'un rectangle.
Les états a, b et c correspondent à une construction robuste du rectangle (à partir de a et en déplaçant le sommet en bas à droite on obtient b et en déplaçant le sommet en haut à gauche on obtient c).
Les états d, e et f correspondent à une construction de rectangle par ajustement de 4 segments (à partir de d et en déplaçant le sommet en bas à droite on obtient e et en déplaçant le sommet en haut à gauche on obtient f).

La recherche de constructions robustes a été le point de départ des usages de la géométrie dynamique pour l'enseignement. En effet, seules les figures construites avec une utilisation explicite de leurs propriétés géométriques restent valides lorsque leurs sommets sont déplacés. De plus, plusieurs procédures différentes sont possibles pour obtenir une même figure robuste et toutes nécessitent l'utilisation d'une combinaison valide de propriétés géométriques.

La géométrie dynamique a ainsi fourni un milieu (Brousseau, 1998) qui permet de distinguer les propriétés spatiales des propriétés géométriques d'une figure et d'amener les élèves au contrat géométrique (Berthelot & Salin, 1993). Ce point est important car les connaissances en jeu dans l'apprentissage de la géométrie sont de deux natures, renvoient à deux champs de connaissances, l'un théorique celui de la géométrie et l'autre fondé sur l'interaction du sujet avec l'environnement, celui des connaissances spatiales. La géométrie est un ensemble d'objets et de relations théoriques, que l'on manipule à travers leurs représentations dans des registres différents, par des énoncés de langage et par des dessins. Ces deux types de registres nécessitent des appréhensions différentes (Duval, 2005). Les dessins appellent une appréhension globale en donnant à voir des relations spatiales tandis que les énoncés sollicitent une appréhension linéaire et analytique d'un discours qui renvoie le plus souvent aux objets théoriques géométriques. Les contrôles mis en jeu par l'appréhension du dessin sont en un premier temps de type perceptif, tandis que les contrôles sur les énoncés se font par des connaissances géométriques. La géométrie dynamique permet d'articuler et de différencier les deux types de contrôle et donc les deux référents. Elle permet d'extérioriser les propriétés théoriques sous forme d'invariants spatiaux dans et par le déplacement (Laborde & Capponi, 1994) qui est donc une fonctionnalité fondamentale de la géométrie dynamique pour l'apprentissage.

Le déplacement est accessible directement aux élèves, qui peuvent l'effectuer eux-mêmes et, dans une certaine mesure, en tirer les conclusions. De ce point de vue, la validation des constructions grâce au déplacement est donc du côté des élèves, indépendante de l'enseignant, ce qui constitue une autre valeur ajoutée.

2. Les boîtes noires

La technologie ne permet pas seulement de proposer des tâches dans un nouvel environnement, mais aussi de proposer de nouvelles tâches, dont la résolution engage les connaissances géométriques, ce qui ne serait pas possible sans la technologie (Laborde, 2001). C'est le cas des boîtes noires. Il s'agit d'une tâche de reproduction de figures dans laquelle la figure dynamique attendue, en version informatisée, est elle-même directement donnée à l'élève, sans toutefois permettre l'accès aux parties cachées ou à l'historique de la construction. La figure à reproduire n'est donc pas fournie à l'élève à partir d'une description verbale ou d'un schéma statique. Cependant, même avec la figure disponible et en disposant de la possibilité de déplacer les objets qui la constitue, la reproduction n'est pas simple et le travail mathématique reste à faire. En effet, ce n'est pas seulement la forme graphique de la figure que l'élève doit reproduire, mais aussi son comportement dynamique. Pour y arriver, une identification des propriétés géométriques de la figure est nécessaire.

La tâche nécessite de passer d'une analyse des propriétés spatiales et graphiques de la figure à une analyse en termes géométriques. Elle requiert également de déplacer les points de la figure initiale pour l'explorer et ceux de la figure reproduite pour valider ou pas le processus de construction.

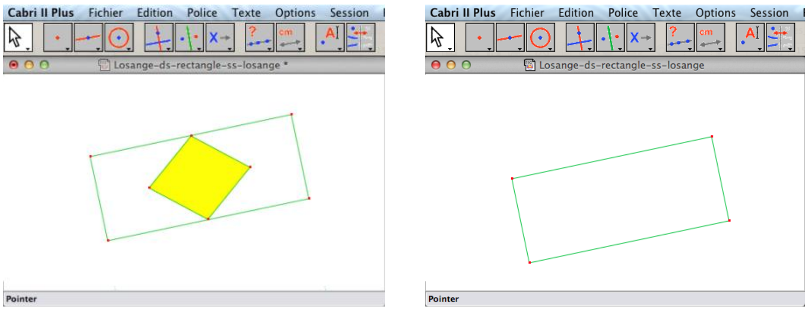

Figure 2. Dans un problème de type boîte noire, la figure modèle est donnée (à gauche). La tâche est de reconstruire la figure jaune (incluse) étant donné le rectangle (à droite).

Dans l'exemple proposé en Figure 2 (expérimenté dans une classe de CM1-CM2 à Soleymieux dans la Loire), la tâche consiste à reconstruire le quadrilatère intérieur à partir du rectangle initial (Figure 2 à droite), après avoir analysé la figure modèle (Figure 2 à gauche). Dans une boîte noire, la reconstruction de la figure peut démarrer d'une page blanche, ou bien d'un début de construction. Lors de la résolution du problème, le déplacement joue deux rôles différents. Il permet d'abord d'explorer la figure donnée en modèle (au sens de modèle à reproduire, le modèle du peintre), puis de valider ou invalider la reconstruction (voir d'autres exemples de boîtes noires dans (Charrière, 1995) (Clerc, 2006)).

II. LES DIFFICULTÉS DU DÉPLACEMENT ET LES SOLUTIONS POUR INCITER LES ÉLÈVES À DÉPLACER LES FIGURES

Le déplacement est donc une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique. Les travaux de recherche s'appuient essentiellement sur cette fonctionnalité pour montrer l'intérêt de l'usage de la géométrie pour apprendre. Pourtant, déplacer les points d'une figure n'est pas immédiat et évident, quel que soit le niveau mathématique de l'utilisateur. Nous avons montré que le déplacement n'est pas d'emblée mobilisé par les élèves (Soury-Lavergne, 2006) (Restrepo, 2007) et lorsqu'il l'est, il peut rester limité à un seul point et/ou dans son voisinage immédiat, ne produisant alors pas d'effet significatif. De plus, ce sont les connaissances de l'utilisateur qui vont lui permettre de percevoir et d'interpréter correctement ces effets. Or, les connaissances des élèves ne leur permettent pas toujours d'interpréter les rétroactions produites par le déplacement dans le cadre géométrique. Par exemple, les élèves décrivent l'évolution d'une figure par ses changements de formes, avec des expressions telles que « ça devient petit », « ça s'aplatit » et pas par la conservation ou la perte d'une propriété géométrique.

En conséquence, il est nécessaire d'abord qu'une règle explicite de déplacement des points d'une figure soit mise en place par l'enseignant lorsque les élèves utilisent la géométrie dynamique. Mais cette injonction de l'enseignant doit être relayée par la situation proposée aux élèves.

Ces constats ont amené les participants au projet MAGI à développer deux stratégies complémentaires pour améliorer l'utilisation du déplacement par les élèves : proposer des situations contextualisées qui incitent au déplacement et concevoir une fonctionnalité spécifique dans le logiciel pour déplacer les points de la figure.

1. Utiliser un contexte qui incite au déplacement

Replacer la construction géométrique dans un contexte non mathématique qui évoque un déplacement est un moyen d'inciter les élèves à bouger la figure et à obtenir des rétroactions indépendamment de l'enseignant. Dans l'exemple du « Pajerond », la voiture représentée doit rouler, (Soury-Lavergne & Maschietto, 2012, initialement présenté à Cabriworld à Rome en 2004, Figure 3). Le problème se comprend aisément par les élèves : il faut ajouter la roue manquante. La connaissance mathématique en jeu n'est pas le cercle, qui est mobilisé très facilement comme modèle d'une roue. Plus précisément, le problème posé par la voiture sans roue est celui de la construction d'un cercle étant donné son diamètre. La connaissance géométrique visée est que le point milieu d'un diamètre est le centre du cercle. Cette connaissance fonctionne comme un outil de résolution du problème dans la situation proposée. Une valeur ajoutée de la géométrie dynamique, en plus de la validation par déplacement, résulte du fait que l'on peut élaborer des situations dans lesquelles la connaissance géométrique fonctionne comme un outil de résolution de problème (Douady, 1986).

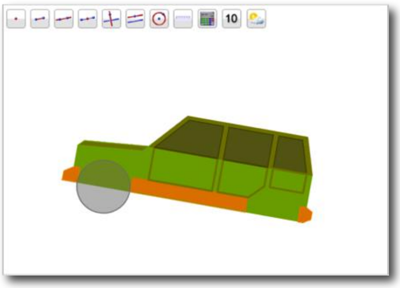

Figure 3. La figure proposée renvoie à un contexte non mathématique qui implique du déplacement. Cela favorise le fait que les élèves valident ou invalident leur construction de la roue manquante en faisant bouger la voiture.

D'autres situations conçues dans le cadre du projet MAGI reposent sur cette idée de plonger un problème mathématique dans un contexte non mathématique impliquant un déplacement. Dans de nombreux cas, il s'est avéré nécessaire de créer un point particulier pour déplacer la figure, afin de produire les rétroactions les plus significatives. C'est le point « tempête » de la situation du « Bateau sans mat » ou le point « leader » de la situation « Patrouille » (Figure 4). En bougeant le point « tempête », le bateau tangue et les mats construits au jugé ne bougent pas de la façon attendue par les élèves. De même, en déplaçant le point « leader », les alignements des avions ne sont plus respectés s'ils ont été faits au jugé.

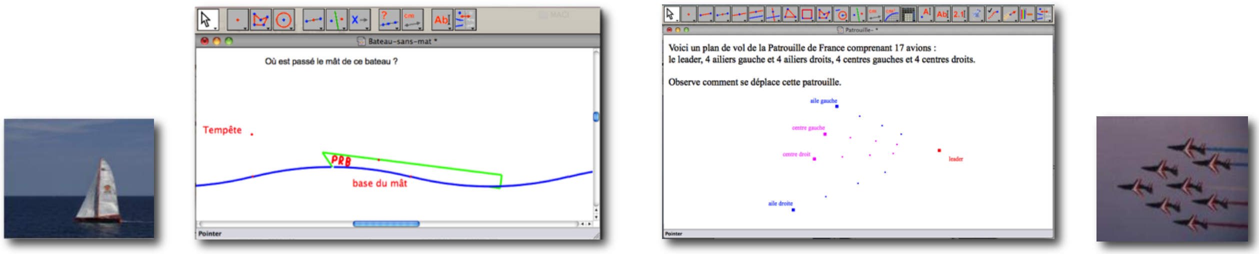

Figure 4. Les situations « Bateau sans mat » ou « Patrouille » renvoient à un contexte non mathématique impliquant un déplacement (celui d'un bateau sur l'eau ou des avions de la patrouille de France).

2. Des outils spécifiques

La mise en évidence, dans une figure, d'un point destiné à être manipulé par l'élève pour valider ou invalider par déplacement sa construction a fait émerger l'idée d'un outil spécifique dans l'environnement dont la fonctionnalité serait justement de déplacer les points de la figure, d'une façon automatique et indépendante de l'utilisateur. Ainsi le « lutin » a été développé dans le cadre du projet MAGI pour Cabri 2+. Mais il n'a pas été introduit dans la version du logiciel actuellement diffusée. De façon analogue, le « monkey » a été créé dans le logiciel CaRMetal. Le bouton « monkey », lorsqu'il est maintenu appuyé, secoue la figure. Lorsque le bouton « monkey » est relâché, les points retrouvent leur position initiale (Figure 5). Cela permet aux élèves d'observer la perte de certaines propriétés géométriques, au cours du mouvement. Cependant, il peut s'avérer difficile de percevoir ces propriétés au cours du mouvement.

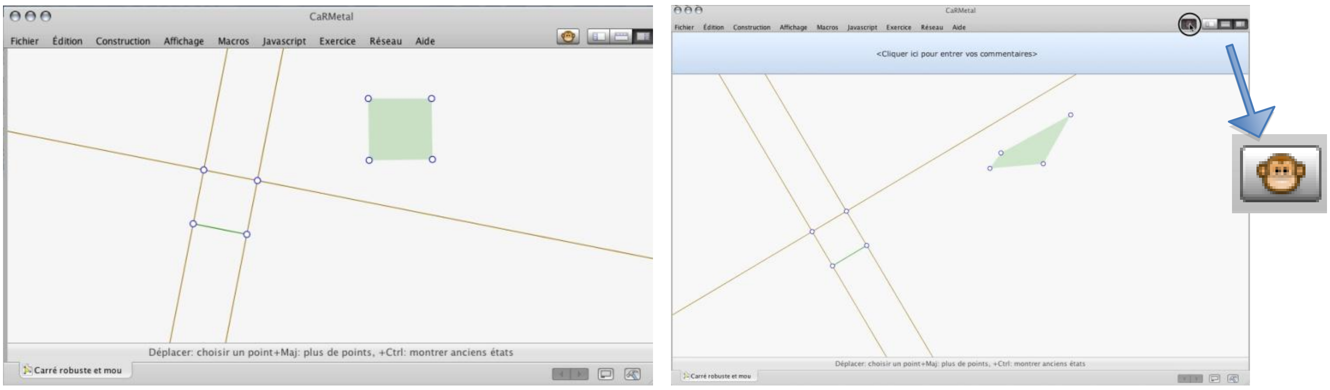

Figure 5. Interface du logiciel de géométrie dynamique CaRMetal avec le bouton « monkey », en haut à droite, qui agite les points de la figure.

3. Conclusion sur l'importance du déplacement et les différents usages possibles

L'intérêt de l'usage de la géométrie dynamique repose principalement sur la possibilité de déplacer les objets des figures construites. Si des solutions sont identifiées pour inciter les élèves à le faire, il est néanmoins toujours important de mettre en place de façon explicite avec les élèves le recours au déplacement pour valider les constructions réalisées.

Cependant, lors des nombreuses expérimentations réalisées à partir de la collection de situations conçues dans le cadre du projet MAGI, nous avons également pu observer d'autres usages spontanés du déplacement. Dans l'exemple des boites noires, le déplacement est d'abord utilisé pour explorer la figure, bien avant de valider la reconstruction. Au niveau du collège, Restrepo (2007) a identifié différentes finalités associées au déplacement en géométrie dynamique, tels que l'ajustement ou la recherche de trajectoires. Coutat (2006) a conçu des situations qui exploitent l'idée de construction molle, pour laquelle l'ajustement de la figure avec un contrôle perceptif constitue une partie de la tâche attendue et permet la conceptualisation des propriétés géométriques. Ainsi le déplacement en géométrie dynamique n'est pas seulement un moyen de validation, mais peut jouer d'autres rôles dans la situation didactique, en particulier avec des constructions molles.

C'est sur cette piste que les plus récents développements relatifs à l'utilisation de la géométrie dynamique pour l'école primaire ont été réalisés. Ils ont permis de prendre en compte le point de vue sur le travail géométrique apporté par la déconstruction dimensionnelle des formes de Duval (2005).

III. LA DÉCONSTRUCTION DIMENSIONNELLE DES FORMES

Dans les problèmes évoqués précédemment, l'enjeu de la résolution peut se résumer à construire correctement certains points clefs de la figure. Sur la Figure 1, il s'agit de trouver différentes procédures de construction des sommets d'un rectangle. Dans la boîte noire de la Figure 2, la solution passe par la construction des milieux de milieux des côtés du rectangle initial. Dans « Pajérond », la voiture sans roue (Figure 3), c'est le centre du cercle qui doit être correctement construit. Enfin, ce sont des points qui modélisent les avions de la patrouille de France (Figure 4). De même, le déplacement est pensé essentiellement comme le déplacement des points de la figure.

Cette remarque est valable pour de nombreux problèmes de construction avec la géométrie dynamique. On pourrait résumer la construction d'une figure à la construction de ses points caractéristiques, comme dans la géométrie du compas de Mascheroni (1798). Ces points sont construits soit comme points libres, soit comme point sur objet ou encore intersection d'objets géométriques (droite, segment ou cercle) et/ou milieu. De ce point de vue là, le travail nécessaire avec la géométrie dynamique demande à l'élève de passer d'une appréhension globale de la figure à une appréhension ponctuelle.

La fin de la construction consiste ensuite à utiliser ces points pour créer l'objet voulu, essentiellement avec les outils segment, polygone ou cercle à l'école primaire. Cette partie finale de la construction, qui peut se résumer à relier « correctement » les points construits, n'est pas considérée comme problématique du point de vue du travail géométrique, bien qu'elle le soit, en particulier au niveau primaire.

1. Conceptualisation du point et insuffisance de la distinction entre appréhension globale et appréhension ponctuelle de la figure

Cependant, l'enjeu de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire n'est pas d'amener les élèves à conceptualiser la notion de point. Donc la géométrie dynamique à l'école primaire doit pouvoir proposer des situations qui ne nécessitent pas le passage par un point de vue ponctuel sur les figures. En conséquence, la distinction entre l'appréhension globale et l'appréhension ponctuelle d'une figure n'est pas suffisamment fine pour décrire tout le travail géométrique qu'il doit être possible de faire à l'école primaire. De plus, si on considère les exemples précédents avec cette seule distinction, on ne saisit pas en quoi ces situations sont très difficiles pour les élèves.

Duval (2005) explique que le travail géométrique va à l'encontre des processus spontanés de visualisation des figures. Le travail géométrique consiste en particulier en une déconstruction dimensionnelle des formes, qui passe par l'identification dans la figure d'objets géométriques de plus petite dimension que la figure initiale et des propriétés qui lient ces objets (dimension est entendu au sens de dimension mathématique et pas celui de la taille). Ce processus fondamental du travail géométrique est décrit ainsi : « *… décomposer toute forme, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions.* » (op. cit. p. 16). Ainsi, les unités figurales ne sont pas uniquement celles de dimension zéro, les points. Toutes les unités figurales intermédiaires doivent pouvoir être mobilisées.

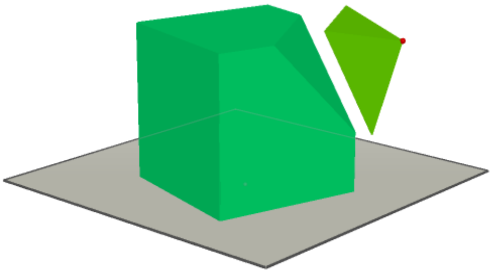

Figure 6. Reconstruction du sommet manquant du cube par un tétraèdre.

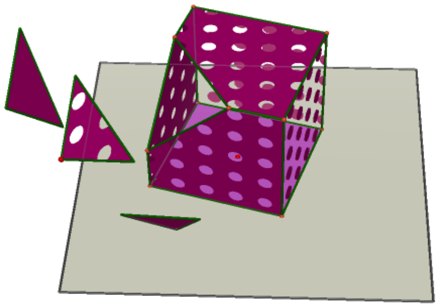

Figure 7. Reconstruction du sommet manquant du cube par les faces

L'exemple d'un cube tronqué en géométrie dans l'espace (Mithalal, 2010) permet d'illustrer comment différentes déconstructions dimensionnelles peuvent être envisagées dans l'analyse a priori d'une situation. La situation, proposée à des lycéens de 2d, demande de trouver le plus grand nombre de méthodes pour reconstruire le sommet manquant du cube. Cette consigne simple autorise de nombreuses interprétations, notamment sur ce qui constitue le sommet manquant du cube, rendant possibles différentes déconstructions dimensionnelles. Tout d'abord la reconstruction du sommet, au sens du sommet de la montagne, avec le tétraèdre manquant, renvoie à une déconstruction des formes sans changement de dimension, le cube tronqué 3D étant complété par le tétraèdre 3D (Figure 5). Ensuite, en considérant une déconstruction dimensionnelle 3D/2D, c'est à dire du solide aux surfaces, on peut prévoir la reconstruction des parties de faces manquantes, c'est-à-dire la construction les triangles qui complètent les faces carrés (Figure 7). La reconstruction des arêtes, par exemple par prolongement des arêtes existantes implique une déconstruction dimensionnelle 3D/1D (Figure 8). Enfin, la reconstruction du sommet manquant par symétrie d'un sommet présent sur la figure du cube incomplet (par symétrie par rapport au centre d'une face par exemple), mobilise des unités figurales de dimension nulle et correspond à une déconstruction dimensionnelle 3D/0D (Figure 9).

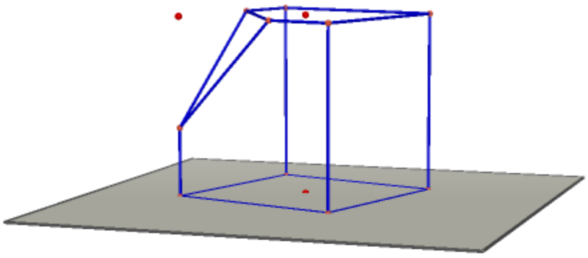

Figure 8. Reconstruction du sommet manquant du cube par construction du point sommet.

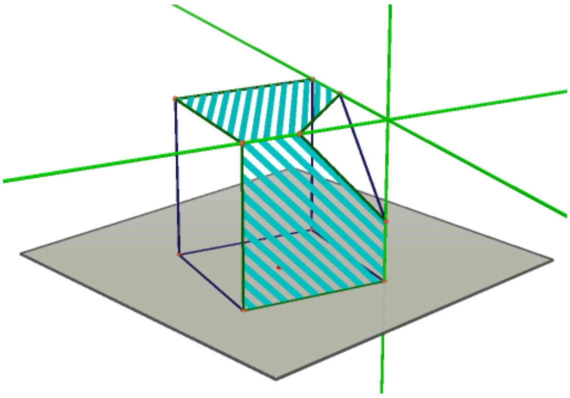

Figure 9. Reconstruction du sommet manquant du cube par prolongement des arêtes.

Cet exemple permet d'illustrer les nombreuses déconstructions dimensionnelles envisageables et dégage des possibilités de travail à l'école primaire autres que les déconstructions dimensionnelles complètes (impliquant les points 0D).

Dans le cas de la géométrie plane, un des objectifs de l'enseignement est alors de faire passer de l'analyse visuelle d'une figure d'un point de vue global, où la figure est considérée comme un assemblage de surfaces, les formes 2D, à un point de vue 1D, pour lequel la figure est considérée comme un assemblage de lignes, les formes 1D (Duval & Godin, 2006).

2. Des exemples dans l'espace et dans le plan

C'est sur cette idée que plusieurs situations pour l'école primaire ont été élaborées avec la géométrie dynamique pour travailler la déconstruction dimensionnelle des formes. Étant donnée la possibilité qu'offre la géométrie dynamique pour la géométrie plane et pour la géométrie de l'espace, nous présentons un exemple dans chaque cas pour montrer les pistes explorées.

Le premier exemple concerne les patrons du cube (Figure 10 et Figure 11). La situation et l'environnement de géométrie dynamique sont présentés en détail dans ces actes, dans le texte de l'atelier « Explorer les patrons du cube : de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématiques dynamiques » (Calpe, Rabatel, Zucchetta, & Soury-Lavergne, 2014). L'environnement de géométrie dynamique utilisé permet de sélectionner des carrés et de transformer l'assemblage de carrés en un patron de cube qui se replie. La Figure 10 présente les principales étapes de la construction : sélection de carrés, transformation de l'assemblage de carrés en un patron qui peut se plier et déplier, pliage des faces par rotation autour des arêtes communes, obtention d'un cube.

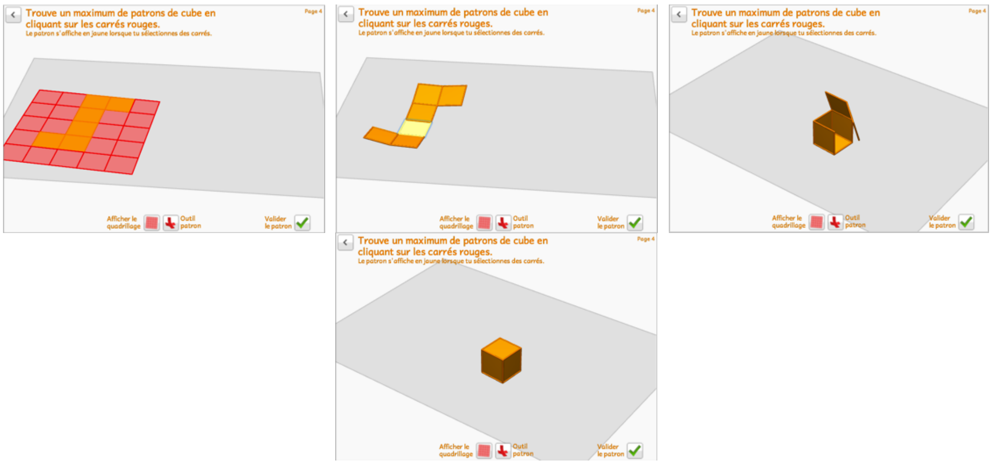

Figure 10. Quatre images écran des étapes de construction d'un cube à partir de son patron, vue 3D.

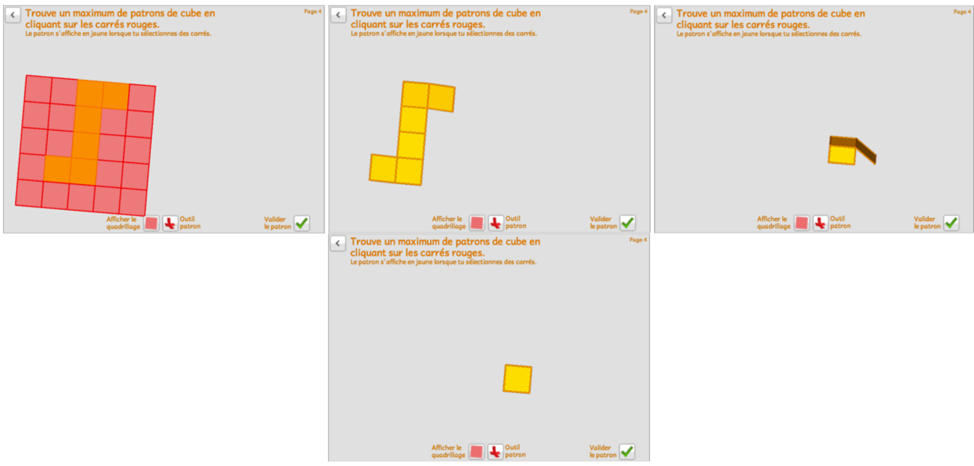

Figure 11. Les mêmes quatre images écran vues de dessus après changement du point de vue, vue 2D.

Dans la situation proposée, l'articulation 2D-3D est particulièrement complexe. Elle existe finalement à trois niveaux : celui des objets théoriques manipulés, le cube et son patron, celui des représentations de ces objets, avec une représentation 2D d'un objet 3D (le cube à l'écran de l'ordinateur) et enfin celui du point de vue sur la représentation. En effet, dans la même fenêtre, sans rupture et de façon continue, la figure peut être vue en perspective (Figure 10) ou basculée pour être vue du dessus, en 2D (Figure 11). Au delà du changement de point de vue, un autre intérêt de cette situation est qu'elle permet aux élèves de travailler les patrons du cube à partir des faces, sans avoir à construire les côtés des carrés ou les sommets. C'est une déconstruction dimensionnelle 3D/2D qui est ainsi travaillée dans cette situation avec la géométrie dynamique.

Le deuxième exemple est donné par la géométrie 2D et la possibilité de travailler les triangles, avec la géométrie dynamique, sans recourir immédiatement à la construction de sommets par intersection (Figure 12). Le problème travaillé est celui de la construction d'un triangle étant données les mesures de ses trois côtés. La solution visée est la construction du troisième sommet à l'intersection de deux cercles (issu du travail de master de Voltolini (2014), présenté par une communication dans ces actes « A la découverte des triangles : de la manipulation de segments dans un logiciel de mathématiques dynamiques à la construction à la règle et au compas »).

Dans la situation élaborée avec l'environnement Cabri Elem, il s'agit pour les élèves de former des triangles à partir de segments de longueurs données qui peuvent se déplacer ou pas à l'écran. Les manipulations et déplacements des segments qui permettent éventuellement de former un triangle, se décomposent en translation ou rotation. Ces déplacements dans l'environnement de géométrie dynamique sont différents de ceux qui seraient mis en œuvre dans l'espace sensible en ceci qu'ils ne sont pas réalisés simultanément mais successivement. Ainsi, la rotation d'un segment autour d'une de ses extrémités est isolée dans la manipulation et est incontournable pour former le triangle. C'est cette rotation, avec la trace du segment et de son extrémité, qui est ensuite réinvestie dans les procédures de construction à la règle et au compas.

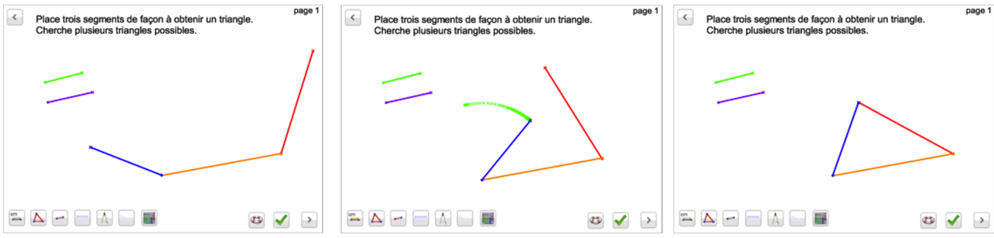

Figure 12. Trois états de la figure lors de la formation d'un triangle à partir de trois segments. L'arc de cercle vert de la figure du milieu a été ajouté pour mettre en évidence, aux yeux du lecteur, la rotation du segment et la trajectoire de son extrémité.

Dans ce travail, la construction du triangle, figure 2D c'est-à-dire surface plane aux yeux d'une majorité d'élèves, est obtenue par la manipulation d'objets 1D, la construction d'une ligne brisée 1D qui en se refermant produit la surface. La déconstruction dimensionnelle ainsi mise en œuvre est 2D/1D. Cela montre comment plusieurs étapes de la construction du triangle peuvent être travaillées avant d'arriver à la construction du troisième sommet (0D) comme intersection de deux arcs de cercle. Au cours de ce travail, l'utilisation d'un compas est introduite pour « faire tourner » les segments et seulement à la fin de la situation, la construction des cercles et de leur intersection est introduite.

IV. L'ESPACE SENSIBLE ET LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE

Le dernier aspect du travail mené sur les usages de la géométrie dynamique à l'école primaire concerne l'articulation entre la géométrie dynamique et les autres espaces mobilisés dans le travail géométrique, dont celui des objets tangibles.

Pour caractériser les différents rapports possibles entre la géométrie et le monde réel, auquel appartiennent les objets tangibles, Perrin-Glorian et Salin (2010) puis Perrin-Glorian et al. (2013) mettent en évidence trois espaces en jeu dans le travail géométrique : l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace géométrique théorique. La relation entre ces trois espaces et les deux domaines de connaissances, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques doit encore être précisée. L'hypothèse que je fais est que la résolution de problème dans les espaces sensibles et graphiques mobilise de façon privilégiée les connaissances spatiales et, seulement dans un deuxième temps, les connaissances géométriques. Inversement, la résolution des problèmes géométriques mobilise prioritairement les connaissances géométriques et dans un deuxième temps les connaissances spatiales. On voit alors se dessiner le rôle clef de l'espace graphique. Dans leur présentation des trois espaces, Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq donnent à cet espace graphique un rôle pivot et différent suivant qu'il est en relation avec l'espace sensible ou l'espace géométrique.

La géométrie dynamique partage de nombreuses caractéristiques avec l'espace graphique des représentations papier-crayon. Il s'agit dans les deux cas d'un micro-espace, dans lequel des représentations d'objets rendent possibles des expérimentations. Coutat (2006) propose de parler de registre graphique animé ou registre graphique-dynamique. Pourtant, la différence est plus importante qu'un enrichissement de l'espace graphique en particulier parce que la géométrie dynamique intègre les outils qui produisent les représentations et aussi parce qu'elle produit des rétroactions qui transforment la nature des expérimentations possibles. Enfin, la géométrie dynamique ne se substitue pas à l'espace graphique du papier-crayon. C'est plutôt en pensant la complémentarité entre le papier-crayon et l'environnement informatique que de nouvelles situations sont élaborées.

C'est le cas de la proposition d'atelier de Bombrun et Thomas dans ces actes (Bombrun & Thomas, 2014). C'est aussi ce qui est développé dans MAGESI (Mieux Apprendre la Géométrie dans des ESpaces Instrumentés, http://magesi.ens-lyon.fr/ (Rolet, 2003)) une ingénierie qui fait appel à l'utilisation d'espaces de différentes tailles et d'instruments divers. Quatre séquences organisées autour de trois figures géométriques (le carré, le parallélogramme et le losange) et à propos de la symétrie, couvrent le programme de géométrie des classes de CM1 et CM2 du cycle 3. Les séances reposent sur la construction des figures dans trois espaces : celui de la feuille de papier (Figure 14), celui du sol du préau (Figure 13) et celui de la géométrie dynamique (Figure 15). Ces espaces de production graphique ne sont pas les espaces identifiés par Perrin-Glorian et al. Ils sont caractérisés par les tailles (micro-espace pour le papier-crayon et la géométrie dynamique, meso-espace pour le sol du préau) et les instruments disponibles. Ils correspondent à une déclinaison de l'espace graphique de Perrin-Glorian et al. et partagent aussi des caractéristiques et des contraintes avec l'espace sensible.

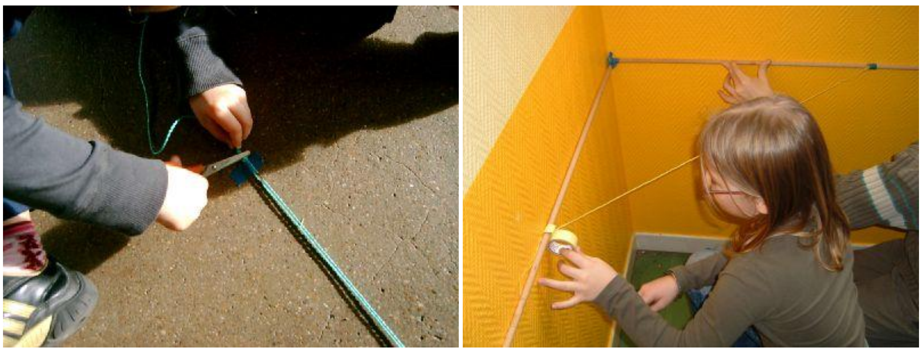

Figure 13. Construction d'un carré dans un meso espace
(http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=3)

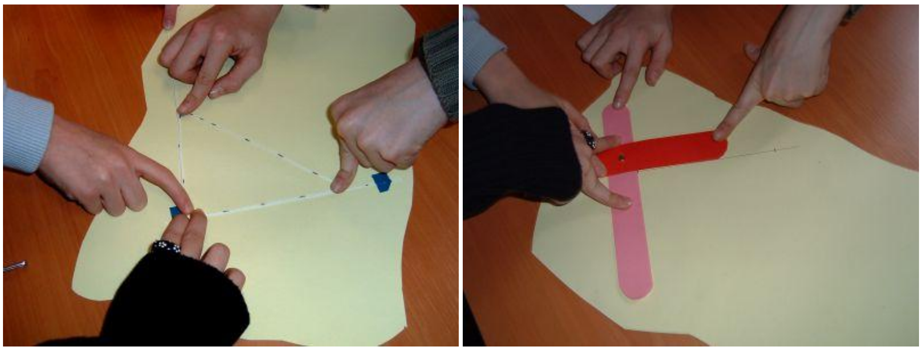

Figure 14. Construction d'un carré sur feuille de papier
(http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=5)

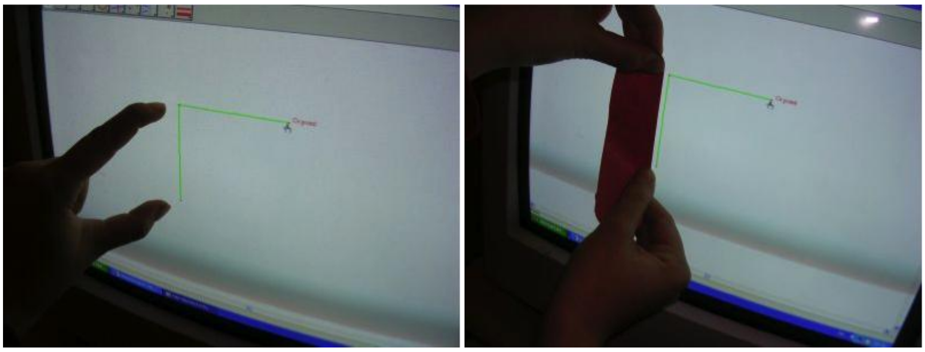

Figure 15. Construction d'un carré avec un logiciel de géométrie dynamique
(http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=22)

Dans les nouvelles situations conçues avec la technologie Cabri Elem et expérimentées depuis 2011 comme, par exemple, la situation patrons du cube ou la situation triangle, l'articulation entre le travail avec la géométrie dynamique, celui dans l'espace graphique et le recours à des objets de l'espace tangible est à nouveau étudiée. Dans la recherche des patrons du cube, il y a utilisation de matériel tangible, tels que les polydrons ou des cubes et des patrons papier pliables, production de représentations des patrons identifiés et utilisation de ces productions comme mémoire pour travailler avec l'environnement informatique. L'environnement de géométrie dynamique permet de dépasser certaines contraintes de l'espace sensible qui ne sont pas pertinentes du point de vue des connaissances géométriques. Par exemple, dans l'espace sensible, le patron papier doit être légèrement plus grand que le cube en bois si l'on veut pouvoir envelopper correctement le cube avec le patron. Ce n'est plus le cas dans l'environnement informatique. Dans le cas des constructions de triangles étant données les mesures des trois côtés, la situation dans l'environnement informatique débouche sur des travaux en papier-crayon et sur l'introduction du compas comme instrument de construction du triangle en papier-crayon. Le compas est simulé dans la géométrie dynamique. Il est aussi présent comme outil de production dans l'espace graphique et enfin il est un objet de l'espace sensible qui matérialise entre ses deux pointes un segment de longueur fixe à placer au bon endroit.

Ces travaux illustrent le fait que la géométrie dynamique et plus généralement les environnements informatiques pour l'apprentissage ne remplacent pas les autres espaces mais les complète, l'accent étant mis récemment sur l'articulation avec l'espace sensible.

V. CONCLUSION SUR LES APPORTS DE LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE À LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Pour conclure, les récentes évolutions de l'usage de la géométrie dynamique à l'école primaire décrites ci-dessus sont en partie possibles grâce à l'évolution de la technologie elle-même, qui a pris en compte certaines spécificités de l'école primaire (Mackrell et al., 2013). Ces évolutions concernent :

- Les déconstructions dimensionnelles partielles qui permettent de concevoir des situations riches et accessibles aux élèves, sans passage obligé par la conceptualisation du point et la construction des points d'une figure comme points d'intersection. Les nouveaux environnements de géométrie dynamique permettent de concevoir des situations d'apprentissage donnant lieu à des déconstructions dimensionnelles 3D/2D ou 2D/1D tout à fait productives à l'école primaire.

- La prise en compte, dans les situations et ingénieries proposées, de la mise en relation de la technologie avec d'autres espaces dans lesquels se déroule l'activité mathématique, comme le l'espace sensible des objets et l'espace graphique des représentations papier-crayon.

- Le recours au déplacement d'une figure pour produire les rétroactions intéressantes est toujours central dans l'utilisation de la géométrie dynamique. Mais le déplacement est maintenant mieux compris, les différents types de déplacement sont reconnus et identifiés comme celui pour ajuster perceptivement une figure. De plus, la nécessité de recourir au déplacement est mieux intégrée dans les situations, à l'aide d'un contexte non mathématique ou d'outils spécifiques. L'injonction de l'enseignant est soutenue par la nécessité de la situation elle-même.

- Différents types de rétroactions sont maintenant possibles qui dépassent la seule validation obtenue par la non conservation des propriétés au cours du déplacement (dorénavant bien connue en géométrie dynamique). Les nouvelles rétroactions, déterminées par les concepteurs des situations, sont plus variées que le seul changement de position des objets à l'écran, sous-jacent à la validation par déplacement. Il s'agit par exemple de rétroactions visuelles, statiques ou dynamiques comme l'apparition ou la disparition d'images, ou d'un son ou encore de l'impossibilité de déplacer un objet à un moment donné. Elles peuvent être déclenchées automatiquement ou bien suite à une action de l'élève sur les objets à l'interface. Ces diverses rétroactions permettent de concevoir des aides à la stratégie de résolution mise en œuvre par l'élève ou bien une évaluation de la solution obtenue. Cette validation ou invalidation de la construction de l'élève par le système répond à une attente des utilisateurs.

Ces avancées posent peut-être pour l'instant plus de questions sur les processus d'apprentissage de la géométrie qu'elles n'apportent directement de réponses. Mais elles ouvrent des possibilités que nous, chercheurs, élèves et enseignants, avons beaucoup de plaisir à étudier.

VI. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Assude, T., Grugeon, B., Laborde, C., & Soury-Lavergne, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? In *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference "Technology Revisited"* (pp. 317–325). Hanoi Vietnam. Retrieved from http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/icmi-study-17/ICMI17proceedingsPart2.pdf

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, *53*, 39–56.

Bombrun, C., & Thomas, R. (2014). GeoGebra entre cour de récréation et feuille de papier : illustration avec le concept de cercle au cycle 3. Presented at the XXXXe colloque de la COPIRELEM, Nantes: IREM des pays de la Loire.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage Grenoble,, France.

Calpe, A., Rabatel, J.-P., Zucchetta, J.-F., & Soury-Lavergne, S. (2014). Explorer les patrons du cube : de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématique dynamique. In *XXXXe colloque de la COPIRELEM*. Nantes, France: IREM des pays de la Loire.

Charrière, P.-M. (1995). Boîtes noires, *9*. Retrieved from http://icosaweb.ac-reunion.fr/GeomJava/abraCAda/M_abra.htm

Clerc, B. (2006). Boîte noire en géométrie dynamique. Mise en place et utilisation d'une boite noire avec Tracenpoche, *2*. Retrieved from http://revue.sesamath.net/spip.php?article13

Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété*. Université Joseph Fourier.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *7*(2), 5–31.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R., & Godin, M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7–27.

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283–317.

Laborde, C. (2004). Come la geometria dinamica puo rinnovare i processi di mediazone delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della matematica: una scienza per la scuola* (pp. 19–28). Bologna.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, *14*(1.2), 165–210.

Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 81–90). Oxford, Royaume-Uni.

Mascheroni, L. (1798). *Géométrie du compas*. Paris: Duprat. Retrieved from http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-9097

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM*, *45*(7), 959–971. doi:10.1007/s11858-013-0533-3

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (Thèse de doctorat). Joseph Fourier, Grenoble, France. Retrieved from tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/09/41/PDF/these_mithalal.pdf

Perrin-Glorian, M.-J., Mathe, A.-C., & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, *90*, 5–41.

Perrin-Glorian, M.-J., & Salin, M.-H. (2010). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? (pp. 47–81). Presented at the Séminaire national de didactique des mathématiques Année 2009, Université de Paris Diderot: IREM de Paris.

Restrepo, A. M. (2007). L'instrumentation du déplacement dans un logiciel de géométrie dynamique. In I. B. F. Conne (Ed.), *XII école d'été de l'ARDM*. Sainte Livrade France.

Rolet, C. (2003). Teaching And Learning Plane Geometry In Primary School: Acquisition Of A First Geometrical Thinking. Presented at the CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy. Retrieved from http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/

Soury-Lavergne, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Ed.), *Espace Mathématique Francophone*. Sherbrooke (Quebec): Université de Sherbrooke.

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathemaTICE*, (27). Retrieved from http://revue.sesamath.net/spip.php?article364

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2012). Les stratégies du garagiste. *Cahiers pédagogiques*, (498).

Voltolini, A. (2014). A la découverte des triangles : de la manipulation de segments dans un logiciel de mathématiques dynamiques a la construction à la règle et au compas. In *XXXXe colloque de la copirelem*. Nantes, France: IREM des pays de la Loire.