Université Claude Bernard Lyon 1

Master2 HPDS

Histoire Philosophie et Didactique des Sciences

Analyse du rôle d'une ressource numérique dans la mise en place de problèmes de recherche dans la classe de mathématiques

Gilles Aldon
Sous la direction de Viviane Durand-Guerrier

27 juin 2008

Résumé

L'intégration des problèmes de recherche par les enseignants dans les cours de mathématiques bien que longuement étudiée et institutionnelement encouragée n'est encore que faiblement réalisée. Une équipe de recherche à laquelle je participe a construit une ressource dont l'objectif est d'aider à cette intégration. Le propos de la présente étude est d'étudier le rôle et la place de cette ressource dans le milieu des professeurs dans une situation professionnelle de préparation et de mise en place d'un problème de recherche dans la classe.

Remerciements

Un immense merci à Sandrine Montillet qui a accepté de m'accueillir dans sa classe et a pris beaucoup de son temps pour discuter avec moi de son travail. Merci également à Claire Tardy qui m'a laissé expérimenter dans le stage qu'elle organisait, et merci à tous les stagiaires qui ont joué le jeu et m'ont donné par leurs remarques des indications précieuses sur la ressource.

Merci, bien sûr à tous les membres de l'équipe EXPRIME pour le travail considérable fait pour réaliser cette ressource qui est l'objet d'étude de mon travail mais aussi pour les discussions mathématiques et didactiques si enrichissantes conduites ces trois dernières années ; merci, donc à :

Pierre-Yves Cahuet
Viviane Durand-Guerrier
Mathias Front
Michel Mizony
Didier Krieger
Claire Tardy

Et merci enfin à Claude Tisseron qui m'a tant apporté d'un point de vue mathématique, didactique et surtout humain.

Les illustrations de la couverture et de cette page sont extraites de la bande dessinée de Claude Tisseron : « Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts » parue à l'IREM de Lyon en 1985 et actuellement en ligne sur le site de la feuille@problèmes : http ://irem-fpb.univ-lyon1.fr

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Champ de recherche

Ce mémoire se situe dans le cadre de la didactique des mathématiques et s'intéresse aux conditions de diffusion des problèmes de recherche dans la classe de mathématiques. Il s'appuie fortement sur le travail de l'équipe EXPRIME[1].

1.2 Contexte de l'étude

Le contexte de l'étude est double :

- d'une part depuis plus de vingt ans, l'IREM de Lyon développe des travaux autour de la diffusion des « problèmes ouverts » [Arsac *et al.*, 1991] ; [Arsac et Mante, 2007] qui montrent à la fois l'intérêt des enseignants pour ces pratiques de classe et la difficulté de mise en œuvre [Peix et Tisseron, 1998].
- d'autre part les injonctions institutionnelles à utiliser des problèmes de recherche dans l'enseignement des mathématiques, présentes dans les programmes officiels depuis plus de quinze ans, sont de plus en plus pressantes et vont faire l'objet d'évaluation institutionnelle au baccalauréat [Fort, 2007].

1.3 Problématique

La question de l'appropriation des problèmes de recherche par les enseignants comme levier pour l'enseignement des mathématiques n'est pas neuve et a été longuement étudiée ; que ce soit pour une intégration dans la classe [Arsac *et al.*, 1991], [Tisseron et Aldon, 1998] ou dans des processus spécifiques (Math à modeler, math en jean) [Tisseron *et al.*, 1996], mais aussi à travers les théories du « problem solving » proposées par [Polya, 1945], et reprises en particulier par [Schoenfeld, 1999] ou plus récemment, [Brown et Walter, 2005],

[1] EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'Ecole est une équipe de recherche regroupant des chercheurs de l'Université Lyon 1 (UFR de Mathématiques, IREM, LEPS de l'IUFM) et de l'INRP.

[Harskamp et Suhre, 2007]. Cependant, et malgré les apports reconnus en terme d'apprentissage de démarche scientifique, la diffusion dans les classes n'est pas généralisée.

Nous faisons l'hypothèse que, parmi les freins au développement des problèmes de recherche dans la classe, les points ci-dessous sont déterminants :

1. La part importante de la dimension expérimentale dans le travail de recherche rentre en conflit avec la représentation contemporaine dominante parmi les enseignants, et au delà dans la société, de ce que sont les mathématiques.
2. L'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences transversales liées au raisonnement, en laissant au second plan les apprentissages sur les notions mathématiques en jeu, est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs, en particulier en ce qui concerne l'avancement dans le programme.
3. Les difficultés pour le professeur de repérer ce qui relève des mathématiques dans l'activité des élèves, et par suite de choisir ce que l'on peut institutionnaliser à l'issue du travail en lien avec les programmes de la classe.
4. Les difficultés rencontrées par les professeurs pour évaluer ce type de travail, compte tenu de ce que les modes d'évaluation habituels ne sont pas appropriés.

1.4 Objet d'étude

Dans ce contexte, nous travaillons à l'élaboration d'une ressource dont l'objectif est de permettre à des enseignants de mathématiques de collège et lycée d'intégrer les problèmes de recherche dans leur enseignement. La question se pose d'étudier les conditions pour que cette ressource facilite la mise en place dans la classe. En quoi cette ressource peut permettre, dans des conditions de formation et en autonomie, d'intégrer dans l'enseignement des mathématiques à un niveau donné l'étude de problèmes de recherche dans la classe ? D'une façon plus précise, cette ressource est pensée pour être un élément du milieu [Brousseau, 1989] des enseignants dans une situation d'élaboration de situations de classe reposant sur des problèmes de recherche. L'étude que nous nous proposons de décrire est une méta-situation pensée en terme de situation (au sens de la théorie des situations).

1.5 Question de recherche

En quoi la ressource peut-elle s'intégrer aux milieux du professeur pour aider à la construction et à la compréhension des milieux des élèves dans une situation de problème de recherche ?

Pour préciser un peu cette question nous nous attacherons à expliciter les cadres théoriques sur lesquels s'appuient cette recherche dont nous explicitons dans un premier temps la méthodologie.

1.6 Méthodologie

La méthodologie mise en place pour donner des éléments de réponse à la question posée repose sur une ingénierie didactique [Artigue, 1988] classique : le constat d'un point du système didactique nous apparaît comme non entièrement satisfaisant (l'usage des problèmes de recherche dans la classe de mathématique) ; une analyse de ce point de fonctionnement débouche sur la nécessité d'apporter une aide par l'intermédiaire d'une ressource à destination des professeurs et la présente étude tend à montrer l'effet de l'usage de cette ressource sur le système.

Pour atteindre ce but, la méthodologie est construite sur une expérimentation en trois phases :

1. participation à un stage de formation continue des enseignants sur le thème « des problèmes dans la classe », observation à cette occasion de la prise en main de la ressource par des professeurs dans une situation de préparation d'une séance de classe,
2. observation de la mise en place dans la classe d'une séance de recherche de problèmes,
3. entretien avec la professeure de la classe.

Ces trois phases s'articulent entre elles dans le but d'arriver à un théorème d'existence : la ressource peut s'intégrer au milieu objectif[2] du professeur pour lui permettre d'organiser les milieux des élèves dans une situation de recherche de problème en classe. Mais ces trois phases ont également des objectifs spécifiques en terme d'évaluation de la ressource et de sa position dans les milieux du professeur :

1. étude de l'utilisabilité de la ressource au sens de [Tricot *et al.*, 2003] par une évaluation empirique et étude de la position de cette ressource dans le milieu des professeurs,
2. étude de l'utilité de la ressource, et de la construction par le professeur du milieu des élèves leur permettant un apprentissage,
3. étude de l'acceptabilité de la ressource et évolution de la position de la ressource dans le milieu du professeur

[2] Nous définirons ces termes dans le chapitre suivant

Chapitre 2

Cadres théoriques

2.1 Les mathématiques

Il peut peut-être paraître surprenant et pléonasmatique de noter les mathématiques comme cadre théorique d'un mémoire de didactique des mathématiques, mais la construction de la ressource présentée s'appuie très fortement sur une analyse des situations mathématiques et sur les objets mathématiques en jeu. Les mathématiques et l'étude des objets mathématiques en jeu sont à la base de la construction des situations présentées dans la ressource. Nous reviendrons dans le chapitre consacré à la présentation de la ressource sur les hypothèses qui ont présidé à sa réalisation et sur la place des mathématiques et des objets dans ce travail.

2.2 La théorie des situations

La théorie des situations [Brousseau, 1986a] propose un cadre théorique de l'apprentissage par des processus d'adaptation de l'apprenant à son environnement et étudie particulièrement deux classes d'adaptation présentées par [Artigue, 1997] comme :

> *Les adaptations a-didactiques sont celles qui mettent en jeu un sujet modélisé comme sujet « cognitif » : les adaptations s'effectuent par rapport à une situation vécue comme mathématiquement problématique, mais sans que l'on y fasse intervenir pour autant de régulation didactique. Elles sont analysables en termes d'actions (dont la mise en oeuvre de techniques), organisées ou non en stratégies, de coût ; leur signification est recherchée en identifiant les prises de décisions dans un ensemble de possibles, compte tenu des possibles d'actions et des rétroactions offertes par le « milieu ». (...) Les adaptations didactiques sont celles qui mettent en jeu un sujet modélisé comme sujet « institutionnel ». Elles s'effectuent en particulier en s'appuyant sur les connaissances de l'élève relatives à la coutume didactique et au contrat didactique, c'est-à-dire relevant de règles parfois explicites mais le plus souvent implicites qui règlent les attentes respectives et le jeu des acteurs de la relation didactique.*

Comme le signale Guy Brousseau [Brousseau, 1997] :

> *L'action du professeur comprend une forte composante de régulation des processus d'acquisition de l'élève. L'élève lui même apprend par des régulations de ses rapports avec son « milieu ».*

Le « milieu » décrit dans un premier temps par Brousseau comme :

> *Le milieu est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné.* [Brousseau, 2004]

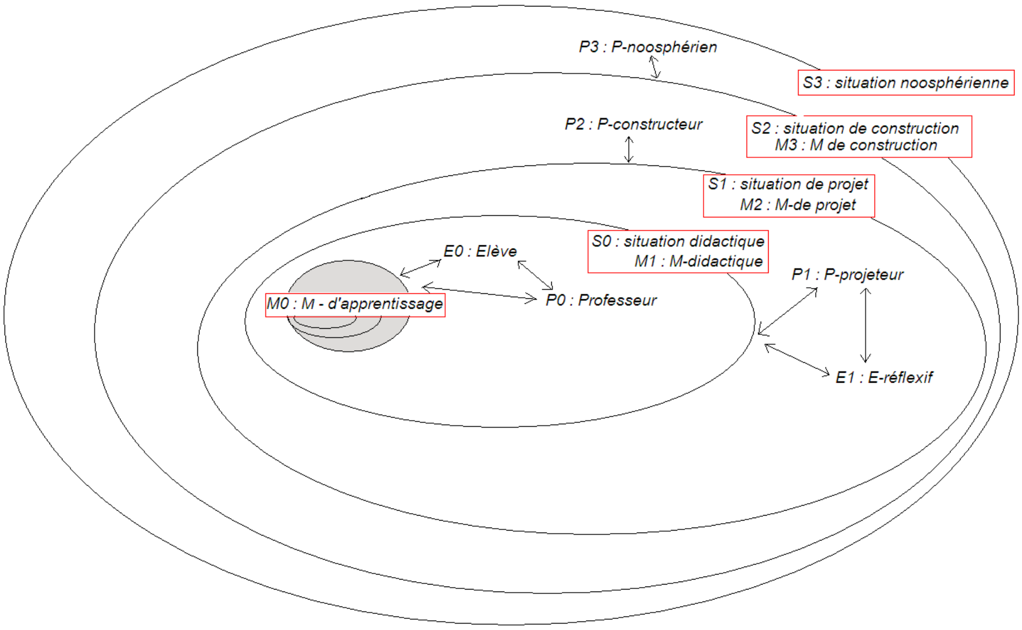
C'est ce milieu qui permet la construction de connaissances :

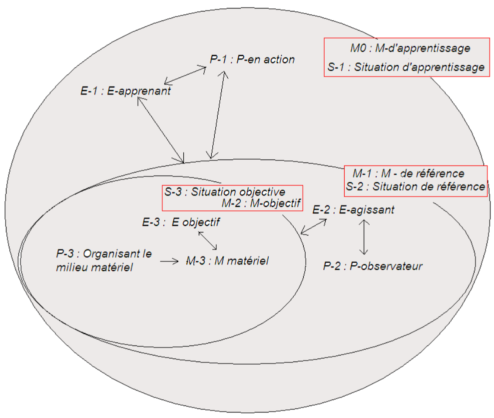
> *« Agir » consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions.* [Brousseau, 1997]

En nous appuyant sur la théorie piagètienne, nous faisons l'hypothèse psychologique de l'apprentissage par adaptation au milieu. Le rôle du professeur est donc de mettre en scène le jeu de l'apprenant avec le milieu. Nous nous appuierons en particulier sur la structuration du milieu, proposé par Brousseau [Brousseau, 1986a] [Brousseau, 1988] [Brousseau, 1997] reprise et améliorée notamment par [Margolinas, 1995], dans le cadre d'une analyse *a posteriori*, [Bloch, 1999], [Bloch, 2005] et utilisée et commentée notamment par [Houdement, 2004].

Nous utiliserons cette théorie à deux niveaux, d'une part dans l'analyse des situations proposées par la ressource et d'autre part dans la mise en place et l'analyse de l'ingénierie didactique susceptible d'apporter des réponses à la problématique annoncée.

Revenons dans un premier temps sur la structuration de la notion de milieu que l'on peut représenter par une structure en « oignon » :





Le schéma peut également être reproduit en tableau pour en faciliter la lecture :

Niveau	**P**	**E**	**Situation**	**Milieux**
3	P-noosphérien		situation noosphérienne	milieu de construction
2	P-constructeur		situation de construction	milieu de projet
1	P-projeteur	E-réflexif	situation de projet	milieu didactique
0	Professeur	Elève	situation didactique	milieu d'apprentissage
-1	P-en action	E-apprenant	situation d'apprentissage	milieu de référence
-2	p-observateur	E-agissant	situation de référence	milieu objectif
-3	p-organisateur	E-objectif	situation objective	milieu matériel

Schéma ou tableau qu'il s'agit de lire avec : $M_n = S_{n-1} = \{M_{n-1}, E_{n-1}, P_{n-1}\}$, la situation S étant constituée des rapports existants entre M, E et P ; les niveaux positifs étant les situations sur-didactiques, et les niveaux strictement négatifs étant les niveaux a-didactiques.

Nous insistons ici sur la distinction du milieu matériel de l'élève, constitué de tous les éléments avec lesquels l'élève interragit, qu'il s'agisse d'objet, d'artefact, de savoir faisant partie de son univers matériel et cognitif et éventuellement mobilisables et le milieu objectif constitué des éléments avec lesquels il interragit effectivement dans une phase heuristique. Cette distinction sera généralisée dans la meta-situation du professeur et, dans la suite, nous parlerons du milieu matériel du professeur comme étant l'ensemble des éléments avec lequel le professeur est susceptible d'interragir et le milieu objectif du professeur, comme étant les éléments de son milieu matériel avec lesquels il interragit effectivement.

> *Le milieu matériel correspond aux objets familiers sur lesquels l'apprenant sait opérer des manipulations licites, où il agit [...] Le milieu objectif est le milieu heuristique par excellence, celui des essais et des erreurs : l'élève se regarde*

> *agir. L'élève contrôle le fonctionnement de son action et énonce des phrases (éventuellement démenties par la confrontation au milieu). Les justifications y sont empiriques. L'installation de ce milieu objectif peut être long en particulier si l'élève a des connaissances mal assurées. [...] Le milieu de référence est le milieu de l'argumentation ; on y contrôle la pertinence du savoir mathématique trouvé : permet il de résoudre ce problème et tous les problèmes du même ordre ? Ce milieu est travaillé dans la mise en commun et la réécriture des messages, pour un certain public de participants. [Houdement, 2004]*

Plusieurs approches de ce modèle peuvent alors être envisagées :
- une analyse descendante [Margolinas, 1995] : le professeur envisage la situation ou l'analyse *a posteriori* et nous utiliserons cette approche dans une analyse des manuels ;
- une analyse ascendante [Bloch, 1999] qui permet d'analyser la réalisation de la situation, y compris dans une situation a-didactique (ou dans des phases a-didactiques d'une situation) que nous utiliserons dans les observations de classes.

Sous cette modélisation, l'objet de la ressource est de permettre l'accès aux milieux négatifs à des enseignants dans une phase de construction et de projet, c'est à dire dans les milieux positifs. Autrement dit, dans une phase de construction de situations pour la classe, le professeur prépare, organise et prévoit les éléments du milieu matériel des élèves et la ressource donne des éléments permettant une prise en compte de la dynamique entre milieu matériel et milieu objectif des élèves.

La question de recherche posée précédemment peut donc se réécrire comme une étude du rôle de la ressource dans la visibilité des milieux didactique et a-didactique pour la construction d'une situation de classe, dans une posture sur-didactique :

> *La notion de « position » peut être complétée par celle de « point de vue » : comme dans un véritable oignon, les niveaux sont translucides et le point de vue de $E-3$, par exemple, va rendre tout à fait opaque la position $E1$, alors qu'il aperçoit la position $E-2$. [Margolinas, 1995]*

Dans ces conditions, les interactions avec le milieu peuvent prendre des formes différentes :

> *Les situations d'action, de formulation et de validation sont définies par des types différents d'interaction avec le milieu.* [Perrin-Glorian et Hersant, 2003]

Et les milieux du professeur seront associés à des tâches (au sens précisé plus loin de l'ergonomie cognitive) dans la gestion de la situation :

> *Le milieu matériel du professeur comprend les élèves et le milieu matériel des élèves : le professeur est en effet responsable de deux composantes qui conditionnent la suite, et la réussite, de la situation*
> - *l'adéquation du milieu matériel à la poursuite de son projet ;*
> - *l'utilisation, par les élèves, de ce milieu matériel d'une manière conforme à ses prévisions.*

> *Le milieu objectif du professeur est constitué des éléments de la situation, des actions des élèves et surtout des connaissances de ceux-ci et des modifications que ces connaissances provoquent dans le milieu objectif des élèves.*
>
> *Le milieu de référence du professeur comprend bien sûr les éléments de référence de la situation ; il comprend aussi tout le travail visible des élèves sur ces éléments : essais, erreurs, réussites, conjectures, formulations, stratégies... Il comporte encore, comme le milieu objectif, une partie visible directement dans le travail de la classe ou plutôt visible par le professeur en utilisant ses connaissances mathématiques et didactiques : des connaissances des élèves, celles qu'ils manifestent dans leurs actions et leurs déclarations, à travers ces actions et déclarations* [Bloch, 1999]

Ce qui nous permet de préciser les questions de recherche :
En quoi l'usage de la ressource peut faciliter les tâches que le professeur a à faire

1. dans le milieu matériel :
   en particulier vis à vis de l'adéquation du milieu matériel des élèves au projet,
2. dans le milieu objectif :
   - observer les actions des élèves pour anticiper,
   - reconnaître les connaissances des élèves qui permettront que le jeu des élèves soit possible dans la phase de validation,
   - reconnaître les conceptions qui émergent de la situation,
3. dans le milieu de référence :
   - choisir les éléments du milieu à mettre en évidence, voire fournir des compléments du milieu,
   - anticiper les conséquences des actions des élèves,
   - décider de poursuivre ou d'abréger les recherches des élèves, les débats,...

2.3 L'ergonomie cognitive

Du grec $\epsilon\rho\gamma o\nu$, le travail et $\nu o\mu o\varsigma$, la loi, l'ergonomie se définit comme

> *l'ensemble des connaissances sur le fonctionnement de l'homme en activité, afin de les appliquer à la conception des tâches, des outils, des machines et des systèmes de production* [Laville, 1976]

Dans le cadre de notre travail, l'usage et la diffusion d'une ressource numérique est un élément central des analyses et l'objet d'étude de ce mémoire. L'ergonomie, comme discipline centrée sur les conditions physiques et mentales de l'homme au travail ayant comme objectif l'amélioration des conditions de travail offre un cadre théorique permettant l'analyse de l'artefact dans la démarche spécifique de la discipline :
- analyse du travail (connaissances pertinentes pour l'aménagement ergonomique d'une situation de travail, ici la construction d'une séquence utilisant les problèmes de recherche)
- analyse de la tâche (tâche prescrite, tâche effective)

– analyse de l'activité (la mise en œuvre)

L'objet d'étude de notre travail est une ressource numérique construite à destination des enseignants et l'évaluation par inspection de cette ressource comme l'évaluation empirique *a posteriori* sont des éléments essentiels de notre travail. Nous nous appuierons sur les trois dimensions de l'évaluation des EIAH décrites par [Tricot *et al.*, 2003] :

> *L'utilité concerne l'efficacité pédagogique. Cette catégorie de critères répond à la question : l'EIAH permet-il aux personnes visées d'apprendre ce qu'elles sont censées apprendre ? L'utilisabilité concerne la possibilité de manipuler l'EIAH. Cette catégorie de critères répond à la question : l'EIAH est-il aisé à prendre en main, à utiliser, à réutiliser, sans perdre de temps et sans faire d'erreur de manipulation ? L'acceptabilité concerne la décision d'utiliser l'EIAH. Cette catégorie de critères répond à la question : l'EIAH est-il compatible avec les valeurs, la culture, l'organisation dans lesquelles on veut l'insérer ?*

L'évaluation par inspection, c'est à dire une évaluation des caractéristiques de la ressource réalisée par un « expert », a permis à l'équipe EXPRIME de proposer un cadre général de la ressource et l'analyse du chapitre suivant utilisera ce mode d'évaluation. L'évaluation empirique consiste à :

> *... interpréter les performances des usagers à qui l'on a prescrit une tâche, et plus généralement à interpréter leurs comportements, attitudes, opinions.*[Tricot *et al.*, 2003]

C'est dans ce cadre que nous utiliserons ces concepts pour mettre en évidence l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité de la ressource dans une situation d'activité professionnelle d'enseignants.

> *On peut définir les compétences d'un sujet (ou d'un collectif) comme un ensemble organisé de représentations (conceptuelles, sociales et organisationnelles) et d'organisateurs d'activité (schèmes, procédures, raisonnements, prise de décision, coordination) disponibles en vue de la réalisation d'un but ou de l'exécution d'une tâche. Dans des situations de travail elles intègrent nécessairement des compétences spécifiques liées à l'utilisation des artefacts et outils cognitifs opératifs et à la mise en œuvre des activités collectives. Les compétences au travail peuvent être implicites ou explicites et sont organisées en plusieurs niveaux et champs. Cette organisation en niveau ne doit pas être entendue comme une simple hiérachisation ou modularité : elle exprime le fait que la conceptualisation et la structuration de l'action et des connaissances se font à des niveaux différents et avec des organisations multiples en relation avec les champs de l'expérience et les problèmes rencontrés. Ainsi on fait l'hypothèse que :*
>
> 1. *les compétences sont relatives à des situations et classes de situations, et*
> 2. *le développement des compétences est le produit d'un double processus : apport de connaissances opérationnelles socialisées et/ou antérieurement constituées et construction de compétences par l'activité propre du sujet. »[Samurçay et Pastré, 1998]*

Pour mettre en place ces évaluations de la ressource, nous nous appuierons sur les critères d'évaluation mis en évidence par [Tricot *et al.*, 2003] :

Type d'évaluation Dimensions	Empirique	Par inspection
Utilité	Adéquation entre objectif défini et apprentissage effectif. Adéquation entre dispositif et format de la connaissance à acquérir Différence entre niveau de connaissances initial et terminal Mesures par des tâches de : – reconnaissance – rappel (contenu / structure) – résolution de problème – détection d'erreurs – production	Précision et présentation des objectifs Adéquation contenus / objectifs Précision du scenario didactique Adéquation scenario / objectifs / contenus Mise en œuvre des processus cognitifs et meta cognitifs Régulation Evaluation
Utilisabilité	Possibilité d'apprendre à utiliser le système Gestion et Prévention des erreurs Mémorisation du fonctionnement Efficience Sentiment de satisfaction Evaluation par : – observations – entretiens – analyse des parcours	Guidage et incitation Groupement / Distinction des items par localisation ou format Feed-back immédiat et nature du feed-back Charge de travail Contrôle explicite Adaptabilité Gestion des erreurs Qualité des messages Homogénéité et cohérence Signifiance des codes et dénominations

Type d'évaluation Dimensions	Empirique	Par inspection
Acceptabilité	Motivation Affects Culture Valeurs Evaluation par : – observations – entretiens – analyse des parcours	Acceptabilité en termes d'adéquation aux : – besoins ou objectifs de l'institution – attentes des apprenants – caractéristiques des apprenants Acceptabilité en termes de compatibilité avec : – l'organisation du temps – l'organisation des lieux Présence du métériel nécessaire Planification et suivis lisibles et cohérents Visibilité des résultats

Chapitre 3

Description et analyse de la ressource

3.1 Pourquoi une telle ressource ?

Les questions de départ de ce travail reposent sur le constat suivant :

Les travaux sur les problèmes de recherche dans la classe montrent clairement les apports de telles pratiques en terme d'apprentissage de la démarche scientifique : développement d'heuristique, élaboration de conjectures, mobilisation d'outils de contrôle et de validation etc... Ils montrent aussi la possibilité d'insérer des situations de ce type en classe. Pour autant, bien que de telles situations de recherche continuent à vivre, et, malgré un certain nombre de recommandations institutionnelles, elles ne sont que peu utilisées dans les classes.

Dans ce chapitre nous tenterons de dresser un panorama de la place et du rôle du problème de recherche dans la classe d'un point de vue institutionnel et d'un point de vue didactique, et comparerons avec les hypothèses émises dans notre groupe (page 6). Dans un deuxième paragraphe, nous décrirons et analyserons la ressource telle qu'elle se présentait au moment des expérimentations ; il s'agissait en effet d'une version beta de la ressource qui n'était donc pas complètement finalisée, tant d'un point de vue des contenus que de la navigation ; en particulier, une grande partie de la réalisation multi-média présente actuellement dans la ressource n'était pas encore implémentée, ce qui explique que l'étude ne portera jamais sur cette dimension.

3.1.1 Demandes institutionnelles

École maternelle :

> *Progressivement, dans les diverses occasions offertes par la vie de la classe, dans les jeux ou pour résoudre les problèmes posés par le maître, l'enfant élargit l'éventail des procédures de résolution en même temps qu'il s'approprie de nouveaux outils* (BO N1 février 2002 page 33)

> *À l'école maternelle, il s'agit de donner du sens aux nombres par leur utilisation dans la résolution de problèmes articulés avec des jeux, des situations vécues, mimées ou racontées oralement.* (idem)

Cycle deux :

> *Élaborées comme réponses efficaces à des problèmes, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nouveaux problèmes.* (idem, cycle 2 page 50)

on retrouve la dialectique outil-objet de Régine Douady [Douady, 1983].

Cycle trois :

> *Si, en mathématiques, une réflexion nouvelle sur l'apprentissage du calcul se fait jour, qui prend en compte les machines susceptibles de suppléer l'homme dans ce domaine, l'essentiel du programme réside dans l'orientation pragmatique d'un enseignement des mathématiques centré sur la résolution de problèmes. Par là, les connaissances élaborées dans les différents domaines des mathématiques prennent leur signification. Elles deviennent des instruments disponibles pour traiter nombre de situations et pour entrer dans les sciences d'une autre manière.* (idem, cycle 3 page 65)

la citation se poursuit par :

> *Le nouveau programme de sciences et technologie est, en effet, résolument centré sur une approche expérimentale.*
>
> *La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées : nombres entiers et décimaux, calcul avec ces nombres, approche des fractions, objets du plan et de l'espace et certaines de leurs propriétés, mesure de quelques grandeurs.*
>
> *Les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues de la vie de la classe, de la vie courante, de jeux, d'autres domaines de connaissances ou s'appuyer sur des objets mathématiques (figures, nombres, mesures...). Elles sont présentées sous des formes variées : expérience concrète, description orale, support écrit (texte, document, tableau, graphique, schéma, figure). Au travers de ces activités, le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit.* (idem page 82)

On trouve bien là la double idée d'utiliser les problèmes pour développer des compétences meta-mathématique et pour établir et assoir des connaissances.

Par ailleurs, les documents d'accompagnements précisent les types de problèmes :

> *Plusieurs fonctions pour la résolution de problèmes*
>
> *Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents.*
>
> – *Problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance.*
> – *Problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer.*

> – *Problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.*
> – *Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.*
>
> *Dans ce dernier cas, nous parlerons de « problèmes pour chercher »alors que dans les précédents nous pourrions parler de « problèmes pour apprendre », en soulignant l'aspect réducteur de ces dénominations, puisque, dans tous les cas, l'élève mobilise des connaissances et se trouve placé en situation de recherche.*Les nouveaux programmes de l'école primaire Mathématiques Document d'accompagnement, Les problèmes pour chercher, Direction de l'enseignement scolaire Bureau du contenu des enseignements www.eduscol.education.fr/prog, page 2.

Les projets de programmes de l'école primaire[1] mettent moins l'accent sur la résolution de problème comme outil de construction des connaissances et tentent d'opposer d'une façon surprenante les algorithmes et le sens des opérations en « considérant la résolution de problèmes comme terrain d'application des algorithmes »[2] ; ils laissent cependant dans le préambule une place aux problèmes :

> *Il est également indispensable que tous les élèves soient invités à réfléchir sur des textes et des documents, à interpréter, à construire une argumentation, non seuleemnt en français mais dans toutes les disciplines ; qu'ils soient entraînés à mobiliser leurs connaissances et compétences dans des situations progressivement complexes pour questionner, rechercher et raisonner par eux-mêmes »*[3].

Au collège

> *La démarche d'investigation scientifique présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre*

[1]Projets soumis à consultation au premier trimestre 2008

[2]Déclaration de l'ARDM à propos des projets de programme de mathématiques pour l'école primaire, http ://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/reforme-ecole-primaire/ardm

[3]Nouveaux programmes de l'école primaire, texte soumis à consultation, texte consultable en ligne : http ://eduscol.education.fr/D0048/primprog-consultation2008.htm

> *Faire des mathématiques, c'est se les approprier par l'imagination, la recherche, le tâtonnement et la résolution de problèmes, dans la rigueur de la logique et le plaisir de la découverte.*

Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques BO N°6, 19 avril 2007.

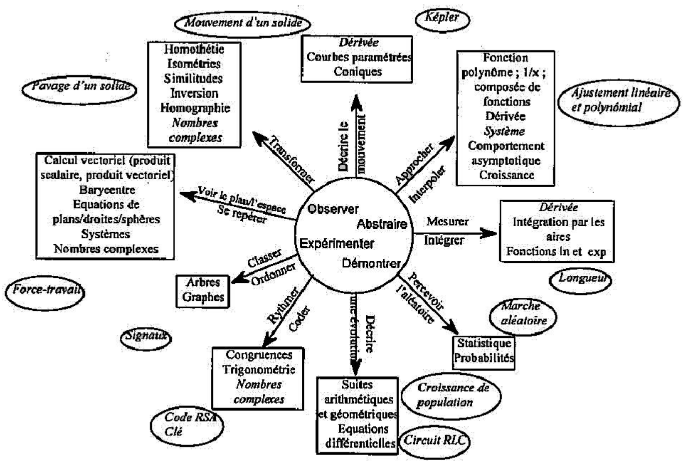
> *...la démarche d'apprentissage vise à bâtir les connaissances mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans d'autres disciplines ou issus des mathématiques elles-mêmes, notamment à partir de situations proches de la réalité.*
> BO N°6 19 avril 2007

Cette idée est reprise dans les différents chapitres présentant les connaissances des programmes de collège.

Au lycée

> *L'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique décrites dans l'introduction du programme. Certaines ("chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (...), accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension") renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes : le choix de ces situations et de ces problèmes doit être fait avec attention ; ils déterminent la qualité de l'activité scientifique menée dans la classe, légitiment l'introduction de nouveaux contenus et justifient ensuite leur efficacité. D'autres ("appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, (...), bâtir un ensemble cohérent de connaissances") relèvent de la découverte puis de l'assimilation d'un savoir dont les élèves doivent pouvoir sentir la cohérence et l'harmonie.*

En classes de première et terminale scientifiques le schéma suivant constitue l'annexe 2 des programmes de mathématiques des filières scientifiques, parus au BO n°7 d'août 2000.



Il propose une carte de l'activité mathématique souhaitée des élèves en relation avec les thèmes des programmes des classes de première et terminale scientifiques. Au centre de ce schéma on retrouve les quatre fonctions essentielles : observer, abstraire, expérimenter, démontrer qui font écho à une démarche expérimentale en mathématiques [Dias et Durand-Guerrier, 2005], démarche qui ne peut se comprendre que si l'expérience et l'observation débouchent sur une réflexion sur l'observation, une mise en perspective et une utilisation des objets mathématiques abstraits dans le but de proposer une démonstration des faits observés.

3.1.2 Des références didactiques et pédagogiques

Problèmes ouverts

> *Le premier document relatif à la pratique des problèmes ouverts en classe date de l'année 1984 ; il fut suivi d'une brochure plus élaborée en 1988. Cette brochure est maintenant épuisée et vingt ans de pratique du problème ouvert permettent de la remplacer par un nouvel ouvrage remanié tenant compte de cette longue expérience et d'une demande constante du public des enseignants de mathématiques* [Arsac et Mante, 2007]

Dans cette introduction, les auteurs du livre montrent bien l'intérêt des professeurs de mathématiques pour cette « technique pédagogique » et développent l'idée essentielle de l'ouvrage :

> *l'idée initiale des promoteurs était de placer les élèves dans la situation du chercheur en mathématiques, avec tout ce que ceci peut comporter d'excitant et de ludique, ce que nous appelons « faire entrer l'élève dans une démarche scientifique » [Arsac et Mante, 2007]*

Dans cette technique du problème ouvert l'accent est mis principalement sur l'activité de résolution elle-même. La construction de connaissance nécessaires à la résolution de problèmes conduisant par ailleurs à la mise en place de situations-problèmes.

C'est précisément cet aspect qui nous a amené à émettre l'hypothèse qu'il pouvait s'agir d'un frein à la mise en place des problèmes de recherche dans la classe et nous pensons que résoudre des problèmes met en jeu une dynamique des milieux qui amène les élèves à mobiliser les objets de leur milieu matériel pour les utiliser dans le milieu objectif et en ce sens permet une construction ou une consolidation de connaissances sur les objets mobilisables dans la résolution de problème.

Situations-problèmes

Le terme situation-problème est stabilisé dans le sens donné par [Arsac *et al.*, 1991] reprenant les caractéristiques données par [Douady, 1984] :

1. *L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible au problème.*

2. *Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.*
3. *La situation doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou non.*
4. *La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.*
5. *Le problème peut se formuler dans plusieurs cadres entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre graphique)*

Au contraire des « problèmes ouverts », l'enjeu d'une situation-problème est une connaissance qui doit apparaître comme la connaissance nécessaire à la résolution du problème et qui est soit construite par l'élève dans une situation a-didactique, soit proposée par l'enseignant dans une situation didactique.

> *Tantôt la situation-problème semble se confondre avec une simple situation, tantôt elle s'organise véritablement autour de la prise de conscience d'un problème par l'élève : échec, énigme ou controverse. La situation problème oscille entre deux pôles : un pôle pédagogique (l'essentiel est que l'élève entre en activité, que lui apparaissent les enjeux sociaux de l'apprentissage) ou un pôle didactique des problèmes (en développant une analyse épistémologique attentive dans une logique de continuité-rupture à la notion d'obstacle). La situation-problème est généralement focalisée sur la résolution, peu attentive à la problématisation.* [Fabre, 1999]

Le choix qui a été fait dans la ressource n'est pas le choix de situations problèmes mais celui de problèmes de recherche permettant de travailler des notions clés repérées dans les programmes de collège et/ou de lycée en lien avec une démarche expérimentale en mathématiques. [Durand-Guerrier, 2008].

Narration de recherche

Développée par l'IREM de Montpellier, cette pratique pédagogique[4] se caractérise par une volonté de « développer la curiosité et l'esprit critique des élèves, de les mettre dans des situations de recherche motivantes, qui leur donne le goût de faire des mathématiques, de donner un outil de communication, qui facilite le passage à l'écrit des élèves et de mettre en place les règles du débat mathématique et enfin de permettre à l'enseignant une bien meilleure connaissance des procédures »[5]

En l'état actuel de la ressource, ce type de pratique n'a pas encore été intégrée.

---

[4]On trouvera en ligne une présentation de la narration de recherche : Mireille Sauter, *Narration de recherche, une nouvelle pratique pédagogique*, http ://sierra.univ-lyon1.fr/irem/c2ipc/narrechM.pdf

[5]ibidem

Débat scientifique

Initié par [Legrand, 1993], le débat scientifique dans la classe de mathématique se définit comme une prise de responsabilité par l'apprenant vis à vis du savoir enseigné en « offrant à l'élève, à l'étudiant la possibilité de donner sens à l'abstraction dont on veut l'instruire en l'amenant à la pratiquer lui-même, lui permettre de donner sens aux théories qu'il aborde - et par suite qu'il ignore encore - en lui proposant d'en être co-auteur. »[6]

> *Le principe du débat scientifique est de faire passer l'élève ou l'étudiant (souvent assez scientifiquement passif en cours ou en TD) de la position d'auditeur d'assertions impersonnelles et réputées vraies (les définitions, théorèmes et démonstrations du professeur) à la position d'auteur d'énoncés problématiques (les conjectures et les propositions de preuves). On part ici du principe que ces conjectures et ces propositions de preuves, l'étudiant ne peut les effectuer s'il ne cherche au préalable à se faire une opinion personnelle sur ce qui est scientifiquement raisonnable et sur ce qui ne l'est pas.* [Legrand, 1993]

Cette pratique concernait, à l'origine, des travaux en amphithéatre à l'université, et par extension met en place un travail en classe entière ; le problème ouvert, au contraire, propose une pratique de travail en petits groupes et vise à permettre aux élèves de confronter leurs recherches avant d'en rendre compte à la classe entière par l'intermédiaire d'une rédaction commune.

3.1.3 Hypothèses

Outre les hypothèses écrites en page 6, cette ressource est construite sur les hypothèses que les problèmes de recherche sont fondamentaux dans la construction des connaissances mathématiques des élèves et avec [Arsac et Mante, 2007] nous pensons :

> *Le but de la pratique du problème ouvert est donc de placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est à dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur en mathématiques.[...] Au lieu de considérer que les mathématiques sont une science achevée à laquelle on s'initie sous la conduite d'un maître (ou d'un livre) ou seulement un outil pour résoudre des problèmes pas forcément mathématiques, les pratiques que nous proposons considèrent les mathématiques d'un troisième point de vue : comme une science vivante, qui a son développement propre et sa logique propre.*

En reprenant et complétant les analyses précédentes, nous affirmons que les problèmes de recherche dans la classe permettent non seulement de développer des compétences metamathématiques, mais aussi de consolider la construction des connaissances et de les intégrer au milieu de référence des élèves, en faisant jouer la dynamique des milieux pour permettre

[6] Tiré d'un texte de Marc Legrand, *Le principe du « débat scientifique » dans nos classes et nos amphis, pourquoi et comment ?*, http ://www-irem.ujf-grenoble.fr/new2006/Debat_scientifique/debat_s_principes.pdf

aux objets mathématiques du milieu matériel des élèves d'intégrer leur milieu objectif sur lequel l'enseignant pourrait jouer.

Dans un texte de référence de la ressource EXPRIME, Viviane Durand-Guerrier précise :

> *Concernant la gestion en classe des situations de validation, la présence de plusieurs milieux potentiels dans la phase de validation est l'un des facteurs qui rendent délicats les débats. C'est un élément qui souligne l'importance des connaissances mobilisées par les sujets pendant l'action, dans l'élaboration des conjectures et des preuves. Ceci fournit des indicateurs des connaissances que le professeur doit mobiliser pour piloter les situations de ce type et rend tout à fait clair le fait que l'analyse fine des interactions ne puisse pas faire l'économie d'une analyse approfondie de l'épistémologie des savoirs en jeu, au-delà des seuls phénomènes de transposition didactique.* [Durand-Guerrier, 2008]

3.2 Description et analyse de la ressource

3.2.1 Structure de la ressource

Cette ressource numérique est conçue pour être étudiée suivant des parcours variés ; dès l'entrée, il est possible de parcourir des textes théoriques concernant la dimension expérimentale en mathématique [Dias et Durand-Guerrier, 2005], [Kuntz, 2007] et des présentations faites dans des colloques et conférences [Aldon et Durand-Guerrier, 2007], [Aldon, 2007] ; il est également possible de comprendre l'esprit de la ressource en parcourant une présentation générale et le curriculum vitæ (au sens donné par [Trouche et Guin, 2008] dans l'expérience SFoDEM) de la ressource. Par ailleurs la structure des différentes situations proposées est commune :
- Situation mathématique
- Objets mathématiques potentiellement travaillés
- Situations d'apprentissage
- Références
- Synthèse
- Situations connexes

3.2.2 Les situations mathématiques de la ressource

Elles sont au nombre de sept :

1. Les fractions Égyptiennes. Décomposer l'unité en somme de fractions de numérateurs un.
2. Les nombres trapézoïdaux. Étude de sommes d'entiers consécutifs.
3. La rivière. Étude du plus court chemin d'un point à un autre passant par une courbe donnée.
4. Une intersection inaccessible. Sachant que le point d'intersection de deux droites est inaccessible, trouver une droite passant par ce point.

5. Le nombre de zéros de $n!$. Étude des chiffres de $n!$ dans un système de numération donné.
6. Le plus grand produit. Étude du produit de nombres entiers à somme fixée.
7. Les urnes de Polya. Étude de la dynamique de la composition d'une urne dans une expérience répétée.

3.2.3 Des situations mathématiques aux situations de classe

C'est en référence aux travaux de Guy Brousseau [Brousseau, 1986a], [Brousseau, 1986b], [Brousseau, 1986c],... que les auteurs de la ressource ont privilégié l'entrée par la situation mathématique en direction des situations de classe. Ainsi, la présentation s'ouvre sur une analyse mathématique du problème et se referme par un prolongement de la situation du côté de la recherche actuelle en mathématiques. A partir de cette situation mathématique s'organisent des situations de classes (énoncés, scenarios et compte-rendus d'expérimentation) complétées par des références et une fiche de synthèse de la situation.

Les différentes rubriques peuvent, bien sûr, être parcourues dans un ordre arbitraire, mais la disposition invite à ce parcours, comme nous avons pu le constater dans l'observation des professeurs en stage (cf. Annexe 1, page 71) :

lignes 48-49, puis 69-70, puis 82-83, puis 107-108 etc. où nous voyons une habitude se créer au fur et à mesure de la navigation. En effet dans la première navigation le passage entre l'écran de menu général de la situation au clic sur le bouton « Situation mathématique » dure environ 20 secondes, alors qu'il est pratiquement instantané dans les dernières navigations.

Par exemple, dans la situation « la rivière »[7], l'analyse mathématique du problème explore les solutions possibles et les classe en trois types de résolution : résolution analytique, résolution géométrique et résolution physique. Cette analyse mathématique permet de comprendre des comportements d'élèves et de prévoir des institutionnalisations prenant en compte les élèves dans le groupe classe, plutôt que la classe comme une entité et tendre à minimiser la survenue d'incidents dans la phase délicate d'institutionnalisation :

> « *La définition la plus générique d'incident est le fait qu'il y a décalage entre ce qui a été prévu et ce qui se passe effectivement* »[Rogalski, 2003]

Cette analyse approfondie de la situation mathématique participe à l'intégration dans le milieu objectif des professeurs des situations didactiques proposables.

3.2.4 Objets mathématiques potentiellement travaillés

Cette partie de la ressource est particulièrement importante et en rapport direct avec notre travail puisqu'elle permet, à partir d'observations de classes de faire émerger les objets mathématiques que le professeur pourra s'attendre à voir émerger des recherches des élèves. Autrement dit, la mise en évidence de ces objets offre aux enseignants une possibilité de regard vers les milieux matériel et objectif des élèves ce qui peut permettre

[7] Quel est le chemin le plus court pour aller d'un point A à un point B situés dans un même demi-plan, en passant par la frontière du demi-plan ?

de mieux comprendre les difficultés d'institutionnalisation qui peuvent surgir lorsque le conflit porte sur une mauvaise compréhension par l'enseignant du milieu objectif des élèves. Nous pouvons à ce propos nous appuyer sur l'observation faite en classe de première S (cf. Annexe 3, page 135) et le dialogue lignes 254-258 où les élèves calculent les puissances de deux successives, et où F2 calcule sur sa calculatrice et s'étonne que G trouve les résultats plus vite de tête :

F2 Comment tu fais pour les faire comme ça ?

G Tu fais fois deux.

F2 Ah oui, c'est pas bête...

La définition récursive des puissances fait partie du milieu objectif de G mais pas de F2 ; nous pouvons nous demander si ce bref dialogue suffira à faire également passer cette définition dans le milieu objectif de F2. L'hypothèse que nous faisons est que permettre de prendre conscience des enjeux sur les objets travaillés peut permettre aux enseignants de comprendre certaines difficultés liées à des positionnements des connaissances dans des milieux distincts. Elle peut également leur permettre de mieux préparer le milieu matériel pour la situation, par exemple dans ce cas en mobilisant le calcul mental et réfléchi.

3.2.5 Situations connexes

Les situations connexes proposent des prolongements de la situation mathématique étudiée et participent, de fait, à la construction du milieu de référence de l'enseignant.

Pour filer l'exemple de la situation « la rivière » les situations connexes proposent des généralisations du problème en cherchant quels raisonnements utilisés dans le plan peuvent être mobilisés ; considérant une courbe au lieu de la droite du problème initial d'une part et d'autre part plaçant le problème en géométrie sphérique.

Approfondir l'étude de la situation mathématique en prolongeant les situations initiales nous paraît complètement fondamental pour comprendre les enjeux de la situation mathématique et enrichit le milieu des enseignants ; il est à noter ici la remarque d'une collègue lors de l'observation dans le stage de formation (Annexe 3, page 135) signalant qu'elle devait d'abord chercher le problème pour pouvoir le proposer à ses élèves.

3.2.6 Références et synthèse

La section « Références » donne des prolongements de la littérature à la situation étudiée tant d'un point de vue mathématique que pédagogique ou didactique.

La synthèse permet de prendre connaissance en quelques pages imprimables du contenu de la ressource pour la situation étudiée.

Chapitre 4

Ingénierie didactique

Nous nous appuyons sur le concept d'ingénierie didactique [Artigue, 1988] pour mettre en place notre expérimentation :

4.1 Analyse préalable

4.1.1 Analyse de l'enseignement usuel et de ses effets

Analyse de manuels : quels problèmes, quels types d'enseignement ? Loin de faire une étude exhaustive des conceptions des auteurs de manuel concernant les problèmes, nous avons fait le choix d'analyser des manuels permettant de mettre en évidence les éléments du milieu du professeur dans une situation de préparation de leçon[1]. Nous avons choisi d'analyser le chapitre concernant la résolution des équations en seconde et en première S ; nous étudierons trois manuels et dans chacun d'eux le premier problème proposé dans le chapitre traitant de la résolution d'équation. Nous faisons l'hypothèse que la première entrée dans un nouveau chapitre est significative de l'esprit des auteurs. Par ailleurs, nous avons choisi le thème de la résolution d'équations parce que, d'une part le thème traverse les programmes et d'autre part il est significatif d'une dialectique syntaxique-sémantique qui sous-tend l'analyse faite en terme de milieu.

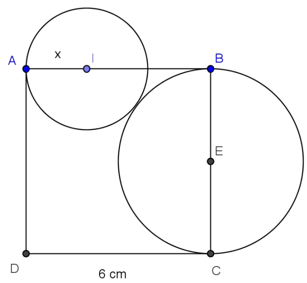
[1] Les différents manuels étant des éléments du milieu matériel de l'enseignant dans une posture de préparation de cours et le manuel un élément du milieu matériel de l'élève dans une situation didactique

Exercice n°1 page 114 Hyperbole seconde Nathan

Extrait du manuel

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm et E est le milieu du côté $[BC]$.
I est un point quelconque du segment $[AB]$ distinct de A et B. On note $AI = x$ (en cm) C est le cercle de centre I qui passe par A. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$.
On se propose de chercher s'il existe un point I tels que C et Γ soient tangents.
a) Exprimer IE^2 en fonction de x, puis vérifier que C et Γ sont tangents lorsque :

$$(x+3)^2 = (6-x)^2 + 3^2$$



Conseil : utiliser le fait que deux cercles sont tangents extérieurement lorsque la distance de leurs centres est égale à la somme des rayons.
b) Résoudre cette équation.
c) Conclure : existe-t-il un point I de $[AB]$ tel que C et Γ soient tangents ? Si oui, lequel ou lesquels ?

Analysons cette situation en utilisant le modèle du milieu précédemment expliqué ; nous nous placerons du point de vue du professeur préparant une leçon et souhaitant utiliser ce problème dans la classe ; S_3, la situation noosphérienne peut alors être caractérisée par « faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes », mais aussi : « une notion doit être introduite comme réponse à un problème », et enfin « changer de cadre donne du sens aux outils construits » ; le milieu M_3 comporte les prérequis à la résolution du problème : calcul algébrique élémentaire, résolution d'une équation du premier degré.

La situation de construction $S_2 = M_3$; il s'agit donc de faire résoudre aux élèves une équation du premier degré comme outil de résolution d'un problème de géométrie. Le manuel propose au P-constructeur (P_2), à travers cet énoncé, la situation pour mettre en œuvre d'une part un réinvestissement des connaissances des élèves et un changement de cadres. Le milieu M_2 mis alors en place par le manuel comprend les connaissances supposées nécessaires pour résoudre le problème et éviter les « questions annexes »[2] ; la modélisation est donnée en aide, puisque les connaissances visées sont une (les) méthode(s) de résolution d'une équation du premier degré.

La situation $S1$, situation de projet est donc ce milieu proposé par l'énoncé du manuel, l'objectif annoncé en marge, les aides[3] ; l'analyse de P_1 (P-projeteur) a prévu à travers les balises, un comportement d'un élève générique placé dans ce milieu didactique M_1, milieu

[2] Le point I différent de A et B évite que soit jouée la question de l'existence du cercle et de la tangence extérieure des deux cercles

[3] Aide donnée en tant que telle mais aussi l'aide donnée par l'équation correcte proposée

dans lequel les interactions avec d'autres connaissances seraient limitées. L'enseignant peut donc à travers cet énoncé proposer cette situation didactique ($S_0 = M_1$) dans laquelle l'élève doit interpréter les indices placées dans le milieu et le professeur contrôler le bon avancement dans l'énoncé.

Du point de vue de l'élève, outre de ses connaissances, le milieu matériel M_{-3} sera constitué du manuel et dans ce chapitre, de l'énoncé et de la marge[4] ; E-objectif aura donc à résoudre le « problème » de géométrie en utilisant l'algèbre. Dans la situation objective (S_{-3}), l'enjeu sera de caractériser la tangence par une comparaison de résultats de calculs de distances et de résoudre l'équation correspondante. Le milieu $M_{-2} = S_{-3}$ sera alors constitué de l'aide, de l'équation donnée, du dessin (donné dans la position de tangence) ; quel enjeu pourrait on alors donner à la situation S_{-2}, puisque le chemin ne peut se détacher maintenant de cette construction préétablie : calcul de IE^2, calcul des deux rayons, égalité, calcul agébrique conduisant à $3x = 6$, résolution de l'équation. La question c) ne venant que comme un rappel du contexte de l'exercice (mais a-t'on pu avoir un doute concernant la réponse à la question posée ?) ; on voit ici l'absence de situations S_{-2} et S_{-1} et par conséquent une situation didactique dénuée d'enjeu. La résolution de problème est absente parce que le problème n'a ni enjeu ni réalité problématique.

[4]Objectif : résoudre un problème de géométrie à l'aide d'une équation

Transmath, Première S, page 39

Extrait du manuel

> **Approche historique**
> **Un problème**
> Le problème suivant fut proposé par le mathématicien Alexis Clairaut (Paris 1713-Paris 1765) : *Deux lumières, dont l'une est quatre fois plus intense que l'autre, étant séparées par un intervalle de trois pieds, comment déterminer sur la droite qui les joint le point qu'elles éclairent également ?*
> **Des éléments de réfléxion**
> En 1795, Laplace (Beaumont-en-Auge, 1749-Paris, 1827) explique, alors qu'il reprend le problème dans le but de former des instituteurs, que la force de la lumière décroit en raison inverse du carré de la distance et que l'on aboutit à un problème du second degré.
> « Si l'on nomme x la distance de la plus faible lumière à ce point, cette distance étant supposée dirigée vers la plus forte lumière, $3 - x$ sera la distance de la plus forte lumière au même point ; en sorte que $\frac{1}{x^2}$ sera la force de la plus petite lumière, à la distance x, et $\frac{4}{(3-x)^2}$ sera la force de la plus grande, à la distance $3 - x$; ainsi, ces forces devant être égales par la condition du problème, on a $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$. Ce qui donne, après les réductions convenables, $x^2 + 2x = 3$, d'où l'on tire $x = -1 \pm 2$. »
> Laplace explique la raison du nombre de racines trouvées, qui correspond au degré même du problème exprimé (ici 2).
> Les deux valeurs sont $x = 1$ et $x = -3$. La première apprend que le point placé à un pied de distance de la plus faible est également éclairé par les deux lumières. « La seconde valeur est négative ; elle montre ce que l'on pouvait ignorer d'abord, qu'il existe un second point également éclairé par les lumières et placé à trois pieds de distance de la plus faible », dans la direction opposée à la lumière plus forte.

La situation noosphérienne S_3 comprend les éléments suivants : « L'histoire est à interroger », « Les mathématiques servent dans d'autres disciplines », mais aussi « lire et savoir lire des mathématiques contribuent à la construction des connaissances » ; le milieu de construction est ainsi très vaste et comprend les textes de Clairaut, de Laplace, et les connaissances physiques nécessaires à la résolution du problème d'optique, et notamment ici le principe indiquant que la force de la lumière décroît en raison inverse du carré de la distance. Ces éléments sont explicités dans le texte proposé et sont donc à disposition dans le milieu matériel de l'élève. La situation de construction est donc ici de faire comprendre aux élèves un texte scientifique et notamment de montrer qu'un phénomène physique peut être modélisé par la résolution d'une équation du second degré ; le P-constructeur aura donc à charge de construire le mode didactique correspondant à ces objectifs. Le milieu de projet comprendra les connaissances du maître concernant les modes de présentation de cette question ; l'interaction de M_2 et P_2 pourra conduire à une situation didactique de lecture et de traduction dans une syntaxe moderne du texte de Laplace, et la situation de projet sera alors de « faire accepter aux élèves une réécriture syntaxique d'un texte ». Le P-projeteur analyse le milieu didactique construit en le mettant en relation avec le E-réflexif. Il est ici clair que le seul énoncé fourni dans le manuel ne fournit pas au professeur une situation didactique, et que le P-projeteur aura nécessairement un travail de scénarisation à conduire pour transformer le texte du manuel en une situation didactique.

Du point de vue de l'élève, si l'on s'en tient strictement à la page du manuel, le milieu matériel est constitué du texte du manuel et de ses connaissances en physique qui, en l'occurrence peuvent rentrer en conflit avec la description donnée ; en effet, les programme de physique depuis le collège jusqu'à la classe de première n'abordent pas la notion qualifiée dans le texte de « force de la lumière ». De même le terme « intensité » n'apparaît pas dans les programmes de physique de collège[5], apparaît en seconde[6] pour parler de « l'intensité de l'interaction gravitationnelle ». Dans le programme de physique de première S[7], le terme d'intensité est repris pour évoquer l'interaction gravitationnelle mais aussi dans les chapitres d'électrodynamique et d'électromagnétisme, pour évoquer l'intensité d'un courant ; en revanche aucune présence de ce terme dans le chapitre d'optique. Les interactions que peuvent avoir les élèves sur leur milieu matériel ne peuvent pas permettre les essais et erreurs qui pourraient construire un milieu objectif. De fait, les seuls éléments permettant une interaction sont les éléments d'algèbre :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$$

> *Ce qui donne, après les réductions convenables,* $x^2 + 2x = 3$*, d'où l'on tire* $x = -1 \pm 2$.

Eléments qui ramènent dans un milieu matériel purement syntaxique de transformation d'écriture. Nous voyons ici une situation qui ne peut amener à la construction de connaissances sans une scénarisation didactique importante.

[5]BO n°6 du 19 avril 2007
[6]BO n°2, 30 août 2001
[7]BO n° 7 du 31 août 2000

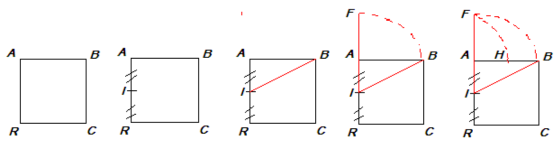
Bréal, première S, page 24

Un exemple emprunté à Euclide

Dans la proposition 11 du livre II des Eléments, Euclide pose le problème suivant :

« Un segment$[AB]$ étant donné, construire un point H de ce segment tel que le carré de côté AH ait la même aire que le rectangle de côtés BH et AB. »

1. Démontrer que résoudre ce problème revient à résoudre l'équation $x^2 = a(a-x)$ où x désigne AH et a désigne AB.
2. Résoudre cette équation.
3. Euclide résout le problème géométriquement. Il construit :
   – le carré $ABCR$,
   – le milieu I de $[AR]$,
   – le point F de la demi-droite $[RA)$ tel que $IF = IB$,
   – le point H de $[AB]$ tel que $AH = AF$,
   puis il affirme que H est le point cherché.



Justifier la solution d'Euclide.

Tout comme dans l'exemple précédent, la situation S_3 comprend « l'histoire est à interroger », mais aussi « changer de cadres permet une meilleure compréhension des notions ». Dans la situation de construction ($S_2 = M_3$), il s'agit d'une part de mettre en équation une situation géométrique puis de résoudre cette équation ; l'équation apparaît alors comme un outil de résolution du problème posé par Euclide. Le milieu mis en place par l'énoncé contraint les notations (x désigne AH, a désigne AB), et impose une difficulté algébrique, l'usage d'un paramètre. Il laisse également à la charge de l'élève le passage de la construction d'un carré au calcul d'un carré. Le terme « carré » étant utilisé dans les deux sens. Par ailleurs, la question de la technique de la résolution de l'équation ne semble pas abordée et la construction géométrique de la solution est proposée dans deux registres : le dessin par une frise de dessins et le registre de langue naturelle par une description des constructions successives.

La situation S_1, situation de projet est donc ce milieu proposé par l'énoncé du manuel et les différents changements de registres ; l'analyse du P-projeteur prévoit un élève utilisant les différents registres de représentation pour construire un raisonnement permettant de résoudre dans deux cadres différents le problème donné. Enfin, le lien entre les questions 1) et 2) d'une part et 3) d'autre part n'est pas construit par l'énoncé.

Du point de vue de l'élève, le milieu matériel M_{-3} sera augmenté de l'énoncé proposé par le manuel. E-objectif aura donc à traduire dans un cadre algébrique un énoncé proposé dans le cadre géométrique. En particulier, le E-objectif devra passer de la construction d'un carré au calcul d'un carré. Dans la situation objective, l'enjeu sera cette traduction qui devra déboucher sur la résolution d'une équation pour laquelle la technique ne fait pas partie du milieu matériel de l'élève puisque cette situation précède l'apprentissage de la résolution de l'équation du second degré. Par ailleurs, la présence d'un paramètre ne se justifie pas et ne fait que rendre l'algébrisation du problème inutilement complexe. La situation a-didactique ne peux être en l'état mis en place puisque le jeu n'est pas jouable ! La situation didactique pour être jouable demande une intervention du professeur qui pourra justifier sa leçon par la nécessité de résoudre ce problème.

En ce qui concerne la troisième question, deux stratégies peuvent être envisagées ; la première est de s'appuyer sur la première question et de montrer que la longueur AH ainsi construite est solution de l'équation proposée en 1), et la seconde de calculer la longueur AH utilisant le théorème de Pythagore et de montrer une égalité de deux grandeurs ($AH^2 = BH \times a$). Le paramètre introduit dans les questions précédentes amène dans le milieu matériel un élément de difficulté là encore tout à fait inutile. La situation S_{-2} serait jouable pour autant que l'élève générique puisse arriver jusqu'à cette question ; on voit ici que le seul énoncé ne peut être un élément du milieu matériel si l'objectif est de provoquer une situation a-didactique. Si l'objectif est de se placer dans une situation S_0, le Professeur (P_0) devra repréciser les éléments du milieu de d'apprentissage de l'élève E_0, la situation ne permettant pas à elle seule de faire jouer la dynamique des milieux.

4.1.2 Analyse des conceptions des enseignants, des difficultés ou obstacles qui marquent leur évolution

Les travaux s'accordent pour signaler l'intérêt au niveau de l'apprentissage et au niveau de l'enseignement de la conduite de telles situations de classe. On peut se poser la question des raisons pour lesquelles la diffusion dans les classes est si faible.

Nous nous appuierons dans cette partie d'une part sur les déclarations des professeurs participant au stage de formation d'autre part sur l'entretien avec la professeure (page 135) ayant suivi le stage de formation et expérimenté dans sa classe ;

Les professeurs interrogés[8] sur les raisons de ne pas mettre en place des problèmes de recherche dans la classe évoquent principalement deux grandes raisons :

1. La perte de temps en regard des programmes de la classe
   Il est, par exemple intéressant de noter, que malgré toutes les opinions favorables qui ressortent de l'entretien avec la professeure, c'est cet argument qui vient en premier pour justifier le fait qu'elle n'est pas mis en place d'autres problèmes de recherche dans ces classes : ligne 59 :

[8]Lors du tour de table de présentation, les stagiaires étaient invités à donner leur expérience en matière de problèmes de recherche dans la classe ; les extraits suivants sont tirés des déclarations des professeurs à cette occasion.

> *... je me suis dit je vais le refaire, en seconde, en BTS, maintenant que je l'ai bien travaillé [...] Mais je ne l'ai pas fait pour des questions de temps...*

2. La difficulté et la prise de risques imposée aux élèves

   Souvent évoqué par les stagiaires, la difficulté à laquelle les professeurs doivent soumettre leurs élèves, la peur que les moins bons se trouvent encore plus en difficulté, que ça ne profite qu'aux meilleurs, apparaît comme un frein à la mise en place dans la classe : « Faire des exercices d'application directe, ça va, mais des problèmes ouverts, d'abord, il y a des problèmes avec la langue », « C'est difficile de raccrocher des élèves qui manquent de bagage », « ...ça accentue les différences », « C'est difficile quand on sort des rails ».

   Cette difficulté supposée pour les élèves est peut-être une peur d'une perte de maîtrise sur la leçon comme c'est, à l'envers, très bien illustré par cette phrase de l'entretien ligne 69 :

   > *... c'est intéressant pour le prof d'un point de vue intellectuel...*

   C'est ce même sentiment qui est évoqué par les professeurs dans leur travail de préparation de séance de classe avec la ressource :

   ligne 236 : « *La rivière, je maîtrise au niveau mathématique* »

   lignes 334, 335 : « *A : (lisant la consigne) Qu'est-ce qui nous a motivé ? B : C'est qu'on comprenait pas les autres...* »

Parallèlement sont évoquées la place des objets d'enseignement dans les problèmes de recherche : « *dans un problème on doit pouvoir retrouver les notions enseignées. Mais c'est moins facile* », ou la place de l'évaluation « *en fait, des fois, on ne sait pas ce qu'ils font, on ne sait pas si c'est des maths* », ce qui fait complètement écho aux hypothèses du travail de l'équipe EXPRIME (cf. page 6).

En revanche, les points positifs qui sont notés portent sur la motivation accrue des élèves, donner de l'intérêt à son enseignement, « *sortir de la routine* », rendre les élèves plus actifs et acteurs de leur apprentissage. Points qui sont largement repris dans l'entretien et auxquels la professeure rajoute l'idée de plaisir pour ses élèves, « *visiblement ils ont pris beaucoup de plaisir et moi, c'est quelque chose que je trouve important, réinsérer du plaisir dans les maths, c'est quelque chose qui m'interpelle (rires) parce que je trouve que c'est tellement une matière qui peut être faite sans plaisir...* », mais aussi pour elle-même : « *je l'ai vécu très bien, avec beaucoup de plaisir, en fait, je suis en train de découvrir ce que c'est qu'une classe où ce sont les élèves qui font des maths et plus le prof, et je trouve que c'est autre chose, que c'est une autre dimension du cours de maths...* ».

4.1.3 Analyse du champ des contraintes

Le contexte de l'expérimentation

La première partie de l'expérimentation s'est déroulée lors d'un stage de formation continue du Plan Académique de Formation dont le thème portait sur l'usage des problèmes dans la classe de mathématiques ; les professeurs se sont donc inscrits volontairement à ce stage qui était ouvert indifféremment aux enseignants de collège et de lycée. La population était donc variée tant dans le niveau d'enseignement que dans l'expérience et l'ancienneté des collègues.

La deuxième partie de l'expérimentation s'est déroulée dans une classe de première S du lycée La Martinière Duchère à Lyon. Il s'agit d'un grand lycée de la banlieue de Lyon, un des sept établissements « La Martinière » (Voir annexe 2, paragraphe 8.4 page 134).

L'observation s'est déroulée dans une des cinq première S de l'établissement dans laquelle la moitié des élèves suivent une spécialité SI (Sciences de l'Ingénieur) et les autres la spécialité SVT.

La présentation du problème et la recherche du groupe de quatre élèves ont été enregistrées. L'observation de la première heure a fait l'objet d'une prise de notes. Le protocole est disponible en page 113.

Enfin l'entretien de la professeure s'est déroulé un mois après l'expérimentation en classe ; il a été enregistré et décrypté. Il est disponible dans l'annexe 3 page 135.

Description du reccueil des données

Dans la première phase, stage de formation du Plan Académique de Formation, la première matinée était consacrée à un tour de table des stagiaires ayant comme but leur positionnement vis à vis des problèmes de recherche ; lors de cette première matinée, des notes ont été prises (l'enregistrement réalisé s'est révélé insuffisamment exploitable du fait de l'éloignement des protagonistes, mais a permis de confirmer les notes) ;

La dernière après-midi du stage était consacrée à une phase de préparation d'une séquence de classe utilisant des problèmes de recherche. Nous avons présenté succintement la ressource comme un outil d'aide à l'élaboration d'une séquence. Les stagiaires travaillaient par deux et avaient reçus les consignes ci-dessous :

Temps	**Déroulement**	**Consignes**
15min	Présentation du travail de l'après-midi Mise en place du travail	**Oralement** : L'objectif de l'après midi est d'entamer un processus de préparation d'une séquence de classe utilisant un problème de recherche ; cette situation de classe pourra être expérimentée en classe et la journée de rappel du stage permettra un partage d'expérience. Dans un premier temps, nous vous demandons d'utiliser pour ce travail une ressource disponible sur les ordinateurs. Après une mise en commun, vous pourrez poursuivre avec ou sans la ressource la préparation de cette séquence de classe.
1h	Travail sur ordinateur par deux, de préférence ayant une classe en commun.	**Consigne écrite :** Vous avez comme projet de construire une séquence de classe en mettant en place une recherche de problème. Vous disposez de la ressource Exprime et d'une heure de travail. A l'issu de ce travail vous nous direz : – Quel a été le problème choisi ? Argumentez votre choix – Où en êtes vous de la préparation de la séquence de classe ? – Quel objectif assignez vous à cette séquence ? Un des deux jouera le rôle de secrétaire et aura pour tâche de rendre compte du travail effectué.
45 min	Mise en commun et présentation des hypothèses de travail ayant conduit à la réalisation de la ressource	
1h	Suite du travail de préparation	**Consigne orale :** A partir du travail réalisé et de la mise en commun, poursuivre la préparation de la séquence de classe.

Tableau 1
Consignes données lors du stage de formation continue

Les dialogues du groupe observé (deux professeurs) étaient enregistrés de même que l'écran de l'ordinateur qu'ils utilisaient[9]. L'ensemble du protocole (écrans visités et dialogues) est consultable en annexe 1 page 71

Enfin un entretien avec la professeure ayant expérimenté s'est déroulé un mois après l'expérimentation en classe sous forme d'un entretien semi directif utilisant les techniques de l'entretien d'explicitation. Il est disponible en Annexe 3, page 135.

4.2 Conception et analyse *a priori*

Dans cette phase un certain nombre de variables peuvent être décrites et précisées pour faciliter l'analyse de l'ingénierie. Il s'agit d'agir sur des variables pertinentes par rapport au problème posé.

En ce qui concerne les variables macro-didactiques qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie dans la situation meta-didactique de préparation d'une séquence de classe mettant en place une recherche de problème, nous avons choisi de mettre le focus sur trois phases qui nous paraissent significatives du travail de l'enseignant et des effets de son travail sur la dynamique des milieux et pour lesquelles nous détaillerons les variables micro-didactiques :

1. Prise en main de la ressource : il s'agit dans cette phase de croiser les regards en s'appuyant d'une part sur la notion de milieu et d'autre part sur la notion ergonomique d'utilisabilité. Le problème à résoudre par les enseignants est donc la préparation de la séance de classe, la ressource est placée dans le milieu matériel des enseignants (le milieu de projet pour reprendre la structuration des milieux de la page 10) ; ils peuvent s'y référer pour contrôler l'analyse *a priori* de la situation proposée aux élèves. Le P-constructeur dans une interaction avec le milieu de projet pourra construire une séquence de classe en controlant d'une part les interactions du P-projeteur et de l'E-réflexif mais aussi en préparant les éléments du milieu matériel des élèves et les interactions entre les élèves et le milieu matériel.

   L'évaluation empirique de l'utilisabilité s'appuiera sur l'observation de professeurs construite de la manière suivante :
   - travail en binôme permettant de faciliter les dialogues et d'expliciter les choix,
   - observation des mouvements de la souris sur l'écran parallèlement à l'enregistrement des dialogues permettant de prendre en compte d'une part la possibilité d'apprendre le système et de mémoriser le fonctionnement et d'autre part de mesurer l'efficience de la ressource et l'équilibre entre la facilité d'utilisation et l'efficience ([Tricot *et al.*, 2003] déjà cité page 16).
2. Mise en place dans la classe : l'organisation de l'observation se fera en deux temps ; dans une première séance de classe, nous observerons la classe dans sa globalité et porterons notre attention sur les interactions entre enseignant et groupes d'élèves et dans une deuxième séance, nous observerons un groupe d'élèves dans les phases d'action et de formulation de la situation.

[9] utilisation du logiciel libre CamStudio qui permet de capturer l'écran et d'enregistrer le son.

Dans cette observation, nous controlerons l'adéquation de la préparation et de la réalisation en observant la position de l'enseignant dans la classe et la dynamique des milieux des élèves. L'observation portera donc sur deux aspects :
- les interventions de l'enseignant et l'organisation de la classe, permettant une mesure du contrôle de l'enseignant sur le milieu créé,
- le travail d'un groupe d'élèves et les interactions avec le professeur, permettant un contrôle de l'efficience de la situation proposée.

L'évaluation empirique de l'utilité s'appuiera sur cette observation pour mettre en évidence l'adéquation entre l'objectif défini et la réalisation effective.

3. Entretien : il permettra de revenir sur les éléments essentiels de la préparation de la séquence et notamment sur le passage du milieu matériel au milieu objectif de l'enseignant.

   L'acceptabilité de la ressource pourra dans cet entretien être évaluée par la mise en évidence des éléments de la ressource ayant permis la réalisation effective de la tâche prescrite et sa prise en compte dans la culture de l'enseignant. Nous utiliserons la grille d'entretien suivante :

Grille d'entretien

Premier point : les problèmes de recherche position vis à vis de ce type d'outil d'enseignement
- familiarité avec l'usage de problèmes dans son enseignement
- position personnelle vis à vis des problèmes et des mathématiques

Deuxième point : la préparation de la séance
- le rôle de la documentation
- le rôle de la ressource

Troisième point : les séances de classe
- la phase de recherche
- l'institutionalisation
- les avis des élèves

Chapitre 5

Analyse

5.1 Stage de formation

L'ensemble des dialogues et la suite des écrans consultés se trouvent en annexe 1 (page 71).

Nous reprendrons dans cette analyse les critères d'évaluation empirique de [Tricot *et al.*, 2003] pour étudier l'utilisabilité de la ressource :

1. Possibilité d'apprendre à utiliser le système
2. Gestion et prévention des erreurs
3. Mémorisation du fonctionnement
4. Efficience
5. Sentiment de satisfaction

Le cadre théorique des milieux pour étudier la position de la ressource dans le milieu du professeur.

5.1.1 Etude du protocole

Le dispositif d'observation : enregistrement de l'écran de l'ordinateur sur lequel travaillait les deux professeurs et enregistrement des dialogues.

Les deux professeurs concernés enseignent en collège et n'ont jamais mis en place de problèmes ouverts dans leur classe.

Nous découpons le protocole en utilisant les numéros de ligne de l'annexe 1 (page 71) et dégageons des phases différentes de longueurs et d'importance très différentes.

Phase 1

Lignes 1 à 29 (temps trois minutes).

Cette première partie de l'observation peut être analysée comme un moment d'errements en terme de navigation dans la ressource jusqu'à un incident non maîtrisé faisant déboucher sur le menu général (lignes 27-28 : « *Attends, qu'est-ce qui s'est passé ? Je sais pas* » (*Rires*))

Dans cette phase, les deux protagonistes se positionnent vis à vis de la ressource et souhaitent avoir des renseignemnts sur les objectifs et les fondements théoriques de la ressource (lignes 3, 11) ; on voit par ailleurs la nécessité de comprendre le fonctionnement de la ressource avant de s'intéresser aux contenus (ligne 9 : « *tu veux revenir là dessus ? Non, tu surf* ») ; la position de la ressource à cet instant est clairement extérieure au milieu objectif des professeurs de même que son utilité n'est pas engagée.

Phase 2

Lignes 30 à 32 (temps moins d'une minute).

A cherche à avoir des renseignements sur la ressource (ligne 30 clic sur le bouton « esprit des documents » puis ligne 32 : « la dimension expérimentale »).

Dans la position de P-constructeur, la légitimité du document est un élément important de l'acceptabilité de la ressource (acceptabilité sociale [Tricot *et al.*, 2003]) ce qui peut être lu comme une position du professeur dans la situation noosphérienne en interaction avec le milieu de construction. Dans cette observation, même si les professeurs ne vont pas jusqu'au bout de cette appropriation de la légitimité du document, elle apparaît dans ces deux premières phases. Bien entendu, le contexte d'un stage de formation donne une légitimité ce qui peut expliquer cette attitude de confiance (ligne 31 : « *on va pas s'amuser à aller lire les textes* »).

Phase 3

Lignes 33 à 59 (temps deux minutes et demie).

Dans cette phase, les professeurs choisissent une situation sur son titre (lignes 34-36) et explorent la page de présentation qui les amènent au constat que le problème est connu. Dans ces conditions, la navigation est explorée (c'est le premier menu qui est cliqué, ligne 46) et la ressource instrumentalisée (« *quand je fais un coup de molette...* »).

L'analyse mathématique du problème provoque une réaction qui à la fois montre la surprise et l'appropriation du contenu de cette section comme on le retrouvera plus tard (ligne 51 : « *C'est la démonstration, en fait* »).

Nous voyons dans cette phase un apprentissage du système avec les tests sur les boutons et les menus qui permet aux enseignants de naviguer d'une rubrique à l'autre et de s'approprier le fonctionnement technique ; la ligne 56, sans paroles, mais avec une succession de changements d'écrans en est le témoin ; elle s'achève par le retour au menu général.

Phase 4

Lignes 60 à 75 (temps : une minute trente).

Un passage qu'il convient encore de subdiviser avec une entrée comparable à la précédente (ligne 60 : « *les urnes de Polya, ça m'intrigue aussi* »). Puis un court dialogue montrant l'interaction du P-projeteur avec le milieu didactique, avec les références à la classe de quatrième et à la construction d'un milieu matériel pour les élèves (ligne 65 : « *on peut faire avec beaucoup de balles de ping-pong* »), et se terminant en ligne 69 par une confiance reaffirmée aux auteurs (ligne 69 : « *on va voir ce qu'ils en disent* »).

En huit secondes, trois changements d'écran pour aboutir, comme si l'habitude se créait (mémorisation du fonctionnement), sur l'analyse du problème. Il s'en suit une lecture de la première page de l'analyse du problème sur laquelle les professeurs restent une cinquantaine de secondes (sur la minute trente seconde de cette phase), se terminant sur un clic sur le bouton de retour puis en trois clics au menu général ; la raison invoquée pour l'abandon de la situation est la perspective de l'utilisation en classe, en référence donc au milieu didactique : ligne 75, « *mais ça cible pas trop avec...* ».

Phase 5

Lignes 76 à 78 (temps : quelques secondes).

Sur le menu général, les professeurs passent systématiquement en revue les problèmes. Ils arrivent donc à la troisième situation, « la rivière » qu'ils abandonnent comme quelque chose de trop connu (ligne 77 : « *La rivière, c'est le plus court chemin* »).

Phase 6

Lignes 79 à 101 (temps : environ quatre minutes).

Hésitation dans un premier temps à rentrer dans cette situation[1] (ligne 81 : allers - retours de la souris entre les boutons), et l'argument qui semble l'emporter est le fait que la situation peur être mise en œuvre dès la classe de quatrième.

Sans hésitation, en revanche, en deux clics, l'écran de la situation mathématique apparaît, et presque instantanément sur le bouton proposant des solutions. Vingt secondes permettent de lire la solution proposée, accessible au collège. Le retour au menu débouche sur l'exploration d'une nouvelle rubrique, les « objets potentiellement travaillés ». Dans la version en cours au moment de l'expérimentation, les objets potentiellement travaillés étaient écrits en liste, liste partiellement lue en ligne 87. Une question d'ordre mathématique se pose : le lien entre le problème et la notion de bissectrice réoriente la lecture, mais la ressource, incomplète à cette date ne permettra pas une exploration plus fine. Il est quand même intéressant de noter que cette exploration a été déclenchée d'une part par le décalage entre les éléments attendus et les éléments proposés et d'autre part par la volonté de construire une situation pour leurs classes de collège.

Dans cette phase, on peut voir la familiarité avec la navigation s'accroître, il semble que l'apprentissage du système soit désormais acquis ; les retours sont à mettre sur le compte des contenus, encore inachevés dans cette section au moment de l'expérimentation.

Phase 7

Lignes 102 à 113 (temps : environ deux minutes).

Une exploration rapide d'une situation[2] qui ne semble pas pouvoir être retenue par les professeurs dans leur construction de séquence. Le passage par la section « situation mathématique » semble s'instaurer comme une règle de consultation ; sa position en tête de

[1] Une intersection innaccessible.

[2] Le nombre de zéros de factoriel n.

liste est, dans un premier temps certainement responsable de ces actions, mais, d'un autre côté il tend à confirmer nos hypothèses portant sur l'importance de la compréhension et de la maîtrise de la situation mathématique dans la construction d'une situation didactique.

En terme d'utilité, il peut être noté le décalage de temps et de sous sections visitées dans la phase 6 et dans cette phase dans la mesure où la situation mathématique pouvait sembler difficile à aborder en collège. Il est d'ailleurs à noter que dans cette phase, la sous section « Situation d'apprentissage » n'a pas été visitée. On peut raisonnablement penser que la distance entre la démonstration et l'enseignement de collège a provoqué cet abandon rapide.

Phase 8

Lignes 114 à 152 (temps : environ six minutes).

Une phase assez longue[3] permettant d'une part de juger de la maîtrise de la navigation dans la ressource, maîtrise confirmée par l'incident des lignes 127 et 128 pendant lesquelles l'un des professeurs a changé d'écran en utilisant la molette de la souris et est revenu sur son écran de départ. D'autre part, on remarque la confirmation de la « règle » établie d'une visualisation de l'analyse mathématique pour entrer dans la ressource et de l'importance accordée à cette section : dans cette phase, l'exploration de l'analyse mathématique dure environ trois minutes trente et se termine par un intérêt affirmé pour la situation : ligne 131 : « *Ca doit être extrèmement intéressant à expérimenter* » et qui renvoit à la poursuite de l'exploration : ligne 133, « *Je peux voir un autre choix à propos de ce travail là ?* ». On note ici la dynamique de l'action du P-constructeur prenant en considération d'une part la situation d'un point de vue mathématique (milieu de construction) et la situation didactique (milieu de projet).

Phase 9

Lignes 153 à 195 (temps : huit minutes).

« *Je commence par situation mathématique* », ligne 155 donne immédiatement le ton.

Cet épisode uniquement consacré à l'étude mathématique de la situation des fractions égyptiennes confirme la maîtrise de la navigation dans la ressource. Par ailleurs il confirme l'intérêt de l'analyse mathématique pour l'intégration dans le milieu « objectif » des professeurs, et montre clairement le nécessaire travail pour transformer une situation mathématique en situation de classe, travail sur les objets manipulés, travail sur les raisonnements et travail sur les heuristiques.

Phase 10

Lignes 196 à 231 (temps : trois minutes trente).

La situation[4] semble connue (ligne 201 « *...il est tellement galvaudé celui là* », cette phase est une phase pratiquement sans parole, les éléments montrés ne présentant pas de

[3] La situation explorée est : le plus grand produit

[4] La rivière

surprise vis à vis de ce qui est attendu. Cette situation est considérée par les enseignants comme faisant partie de leur milieu objectif et le parcours effectué lors de l'observation ne permet pas de modifier son statut ; on est ici face à un milieu « allié » [Fregona, 1995] ne permettant pas une construction de connaissance.

Phase 11

Lignes 232 à 260 (temps : deux minutes quarante).

Dans un premier temps, les professeurs se replacent dans la tâche prescrite (ligne 234 : « *... il faudrait voir deux ou trois arguments* », qui fait référence aux consignes données. On revoit ici la difficulté et l'intérêt de la situation[5] mathématique : « *...là, il y a des problèmes de diviseurs, mais y'a un intérêt* » et la volonté de privilégier des problèmes « originaux », au sens où ils ne sont pas connus *a priori*.

Un incident dans la navigation (ligne 248) ne modifie pas la suite du cheminement ni la conversation qui porte sur l'intégration d'une calculatrice dans le milieu matériel des élèves. Le P-projeteur confronte la situation à l'E-réflexif et étudie la faisabilité de modifier le milieu matériel pour compléter la situation objective de l'élève.

Phase 12

Lignes 261 à 293 (temps : cinq minutes quarante).

La conversation s'arrête brutalement ligne 261 : « *le Bezout, là, c'est niais* », l'écran affichant la démonstration de l'impossibilité de la somme un de deux fractions égyptiennes :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \text{ est équivalent à : } a = \frac{b}{b-1}$$

Mais a est un entier et comme b et $b-1$ sont premiers entre eux puisqu'on peut écrire la relation de Bezout : $b-(b-1)=1$ avec les deux entiers 1 et -1, $b-1$ est une unité et donc $b=2$
Ce qui correspond au cas : $a=b=2$, exclu car $a \neq b$

La conversation montre que la situation mathématique n'est pas complètement maîtrisée et les démonstrations successives de la ressource plongent les enseignants dans une situation qu'ils ne semblent pas maîtriser complètement (ligne 290 : « *Ouh la la, solutions expertes...* ») et qui apparaissent donc hors de leur portée dans le contrat du stage : ligne 293 : « *moi, j'ai bien aimé le problème des décompositions* ».

Dans cette épisode, la ressource fait bien partie d'un milieu antagoniste mais la position actuelle des enseignants ne leur permet pas de se frotter à cette difficulté et de jouer le jeu proposé. On voit entre la phase 10 et celle-ci deux eccueils possibles de la ressource : d'une part la construction d'un milieu allié qui ne permet pas une construction effective de connaissances et d'autre part la mise en évidence d'un milieu ne permettant pas dans des conditions données de jouer le jeu proposé.

[5] Les fractions égyptiennes

Phase 13

Lignes 294 à 329 (temps : deux minutes vingt).

Dans cette phase de travail, les deux professeurs reviennent sur la situation du plus grand produit et parcourent les écrans sans hésitation ; l'état de la ressource au moment de l'expérimentation fait que des clics nombreux et rapides se produisent jusqu'à l'incident de la ligne 305 :

dans la ressource, il est prévu de télécharger une synthèse de chacune des situations, et ce téléchargement passe par l'ouverture d'une page html : « *C'est quoi, ça ?* »

Sans lecture du message (les clics successifs sont instantanés), le professeur revient à la ressource, sans plus de commentaires.

Les professeurs restent quelques secondes sur les proposition d'énoncés, puis un court dialogue tend à montrer la projection par les enseignants de la situation dans une situation didactique :

ligne 315 : « *Il est pas mal* »

ligne 317 : « *Qu'est ce que tu voyais ?* »

ligne 318 : « *A la rigueur, il est pas mal* »

ligne 319 : « *Si tu leur as donné dans un cas particulier, après tu peux leur proposer un cas plus général* »

ligne 320 : « *Oui, évidemment* »

Dans la ligne 321, un enchaînement d'écrans montrent une maîtrise importante de la navigation ; à ce niveau de l'expérimentation l'utilisabilité de la ressource, pour ce couple de professeurs est attestée.

Un indice du passage du milieu matériel des enseignants au milieu objectif peut encore être mis en évidence même si les difficultés ne sont pas encore résolues :

ligne 329 : « *je suis persuadé que d'avoir toutes les décompositions ce sera difficile, mais bon, avec un travail de plusieurs personnes...* »

Phase 14

Lignes 330 à 342 (temps : environ deux minutes).

Après le rappel de la formatrice, les professeurs reviennent aux consignes de cette partie du stage. Ils confirment la nécessité de travailler plus sur les problèmes pour comprendre les mathématiques sous-jacents :

« *Qu'est ce qui vous a motivé ?* »

« *C'est qu'on comprenait pas les autres* »

Ce qui est repris dans la mise en commun, « *...c'est celui qui nous paraissait assez simple...* »

Par ailleurs, les objectifs assignés à cette séance de classe seraient principalement liés à la recherche du problème et à sa rédaction même si les professeurs avouent que ce n'est pas encore très clair dans leur esprit : « *Ben, faut attendre d'avoir fait une préparation pour assigner un objectif* ».

5.1.2 Conclusion

Dans cette observation, les différents critères d'évaluation de l'utilisabilité de la ressource semblent satisfaits. La prise en main est effective ; la ressource peut faire partie du milieu objectif des enseignants ; il reste bien sûr à confirmer cette hypothèse d'une part en allant jusqu'au bout de la démarche pour essayer de prouver un théorème d'existence (la ressource peut être un élément du milieu de référence des enseignants) et de mettre à l'épreuve l'utilité et l'acceptabilité de cette ressource.

5.2 Classe de première S

Une professeure ayant participé au stage de formation, ne faisant pas partie du binôme observé, mais ayant commencé la préparation d'une séquence de classe durant ce stage a mis en place dans sa classe de première S un problème ouvert dans deux séances de module (la classe est séparée en demies-classes) ; durant la première heure nous avons observé l'ensemble du fonctionnement de la première demie-classe ; dans la seconde heure, nous avons observé un groupe de quatre élèves cherchant le problème.

La situation qui avait été choisie par la professeure était « *les nombres trapézoïdaux* », dont je reprends ci-dessous la fiche de synthèse produite dans la ressource :

5.2.1 La situation choisie

Situation Mathématique

Les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs : nombres trapézoïdaux

Analyse mathématique du problème :

Après avoir expérimenté sur des sommes d'entiers consécutifs, on conjecture que tous les entiers peuvent être décomposés en somme d'entiers consécutifs, sauf les puissances de 2 d'exposant supérieur ou égal à 1

Démonstration :

Elle utilise le résultat suivant : si n est un entier naturel, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
On peut noter S_n cette somme.
(Cette démonstration permet de revoir ou d'introduire ce résultat, comme outil de résolution de problème)
N étant un entier naturel, on cherche s'il existe deux entiers naturels a et n tels que :
$N = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+n-1)$
$N = S_{a+n-1} - S_{a-1}$
$N = \dfrac{(a+n-1)(a+n)}{2} - \dfrac{(a-1)a}{2}$
Soit : $2N = (a+n)^2 - a - n - a^2 + a = n(2a+n-1)$

On peut alors raisonner sur la parité de l'entier n :
si n est pair : $2a + n - 1$ est impair
si n est impair : $2a + n - 1$ est pair

Par conséquent, des deux entiers n et $2a + n - 1$, l'un est pair et l'autre impair : leur produit étant égal à $2N$, cela entraîne que N possède un facteur premier impair : N n'est pas une puissance de 2.

Autre raisonnement, par l'absurde : si $N = 2^m$ alors on cherche a et n tels que : $2^{m+1} = n(2a+n-1)$, ceci est impossible car l'un des deux facteurs du second membre est impair.

Il reste encore à démontrer que tout nombre N qui n'est pas une puissance de 2 peut s'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

$2N$ est donc le produit d'un nombre impair i par un nombre pair p.
Alors : $2N = ip$ et $2N = n(2a + n - 1)$ et
si : $i < p$, alors il suffit de poser : $n = i$ et $p = 2a + n - 1$, soit : $a = \dfrac{p-i+1}{2}$
si : $i > p$, alors il suffit de poser : $n = p$ et $i = 2a + n - 1$, soit : $a = \dfrac{i-p+1}{2}$

La conjecture est ainsi complètement démontrée, et cette démonstration donne un procédé pratique pour déterminer a et n entiers naturels tels que : $N = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a + n - 1)$.

Historique :

Gauss : somme d'entiers consécutifs.

L'anecdote de sa jeunesse : bien racontée dans l'ouvrage collectif :
"Les mathématiciens" Bibliothèque Pour la science, diffusion Belin page 64

Son théorème sur les nombres triangulaires (même livre, page 66) "euréka !"

Liens :

http ://www.univ-orleans.fr/irem/cii/lyons/atelier11mlb.pdf : Université d'Orléans

Très intéressant, avec de nouveaux problèmes sur les nombres trapézoïdaux :
http ://www.recreomath.qc.ca/art_trapezoidaux_n.htm :Récréomath

Site de Thérèse Eveilleau : "trucs" , "visualiser des formules" , "l'escalier des entiers" :
http ://perso.orange.fr/therese.eveilleau/ : Thérèse Eveilleau

Objets mathématiques potentiellement travaillés

Au collège :

Savoirs méthodologiques mobilisables :
- expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
- conjecturer
- dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
- se poser le problème de la démonstration, de la preuve

Savoirs mathématiques mobilisables :
- nombres entiers naturels
- entiers pairs, impairs (caractérisation "algébrique")
- calcul algébrique
- arithmétique : divisibilité (par 2, ici)

Au lycée :

Savoirs méthodologiques mobilisables :

- expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
- conjecturer
- dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
- se poser le problème de la démonstration, de la preuve
- observer des invariants et/ou des relations de récurrence
- revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples "génériques") qui ne donne pas une démonstration
- critiquer une démonstration, en percevoir les limites
- analyser les conditions de validité d'un calcul
- se poser un nouveau problème : pour un entier donné, combien a t-il de décompositions en somme d'entiers consécutifs ?
- utilisation d'un outil informatique : le tableur (adresses absolues et relatives)

Savoirs mathématiques mobilisables :

- nombres entiers naturels
- entiers pairs, impairs (caractérisation "algébrique")
- calcul algébrique
- arithmétique : divisibilité (par 2, ici)
- somme des n premiers entiers naturels (ou suite arithmétique) et à ce propos, anecdote sur Gauss
- raisonnement par analyse-synthèse
- raisonnement "par le pair, et l'impair" : raisonnement par exhaustion
- raisonnement par l'absurde
- fonction de deux variables et tableau de valeurs de cette fonction sur un tableur

Situations d'apprentissage

Énoncés :

Trouver tous les entiers qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.

ou

Quels sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?

Scénario au collège :

Durée de la séance : une heure de recherche.

Lecture de l'énoncé par le professeur. Demander s'il y a des termes qui posent problème. Le terme "entiers consécutifs" doit souvent être précisé (donner un exemple, et un contre-exemple).

Travail individuel : 10 minutes

Travail en petits groupes : 45 minutes

10 minutes avant la fin, distribution d'un transparent pour les conclusions dans chaque groupe.

Séance suivante : résumé des compte-rendus, correction des erreurs et quelques pistes de solutions partielles : la démonstration de la conjecture ne peut être abordée, celles de sous problèmes peuvent l'être : tous les entiers impairs sont solutions du problème, tous les multiples de 3 aussi.

Scénario au lycée :

Durée de la séance : une heure de recherche.

Lecture de l'énoncé par le professeur. Demander s'il y a des termes qui posent problème. Le terme "entiers consécutifs" doit parfois être précisé (donner un exemple, et un contre-exemple).

Le matériel dont peuvent disposer les élèves est : la calculatrice, et le tableur. Il est à disposition, mais ne doit pas être imposé aux élèves.

Travail individuel : 10 minutes

Travail en petits groupes : 45 minutes

10 minutes avant la fin, distribution d'un transparent pour les conclusions dans chaque groupe.

Séance suivante : résumé des compte-rendus, correction des erreurs et quelques pistes de solutions partielles : la démonstration de la conjecture ne peut être abordée qu'en Première S ou terminale S , celles de sous problèmes peuvent l'être : tous les entiers impairs sont solutions du problème, tous les multiples de 3 aussi.

Forme algorithmique des entiers solutions :

$n + (n + 1) = 2n + 1$ " les impairs "

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$ " les multiples de 3 "

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$

$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10$

et mise en place de deux suites donnant les coefficients a et b de $an + b$.

Lors des séances suivantes, on peut aborder la démonstration de la conjecture, de sous-problèmes, l'aspect tableur, le prolongement sur le nombre de décompositions possibles pour un entier donné. La gestion peut se faire soit par des recherches en groupes en classe, soit en devoir à la maison individuel, en groupe, sur un temps long, avec des bilans intermédiaires.

Compte-rendus au collège :

- Ce problème se prête facilement à l'expérimentation numérique. En essayant des sommes de deux, ou trois ou quatre entiers consécutifs (certains élèves ne se le permettent pas, et se limitent à la somme de deux entiers consécutifs), le travail de groupe enrichit vraiment le champ d'expérimentation, on arrive assez vite à la conjecture que tous les entiers conviennent, sauf les puissances de 2 (différentes de 1).

  Savoirs méthodologiques mobilisés :

  > Expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
  > Conjecturer

- Voici des conjectures émises au collège :

  > $N = 2n + 1$, $N = 3n + 3$, $N = 4n + 6$, $N = 5n + 10$, $N = 6n + 15$
  > Tous les multiples d'un nombre premier impair conviennent
  > Tous les nombres, sauf ceux qui sont seulement multiples de 4
  > Tous les entiers, sauf les : $2x$, $x = 1, 2, 3, ...$
  > Tous les entiers, sauf 0 et les 2^n , $n \neq 0$
  > Les entiers impossibles sont 0 et tous les entiers pairs, multiples à la fois uniquement de 2 et de 4
  > Tous les entiers, sauf les puissances de 2 et le nombre 136
  > Des écritures algébriques, suivies d'une vérification sur un ou des exemples numériques

- Des sous-problèmes de ce problème voient le jour

  Savoirs méthodologiques :

  > Dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
  > Se poser le problème de la démonstration, de la preuve

- Le sous problème suivant est en général émis par de nombreux groupes : "tous les entiers impairs conviennent". sa démonstration utilise le calcul algébrique : soit n un entier naturel , $n + (n + 1) = 2n + 1$, ce qui démontre que tout entier impair est la somme de deux entiers consécutifs.

Compte-rendus au lycée :

- Ce problème se prête facilement à l'expérimentation numérique. En essayant des sommes de deux, ou trois ou quatre entiers consécutifs (certains élèves ne se le permettent pas, et se limitent à la somme de deux entiers consécutifs), le travail de groupe enrichit vraiment le champ d'expérimentation, on arrive assez vite à la conjecture que tous les entiers conviennent, sauf les puissances de 2 (différentes de 1).

  Savoirs méthodologiques mobilisés :

Expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice
Conjecturer

- Des sous-problèmes de ce problème voient le jour :

  Savoirs méthodologiques :

  Dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
  Se poser le problème de la démonstration, de la preuve

- Le sous problème suivant est en général émis par de nombreux groupes : « tous les entiers impairs conviennent ». Sa démonstration utilise le calcul algébrique : soit n un entier naturel , $n+(n+1)=2n+1$, ce qui démontre que tout entier impair est la somme de deux entiers consécutifs.

- Les élèves de lycée utilisant plus volontiers qu'au collège des lettres pour traiter de type de problème, ils écrivent les sommes de k entiers e partant de n pour $k=2$, puis 3, puis 4, etc. Ils se posent alors le problème suivant : "Peut-on trouver une méthode par récurrence pour décrire les entiers cherchés ?"

  Savoirs méthodologiques :

  Se poser le problème de la démonstration, de la preuve
  Dégager des sous-problèmes, que l'on s'attache à démontrer
  Observer des invariants et/ou des relations de récurrence
  Revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples « génériques ») , qui ne donne pas une démonstration

Savoirs mathématiques mobilisés :

Nombres entiers naturels
Entiers pairs, impairs (caractérisation « algébrique »)
Calcul algébrique

$n+(n+1)=2n+1$ " les impairs "

$n+(n+1)+(n+2)=3n+3$ " les multiples de 3 "

$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$

$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$

On trouve alors expérimentalement une façon de déterminer les coefficients « rouges » et les coefficients « bleus » : les rouges augmentent de 1 à chaque ligne et les bleus sont égaux à la somme des deux coefficients (le rouge + le bleu) de la ligne précédente.
Ceci permet, en y mettant le prix, de trouver tous les entiers solutions.

- Pour aborder la démonstration du fait suivant : « tout entier N qui n'est pas une puissance de 2 est la somme de plusieurs entiers consécutifs », les élèves peuvent s'appuyer sur des exemples qu'ils vont « faire parler ».

  Savoirs méthodologiques :

Revenir à des exemples pour en déduire une preuve (des exemples « génériques ») , qui ne donnent pas une démonstration
Conjecturer

Expérimenter sur des valeurs numériques à la main, à la calculatrice, au tableur
Se poser le problème de la démonstration, de la preuve
Observer des invariants
Critiquer une démonstration, en percevoir les limites
Analyser les conditions de validité d'un calcul
Savoirs mathématiques mobilisés :

Nombres entiers naturels

Calcul algébrique

$12 = 3 + 4 + 5$, $12 = 4 + 4 + 4$, $40 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8$, $40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
si l'on essaye de généraliser cette idée issue de l'expérimentation sur des exemples, on obtient :

Si un nombre N s'écrit : $(2k + 1)n$, avec k et n entiers naturels, alors :
$N = (2k + 1)n$,avec $2k + 1$ termes égaux à n,
$N = (n - k) + (n - k + 1) + ... + (n - 1) + n + (n + 1) + ... + (n + k - 1) + (n + k)$
Les termes se regroupent deux à deux, avec pour somme $2n$:
$(n - k) + (n + k) = 2n$, $(n - k + 1) + (n + k - 1) = 2n$, etc.

On obtient donc k fois $2n$, auquel il faut ajouter n, le terme central, donc on retrouve bien : $N = (2k + 1)n$.

La condition pour que les termes de la somme soient tous des entiers naturels est : $n \geq k$.

Il semble donc, à cette étape, que cette démonstration ne marche pas dans tous les cas, par exemple :

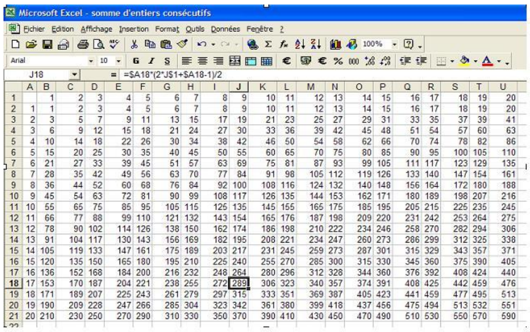
$10 = 5 \times 2 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$, correct, car ici : $n \geq k$
$14 = 7 \times 2 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, ne convient pas , car il y a un nombre entier négatif ! ici : $n < k$, ce qui est très fort, c'est que de la dernière égalité on peut tirer une autre égalité qui va convenir à notre problème , à savoir , comme : $-1 + 0 + 1 = 0$, on obtient : $14 = 2 + 3 + 4 + 5$.

Mais là, il n'est pas facile de rédiger une démonstration « générale ».
On comprend pourtant aisément que ce calcul va pouvoir être possible dans tous les cas où $n < k$.
On peut parler d'un exemple générique, qui à lui seul convainc.

La démonstration experte peut être abordée par des élèves de Première ou de Terminale scientifique, mais pas en seconde.

On peut aussi envisager, dès lors que l'on obtient que tout nombre N solution s'écrit $N =$ envisager de construire une feuille de calcul sur tableur, pour y faire

figurer les nombres entiers solutions, en fonction des entiers :
a (premier terme) et n (nombre de termes).



Microsoft Excel - somme d'entiers consécutifs

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

J18 = =$A18*(2*J$1+$A18-1)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
4	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63
5	4	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86
6	5	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
7	6	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	117	123	129	135
8	7	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
9	8	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188
10	9	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216
11	10	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205	215	225	235	245
12	11	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275
13	12	78	90	102	114	126	138	150	162	174	186	198	210	222	234	246	258	270	282	294	306
14	13	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338
15	14	105	119	133	147	161	175	189	203	217	231	245	259	273	287	301	315	329	343	357	371
16	15	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405
17	16	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	440
18	17	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476
19	18	171	189	207	225	243	261	279	297	315	333	351	369	387	405	423	441	459	477	495	513
20	19	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551
21	20	210	230	250	270	290	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550	570	590

premier terme : a sur la ligne 1
nombre de termes de la somme : n dans la colonne A

Ce tableau Excel permet de conjecturer quels sont les entiers solutions du problème et aussi de déterminer, pour un nombre donné N du tableau, quels sont les sommes d'entiers qui lui sont égales.
Il peut permettre de travailler expérimentalement sur le problème suivant : pour un entier N qui n'est pas une puissance de 2, trouver toutes les décompositions de N en sommes d'entiers consécutifs.

On "voit" en augmentant à droite la taille de ce tableau que :
$135 = 67 + 68$, $135 = 44 + 45 + 46$, $135 = 25 + 26 + 27 + 28 + 29$
$135 = 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25$, $135 = 11 + 12 + ... + 19$
$135 = 9 + 10 + ... + 18$, $135 = 2 + 3 + 4 + ... + 16$
Et c'est tout ! sept sommes possibles pour : $N = 135$.

Un nouveau problème peut être posé : pour un entier qui n'est pas une puissance de 2, combien a t-il de décomposition en somme d'entiers consécutifs ?

Dans la mise en commun, dans les bilans intermédiaires, un gros travail sur le raisonnement peut être fait :
la réfutation de certaines conjectures erronées nécessite l'utilisation de contre-exemples
la reconnaissance de conjectures équivalentes nécessite d'utiliser un raisonnement par analyse-synthèse, (ou double inclusion).

Un travail algébrique est aussi conduit :
reconnaissance d'expressions algébriques différentes pour un même résultat ;
reconnaissance des différences et des rapports entre deux expressions :
utilisation des lettres et leurs sens dans la situation.

5.2.2 Expérimentation

Les deux demi-classes observées ont fonctionné dans des conditions analogues, avec une même présentation du problème.

La professeur avait organisé les groupes avant la séance et écrit au tableau les noms des élèves. La salle était disposée de telle sorte que les groupes pouvaient travailler et s'ils le souhaitaient utiliser des ordinateurs. L'ensemble de l'observation et des interactions entre professeur et élève sont disponibles page 113. Il est à noter le respect strict du professeur des « règles » du problème ouvert ; présentation, demande d'éclaircissements des termes de l'énoncé, phase de travail individuel, travail de groupes et non intervention dans les recherches, rappel du temps et des consignes, notamment en fin de séance pour la réalisation d'une affiche.

Les élèves ont tous été actifs et ont cherché le problème ; l'attitude des élèves en fin de séance est significative d'une dévolution réussie, puisqu'aucun élève n'est sorti à la sonnerie et qu'il a fallu plusieurs rappels de la part du professeur pour que les élèves sortent de la classe. L'étude rapide des compte-rendus des quatre groupes de la première heure a montré que des solutions intéressantes et originales étaient sorties de ce travail. En particulier, la formule donnant la somme de nombres consécutifs apparaît « en acte » dans plusieurs des affiches avec des notations qui montrent bien le travail de généralisation à partir d'exemples particuliers.

Essayons d'analyser les quatre affiches des groupes A, B, C et D et les dialogues du groupe G.

5.2.3 Groupe A

Affiche page 116.

Dans le groupe A, les élèves ont longuement fait des va et vient entre le milieu matériel, ici composé des nombres entiers naturels et de leur calculatrice pour faire des expériences (milieu objectif) avec une volonté de relier les observations avec des concepts de moyenne, médiane encore éléments du milieu de référence. La question, dévolue au groupe s'est transformée en : « déterminer si un nombre donné est somme de k nombres consécutifs » ; question que le groupe résoud de la manière suivante :

Soit n un entier et k le nombre de termes consécutifs choisis.

L'observation du travail des élèves montrent que le raisonnement suivi était le suivant :

Si un nombre est trapézoïdal, alors il est somme de k entiers consécutifs. Si k est pair, le nombre médian de la liste des nombres consécutifs n'appartient pas à cette liste et est un nombre du type $a,5$.

En considérant un nombre n, on peut le diviser par tous les nombres pairs inférieurs à n ; s'il existe un $2k$ tel que $\frac{n}{2k} = a,5$ alors ce nombre est trapézoïdal et on peut trouver une liste de $2k$ nombres consécutifs dont la somme est n en formant cette liste : $[a-k, \cdots, a-1, a+1, \cdots, a+k]$.

On voit, que la conjecture annoncée (« il semblerait que les puissances de 2 ne soient pas trapézoïdales ») découle de ce raisonnement, puisque pour les puissances de deux, toutes les divisions par les nombres pairs inférieurs ne peuvent donner un résultat de ce type. En effet, en raisonnant par l'absurde :

Le seul cas à considérer est le cas où le diviseur est un nombre pair de la forme $2\times(2p+1)$ (sinon, soit c'est une puissance de deux et le quotient est entier, ou après quelques divisions on se ramène à ce cas).

$$\frac{2^k}{2(2p+1)} = \frac{2n+1}{2}$$

un nombre de la forme $a,5$ étant de la forme $\frac{2n+1}{2}$; ce qui déboucherait sur :

$$2^k = (2p+1)(2n+1)$$

Ce qui est absurde.

On voit, bien sûr la distance encore à parcourir entre les résultats affichés et le raisonnement débouchant sur le résultat, mais aussi, on peut constater le travail effectif de ce groupe.

Dans la dynamique des milieux de ce groupe, les interactions entre les milieux matériel, objectifs et de référence n'ont pas débouché sur une stabilisation des résultats pour tous les élèves et l'institutionnalisation peut entrer en conflit avec les connaissances mobilisées par ces élèves. Nous pouvons dire que le temps de travail n'a pas permis à ce groupe d'atteindre un point fixe dans la dynamique des milieux. Nous reprendrons cette notion de point fixe dans une dynamique des milieux comme étant un état pour lequel les milieux des protagonistes sont stabilisés dans une position que la situation seule ne permet plus de modifier. Situation émminemment propice à une institutionnalisation puisque le professeur (P-en action) dans la situation d'apprentissage peut interagir avec des E-apprenants en liaison avec un milieu objectif stabilisé. En revanche, lorsque le groupe n'a pas atteint ce point fixe, l'institutionnalisation se heurte aux différentes positions des objets mathématiques étudiés dans les milieux des élèves.

5.2.4 Groupe B

Affiche page 116.

Le début de l'affiche proposée donne un résultat, démontré tel que peut l'attendre un professeur de mathématiques. Vis à vis de ce résultat, nous pouvons dire que la dynamique des milieux a débouché sur un point fixe : un résultat admis et démontré par le groupe. Les observations montrent là encore que ce point fixe est l'aboutissement d'allers-retours entre les éléments du milieu matériel (les nombres entiers) et objectif (nombres impairs définis et compris comme les nombres se terminant par 1, 3, 5, 7, 9 puis nombre impair comme nombre de la forme $2n+1$ avec $n \in N$)

La deuxième partie de l'affiche commence par la conjecture issue des expériences sur les éléments du milieu matériel.

La suite de l'affiche montre également cette dynamique avec une reconnaissance de forme issue d'expériences sur les objets du milieu matériel et les faisant donc appartenir au milieu objectif et prolongeant le résultat précédent : si on ajoute deux termes consécutifs, le nombre trapézoïdal est de la forme $2n+1$; si on ajoute trois termes consécutifs, il est de la forme $3n+3$, etc. d'une façon générale, il est de la forme $an+b$ avec a le nombre de termes de la liste. La forme générale : $x = a(0,5a+n-0,5)$ provient là encore d'une généralisation d'expériences dans le milieu objectif comme le confirme les lignes :

$$\begin{aligned} \text{En effet} \quad 1 &= (2-1)\times 1 \\ 3 &= (3-1)\times 1,5 \\ 6 &= (4-1)\times 2 \\ 10 &= (5-1)\times 2,5 \end{aligned}$$

On voit ici le prolongement possible : $x = a(0,5a + n - 0,5)$ en $2x = a(a + 2n - 1)$ et en remarquant que si a est pair, $a + 2n - 1$ est impair, et que si a est impair, $a + 2n - 1$ est pair et donc x n'est pas une puissance de deux.

Ce prolongement est à la fois très proche et très éloigné : proche, si l'on considère que 0,5 et $\frac{1}{2}$ sont immédiatement interchangeables, autrement dit, si les rationnels étaient des objets du milieu objectif et éloigné parce qu'ils apparaissent ici comme éléments du milieu matériel.

5.2.5 Groupe C

Affiche page 116.

Du fait de sa position dans la classe, nous avons moins observé les étapes du fonctionnement de ce groupe et l'analyse ne porte que sur la trace du travail (situation ordinaire d'un enseignant !)

Les élèves proposent un algorithme permettant à la fois de décider si un nombre est trapézoïdal et de trouver une décomposition qui peut être réécrite de la manière suivante :

Soit x un nombre naturel.

Diviser n par les puissances successives de 2 jusqu'à obtenir un nombre décimal : $y = a,5$. On notera n l'exposant de 2.

Poser $y_1 = y - 0,5$ et $y_2 = y + 0,5$; former la liste $y_1 - 2^{n-1}, \cdots, y_1, y_2, \cdots, y_2 + 2^{n-1}$ dont la somme des termes vaut x. Ce qui est expliqué dans l'affiche sur l'exemple 300.

Ce raisonnement, proche de celui du groupe A s'appuie sur le terme médian de la liste. En regroupant les termes symétriques, on obtient une somme de 2^{n-1} termes tous égaux à $y - 0,5 + y + 0,5 = 2y$ et donc $2^n y = x$. Si x est une puissance de deux, $y = 0,5$ et $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ et l'algorithme laisse isolé le nombre x. Ce qui ne prouve pas qu'il n'est pas possible avec un autre algorithme de trouver une décomposition.

Il est intéressant de voir ici le décalage entre la question posée et la résolution ; on peut imaginer que les bases de l'algorithmie était immédiatement disponible pour ces élèves de S SI.

5.2.6 Groupe D

Affiche page 117.

Le groupe annonce immédiatement la conjecture et utilise la formule de la somme des n premiers entiers consécutifs. L'observation montre qu'une phase assez longue sur l'idée que « les nombres entiers qui sont somme d'au moins deux entiers sont les nombres impairs », résultat acquis et écrit dès le temps de recherche individuel a été difficilement déstabilisé ; cette destabilisation est provenu d'un effet de contrat, les élèves étant surpris d'avoir le résultat démontré dans les dix premières minutes du cours et ont donc relu avec attention l'énoncé. Dans ce groupe, au moins un des élèves avait à disposition la formule de la somme des termes des n premiers entiers, et même s'i y a un décalage d'indice, le résultat est correct. En revanche, aucune démonstration n'est proposé pour la conjecture.

5.2.7 Groupe G

Ce groupe a été observé et on trouvera les dialogues des recherche en page 113 ; l'affiche produite se trouve page 133.

Description des milieux dans la situation relativement à ce groupe d'élèves

Milieu matériel (MM) composé des objets sur lesquels les élèves peuvent s'appuyer, opérer des manipulations et communiquer par sous-entendu : la suite des nombres naturels et les opérations élémentaires. La calculatrice.

Milieu objectif (MO) composé des expériences construites sur les objets naturalisés.

Milieu de référence (MR) composé de la théorisation des expériences et des résultats des expériences.

La dynamique des milieux est ici le cheminement des recherches des élèves jusqu'à un point fixe ; dans la partie suivante, nous dégagerons des observations du groupe les éléments significatifs des dévolutions des élèves à un milieu, comme réponse à un contrat.

Description de la dynamique des milieux relativement à ce groupe d'élèves

Nous pouvons scinder le travail des élèves en différentes phases que nous redécouperons pour en dégager les éléments essentiels :

1. Lignes 1 à 36 : entrée dans le sujet : dévolution du milieu matériel
2. Lignes 37 à 45 : incident
3. Lignes 46 à 83 : situation objective
4. Lignes 84 à 132 : stabilisation
5. Lignes 133 à 151 : recherche d'une justification
6. Lignes 152 à 256 : expériences et dévolution du milieu objectif
7. Lignes 257 à 299 : tentatives d'excursion dans la situation de référence
8. Lignes 300 à 313 : intervention du professeur
9. Lignes 314 à 336 : recherche d'une conviction
10. Lignes 313 à 333 : retour sur le milieu matériel
11. Lignes 334 à 406 : Point fixe de la recherche

1. Lignes 1 à 36 : entrée dans le sujet : dévolution du milieu matériel
   Du premier résultat obtenu dans le temps de travail individuel (la somme de deux nombres consécutifs est impaire) les élèves explorent sur des exemples l'énoncé ; ils se situent dans des manipulations des objets du milieu matériel, et petit à petit créent

des liens avec le milieu objectif (lignes 20, 21, 22) ; il y a une représentation de la tâche exprimée par F3 ligne 26 ; « *faut qu'on trouve des équations* » ; les manipulations semblent mener dans un premier temps vers une situation objective lorsque survient un incident :

2. Lignes 37 à 45 : incident

   « *Ch'ai pas, j'ai un truc* » (ligne 37). Le groupe abandonne provisoirement son parcours pour étudier la proposition ; l'incident se termine avec une rétroaction du milieu : ligne 45 « *Ah non, ça marche pas... mince* ».

3. Lignes 46 à 82 : situation objective

   A partir de la ligne 46, les élèves rentrent dans une démarche d'expériences sur les objets du milieu matériel ; il y a décalage entre les éléments manipulés par les élèves ; ainsi lignes 49-50 : F1 « *c'est* $6+3x$ » et F3 : « *c'est deux fois le nombre plus un* » et ligne 54, F2 « *on ajoute trois, ça va faire trois fois trois plus trois...* » ; progressivement, la bascule dans une situation objective et une description des relations des objets du milieu matériel s'opère pour déboucher sur l'écriture :

   $1+2x$: 2 nombres

   $3+3x$ 3 nombres etc. de la ligne 83.

4. Lignes 46 à 83 : situation objective

   Suit alors une phase d'environ trois minutes, très dense d'expériences stabilisant les « formules » qui deviennent pour les élèves du groupe éléments du milieu objectif ;

5. Lignes 84 132 : stabilisation

   Phase d'expérimentation tendant à stabiliser les éléments du milieu objectif qui se termine par l'apparition de la calculatrice dans le milieu matériel des élèves (ligne 133)

6. Lignes 133 à 151 : recherche d'une justification

   La progression des résultats fait accélérer l'évolution des interactions élèves-milieu et le contrat habituel de la classe tend à trouver une solution universelle : lignes 138-139 : « *Faut faire un truc du style... Une grosse équation ?* », jusqu'au retour à la situation : ligne 140 : « *faut répondre à la question* ». Tous les objets du nouveau milieu matériel sont en place pour construire des heuristiques.

7. Lignes 152 à 256 : expériences et dévolution du milieu objectif

   Dans la situation objective , les élèves interagissent et construisent des régularités ; les puissances de deux apparaissent comme un élément du milieu matériel pour certains, du milieu objectif pour d'autres. Les interactions amènent par les verbalisation à décaler de l'un à l'autre ces objets : ligne 247 : « *Comment tu fais pour les faire comme ça ?* » auquel fait écho : « *Tu fais fois deux* »

8. Lignes 257 à 299 : tentatives d'excursion dans la situation de référence

   A partir de cet instant, il y a confrontation avec les éléments du milieu objectif : une incursion dans la situation de référence avec interaction avec les élèments du milieu objectif constitué. Ligne 257 : « *Alors, ça serait tous les nombres entiers naturels sauf les puissances de deux ?* ». Avec un dédoublement de la dynamique : d'une part une volonté de mettre en ordre les éléments du milieu objectif (ligne 268 : « *on peut toujours tout démontrer avec des x* ») et d'autre part une démobilisation liée à l'incertitude du contrat. Le manuel de la classe s'invite dans le milieu matériel des élèves, mais il ne permet pas aux élèves de répondre aux questions (vagues) qu'ils se posent.

9. Lignes 300 à 313 : intervention du professeur

   Deux éléments interviennent : la question au professeur et sa réponse. Par ailleurs, le relachement et l'abandon partiel de la situation. L'encouragement lié à l'intervention non intrusive et encourageante du professeur relancera le parcours de la situation de référence après un break provoqué à la fois par l'heure tardive et la nécessaire ponctuation du travail.

   L'intervention sera reprise dans la suite et fixe des éléments de la situation de référence : ligne 312 : « *quand tu multiplies un nombre par deux, ça fait un nombre pair [...] Les nombres entre n et $n+1$, il n'y a qu'un d'écart, en fait* ».

10. Lignes 314 à 336 : recherche d'une conviction

    Dans cette phase assez courte, et encouragé par le professeur, les élèves rediscutent la pertinence de leur conjecture ; ligne 321 : « *Je suis sûre qu'il y en a ; il y a toujours des nombres qui se cachent !* » ; les éléments du milieu objectif ont permis des expériences qui sont encore insuffisantes pour faire partie du milieu de référence. On voit bien ici la nécessité soit d'une preuve, soit d'une intitutionnalisation.

    ligne 334 « *on a démontré qu'il n'y a pas de nombres impairs* » ;

11. Lignes 337 à 413 : stabilisation vers un point fixe

    Un retour sur les éléments du milieu matériel pour fixer la conjecture ; cette phase, assez brève s'achève par le commencement de la rédaction de l'affiche et ce constat : « *En fait, on n'a rien démontré* »... vite dépassé par la mise à plat des objets du nouveau milieu matériel :

    ligne 368 : « *On peut dire que c'est égal [...] aux entiers naturels qui sont sommes de deux entiers naturels consécutifs* » ;

    lignes 400-401 : « *Tu vas jusqu'à ou [...] Tu vas jusqu'à dix* ».

    Au passage, nous notons une stabilisation pour F2 de la définition d'un nombre pair : ligne 367 : « *Donc, deux fois x, c'est égal à un nombre pair* ».

    Nous affirmons ici que les élèves sont arrivés sur un point d'attraction de la dynamique et que cette dynamique ne pourra reprendre que dans une nouvelle dévolution du milieu de référence dans une situation d'apprentissage, dans la phase de bilan de ce travail.

5.2.8 Conclusion

L'observation dans cette classe nous a permis d'une part de mettre à l'épreuve l'utilité de la ressource en mettant en regard le projet et la réalisation de l'enseignante et d'autre part les aspects spécifiques du travail de l'enseignante dans la classe tendent à montrer que la ressource a été intégrée à son milieu objectif.

L'observation du groupe d'élèves montrent la richesse de la situation proposée et ont permis une analyse en terme de dynamique des milieux excessivement riche, qui dépassent le cadre de ce travail mais seront des éléments importants pour l'évolution de la ressource.

5.3 Entretien

Dans cet entretien, nous pouvons extraire des éléments permettant de mettre en évidence la place de la ressource dans le milieu de la professeure ; sans que la question n'ait été posée, elle évoque son utilisation dans la préparation de la séance de classe, ligne 34 : « *on a exprimé de façon générale la façon d'écrire un nombre comme somme d'entiers consécutifs, la démonstration que vous avez faite sur votre, euh, votre CD, et puis on a vu...* » ; évocation reprise ligne 65, la ressource étant vue comme un outil d'aide au travail de préparation, donc faisant partie du milieu objectif de l'enseignant.

Plus spécifiquement, à la question « *quand tu préparais ce problème, tu as utilisé la ressource* » (ligne 70), la réponse montre bien la position de la ressource comme un élément essentiel de la préparation :

> « *Oui, oui... J'ai utilisé j'ai regardé tout ce que vous aviez proposé autour du problème sur la ressource, ah oui... je pense que sans la ressource je n'aurais pas fait ce problème, parce que ça m'aurait demandé trop de temps pour faire moi-même tout ce que vous avez déjà fait,... je l'aurais pas fait ! Donc, oui, oui...* »
>
> Et, un peu plus loin (ligne 73) :
>
> « *Oui, je m'en suis servi de ça, les cinq minutes individuelles, et puis après la recherche collective, les productions d'élèves... J'ai lu, déjà pour imaginer ce qu'ils auraient pu produire, j'ai surtout lu ce que vous aviez mis en ligne, au collège, au lycée, ça aide bien à se préparer... Moi, je ne me suis pas préparée avec autre chose que la ressource ; j'ai passé un petit moment à regarder ce qui avait été fait, parce que c'est quand même riche ;* »
>
> Enfin ligne 79
>
> « *oui, oui, oui, alors, j'ai beaucoup été voir pour me préparer à ce qu'ils allaient faire... J'ai bien regardé aussi ce que vous aviez écrit, ce que ça pouvait apporter pour le cours de maths, le raisonnement les pairs, les impairs,... Au départ, c'est comme ça qu'on a choisi le problème, d'ailleurs, on avait regardé ce que ça faisait travailler et puis on s'est dit ça ça nous intéresse et donc on l'avait choisi avec ces objectifs* »

Il est intéressant de noter que les éléments de gestion de classe que nous avons déjà notés dans l'analyse de l'observation de la classe, comme les analyses du problème et les objets mathématiques potentiellement travaillés ont été extraits des différentes rubriques proposées dans la ressource. Ces indices montrent bien la familiarité de la professeure avec la ressource et permettent d'affirmer, que dans cette expérimentation, la ressource a bien été intégrée au milieu objectif de cette professeure.

En terme d'acceptabilité, et en reprenant les critères du tableau de la page 16 (motivation, affect, culture, valeurs), nous pouvons affirmer que, dans le cadre de cette expérimentation et pour cette professeure, la ressource est acceptable. En effet, les indices sont nombreux permettant cette conclusion :

Le mot plaisir associé au sentiment de liberté est employé sept fois dans l'entretien :

> ligne 61 : « *Moi, je pense que je referai plus tôt dans l'année, pour lancer quelque chose dans la classe et créer justement cette dynamique qui fait que les élèves vont s'impliquer, comme là, comme je te disais, il y avait un élève qui était au tableau, moi j'étais au fond, et puis les autres qui lui posaient des questions, donc... il me semble que ça peut être un très bon moyen pour eux de s'impliquer dans le cours de maths, de s'investir, de s'engager aussi... voilà... pour moi extrèmement positif ; visiblement ils ont pris beaucoup de plaisir et moi, c'est quelque chose que je trouve important, réinsérer du plaisir dans les maths, c'est quelque chose qui m'interpelle (rires) parce que je trouve que c'est tellement une matière qui peut être faite sans plaisir...* »

La notion de plaisir, pour les élèves, mais aussi pour le professeur est d'ailleurs reprise un peu plus loin :

> « *Ah oui, autre chose sur laquelle je voulais insister, il y a la notion de plaisir, pour eux les élèves et je dirai aussi pour le prof, parce que comme je te le disais, je voudrais en faire plus, un en début d'année, un... voilà, trois par an, ça me semble quelque chose de bien puis dans les autres classes aussi mais également aussi la liberté de faire des maths...* »

La qualité du travail des élèves et la vision des mathématiques sont repris à plusieurs moments de l'entretien :

> ligne 26 :
>
> « *oui, oui, trouver la décomposition... Donc, c'était très bien, je trouve... Après ce groupe qui a beaucoup parlé des moyennes* »
>
> ligne 40 : « *Mais, tu vois « enfin des vrais maths », ça ne m'étonne pas de cet élève...* »
>
> ligne 46 :
>
> « *Mais moi, j'ai trouvé intéressant le bilan, parce que comment dire, ils se sont beaucoup écoutés, quand même... La partie où l'élève a exposé la méthode algorithmique, c'était intéressant, parce que, moi, à ce moment j'ai été me mettre au fond de la classe, puis, je les ai laissé se débrouiller... Oui, oui, il y a eu pas mal de choses intéressantes, du point de vue du débat,...* »
>
> ligne 67 :
>
> « *...c'est très satisfaisant aussi pour le prof, très surprenant, moi, je ne m'attendais pas à voir ça, à avoir une telle qualité, que des élèves soient à deux doigts de la démonstration [...] Donc ça, aussi pour moi, très positif parce que ils ont pu faire des choses excellentes en maths que je ne soupçonnais pas, c'est quand même génial, enfin de se dire..., d'être étonnée, de se dire : et oui, ils sont capables de ça ! Et ça c'est pas tous les jours qu'on s'en rend compte...* »

Même si des surprises liées aux connaissances des élèves sont apparues ; plus précisément, comme c'est repris un peu plus tard, la surprise de voir ses propres élèves confrontés aux difficultés annoncées par la ressource :

> ligne 8 à propos de la non reconnaissance par les élèves des puissances de deux :
>
> *« Et c'est vrai que c'est quand même... oui, ça mérite d'être relevé, parce qu'on s'attendrait pas à ça de la part d'élèves de première S... »*
>
> que nous mettons en relation avec :
>
> ligne 79 déjà citée :
>
> *« J'ai bien regardé aussi ce que vous aviez écrit, ce que ça pouvait apporter pour le cours de maths, le raisonnement* ***les pairs, les impairs***[6] *»*

La dimension d'utilité de la ressource est également favorablement évaluée par une adéquation entre l'objectif défini, la tâche prescrite dans la mesure où l'enseignante s'était engagée à préparer une séance de recherche de problème en classe, et la réalisation effective (la tâche effective), dans l'étude de l'activité de l'enseignante telle qu'elle la décrit dans le début de l'entretien (lignes 2 à 34)

mais aussi,

ligne 40, après la lecture de l'avis d'un élève :

> *« Il y a tout ce qu'on veut ! C'est tout ce qu'on demande... A la fin des une heure et quart, je leur ai demandé d'écrire ce qu'ils en avaient pensé, je leur ai dit aussi que c'était dans le cadre d'une recherche... Voilà, et ils ont écrit ça ! »*

5.3.1 Conclusion

L'entretien confirme la position de la ressource dans le milieu objectif de la professeure et donne un théorème d'existence de l'acceptabilité et de l'utilité de cette ressource pour un enseignant dans une position de préparation et de réalisation d'une séquence de cours intégrant un problème de recherche.

[6] souligné par nous.

Chapitre 6

Conclusion

Nous avons, dans cette étude et en utilisant le vocabulaire de la théorie des situations, construit une situation dans laquelle les phases d'action tendaient à faire construire par les enseignants les connaissances nécessaires des gestes professionnels permettant la mise en place dans la classe de problèmes de recherche. Pour ce faire, nous avons introduit dans le milieu matériel des enseignants un outil conçu et réalisé sous les hypothèses constructivistes de construction des connaissances, pour aider les enseignants à s'approprier les savoirs professionnels nécessaires pour introduire dans la classe les problèmes de recherche en réutilisant le travail de Peix et Tisseron :

> *Pour repenser la formation, c'est à dire le dispositif de formation, nous utilisons la théorie des situations comme cadre de pensée pour faire en sorte que les savoirs (professionnels) visés émergent des situations de formation avec une construction par les stagiaires eux-mêmes, c'est à dire avec le minimum de « monstration » par le formateur* [Peix et Tisseron, 1998]

L'ingénierie décrite et les résultats des observations et entretien donnent des réponses à la question posée dans cette étude de la place de la ressource dans les milieux du professeur, comme nous l'avons montré dans l'analyse des trois phases de l'expérimentation. Les éléments essentiels en regard des cadres théoriques mobilisés que nous retiendrons sont les suivants :

En ce qui concerne la théorie des situations et le concept de milieu, la ressource placée dans le milieu matériel des enseignants dans une phase d'action peut être mobilisée dans un milieu objectif et être un élément important de la construction et de la mise en place d'une situation de recherche dans la classe. Elle permet par ailleurs de projeter un enseignant dans une vision des milieux objectifs des élèves et de jouer un rôle dans la compréhension des actions des élèves dans une situation de recherche de problèmes.

En ce qui concerne le cadre de l'ergonomie cognitive, l'expérimentation a montré que dans une situation professionnelle de préparation de cours et d'enseignement, la ressource est :

– utilisable, et les observations ont permis de mettre en évidence quelques difficultés de navigation qui ont été corrigées dans la version actuelle de la ressource,

- utile, comme l'a bien montré d'une part l'observation en classe et l'adéquation entre l'objectif défini et la réalisation effective, de la tâche prescrite à la tâche effective et d'autre part l'entretien qui a fait ressortir l'activité de la professeure dans la conduite de la classe,
- acceptable, en ce sens que la ressource, intégrée dans le milieu objectif de l'enseignant a facilité la mise en place effective de la séquence de classe.

Cependant, les réticences et les difficultés mises en évidence par les professeurs ayant suivi le stage de formation, montrent qu'un long travail de formation est encore nécessaire pour faire que la recherche de problèmes fasse partie de la panoplie habituelle des enseignants au même titre que les exercices de réinvestissement, les cours et leurs applications directes, les évaluations,... Cette étude nous montre l'intérêt, voire la nécessité d'un accompagnement formatif.

Les problèmes de recherche apparaissent souvent, non pas comme le cœur de l'activité mathématique des élèves mais comme un élément supplémentaire, sympathique mais non essentiel de cette activité.

Les hypothèses de l'équipe EXPRIME se voient confirmées par cette étude, les freins à l'intégration de problèmes de recherche dans la classe portent bien sur les quatre points cités page 6 mais aussi, la difficulté de la gestion de l'institutionnalisation est une part importante des réticences des enseignants à utiliser les problèmes de recherche dans la classe de mathématiques.

Cette étude nous a également permis de faire un lien entre cette phase d'institutionnalisation et les points fixes de la dynamique des milieux dans le travail de groupe et la construction de connaissances dans le milieu de référence des élèves ; une étude supplémentaire pourrait certainement apporter des constructions plus fines, notamment en permettant de définir une distance entre la position d'un groupe ou d'un apprenant et le point fixe de la situation adidactique.

L'étude a également montré un aspect de la ressource qu'il s'agirait de travailler pour faciliter son intégration au milieu objectif des enseignants : quelle(s) gestion(s) de l'institutionnalisation peut permettre à tous les élèves d'enrichir leur propre milieu de référence en lien avec le travail réalisé et notamment les objets mobilisés dans leur milieu objectif ?

Bibliographie

[Aldon, 2007] Aldon, G. (2007). La place des tice dans une démarche expérimentale en mathématiques. *In Académie de Clermont, en ligne*, http ://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2007/texte/Texte_11.doc.

[Aldon et Durand-Guerrier, 2007] Aldon, G. et Durand-Guerrier, V. (2007). The experimental dimension in mathematical research problems. *In Actes de la CIEAEM59*, http ://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/partenariat-inrp-07-08/exprime/1presentation.pdf.

[Arsac *et al.*, 1991] Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon.

[Arsac et Mante, 2007] Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* Scéren CRDP de Lyon.

[Artigue, 1988] Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, pages 281–308.

[Artigue, 1997] Artigue, M. (1997). *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au Lycée.*, volume 1. DIDIREM, IREM PAris VII.

[Baccino *et al.*, 2005] Baccino, T., Bellino, C. et Colombi, T. (2005). *Mesure de l'utilisabilité des interfaces.* Lavoisier.

[Balacheff, 1996] Balacheff, N. (1996). Conception, propriété du système sujet/milieu. *Actes de l'Ecole d'Eté 1995, IREM de Clermont Ferrand.*

[Bloch, 1999] Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19/2:135–194.

[Bloch, 2005] Bloch, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Thèse de doctorat, IUFM d'Aquitaine.

[Brousseau, 1985] Brousseau, G. (1985). Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(2-3):305–346.

[Brousseau, 1986a] Brousseau, G. (1986a). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7/2.

[Brousseau, 1986b] Brousseau, G. (1986b). La relation didactique : le milieu. *Actes de la IVème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique.* IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[Brousseau, 1986c] Brousseau, G. (1986c). La relation didactique : Le milieu. *Etudes en Didactique des Mathématiques*, 4. UFR de Mathématiques-IREM. Université de BORDEAUX-I.

[Brousseau, 1988] Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ*, 23.

[Brousseau, 1990] Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9–3:309–336. La pensée sauvage éditions.

[Brousseau, 1997] Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. *In Cours à l'Université de Montréal*, http ://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf.

[Brousseau, 2004] Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques.* La pensée sauvage éditions.

[Brown et Walter, 2005] Brown, S. et Walter, M. (2005). *The art of problem posing.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[Comiti *et al.*, 1995] Comiti, C., Grenier, D. et Margolinas, C. (1995). *Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques*, chapitre 2, pages 93–128. La pensée sauvage éditions.

[Dessus, 2007] Dessus, P. (2007). Systèmes d'observation de classes et prise en compte de la complexitdes événements scolaires. *Carrefours de l'éducation*, n° 23:103–117.

[Dias et Durand-Guerrier, 2005] Dias, T. et Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, N°60:p. 61–78.

[Douady, 1983] Douady, R. (1983). Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadre. *Cahiers de didactique*, 3:1–25.

[Douady, 1984] Douady, R. (1984). De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle. *Cahiers de didactique*, 6:1–19.

[Dufresne, 2003] Dufresne, A. (2003). *L'essor des communautés virtuelles d'apprentissage*, chapitre Interfaces et intégration des environnements pour le soutien aux activités de téléapprentissage, pages 139–166. Presses Universitaires du Québec. Collection : Education recherche.

[Durand-Guerrier, 2008] Durand-Guerrier, V. (2008). La dimension expérimentale en mathématiques enjeux épistémologiques et didactiques. en cours.

[Fabre, 1999] Fabre, M. (1999). *Situations-problèmes et savoirs scolaires.* PUF.

[Fort, 2007] Fort, M. (2007). Expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat scientifique. *http ://media.education.gouv.fr/file/98/4983.pdf.*

[Fregona, 1995] Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme " milieu " dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I. diffusion LADIST Bordeaux.

[Harskamp et Suhre, 2007] HARSKAMP, E. et SUHRE, C. (2007). Schoenfeld's problem solving theory in a student controlled learning environment. *Comput. Educ.*, 49(3):822–839.

[Houdement, 2004] HOUDEMENT, C. (2004). Mathématiques, didactique et découpages : la richesse d'un problème. *Actes des journées de formation IREM Montpellier*, pages 43–52.

[Kahane, 2002] KAHANE, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques.* Odile Jacob.

[Kuntz, 2007] KUNTZ, G. (2007). Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques. *In INRP, en ligne*, http ://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarcheexperimentale/sommaire.htm.

[Laville, 1976] LAVILLE, A. (1976). *L'ergonomie.* PUF Que sais-je ?

[Leblanc *et al.*, 2008] LEBLANC, S., RIA, L., DIEUMEGARD, G., G., S. et M., D. (2008). Concevoir des dispositifs de formation professionnelle des enseignants à partir de l'analyse de l'activité dans une approche enactive. *@ctivités*, 5:58–78.

[Legrand, 1993] LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, 10:123–158.

[Margolinas, 1995] MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques*, annales 1993-1994.

[Margolinas, 1998a] MARGOLINAS, C. (1998a). Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques.*

[Margolinas, 1998b] MARGOLINAS, C. (1998b). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Actes de La Rochelle juin 1998*, pages 3–16.

[Meny *et al.*, 2005] MENY, J.-M., ALDON, G. et XAVIER, L. (2005). *Introduction à la théorie des graphes.* Scéren CRDP Lyon.

[Peix et Tisseron, 1998] PEIX, A. et TISSERON, C. (1998). Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques. *Petit x*, 48:5–21.

[Perrin-Glorian et Hersant, 2003] PERRIN-GLORIAN, M.-J. et HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 23/2:217–276.

[Polya, 1945] POLYA, G. (1945). *How to solve it ? A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press.

[Robert et Rogalski, 2002] ROBERT, A. et ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2.4:505–528.

[Rogalski, 2003] ROGALSKI, J. (2003). Y-a-t'il un pilote dans la classe ? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 23/3:343–388.

[Salin *et al.*, 2005] SALIN, M.-H., CLACHÉ, P. et SARRAZY, B. (2005). *Sur la théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage éditions.

[Samurçay et Pastré, 1998] SAMURÇAY, R. et PASTRÉ, P. (1998). L'ergonomie et la didactique. l'émergence d'un nouveau champ de recherche : didactique professionnelle. *In Deuxièmes journées Recherche et Ergonomie, Toulouse.*

[Schoenfeld, 1985] SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL : Academic Press.

[Schoenfeld, 1999] SCHOENFELD, A. (1999). Looking toward the 21st century : Challenges of educational theory and practice. *Educational Researcher*, 28(7):4–14.

[Tisseron et Aldon, 1998] TISSERON, C. et ALDON, G. (1998). Des situations pour mettre en oeuvre une démarche scientifique. *In Actes du deuxième colloque international Recherche et formation des enseignants*. IUFM de Grenoble.

[Tisseron *et al.*, 1996] TISSERON, C., FEURLY-REYNAUD, J. et PONTILLE, M.-C. (1996). Et pourtant, ils trouvent ! *Repères*, 24:11–24.

[Tricot, 1993] TRICOT, A. (1993). Ergonomie cognitive des systèmes hypermedia. *Actes du colloque de prospectives "Recherches pour l'Ergonomie", CNRS PIR Cognisciences*, pages 115–122.

[Tricot *et al.*, 2003] TRICOT, A., PLÉGAT-SOUTJIS, F., CAMPS, J.-F., LUTZ, A. A. G. et MORCILLO, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des eiah. *Archive EIAH*.

[Trouche et Guin, 2008] TROUCHE, L. et GUIN, D. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom sfodem 2008. *Repères IREM*, 72:à paraître.

[Vidal-Gomel et Rogalski, 2007] VIDAL-GOMEL, C. et ROGALSKI, J. (2007). La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *@ctivités*, 4 (1):103–120.

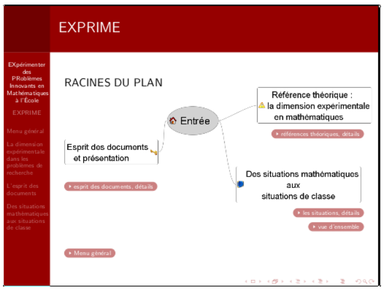
[X-UPS, 1996] X-UPS, J., éditeur (1996). *Systèmes dynamiques : le premier retour suivi de Aspects des systèmes dynamiques*. Ecole Polytechnique.

Chapitre 7

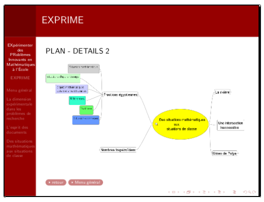
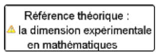
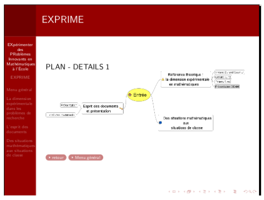
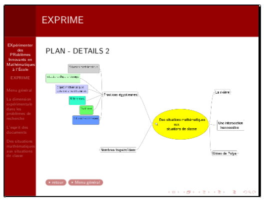
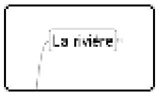
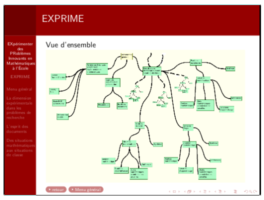
Annexe 1 : observation en stage de formation

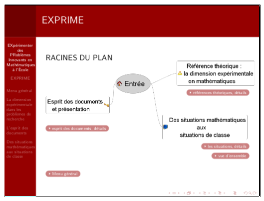
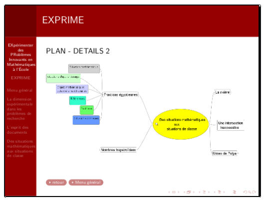
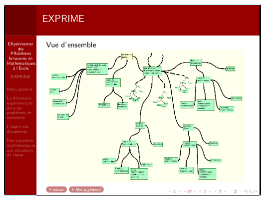
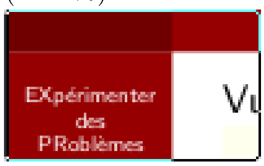
7.1 Observation de deux professeurs utilisant la ressource

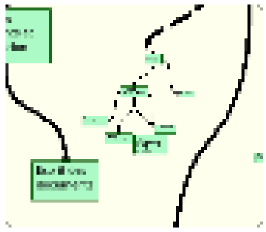
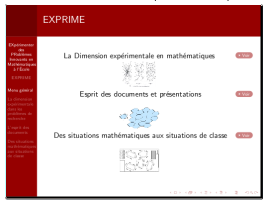
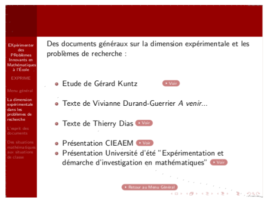
Deux professeurs, A et B ; L'ordinateur est allumé avec l'écran suivant :

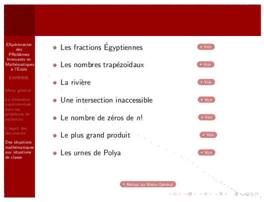
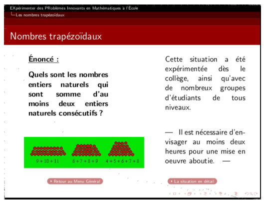
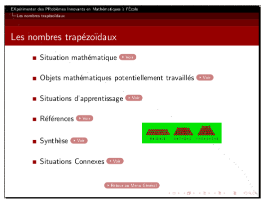
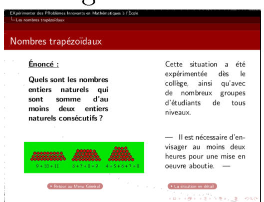


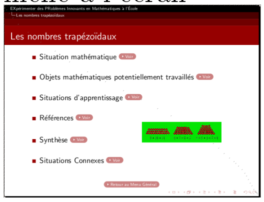
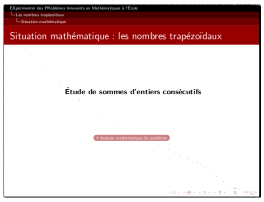
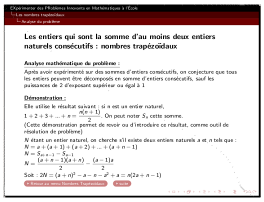
n°	temps	dialogues	actions et écrans
1	0	A : Donc t'as une idée préconçue de ce que tu voudrais faire, ou...	
2		B : Non, non, je... j'sais pas ce que c'est que la ressource Exprime, alors... Tu sais ce que c'est ?	
3		A : Non non... On pourrait peut être déjà aller regarder esprit des documents pour voir	Clic sur « Esprit des documents et présentation » 
4	1	B : On peut cliquer la dessus, peut-être... oui	

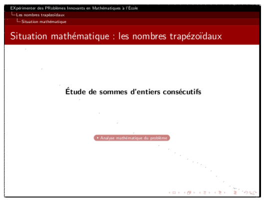
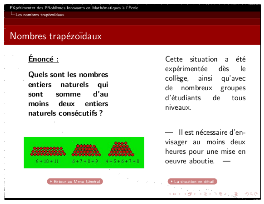
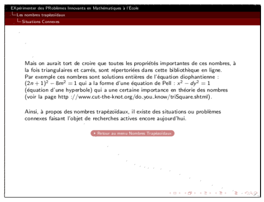
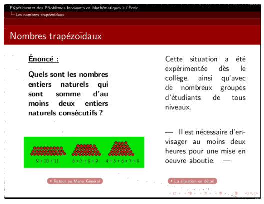
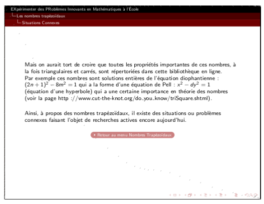
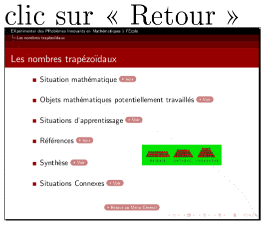
5			
6		A : Situation mathématique, situation d'apprentissage, objets mathématiques potentiellement travaillés, synthèse, situations connexes	
7		B : *inaudible*	
8		A : C'est clair, donc Retour	clic sur « Retour »
9		A : tu veux revenir la dessus	pointe Esprit des documents
10		B : non, tu surf	
11		A : Je fais un coup sur le théorique par curiosité	clic sur  
12		A : on revient au même endroit	roulette ou clic 
13			clic sur  
14		B : Ouh la la	mouvement rapide vers le bouton « Retour » et clic

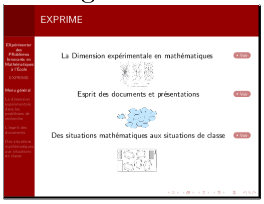
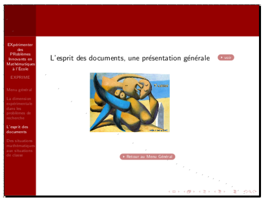
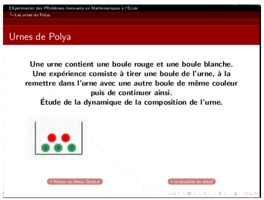
			
15		B : Est-ce que c'est pareil ?	clic sur 
16		A : Oui, c'est pareil	
17			clic sur 
	2		
18		A : D'accord...	
19		B : On s'est clairement perdu	clic sur  La barre Acrobat reader apparaît en haut de l'écran ; clic
20		A : Ouais ! *Rires* Si t'a le...	clic plusieurs fois sur le zoom (400%)
21		B : Est-ce qu'on peut aller voir...	clic sur le zoom (1200%) 
22		B : ce qu'il y a dans les petites ramifications	
23		A : Par contre on peut pas trop, pas trop cliquer	déplacement sur l'écran zoomé
24		A : Non, c'est normal, on peut	

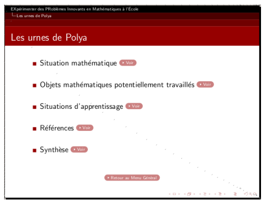
25		B : On peut pas cliquer... C'est cliquable ou pas ?	
26		A : Non c'est pas cliquable	clic une fois sur l'écran, puis clic sur l'antizoom (231%) 
27		B : Attends, qu'est-ce qui s'est passé ?	
28		A : Ah ! Je ne sais pas *Rires*	
29		A : C'est la première fois qu'on voit ça, je crois !	pointe sur le bouton « Voir de la dimension expérimentale en mathématiques »
30	3	A lit : Esprit des documents présentations, situations mathématiques	clic sur le bouton 
31		B : D'accord, bon on va pas s'amuser à aller lire les textes, je crois que	clic sur Retour au menu Général, clic sur le bouton « Voir »de « Esprit des documents et présentation »

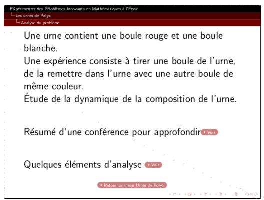
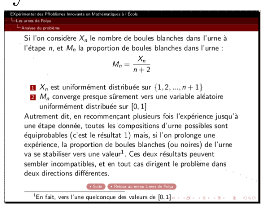
32		A : La dimension expérimentale...	deux clics rapidement enchaînés : « Retour »et « Voir »de « Des situations mathématiques aux situations de classe » 
33		A : A priori c'est des... c'est des ... des descriptions ... Alors, euh, est-ce qu'il y en a un qui te, comme ça qui te parle le plus	
34		B : Nombres trapézoïdaux	
35		A : celui là ?	
36		B : qui me parle le plus, non, mais qui m'intrigue le plus !	clic sur le bouton 
37		A : lit Quels sont les nombres entiers...	
38		B : au moins deux entiers consécutifs ... D'accord ; on l'a déjà vu ce problème là...	clic sur « La situation en détail » 
39			clic sur Retour au menu général 

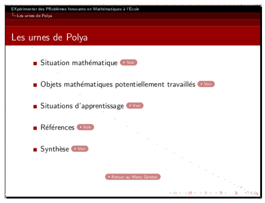
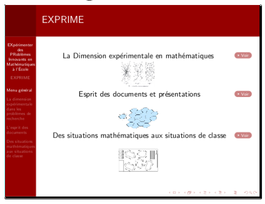
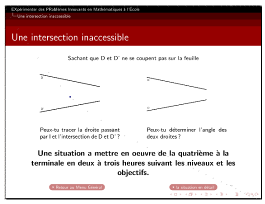
40	4	A : lit Cette situation a été expérimentée... Oui c'est ça ; Il est nécessaire d'envisager au moins deux heures pour une mise en œuvre aboutie... la situation en détail	clic sur « La situation en détail »
41		A : Donc, quand je fais un coup de molette, c'est comme si je faisais quoi en fait	
42		B : tu retournes, non	
43		A : Ben, non, ben en fait j'ai accès tu vois,	coup de molette ramène à l'écran 
44		A : c'est comme si je faisais ça	clic sur Situation en détail
45		A : molette, c'est comme si je faisias ça...	Aller -retour sur les deux écrans précédents
46		A : Alors, euh Situation mathématique, ça me paraît...	clic sur « Voir » 
47		B : Oui	
48	4 :28	A : Etude de somme d'entiers consécutifs	
49		A : Analyse mathématique du problème... conjecture que les entiers ... en somme d'entiers consécutifs...	
50	5 :04	B : ouh la la	
51		A : C'est la démonstration, en fait	
52		B : Oui, oui, oui	
53		A : Est-ce que tu souhaites aller plus en avant pour la description de cette activité, ou tu souhaites revenir	dirige la souris vers « Retour »puis vers « suite »et revient vers « Retour »clic

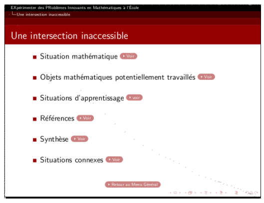
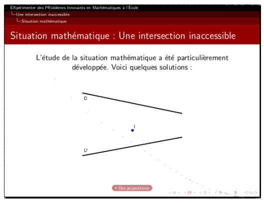
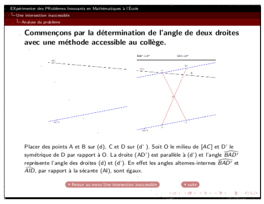
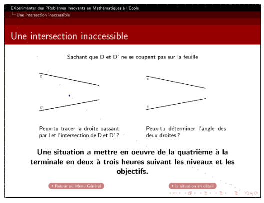
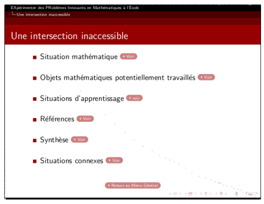
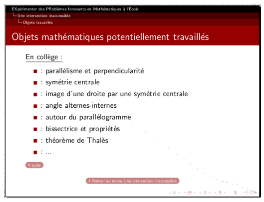
			
54		A : donc on va revenir euh...	la souris va vers l'arborescence du haut de l'écran
55		B : tu cliques sur *inaudible*	clic sur « EXpérimenter... » 
56			Nouveau clic sur Expérimenter...    clic sur « Retour » 

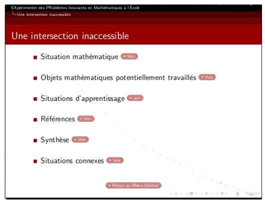
			clic sur Retour au menu général 
56	5 :35	A : C'est où que j'étais tout à l'heure ; c'est là ?	Aller retour de la souris entre les menus deux et trois
57		B : la deux, je crois	clic  clic sur Voir 
58		A : Non, c'était pas ça...	clic sur « Retour menu général » 
59		A : c'était ça ... à mon insu, c'était ça... Fractions égyptiennes, ça te dit ...	
60		B : Non, c'est... Les urnes de Polya, ça m'intrigue aussi	
61		A : les urnes de Polya ?	
62		B : Oui	clic sur « Voir » 
	6 :27		

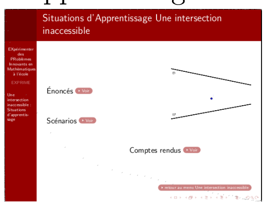
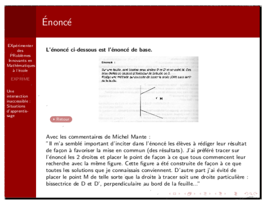
<table>
<tr><td>63</td><td></td><td>B : Une urne contient une boule rouge et une boule blanche,...</td><td></td></tr>
<tr><td>64</td><td></td><td>A : Est-ce que tu te vois faire ça en quatrième ?</td><td></td></tr>
<tr><td>65</td><td></td><td>B : on peut faire beaucoup de balles de ping-pong...</td><td></td></tr>
<tr><td>66</td><td></td><td>A : Mais, ça a.. est-ce que ça peut avoir un impact sur</td><td></td></tr>
<tr><td>67</td><td></td><td>B : la construction de combinatoire</td><td></td></tr>
<tr><td>68</td><td></td><td>A : mais, est-ce qu'il y aurait un intérêt en quatrième d'aborder de la combinatoire ?</td><td></td></tr>
<tr><td>69</td><td>7 :02</td><td>B : on va voir ce qu'ils en disent</td><td>clic


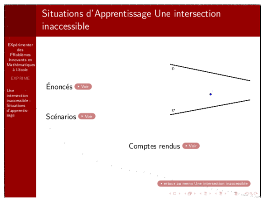
clic sur situation mathématique

</td></tr>
<tr><td>70</td><td></td><td>B : Ah oui ...</td><td>clic sur « Quelques éléments d'Analyse »

</td></tr>
<tr><td>71</td><td>7 :10</td><td>B : Oh, non</td><td></td></tr>
<tr><td>72</td><td></td><td>A : c'est une variable aléatoire... Ah non, c'est le nombre de boules blanches dans l'urne</td><td></td></tr>
<tr><td>73</td><td></td><td>B : Oui, parce qu'à chaque étape il gagne plus de boules</td><td></td></tr>
<tr><td>74</td><td>7 :43</td><td>A : Ouais, d'accord...</td><td></td></tr>
<tr><td>75</td><td>7 :54</td><td>B : Mais ça cible pas trop avec...</td><td>clic sur « Retour »</td></tr>
</table>

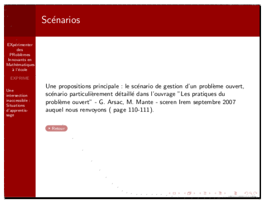
			 clic sur Retour au menu général  clic sur « Des situations... » 
76		A : Euh, ... la rivière...	
77		B : La rivière, c'est le plus court chemin	
78		A : Ah ouais,... une intersection inaccessible	clic sur « Voir » 
	8 :19		
79		A : Sachant que D et D' ne se coupent pas sur la feuille, tracer la droite passant par I et l'intersection de D et D'... Peux tu déterminer l'angle des deux droites ?	
80		B : Une situation à mettre en œuvre de la quatrième... suivant les niveaux et les objectifs...	
81	9 :00		Aller-retour de la souris entre « Retour »et « Situation en détail »
82	9 :04	A : Ca t'intéresse ?	clic sur « Situation en détail »

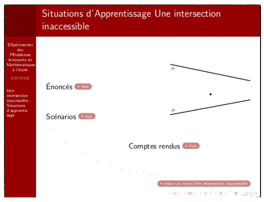
			 Clic sur « Situation mathématique » 
83		A : La situation mathématique...	clic sur « Des solutions » 
84	9 :18	A : ... détermination... accessible au collège...	
85	9 :38		clic sur « Retour »  
86	9 :44	A : Moi je voudrais bien voir ça...	clic sur « Objets potentiellement travaillés » 

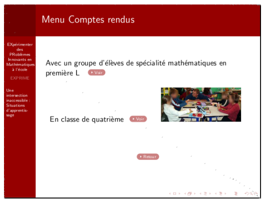
<table>
<tr><td>87</td><td></td><td>A : parallélisme... symétrie centrale...image... alternes internes...bissectrice... Thalès</td><td></td></tr>
<tr><td>88</td><td></td><td>B : Pourquoi bissectrice ?</td><td></td></tr>
<tr><td>89</td><td></td><td>A : Utilisée dans la caractérisation, dans le</td><td></td></tr>
<tr><td>90</td><td></td><td>B : Oui, mais le... C'était quoi comme question, déjà... c'est un point</td><td></td></tr>
<tr><td>91</td><td></td><td>A : Tracer la droite qui passe par ce point là et ...</td><td></td></tr>
<tr><td>92</td><td></td><td>B : Ah oui, oui... oui, y'avait ça et puis y'avait l'autre</td><td></td></tr>
<tr><td>93</td><td></td><td>A : Déterminer l'angle entre les deux droites</td><td></td></tr>
<tr><td>94</td><td></td><td>B : Moi je dirais des parallèles tout bêtement</td><td>Clic sur « Retour »


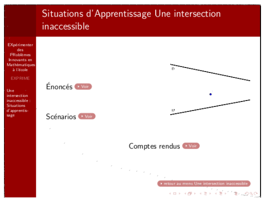
Clic sur « Situations d'apprentissage »

</td></tr>
<tr><td>95</td><td></td><td>B : Oui</td><td>La souris passe de « Scenario »à « Enoncé » ; clic sur « Enoncé »

</td></tr>
<tr><td>96</td><td></td><td>A : C'est pas ça</td><td>clic sur « Retour »</td></tr>
</table>

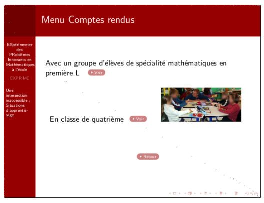
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>


clic sur « Scenarios »


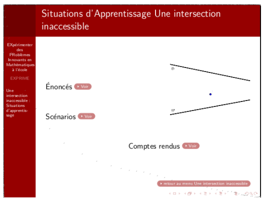
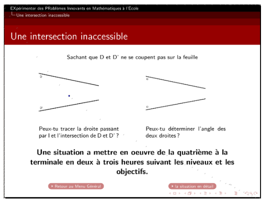
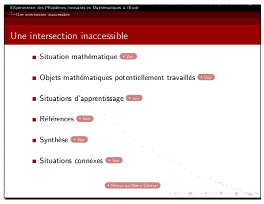
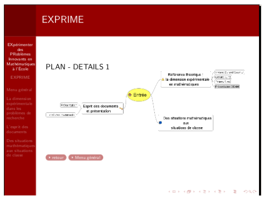
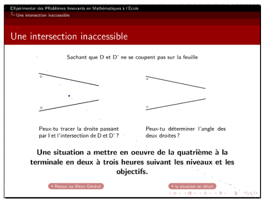
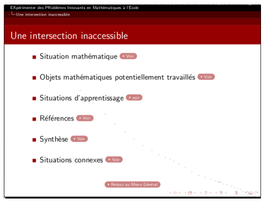
</td>
</tr>
<tr>
<td>97</td>
<td></td>
<td>A : D'accord...</td>
<td>
clic sur « Retour »


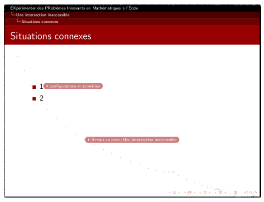
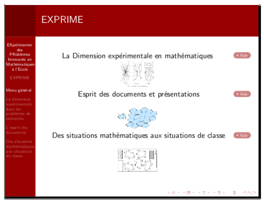
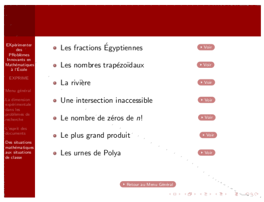
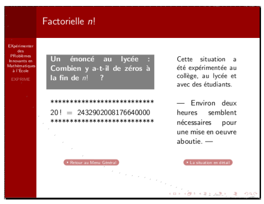
Clic sur Compte-rendus


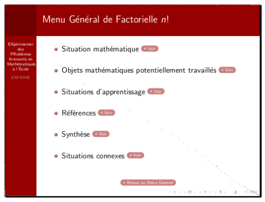
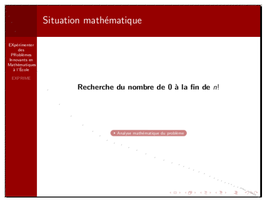
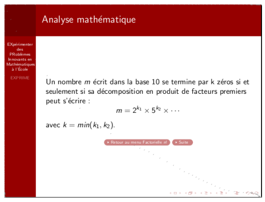
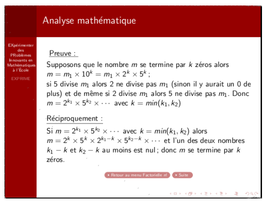
Clic sur « En classe de quatrième »


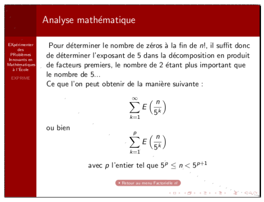
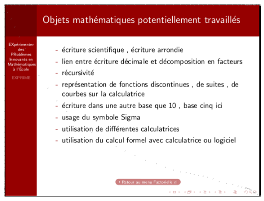
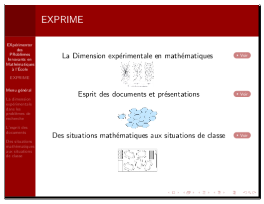
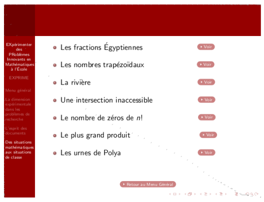
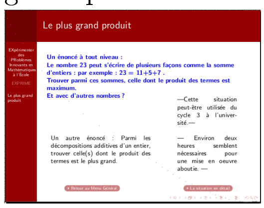
clic sur « Retour »


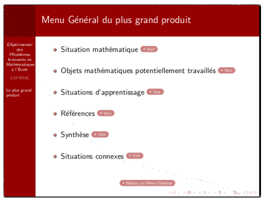
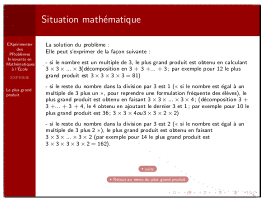
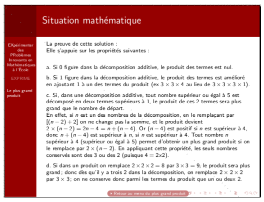
</td>
</tr>
</table>

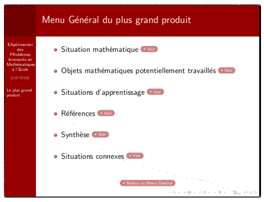
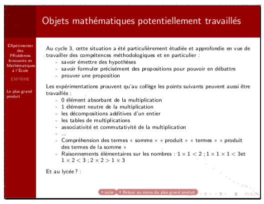
			   Clic sur « Synthèse » 
98	11 :28	A : D'accord ... EducMath...	La souris va sur le lien EducMath (l'adresse apparaît), puis sur « Retour » 
99		A : OK...	Clic sur « Situation en détail » 
		A : Est-ce qu'il y a autre chose ?	Clic sur « Situations connexes »

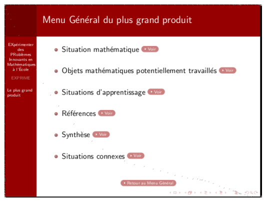
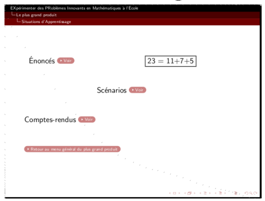
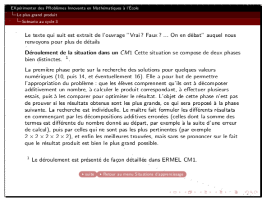
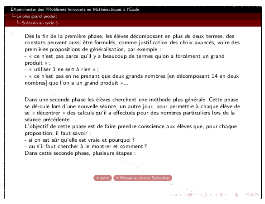
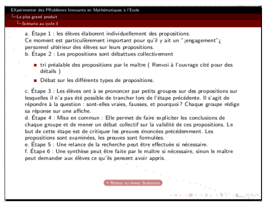
			 Clic sur « Configurations et symétries » Message d'autorisation d'accès à un site ; clic sur « Autoriser »
	11 :52	A : Ah d'accord	La page internet s'ouvre... Défilement jusqu'au bout de la page
100	12 :13	B : Pas trop...	Retour sur la ressource
101		A : Je crois qu'on a fait le tour,	clic sur « Retour »  
102		A : Euuuuh	La souris pointe « Le nombre de zéros de n ! »
103		B : Je ne sais pas si ça t'attire, mais ...	
104		A : tu veux aller voir	clic sur « Voir » 
		12 :40	

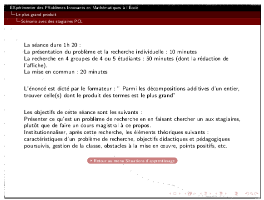
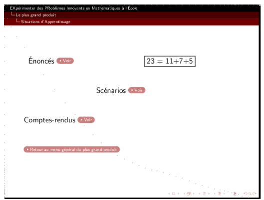
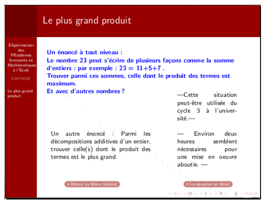
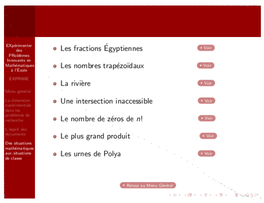
<table>
<tr><td>105</td><td>12 :56</td><td>A : Ah ouais, faut compter le nombre de 0 ; donc la multiplicité de 5 et de 2 et prendre le minimum des deux et c'est le nombre de zéros... Mais après pour découvrir quelle est la multiplicité de 2 et de 5, comment on fait ?</td><td></td></tr>
<tr><td>106</td><td></td><td>B : Ben ouais...</td><td></td></tr>
<tr><td>107</td><td>13 :26</td><td></td><td>clic sur « La situation en détail »

Clic sur « Situation mathématique »
</td></tr>
<tr><td>108</td><td></td><td>A : En fait, c'est à chaque fois, tu rencontres un multiple de deux...</td><td>Clic sur « Analyse »
</td></tr>
<tr><td></td><td>13 :33</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>13 :38</td><td></td><td>Le message de demande d'autorisation de lecture d'un fichier multimedia apparaît</td></tr>
<tr><td>109</td><td>13 :42</td><td>A : ...peut être modifié...</td><td>clic sur « Lire »</td></tr>
<tr><td>110</td><td>13 :50</td><td>B : Ah oui d'accord...</td><td>Clic sur « Suite »
</td></tr>
<tr><td></td><td>13 :54</td><td></td><td></td></tr>
</table>

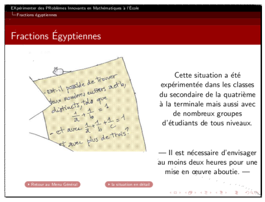
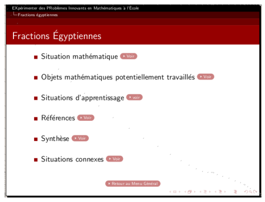
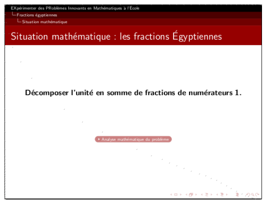
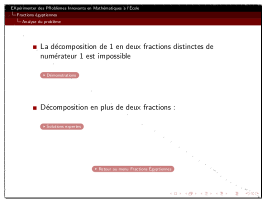
	13 :58		 Clic sur « Retour »
111	14 :01		Clic sur « Objets potentiellement travaillés » 
112	14 :13	B : Oui... Bon ben ...	Clic sur « Retour » 
113			 clic sur « Le plus grand produit » 
114	14 :23	A : Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers... Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum...Et avec d'autres nombres...	
115	14 :51	A : du cycle trois à l'université... Deux heures nécessaires pour une mise en œuvre aboutie...	clic sur « La situation en détail »

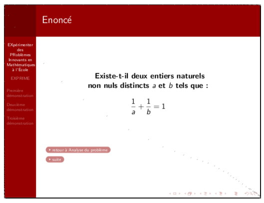
			
116		A : Tu veux voir le détail ?	
117	14 :53	Oui...	clic sur « Situation mathématique » 
118		A : donc.. situation mathématique ...	
119		B : Attends un peu... trois... Si le nombre est un multiple de trois, le plus grand produit est obtenu en calculant $3 \times 3 \times 3 \cdots \times 3$ ... Pourquoi ?	
120		A : ch'ais pas	
121		B : c'est toutes les *inaudible* ou le plus grand ?	
122		A : Non, le plus grand... Ouais	
123		B : multiple de trois plus un...Ch'ais pas...	
124	15 :49	B : Bon... Suite	clic sur « Suite » 
125		A : La preuve de cette solution... propriétés suivantes... *continue à lire en marmonant*	
126		B : Oui, ça d'accord...	
127		A : ... Le produit... Non, moi, je ne comprend pas...	
128		B : Ben les décompositions tu les coupes... Le 1 tu le distribue sur un autre... sur un autre membre...	
129		A : dans une décomposition additive le produit de ces deux termes sera plus grand que le nombre de départ...	Changement d'écran et retour

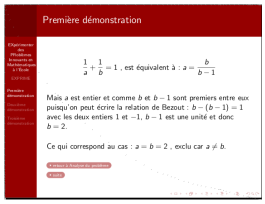
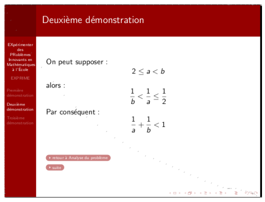
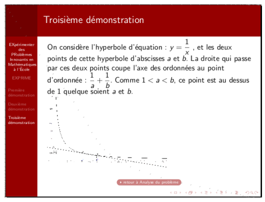
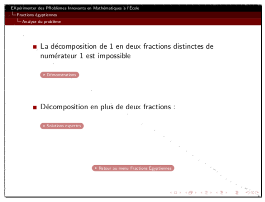
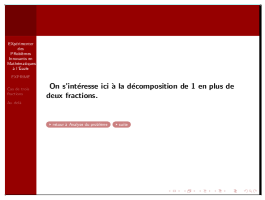
130		A : Ah oui, d'accord...c'est pas la molette... Si dans une décomposition additive, tout nombre supérieur ou égal à 5 est décomposé en deux termes supérieurs à 1, le produit des deux termes sera plus grand que le nombre de départ ...	
131		B : Oui, si on prend 2 et 3	
132		A : *Continue à lire* ...change pas la somme, et le produit devient...$2n-4$ ... $n-4$ est positif si n est supérieur à 4...donc...les seuls nombres conservés seront des 3 ou des 2...	
133		B : C'est cette propriété là, qui ... qui est cruciale...Ca doit être extrèmement intéressant à expérimenter...Faut bien gérer le truc...	
134	17 :50	A : J'peux, je passe ?	clic sur « Retour » 
135		A : Je peux voir un autre choix, à propos de ce travail là ?	clic sur « Objets mathématiques...» 
136		A : Ca c'est ce qu'on vient de voir en fait	
137		B : Ah bon ?	
138	18 :04	A : Non ...	
139	18 :37		clic sur Apparition du message « Atteindre la page » clic sur « Annuler »puis sur « Retour »

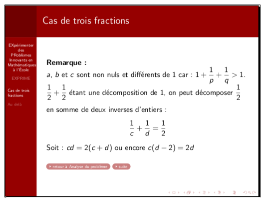
140			
139			clic sur « Situations d'apprentissage » 
141			clic sur « Scenarios » 
142	18 :50		La souris va de « Cycle 3 » à « PLC2 » puis retour et clic 
143	19 :10	A : Ah ouais	clic sur « Suite » 
144	19 :19		clic sur « Suite » 

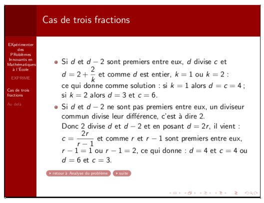
145		A : C'est quoi ça ?	Mouvement de la souris vers les guillemets mal écrits.
146	19 :42		clic sur « Retour » 
147			clic sur « en PCL2 » 
148		A : Et en PLC	
149		B : J'ai pas trop envie...*Rires*	clic sur « Retour » 
150			clic sur « Retour » 
151			clic sur « La situation en détail »
152			clic sur « Retour au menu général »
153	20 :14	A : Tu veux voir d'autres choses ?	
154	20 :21	A : Ben voilà, on a fait le tour	clic sur « Les fractions égyptiennes »

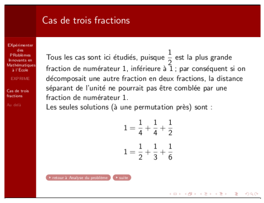
			
155	20 :30	B : Ah, c'est marrant ça...	clic sur « La situation en détail »  La souris va immédiatement sur « Situation mathématique »clic
156	20 :54	A : Je commence par situation mathématique...	 clic sur « Analyse mathématique du problème » 
	20 :58		
157		A : La décomposition de 1 en deux fractions distinctes de numérateur 1 est impossible...	
158		B : c'est en sommes	
159		A : Pourquoi c'est impossible ?	
160		B : Ben, j'sais pas ; attends, je suis pas sur de bien comprendre ; attends	
161		A : oui	

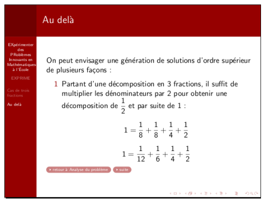
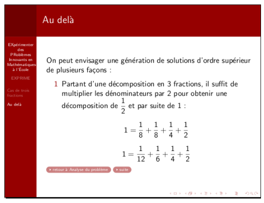
162		B : deux fractions distinctes de numérateur 1... Ah oui, en deux fractions distinctes, d'accord...	
163		A : Ah oui, c'est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ a priori...	clic sur « Démonstrations » 
164		A : c'est parce qu'il faut trouver deux nombres dont la somme est égale au produit...	
165		B : donc c'est $\frac{a+b}{ab} = 1$	
166		A : c'est ça !	
167		B : $a + b = ab$ et voilà, ça doit être bon...	
168		A : Mais pourquoi c'est pas possible ça ?	
169		B : $a + b = ab$; deux entiers...	
170		*Brouhaha* ... A : Attends non, c'est la somme des racines...Et donc si ce nombre la... si b est un nombre entier ... et ce nombre la ça doit être un nombre entier...	
171		B : mais différent...	
172		A : parce qu'un nombre et son précédent	
173		B : le quotient d'un nombre et de son précédent..	
174		A : ouais	
175		B : est-ce qu'un nombre peut être divisible par son précédent ? A priori non	
176		A : non, parcequ'il y en a un pair et un impair	
177		B : un pair et un impair	
178		A : donc c'est pas possible *Rires*	
179		B : un nombre pair...ch'ai pas	
180		A : c'est un nombre entier qui est égal à 1 sur quelque chose	
181	24 :47	B : effectivement ce n'est pas possible... Et j'en suis convaincu	clic sur « Suite »

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>182</td><td></td><td>Lecture</td><td></td><td>clic sur « Suite »

</td></tr>
<tr><td>183</td><td></td><td>Lecture</td><td></td><td>clic sur « Suite »

</td></tr>
<tr><td>184</td><td>25 :17</td><td></td><td></td><td>clic sur « Retour »

</td></tr>
<tr><td>185</td><td>25 :20</td><td></td><td></td><td>La souris se promène sur « Décomposition en plus de deux fractions » ; clic sur « Solutions expertes »

</td></tr>
<tr><td>186</td><td>25 :27</td><td></td><td></td><td>La souris se promène sur « On s'intéresse... » ; clic sur « Suite »</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>187</td><td>25 :58</td><td>inaudible[1]</td><td>

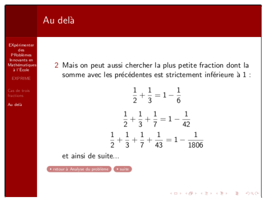
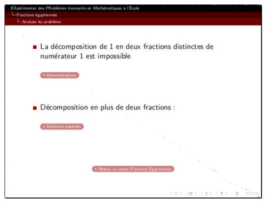
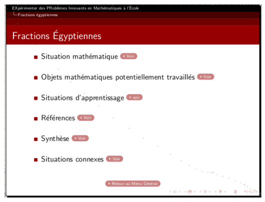
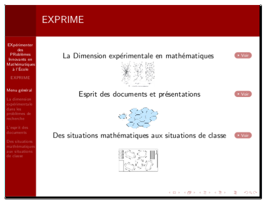
clic sur « Suite »</td></tr>
<tr><td>188</td><td>26 :28</td><td>inaudible</td><td>

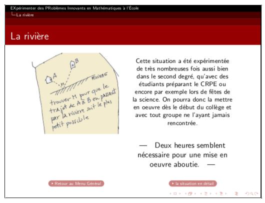
clic sur « Suite »</td></tr>
<tr><td>189</td><td>26 :47</td><td></td><td>

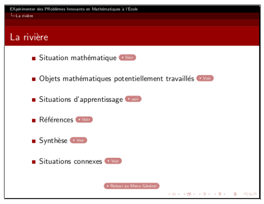
clic sur « Suite »</td></tr>
<tr><td>190</td><td></td><td>A : ...Il suffit de multiplier les dénominateurs par 2... et par suite de 1... Tu comprends ce que ça veut dire ?</td><td>
</td></tr>
<tr><td>191</td><td></td><td>B : Pourquoi ? Ils disent pour décomposer en quatre, ils partent d'une décomposition en trois, puis ils multiplient le dénominateur par 2, c'est à dire une décomposition de $\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>192</td><td>27 :42</td><td>A : Ah oui, d'accord...</td><td>clic sur « Suite »</td></tr>
<tr><td>193</td><td>28 :02</td><td></td><td>

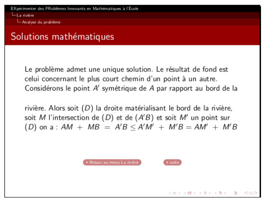
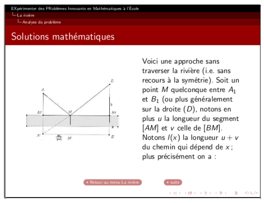
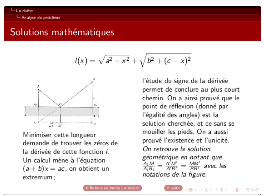
sur « Suite »</td></tr>
</table>

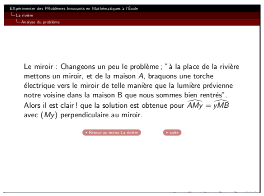
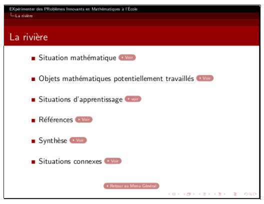
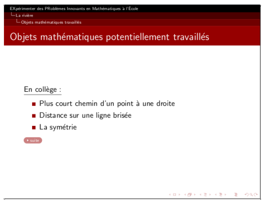
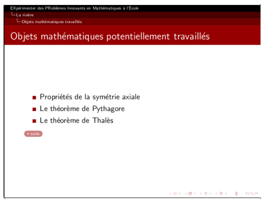
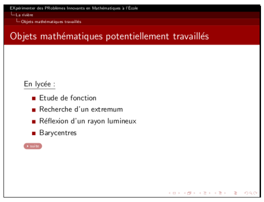
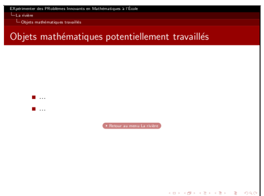
[1] Il semble que l'un des deux lit le texte affiché à l'écran, en marmonant

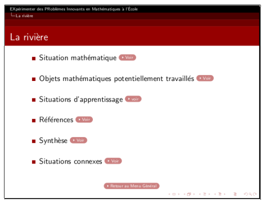
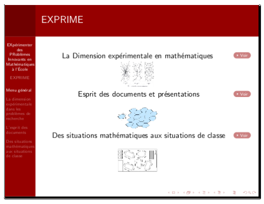
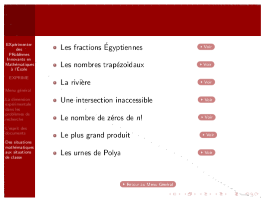
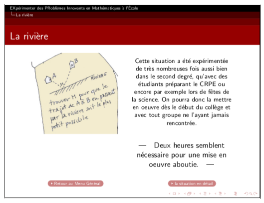
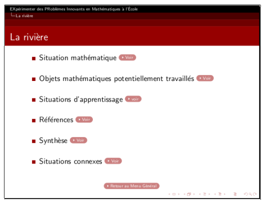
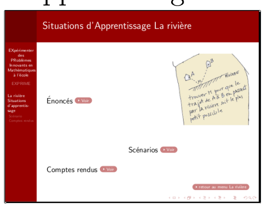
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>194</td><td>28 :10</td><td></td><td>clic sur « Retour »

</td></tr>
<tr><td>195</td><td></td><td></td><td>clic sur « Retour »

</td></tr>
<tr><td>196</td><td></td><td>A : Tu voulais voir d'autres choses... à propos des fractions égyptiennes ?</td><td></td></tr>
<tr><td>197</td><td>28 :18</td><td>B : Non ça va..</td><td>clic sur « Retour»

</td></tr>
<tr><td>198</td><td>28 :23</td><td></td><td>clic sur « Des situations...»

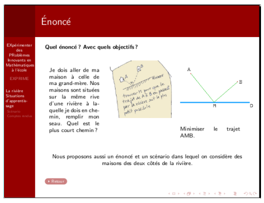
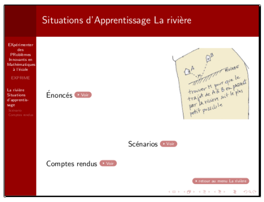
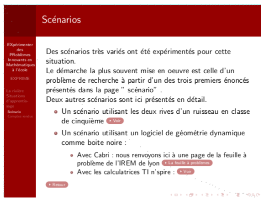
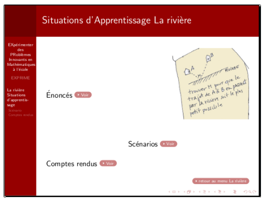
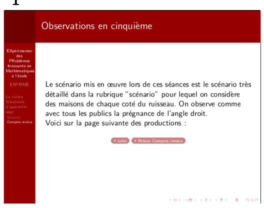
</td></tr>
<tr><td>199</td><td></td><td>A : La rivière on l'a pas regardé ?</td><td></td></tr>
<tr><td>200</td><td>28 :28</td><td>B : On l'a vu hier, mais...</td><td>clic sur « La rivière », « Voir »

</td></tr>
</table>

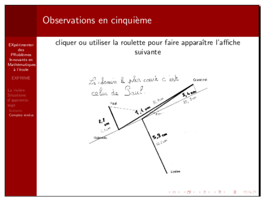
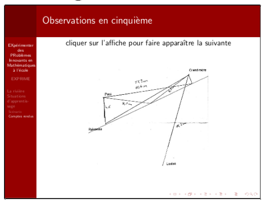
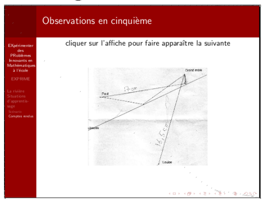
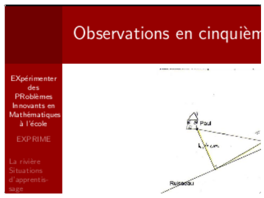
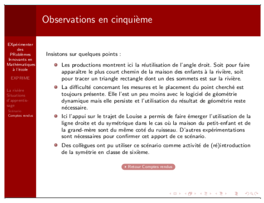
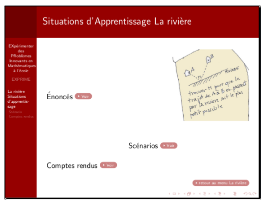
<table>
<tr><td>201</td><td>29 :02</td><td>A : avec quelqu'un qui l'aurait jamais rencontré... Je crois que c'est ça le problème, c'est qu'il est tellement galvaudé celui-là</td><td>clic sur « La situation en détail »

</td></tr>
<tr><td>202</td><td></td><td></td><td>clic sur « Situation mathématique »

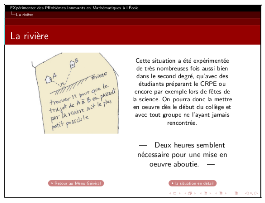
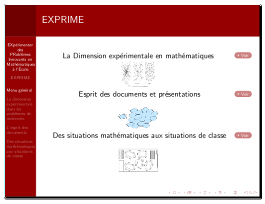
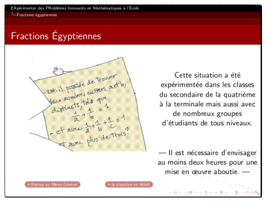
</td></tr>
<tr><td>203</td><td>29 :08</td><td></td><td>clic sur « Analyse mathématique »

</td></tr>
<tr><td>204</td><td></td><td></td><td>clic sur « Suite »

</td></tr>
<tr><td>205</td><td></td><td>A : Bon je crois que l'analyse, on peut la passer</td><td>clic sur « Suite »

</td></tr>
<tr><td>206</td><td></td><td></td><td>clic sur « Suite »</td></tr>
</table>

207	29 :17	A : Ca va on a compris	 clic sur « Retour »
208	29 :20		 clic sur « Objets potentiellement travaillés » : « Voir »
209		A : Plus court chemin d'un point à une droite...	 clic sur « Suite »
210			 clic sur « Suite »
211			 clic sur « Suite »
212			 clic sur « Retour »

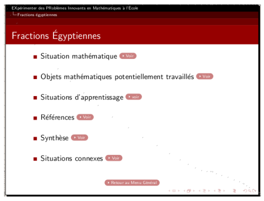
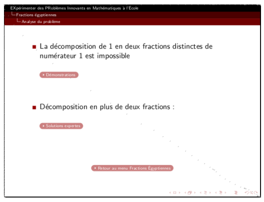
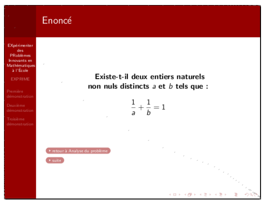
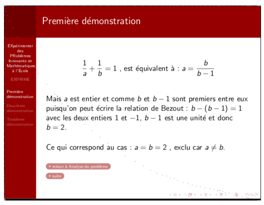
213	29 :44		 clic sur « Retour »
214			 clic sur « Des situations...»
215			 clic sur « La rivière », « Voir »
216			 clic sur « La situation en détail »
217	29 :53		 clic sur « Situations d'apprentissage »
218			 clic sur « Enoncés »

			
219		A : Minimiser le trajet AMB...	clic sur « Retour » 
220			La souris se promène sur Comptes-rendus puis va et clic sur « Scenarios » 
221	30 :36		clic sur « Retour » 
222			clic sur « Comptes - rendus » 
223		A : Celui là, alors...	clic sur « En cinquième » : « Voir » 

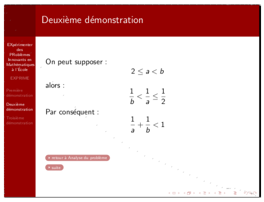
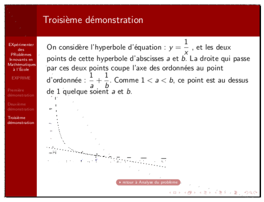
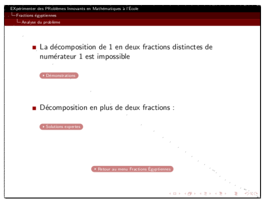
224	30 :53		clic sur « Suite » 
225	31 :05		Change d'affiche 
226	31 :12		Change d'affiche 
227	31 :16		Change d'affiche 
228	31 :22		Ecran suivant : 
229	31 :44		clic sur « Retour » 
230	31 :58	A : D'accord...	clic sur « Retour »

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>231</td><td></td><td>A : Y'a d'autres choses que tu voulais voir sur la rivière ?</td><td>La souris se promène entre « la situation en détail »et « Retour au menu général »et clic sur « Retour au menu général »
</td></tr>
<tr><td>232</td><td></td><td>B : On va aux fractions égyptiennes, c'est ce qui me paraît le plus</td><td></td></tr>
<tr><td>233</td><td></td><td>A : Les fractions égyptiennes, ça te paraît bien ?</td><td>clic sans hésitations (deux fois) pour atteindre :
</td></tr>
<tr><td>234</td><td>32 :28</td><td>A : Ouais... Alors, fractions égyptiennes, quel a été le problème choisi[2] ? A priori ce serait fractions égyptiennes ; il faudrait voir deux ou trois arguments</td><td></td></tr>
<tr><td>235</td><td></td><td>B : Ah ouais t'as raison... Moi, j'avais l'exercice</td><td></td></tr>
<tr><td>236</td><td></td><td>A : La rivière, je maîtrise au niveau mathématique</td><td></td></tr>
<tr><td>237</td><td></td><td>B : Oui, à l'aise... la, y a des problèmes de diviseurs... Mais y'a un intérêt</td><td></td></tr>
<tr><td>238</td><td></td><td>A : personnel ?</td><td></td></tr>
<tr><td>239</td><td></td><td>B : oui pour l'Egypte... On discute pas</td><td></td></tr>
</table>

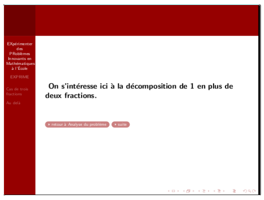
[2]Il lit les consignes

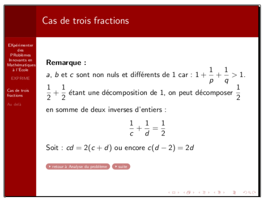
240		A : personnel en fait ... personnel, je mets ...	
241		B : voilà, on discute pas	
242		A : Ensuite ; petite difficulté...simplicité	
243		B : Mais, on sait ça ...	
244	33 :40	A : Simplicité ; Les arguments...	clic sur « La situation en détail » 
245			clic sur « Situation mathématique »
246			clic sur « Analyse mathématique du problème » 
247	33 :49	B : On peut utiliser la calculatrice Casio, Casio 2D qui font tout en, tu sais, qui font tout en formel	
248		A : Ouais	Un message Adobe apparaît sur l'écran ; clic sur OK 
249	34 :16		
250	34 :18		clic sur « Suite » 
251		A : Ca suppose que tous les éléments ...	
252		B : Mais non, tu prends Texas, il y a un trait en biais, y'a toujours un moyen	

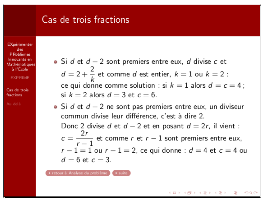
253		A : Tout tes élèves ils ont une calculatrice ?	
254		B : quasiment tous. De calcul fraction, quasiment tous	
255		A : Ah ! je suis pas si sûr	
256		B : si, si parce que sur les plus anciennes $\frac{1}{2}$ s'écrit 1 avec un petit machin 2 mais ça calcule sur les fractions	
257		A : mais est-ce que t'as les résultats sous cette forme là ?	
258		B : Oui, il met 1 un truc 2	
259		A : par contre, il faut la paramétrer	
260		B : non, c'est par défaut. Y'a une touche par contre qu'il faut utiliser, y'a une touche D sur C ou A	
261	35 :10	B : le Bezout, là, c'est niais	
262		A : *Rires* Non, c'est pour montrer ...	
263		B : Non mais a est entier et b et $b-1$ premiers entre eux	
264		A : A partir du moment où ils existent, t'as les nombres	
265		B c'est quoi premiers entre eux ? Oui, je me rappelle de l'histoire quelque chose, mais alors ça fait longtemps, ... Pourquoi ils sont premiers entre eux ces deux gugusses ?	
266		A : parce que Bezout, il dit que si il existait	
267		B : Ah oui, si il existait deux nombres tels que ...	
268		A : si k et k' existent ... a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe une paire k k' telle que ...	
269		B : Là la paire qui est trouvée, c'est quoi ? C'est (1,-1)	
270		A : Oui	
271		B : a égal b sur $b-1$ ... Premiers entre eux, ça veut dire qu'ils ont pas de diviseurs communs	
272		A : Ca veut dire que quand ... ils sont premiers entre eux, ça veut pas forcément dire que *inaudible*	
273		B : Ca me chagrine, en fait. Je vois bien	

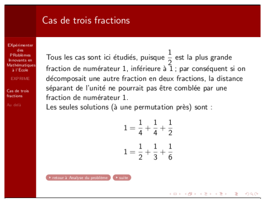
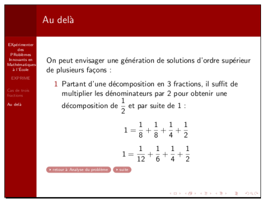
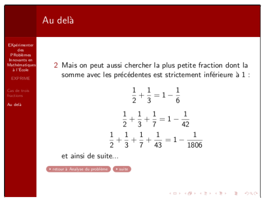
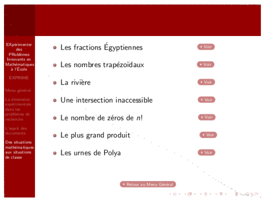
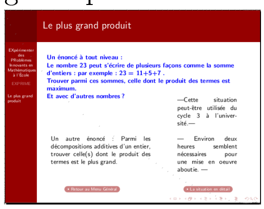
274		B : Parce que a ça doit être un nombre entier et donc un quotient de deux nombres premiers entre eux peut pas être entier, c'est ça en fait ? Sauf si...	
275		A : Le problème c'est qu'ils sont premiers entre eux et donc c'est une fraction irréductible	
276		B : Voilà...	
277		A : A quelle condition une fraction iréductible est égale à 1 ?	
278		B : Une fraction irréductible qui est égale à un entier...Oui, c'est égal à 1... Non c'est égal à 2 ; ouais bon, bref !	
279		A : $b-1=1$ et donc $b=2$	
280	37 :31	B : Ouais, d'accord...	clic sur « Suite » 
281	37 :54	B : on continue	clic sur « Suite » 
282	37 :59	B : Oui	clic sur « Retour » 

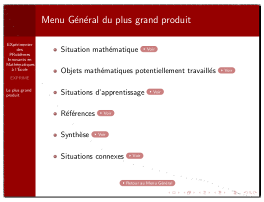
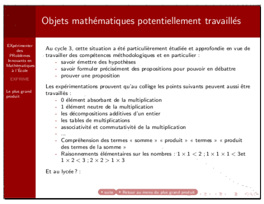
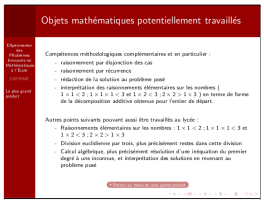
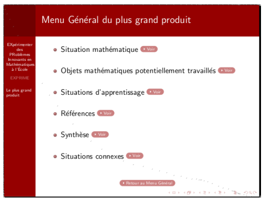
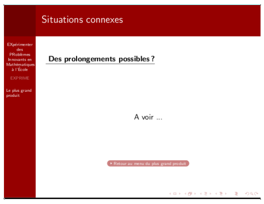
<table>
<tr><td>283</td><td></td><td>B : Oui, c'est pour avoir des explications sur le cas 2. Parce que moi, j'ai fait un dessin, en fait ; ben oui, c'est évident ; le plus petit que un demi c'est un tiers. Enfin, il y a pas plus grand que la moitié donc une fois le complément pour une fraction, c'est impossible ; pour une paire c'est impossible ; pour une paire t'en piques la moitié... Bon alors, plus de deux fractions... Je vais prendre un demi plus un quart plus un tiers pour que ça fasse 1 ;</td><td>clic sur « Solutions expertes »

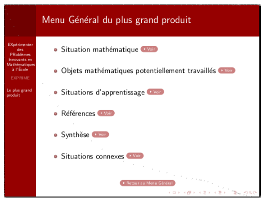
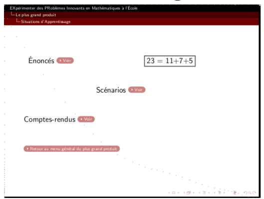
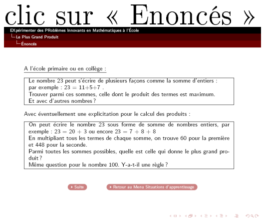

</td></tr>
<tr><td>284</td><td></td><td></td><td>clic sur « Suite »

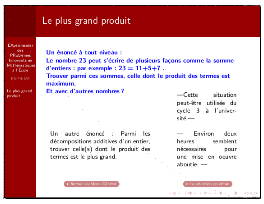
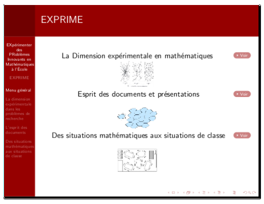

</td></tr>
<tr><td>285</td><td>38 :52</td><td>A : a, b et c sont non nuls et différents de 1 car ... un demi plus un demi étant une décomposition de un, on peut décomposer...</td><td></td></tr>
<tr><td>286</td><td></td><td>A : En fait, la seule décomposition de 1 c'est un demi plus un demi et donc le problème, ça revient à décomposer un demi en une somme</td><td></td></tr>
<tr><td>287</td><td></td><td>B : Oui, alors...</td><td></td></tr>
<tr><td>288</td><td></td><td></td><td>clic sur « Suite »

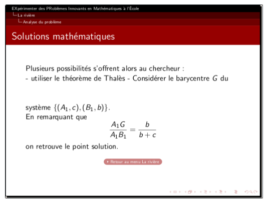

</td></tr>
<tr><td>289</td><td>39 :37</td><td>B : Faut être dément...</td><td></td></tr>
<tr><td>290</td><td>39 :53</td><td>B : Ouh lala ! petit 4... Solutions expertes mais inaudible Rires</td><td></td></tr>
<tr><td>291</td><td></td><td>Rires</td><td>clic sur « Suite »</td></tr>
</table>

292			 clic sur « Suite »
293		A : Moi, j'ai bien aimé le problème des décompositions	 clic sur « Suite »
294		B : Ca là ?	 clic sur les boutons retours
295	40 :51	A : Non le problème du plus grand produit c'est bien parce elle est assez alléchante ; elle conjecture ; elle me semble assez facile à faire	
296		A : Mais la rivière, par exemple... mais par contre...	 clic sur « Le plus grand produit »
297	41 :18	B : Ouais, ouais, c'est vrai que c'est bien	 clic sur « Situation en détail »

			
298		B : Argument, on peut reprendre le..	clic sur « Objets mathématiques potentiellement travaillés »
			
299		A : Ah, là ce qui serait intéressant c'est de faire, faire une restitution sous forme de narration de recherche	clic sur « Suite »
			
300		B : Oui	
301	42 :01		clic sur « Retour »
			
302			clic sur « Situations connexes »
			
303			clic sur « Retour »

			
304			clic sur « Synthèse »Le message d'autorisation d'ouverture d'une page web apparaît
305	42 :10	B : C'est quoi ça ?	clic sur OK ; la page html avec, le lien téléchargez le texte apparaît ; clic sur la ressource pour y revenir
306			Arrêt de la souris sur « Références » ; clic sur « Situations d'apprentissage » 
307	42 :28		clic sur « Enoncés » 
308		A : *montre 100 avec la souris* Donc 100, pour demain... Pendant deux heures des essais...	
309		A : Non, dans les deux heures d'expérimentations ; ch'ai pas, t'imagines tout ça en groupes... Plutôt une demi-heure d'expérimentation, ...	
310		B : sixième ?	
311		A : Je sais pas	

312		B : C'est quoi les septuples ? avec sept ? Nombres à quatre chiffres dont les deux premiers	
313		A : septplex	
314		*inaudible*	
315		B : Ouais, mais écoute, il est pas mal	clic sur « Retour » *deux fois* 
316		B : Ouais, ben écoute...	
317		A : Qu'est ce que tu voyais ?	
318		B : A la rigueur, il est pas mal	
319		A : Si tu leur a donné dans un cas particulier, après tu peux leur proposer un cas plus général	la souris après être restée sur « La situation en détail » va sur « Retour au menu général » 
320		B : Oui, évidemment	clic sur « Situations... »
321			clic sur « La rivière » puis sur « Situation en détail » et « Situation mathématique » et *(45 :24)* « Analyse mathématique » et « Suite » (45 :26) et « Suite » (45 :36) et « suite » (45 :36) et « Suite » (46 :02)

			
322	46 :12		clic sur « Retour au menu la rivière »
323	46 :18		clic sur « Retour au menu général »
324	46 :20		clic sur « Esprit des documents »
325	46 :23		clic sur « Voir »
326	46 :26		clic sur « Contexte de la recherche »
327	46 :59		clic sur « Suite »
328	48 :06	A : donc, on part sur le produit...	
329	49 :02	B : je suis persuadé que d'avoir toutes les décompositions çe sera difficile, mais bon, avec un travail de plusieurs personnes... De toutes façons c'est des décompositions additives	
330		Intervention de Claire pour interrompre le temps de travail qui rappelle les consignes	
331	50 :19	B : On part sur le plus grand produit alors...	
332		A : Comme tu veux... Comment il s'appelle ?	
333		B : C'est le plus grand produit, je crois	
334		A : Qu'est-ce qui nous a motivé ?	
335		B : C'est qu'on comprenait pas les autres ...	
336		B : La rivière, ben c'est trop connu, fractions égyptiennes, bon, là y'a moins de possibilités, y'a plus si ils font dans tous les cas,... , les décompositions, c'est le plus simple	
337		A : on n'a pas parlé de la préparation de la séquence de classe	
338		B : Ou en êtes vous... ? Nulle part !	

339		A : On essaye de répondre à la question suivante : Quel objectif assignez vous à cette séquence ? Ca serait quoi le but ? Déjà, c'est les faire chercher... et puis la mise en forme	
340		*Brouhaha*	
341		A : Comment tu présenterais les choses ?	
342		*Brouhaha*	

Fin de la séance.

Mise en commun

- On a choisi le plus grand produit ; en fait c'est celui qui nous a plus ou moins, qui nous a bien intéressé, et à la fois qui nous a paru assez simple pour pouvoir,... pour que les élèves rentrent rapidement dans l'activité et puissent faire des choses. Euh... Où en êtes vous dans la préparation de la séquence de classe ? Ben pas très loin... Quel objectif assignes vous à cette séquence ? Ben, faut attendre d'avoir fait une préparation pour assigner un objectif *Rires* ;
- Claire : Mais je vais quand même vous titiller un peu, ça serait plutôt un objectif, plus pour introduire une notion ou... reprendre une ancienne notion ou...
- ça serait plutôt pour argumenter...
- Claire : plus pour chercher...
- Mise en forme, mette en forme...
- Initier à la recherche...
- Claire : initier à la recherche
- Plus pour argumenter,... voilà.

Chapitre 8

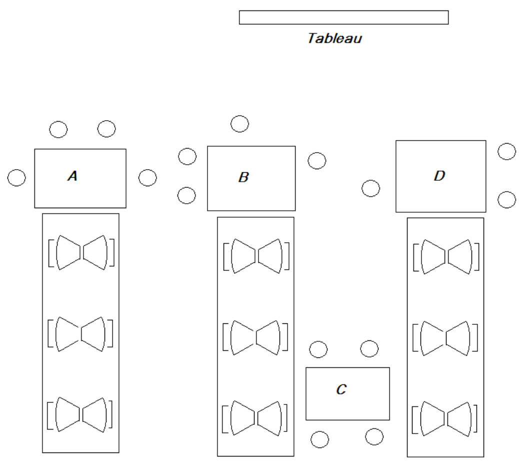
Annexe 2 : Classe de première S

8.1 Observation en classe de première S

Observation de deux demi-groupes d'une même classe ; dans la première heure, observation de la classe et dans la seconde heure, observation d'un groupe de quatre élèves.

8.2 Première observation : déroulement

Les élèves sont dans une salle informatique. Les tables sont placées pour faciliter un travail de groupes. La disposition est indiquée ci-dessous



Les élèves s'installent à la place désignée par le professeur. Les groupes ont été faits à l'avance et inscrits au tableau.

Actions élève(s)	Actions professeur collectives	Actions professeur élève ou groupe	Temps
Les élèves écoutent	Vous pourrez utiliser votre calculatrice... Si vous voulez vous pouvez brancher un ordinateur. Je vous donne le sujets et les consignes *Le professeur écrit au tableau : Quels sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?* On appelle ces nombres des nombres trapézoïdaux, on verra pourquoi... Il y a des questions ? Des nombres consécutifs, c'est qu'ils se suivent ; contre exemple : 1+3 ne sont pas consécutifs. Alors dix minutes de travail individuel et ensuite on passera à une recherche par groupes. Shht,... Ludovic, c'est bon ? Alors dix minutes de travail individuel, le reste du temps par groupe, sachant que dix minutes avant la fin de l'heure je vous distriburai un transparent où vous devrez écrire vos conclusions par groupe. Pas de communication d'un groupe à l'autre, d'accord... Pour l'instant recherche individuelle pendant dix minutes et je vous dirai quand vous pourrez commencer à communiquer entre vous. Mon rôle : de m'assure que ça se passe bien, de répondre aux questions qui concernent uniquement la compréhension de l'énoncé, par contre je ne pourrai pas répondre aux questions du type « est-ce que je suis bien parti, est-ce que c'est juste, est-ce que c'est faux ? » ; d'accord ? Voilà. C'est bon ? OK. Bon, je vous laisse partir individuellement pendant dix minutes... D'abord, c'est seul, pendant dix minutes.		10h00

Actions élève(s)	Actions professeur collectives	Actions professeur élève ou groupe	Temps
Les élèves travaillent ; quelques communications		Rappel : c'est individuel...	
	Vous pouvez travailler par groupe		10h10
Travail dans les groupes		observation des travaux, circulation dans la classe, mais aucune intervention	
Une ou deux calculatrices sur les tables. Pas d'utilisation des ordinateurs			
	Il vous reste dix minutes... Je vous donne les transparents et un marqueur... Faites attention, il est indélébile		10h40
Les élèves continuent à chercher			
	Il vous reste moins de cinq minutes ; il va falloir écrire...		10h45
Les élèves commencent à écrire		Il faut que vous fassiez une synthèse... Vous nous l'expliquerez...	
			(Sonnerie) 10h50
Les élèves continuent à écrire et à discuter	Rappel de la fin du cours.		

Les affiches des quatre groupes :

Groupe A :
Pour déterminer si un nombre est trapézoïdal :
on divise ce nombre par le nombre de valeurs dont on fera la somme
* si on divise par un nombre pair, il faudra que le résultat soit de valeur $n + \frac{1}{2}$ ($n \in N$)
En effet le nombe obtenu par la division devra être la moyenne des entiers de la somme.
Dans le cas d'un nombre pair de valeurs, la moyenne sera $n + \frac{1}{2}$.
Dans le cas d'un nombre impair de valeurs, la moyenne sera un nombre entier.
* Si on divise par un nombre impair il faudra que le résultat soit un entier naturel.
Il semblerait que les puissances de 2 ne soient pas trapézoïdales.

Groupe B
Si x est impair, il peut s'écrire sous la forme $x = 2n + 1$ donc $x = n + (n + 1)$. Ceci marche pour tout n donc tous les impair sont solution, sont des entiers trapézoïdaux.
Conjecture : $S = N/2^b$ avec b un entier naturel.

$$\begin{array}{lll} \text{pour} \quad a = 2 & x = 2n + 1 & \\ \quad a = 3 & x = 3n + 3 & \\ \quad a = 3 & x = 4n + 6 & \rightarrow x = an + b \\ \quad a = 3 & x = 5n + 10 & \\ \quad a = 3 & x = 6n + 15 & \end{array}$$

On démontre en fait que $x = a(0,5a + n - 0,5)$:

$$\begin{array}{rl} \text{En effet} & 1 = (2 - 1) \times 1 \\ & 3 = (3 - 1) \times 1,5 \\ & 6 = (4 - 1) \times 2 \\ & 10 = (5 - 1) \times 2,5 \end{array}$$

$b = (a - 1)(0,5a)$
$x = an + (a - 1)(0,5a)$
$x = an + 0,5a^2 - 0,5a$
$x = a(0,5a + n - 0,5)$
On suppose que ceci ne marche pas pour les puissances de 2

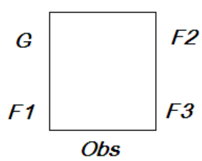
Groupe C
On définit ω l'ensemble des nombres naturels qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.
$x \in \omega$ si : $\frac{x}{2^n} = y$ avec n entier naturel
~~et y le plus grand décimal~~
Tel que y soit le $\oplus$ gd décimal.
$\hookrightarrow x = 2^n \times y$
On pose $y_1 = y - 0,5$
et $y_2 = y + 0,5$
$x = \underbrace{y_1 - n + \cdots + y_1 + y_2 + \cdots + y2 + n}_{2^n \text{ termes}}$
On constate que si $x = 2^n$ alors $x \notin \omega$ car il ne faut pas que $y = 1$
Exemple : pour 300 : $\frac{300}{2^3} = 37,5$
$300 = 8 \times 37,5$
$y_1 = 37$
$y_2 = 38$
$300 = 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 \hookrightarrow$ les 8 termes

Groupe D
Conjecture : Tous les entiers naturels sont définis, exceptées les puissances de 2.
On a déterminé la suite représentant le résultat de la somme de n nombres entiers consécutifs. v est définie sur N à partir de $n = 1$ par
$v_n = (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}$
Ex : si $n = 3$: $v_3 = (3+1)x + \frac{3(3+1)}{2} = 4x + 6$
or $v_n = x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6$

8.3 Deuxième observation : groupe de quatre élèves

Les élèves arrivent au compte-goutte, l'heure d'avant ayant été consacrée à un devoir surveillé... Dès que tous les élèves sont installés, le professeur présente le travail.

Même présentation du travail à réaliser. Dix minutes de travail individuel. Observation d'un groupe :



Temps	dialogues
12h08	*chuchotements...*
	[Prof] Vous avez le droit de parler plus fort parce que en plus vous êtes tout seul *(rires)* Détendez vous, vous êtes juste observés, mais c'est pas une évaluation... personne ne saura que c'est vous qui avez cherché... Tout simplement pour voir comment ça peut se passer dans un groupe, c'est tout... Faites comme si de rien n'était ! *Le professeur s'éloigne*
	[1 F3] j'ai essayé avec des grands nombre si c'était la même chose
	[2 F2] Ouais...Vous avez trouvé quoi ?
	[3 G] C'est une suite de nombres
	[4 F2] des nombres comment ?
	[5 G] de nombres impairs
	[6 F1] oui
	[7 F3] on a répondu à la question là non ?
	[8 G] Ouais, mais ils disent qui sont somme d'au moins deux entiers naturels... Il peut y en avoir trois, quatre... cinq
	[9 F2] hunhun
	[10 G] C'est au moins, c'est pas de deux...
	[11 F2] mince
	[12 G] ça peut être zéro plus un plus deux plus trois plus quatre
	[13 F2] et mince, ça fait pair maintenant
	[14 F1] Ah oui... ah, mais non...
	[15 F2] mais si, un plus deux plus trois ça fait six
	[16 F3] Ca dépend alors aussi le... un nombre...
12h10	[17 F1] Ah ouais regarde à chaque fois qu'on augment de un, quand on augm..., quand on fait.. y'a deux, un plus un, en fait ça augmente à chaque fois de deux, quand on en a trois ça augmente
	[18 F2] de trois, et quand il y en a quatre *elles écrivent sur la feuille : 1+2+3+4*
	[19 F3] quatre cinq six sept huit neuf dix *1+2+3+4=10* cinq, cinq six sept huit neuf douze quatorze *2+3+4+5=14* Ah ouais ! *silence*
	[20 F2] et donc cinq, ça augmenterait de cinq
	[21 F1] Ben ouais *silence ; elle écrit I+P+I=I*
	[22 F2] Imagine deux nombres... le un... il va de deux en deux... trois nombres, on part de six... Y'a pas de nombres entiers dessous
	[23 F1] Ben non...
	[24 F2] Quatre on part de dix... On va faire quoi quand on a ça ?
12h12	[25 F3] Faut qu'on trouve des équations, ou ch'ai pas quoi
	[26 F2] ouais peut-être...
	[27 F1] avec les équations c'est facile...
	[28 F2] c'est à dire ?

Temps	dialogues
	[29 F1] ben c'est ça *elle montre les écritures précédentes* ... en partant du nombre de départ, et après comme ça augmente à chaque fois de deux...
	[30 F2] donc là tu aurais d.. une fois... c'est pour combien ça ?
	[31 F1] deux, deux entiers, la somme de deux entiers, deux entiers naturels...
	[32 F2] et là ?
	[33 F1] et là pour trois, après pour quatre...
	[34 F2] après ça fera trois... Ah ouais... deux fois trois six plus neuf *(rires)* ; ben non... ça c'est pour trois entiers... un, deux, trois,... ça fait six
	[35 F1] ça veut dire qu'on part pas de là
	[36 F2] non on part pas de là... on part de combien ?
	[37 G] ch'ai pas, j'ai un truc, quand y'en a deux ou trois c'est impair, quatre ou cinq c'est impair, six ou sept c'est impair, huit ou neuf c'est pair ... les suites de nombres... consécutifs... (*rires*)... les suites de nombres consécutifs, c'est à dire quand il y a deux ou trois nombres consécutifs c'est impair, quand il y a quatre ou cinq nombres consécutifs c'est pair quand il y en a six ou sept...
	[38 F3] quand y'en a trois c'est ?
	[39 G] c'est impair
	[40 F1 41 F2] pair !
	[42 F2] quatre plus cinq plus six... ah c'est pas cool ça fait quinze...ah oui, donc c'est impair. Donc c'est bon.. ?
12h14	[43 F1] déjà, un plus deux plus trois ça fait six
	[44 F2] ah oui, ça fait six un plus deux plus trois
	[45 G] Ah ben non ça marche pas... mince
	[46 F3] Ca fait pas... Ah non non j'ai rien dit...
	[47 F2] Fais voir ta formule, là... j'suis d'accord pour le premier c'est deux fois le nombre plus deux... plus un...
	[48 F1] Le premier c'est ... six plus trois x
	[49 F3] Pour la première suite t'as trouvé combien... C'est deux fois le nombre plus un, moi j'ai mis... ou deux fois le nombre moins un...
	[50 F1] Où ça ?
	[51 F2] pour la suite de deux nombres consé... enfin quand on ajoute deux nombres consécutifs...
	[52 F1] ouais
	[53 F2] on ajoute trois, ça va faire une fois trois plus trois, deux fois trois six plus trois, quatre fois trois douze plus trois ...
	[54 F2] Après pour quatre, ça serait quoi alors ?
	[55 F1] Ca augmenterait de quatre, donc ça ferait...
	[56 F2] Ben une fois quatre, quatre plus quatre ça fait huit

Temps	dialogues
	[57 F1] quoi ?
	[58 F2] Tu mets combien ?...
	[59 F1] J'ai rien mis encore... (silence)
	[60 F2] ouais quoi, ça fait dix huit, ça augmente de quatre. Donc la formule c'est quoi ?
	[61 F1] C'est six plus quatre x Ca fait 14 ?
	[62 F2] Non, deux fois quatre plus six ah oui, quatorze... et après, c'est quoi le suivant ? trois quatre cinq six ... ça fait dix huit, après tu fais six plus trois x
	[63 F1] six plus quatre x... quatre fois trois douze
	[64 F2] plus six
	[65 F1] dix huit
	[66 F2] Y'a une logique ou pas, là dans les suites ?
	[67 G] ch'ai pas...
	[68 F2] Ca commence à six ? Non six, sept huit
	[69 F1] dix, ça commence à dix c'est zéro plus un plus deux plus trois plus quatre
	[70 F2] ouais... Donc la suivante, ça sera ?... cinq ça commence à combien ?... Non, c'est de trois nombres que ça commence à six ! Celle de quatre nombre, elle commence à dix
	[71 F1] on prend pas zéro ?... zéro plus un plus deux plus trois
	[72 F2] Ah ouais... c'est pas bête... Donc après ça fera dix plus... non... si... zéro plus... ça commencera à dix après ?
	[73 F1] ouais... Entre chaque nombre ça augmente de deux, après de trois après de quatre
	[74 F2] ouais, ça augmente le même nombre que ça.
	[75 G] ouais ça augmente du nombre de chiffres qu'on additionne.
	[76 F3] après, c'est toujours pareil, donc...
	[77 F1] après seize plus six x
	[78 F2] pourquoi seize ?
	[79 F1] parce que dix plus six égal seize...
	[80 F3] regarde, entre là et là ça a augmenté de deux entre là et là ça a augmenté de trois entre là et là ça a augmenté de quatre
	[81 F2] Ah ouais, c'est pas bête...
	[82 F1] donc là ça augmentera de cinq donc ça fera quinze... ça fait quinze plus six x. *elle écrit :* $1 + 2x$ *2 nombres,* $3 + 3x$ *3 nombres,* $6 + 4x$ *quatre nombres,* $10 + 5x$ *5 nombres...*
	[83 F2] jusqu'à l'infini...
	[84 F1] hmmm
12h20	[85 F1] Après j'sais pas si on peut faire une grosse équation avec tout ça...
	[86 F2] douze, c'est la somme de je sais pas combien de nombres entiers consécutifs ou pas ?

Temps	dialogues
	[87 F1] ben oui, plusieurs [88 F2] combien ? [89 F1] Ben, ça peut être... euh... en fait, je crois... [90 F2] c'est pas deux nombres, puisque c'est pair... donc ça ferait... attends... deux plus trois plus quatre, c'est égal à combien ? [91 F3] neuf [92 F2] trois plus quatre plus cinq ? [93 G] douze [94 F2] douze ? [95 G] hmm [96 F2] et quatorze ?... Non deux plus trois plus quatre plus cinq c'est égal à quatorze. Et trois plus quatre plus cinq ... ouais douze... En fait c'est à partir de... C'est un, trois, cinq, et après c'est tous les chiffres, non ? [97 F1] Hmm... quatre on peut pas ? [98 F2] Non, quatre on peut pas... *L'observateur s'échappe quelques secondes* [99 F3] C'est horrible... (rires) peut-être qu'on est en train de dire des conneries... On est complètement à côté de la plaque... Han, pfff... [100 F2] Non, parce que là à partir du nombre... là deux y'a pas de ... de truc. [101 F3] y'a pas de quoi ? [102 F1] non... [103 F2] enfin, pour deux, ça existe pas... [104 F1] non... [105 F2] pour quatre non plus... [106 F1] non... [107 F3] non... [108 F2] cinq oui, six oui, sept oui, huit... ah, huit ça existe ou pas [109 F1] ben, je l'ai pas trouvé... [110 F2] pour neuf, oui, pour dix oui, pour onze oui, pour douze oui, pour treize oui, pour quatorze ... [111 F1] oui [112 F2] oui, pour quinze oui, pour seize... [113 F3] déjà, avec trois, ça fait la table de trois... tu fais, enfin, zéro plus un plus deux ça fait trois, après tu fais un plus deux [114 G] ça augmente de trois... [115 F1] oui, ça augmente de trois [116 F3] ... et ça fait la table de trois... [117 G] quand t'asquatre nombres ça augmente de quatre en quatre, quand t'en a cinq ...

Temps	dialogues
	[118 F3] ouais, mais ça te fait pas la table de quatre... et pour cinq... non
	[119 F2] non ça fait pas la ta... si ça fait la table...
	[120 F1] attend...
	[121 F3] quand t'ascinq ça fait...
	[122 F2] non parce que ça commencera pas à cinq
	[123 F1] ça peut pas faire la table de quatre
	[124 F2] la table de trois, ça commence à trois
	[125 G] à zéro
	[126 F2] si ça commence à trois... et les autres...
	[127 G] trois fois zéro, zéro
	[128 F2] quoi ?
	[129 G] y'a trois fois zéro, zéro
	[130 F2] ouais, mais ...
	[131 G] zéro c'est un entier
	[132 F2] pour cinq... j'vais prendre ma calculatrice... ça va plus vite, elle réfléchit plus vite que nous.
12h23	[133 F1] Ca commence à dix...
	[134 F2] Et après ça fait ?
	[135 F1] oui, c'est bon... j'ai cru que je savais plus compter...
	[136 F3] trois quatre cinq onze... ça fait de cinq en cinq
	[137 F1] ouais, à partir de dix...
	[138 F2] Faut faire un truc du style...
	[139 F3] Une grosse équation ?
	[140 F2] j'sais pas... faut répondre à la question... Donc on peut dire que pour deux nombres consécutifs c'est... (rires) ... c'est deux x plus un... c'est deux x plus le premier nombre... la première somme de deux nombres consécutifs... Là c'est trois x puisque c'est trois nombres, plus la première somme de trois nombres consécutifs
	[141 G] on a répondu partiellement à la question là, parce que y'a tous les impairs... Les entiers naturels qu'on nous demande, déjà il y a tous les impairs, et après il faut compléter avec trois chifres consécutifs, avec quatre chiffres consécutifs, cinq chiffres consécutifs...
	[F] ouais...
	[142 G] regarde...ils demandent quels sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs et ben y'a tous les impairs
	[F] ouais
	[143 G] et pis après faut compléter, parce qu'il y a des pairs dans les entiers
	[144 F2] Hmmm
	[145 G] mais pas tous

Temps	dialogues
	[146 F2] Hmmm... mais quels pairs alors ? [147 F1] Ben déjà, y'a pas zéro. [148 F2] y'a pas deux, y'a pas quatre... y'a six, y'a huit [149 F1] huit, t'as réussi ? [150 F2] non, on n'a pas réussi mais... [151 F1] non, on n'a pas réussi huit... [152 F2] donc, y'a pas huit, y'a pas seize, non plus si ? non y'a pas seize. [153 F3] non [154 F2] quoique... [155 F3] quoique [156 F2] à six nombres ? Ca donne quoi, six nombres consécutifs ? [157 F1] Ben de toutes façons, ça le fera pas... [158 F2] avec six nombres consécutifs *calcule sur sa machine...* ouais c'est plus quinze donc c'est pas la peine d'essayer [159 G] huit, seize... [160 F2] huit ça existe pas non plus ?... Non seize ça existe pas. [161 G] trente deux, soixante quatre, cent vingt huit, deux cent cinquante six ça exise pas ! [162 F2] c'est vrai ? [163 G] non, mais j'en sais rien mais ça fait fois deux chaque fois [164 F2] zéro, deux, quatre, six, huit seize... on essaye avec trente quatre ? [165 G] trente deux [166 F2] trente deux ? [167 G] ouais [168 F2] donc faut voir si... pour l'instant ça fait... est ce que un plus deux ... non... un plus deux x ça existe pas c'est que des impairs... trois plus trois x, j'sais pas on fait trente quatre moins trois divisé par ... ça fait trente et un ; est ce qu'il y a un nombre qui multiplié... multiplié par trois fait trente et un ? [F] non [169 F2] non, donc, trente quatre ça marche pas avec ça, avec l'autre.. trente quatre moins six vingt huit, vingt huit ça existe non [170 F1] non [171 F2] quoi ? [172 F1] non, je vérifiais [173 F2] si, là ça marche [174 F1] de quoi ? [175 F2] quatre fois sept vingt huit plus six, trente quatre [176 G] ouais, mais on cherche trente deux [177 F2] ah, on cherche trente deux, mince (rires)

Temps	dialogues
	[178 F1] trente deux moins six... [179 F2] non ça marche pas. Après ? Trente deux moins dix divisé par cinq... ça marche pas non plus. Trente deux moins six... qu'est ce que je fais ? Trente deux moins quinze divisé par dix sept, ça marche pas non plus. Trente deux moins vingt et un ... tu peux faire les suivantes... divisé par sept, ça marche pas. Trente deux moins vingt huit ça marchera pas non plus... Ah on a trouvé ! Trente deux, il ne marche pas non plus. [180 G] Trente deux il marche pas ? [181 F2] Non... On essaye avec euh (rires) [182 F1] On essaye de démontrer... [183 F2] ...avec tous les nombres ! Et là, est-ce que entre, y'en a pas ? [184 G] ben si justement.. [185 F1] entre seize et trente deux ? [186 G] J'essaye de faire vingt. [187 F2] Dix sept ? [F] Ben dix sept... *Brouhaha* Ca marche... [188 G] oui mais dix sept c'est impair donc ça marche forcément. [189 F2] vingt, est ce que ça marche ? On va essayer... [190 F3] Tu les as noté ceux qui marchent pas ? [191 F2] Ben il les a noté. Enfin il a noté pour l'instant euh... [192 G] Ben, deux, quatre, huit, seize, trente deux... [F] quatre plus quatre huit, huit plus huit seize, seize plus seize trente deux [193 G] oui, ça fait fois deux... [194 F2] ... entre seize et trente deux, ben vingt, il marche pas ? Il y est vingt ? [195 F1] Ben ouais... [196 F2] Ah ouais avec cinq. Donc trente, c'est avec cinq aussi. [197 F1] Il y est vingt quatre ou pas ? [198 F2] vingt quatre... où je l'ai marqué ... Non, alors on essaye vingt quatre [F] Ca marche vingt quatre [199 F2] vingt quatre moins trois divisé par trois... Ouais ! Ca marche vingt quatre. [200 F1] Et vingt deux ? [201 F2] Oui ça marche avec quatre nombres consécutifs. J'sais pas lesquels, mais ça marche [202 G] Ca marche avec vingt, vingt deux, vingt quatre [203 F2] Ouais vingt, vingt deux, vingt quatre. Vingt six, vingt six [F] trente deux...

Temps	dialogues
	[204 G] ...trente deux marche pas. On essaye de voir avec tous les pairs entre seize et trente deux... Ca serait bien... [205 F2] vingt six marche, vingt huit [206 F1] dix huit il marche ? [207 F2] on l'a essayé dix huit ? [208 G] on l'a pas fait dix huit [209 F2] Ah merde. Bon, attends dix huit... vingt huit moins six divisé par quatre [210 G] il marche [211 F2] vingt huit ? [212 G] cinq plus six plus sept... Dix huit il marche. [213 F1] Ah ben oui ! En plus je l'avais ! [214 F2] vingt huit moins...non,... vingt huit moins...non,... vingt huit moins ah ben non... Si vingt huit moins vingt et un c'est égal à sept ? [215 G] Ouais.
12h29	[216 F2] Donc ça marche... [217 G] Faut faire trente aussi... [218 F2] Mais trente c'est avec cinq. Ca augmente de cinq en cinq. [219 G] Ah oui c'est vrai... Donc entre seize et trente deux tous les nombres pairs marchent. Ca veut dire en fait, tous les nombres pairs en partant de deux fois deux ne marchent pas. [F] Hmmm... Enfin on n'est pas sûr, mais... [220 G] on a pas essayé entre huit et seize... dix, douze, quatorze [221 F2] Ben dix ça marche avec cinq... Ah non [222 F1] dix il marche avec cinq. [223 F2] t'es sûre ? [224 F1] Oui, c'est parce que zéro plus un plus deux plus trois plus quatre... [225 F2] ouais, ouais ; après, quatorze...ouais... et seize ? [226 G] Non seize, il marche pas. Et douze ? [227 F3] Douze avec trois... [228 G] Donc tous les nombres entre huit et seize marchent, tous les nombres après entre seize et trente deux marchent [F] ouais [229 G] on essaye tous les nombres entre trente deux et soixante quatre ? *(rires)* Enfin, si ça marche entre trente deux et soixante quatre, c'est presque sûr que jusqu'au bout ça marche...

Temps	dialogues
	[230 F2] Ouais presque sûr... Et il n'y a pas d'autres nombres qui ne marchent pas ? T'as essayé ? Il faudrait vérifier ça, parce qu'on sait que tous les impairs, ils sont bons parce que la suite avec deux nombres consécutifs c'est les impairs... Si on ajoute un pair plus un impair, ça fait impair.
	[231 G] non, pair plus impair c'est impair
	[232 F2] oui, c'est ce que je dis un pair plus un impair ça fait impair
	[233 G] non, pair plus impair c'est impair
	[234 F2] c'est ce que je dis *(rires)* Oui un, plus loin impair *(rires)*
	[235 G] D'accord... D'accord.
	[236 F2] Bon, ben allez. On essaye entre trente deux et soixante quatre ?
	[237 F3] Ca sert un peu à rien, si, ça sert à quelque chose ? *(rires)* Parce que ...
	[238 G] Ca voudrait dire que tous les nombres marchent, sauf les pairs qui sont multiples de... non qui partent de.. Ah, tous les carrés de deux... Tout marche sauf les carrés de deux : deux puissance deux, deux puissance trois, puissance quatre, puissance cinq, puissance six...
	[239 F3] trente deux, c'est un carré ?
12h38	[240 G] Les puissances, je veux dire, pas les carrés, les puissances de deux...
	[241 F2] deux puissance sept, c'est combien ? Ah c'est beaucoup *(rires)* Deux puissance quatre ... seize. trente deux c'est divisible ...
	[242 G] deux puissance cinq... puissance six
	[243 F2] deux puissance cinq ça fait trente deux... Ah ouais. Deux puissance sept ça fait cent vingt huit
	[244 G] deux cent cinquante six, cinq cent douze, mille vingt quatre, deux mille vingt huit, quatre mille cinquante six
	[245 F2] Deux puissance six ça fait soixante quatre... deux puissance huit ça fait deux cent cinquante six... Ah ouais ! Et après.. *(rires)* cinq cent douze
	[246 G] deux mille quarante huit, euh quatre mille quatre vingt seize
	[247 F2] Comment tu fais pour les faire comme ça ?
	[248 F1] Tu fais deux fois...
	[249 G] Tu fais fois deux
	[250 F2] Ah ouais, c'est pas bête... On continue
	[251 F1] Oh non, on va pas continuer
	[252 F3] C'est fini, alors...
	[253 F2] On l'a pas démontré, si ?

Temps	dialogues
	[254 G] Ben ouais, il faut essayé de le ... parce qu'on en est pas sûr...
	[255 F2] de justifier...
	[256 F3] Pffff
	[257 G] Alors ça serait tous les nombres entiers naturels sauf les puissances de deux
	[258 F2] Ouais, non et pas ... si si
	[259 G] deux puissance zéro ça fait un
	[260 F2] Ouais, ah bon ?
	[261 G] Quand c'est un impair, ça marche...
	[262 F2] ouais, donc tous les nombres ... *inaudible* ... c'est trop grand les nombres...pff, pis j'ai faim
	[263 F3] Encore dix minutes
	[264 F2] Non, parce qu'on reste plus longtemps, non ? Elle a pas dit ? Y'aura pas de monde à la cantine, comme ça.
	[265 F3] Oui, mais y'aura plus rien.
	[266 F2] C'est vrai... On se sacrifie pour des maths !
	[267 F3] On dit qu'on a trouvé, mais qu'on arrive pas à démontrer
	[268 F2] J'suis sûre qu'on peut démontrer avec des trucs dans le genre, avec des x et comme ça... On peut toujours tout démontrer avec des x
	[269 F1] x plus x plus un plus x plus deux plus$x$ plus trois...
	[270 G] deux puissance n avec n différent de zéro ne peut pas être un nombre entier somme de deux entiers consécutifs au plus...
	[F] C'est pas avec sigma et tout là ?
	[271 G] Ca démontre pas qu'il y en a pas d'autres qui marchent pas.
	[272 F2] De quoi ?
	[273 G] Il faut montrer qu'il y a vraiment que les deux puissance n qui marchent pas. Parce que si ça se trouve, y'en a d'autres.
	[274 F2] De quoi, qui marchent pas ?
	[275 G] Ouais
	[276 F2] Ah non !
	[277 G] entre mille vingt quatre et deux mille quarante huit
	[278 F3] Oh mais y'a qu'eux qui marchent pas ! *(rires)*
	[279 F1] Tu espères...
	[280 F1] On peut pas faire une équation ave x plus un plus x plus deux, et puis après on trouve un sigma j'sais pas quoi... Non ?
	[281 F2] C'est pas bête...
	[282 F3] Moi, je l'aime pas trop sigma, c'est pas mon copain !
	[283 F1] J'ai oublié les formules...
	[284 F3] Ben c'est dans le livre... T'as ton livre de maths ?
12h42	[285 F2] Oui

Temps	dialogues
	[286 F1] Oui, moi aussi [287 F2] Si ça se trouve la réponse elle est dans le livre de maths. *elle parcourt le livre* [288 F3] Je crois qu'il y a des définitions... Ah non, là on n'est pas dans le livre de français. Ca s'écrit comment sigma, avec un s ? [289 F2] Ca y est pas... Oh mince... C'est dans quoi sigma ? Ah, sigma ! [290 F3] Ouiii [291 F2] Mais c'est dans les séries statistiques, c'est pas des statistiques [292 F3] On s'en fout ! *(rires)* [293 F2] Dans les fréquences aussi... Oui, mais c'est dans le chapitre statistique [294 F3] Mais c'est dans les suites, aussi sigma ? [295 F1] Ca veut dire quoi, c'est la somme de quelque chose, sigma ! [296 F2] Si on fait la suite de... de ... de, de, de... de quelque chose on a ... [297 F1] la suite de x plus un, x plus deux, x plus trois... [298 F3] *lit dans le livre* Donc ça marche x_1 plus trois petits points ... [299 F2] Donc après tu fais quoi avec sigma... [300 F3] *Le professeur s'approche de la table* Faut démontrer, madame, ou il faut vous dire la réponse ? *(rires)* [301 G] Parce que là on sait pas comment faire... [Prof] Vous pensez avoir une conjecture ? [302 G] Ouais [303 Prof] Ben, c'est bien déjà. Mais après, oui, effectivement, l'idée c'est d'essayer de la prouver. Mais on peut aussi prouver partiellement, comme vous avez pu le faire avec les nombres impairs. Vous avez bien prouvé quelque chose avec les nombres impairs ? [304 F] Oui, ils y sont tous [305 Prof] Bien voilà ! C'est déjà une partie. Il peut y avoir comme ça des pistes, des morceaux de démonstrations. [306 F3] On a trouvé, voilà c'est quoi. Ca augmente de quoi en quoi... Tu disais quoi tout à l'heure ? [307 F1] Ben on fait un plus deux pour faire trois, trois plus trois pour faire six,... *(rires)* [308 F2] Ne pas faire de recherche de mathématiques avant le repas, les élèves ont le ventre qui gargouille !*(rires)* En plus on sort de ds... Vous avez fait quoi comme schéma ? [309 F] Le gros, là le camembert. En fait, j'ai pas fait des arrondis, parce que j'avais pas envie de faire... *Digression sur le contrôle de SVT*

Temps	dialogues
	[310 F] Ca fait deux fois un nombre plus un donc ca fait impair... [311 F3] Ca va bientôt sonné... [312 F2] Quand tu multiplies un nombre par deux, ça fait un nombre pair... Là, la formule qu'on a trouvé c'est deux x plus un donc tout nombre que tu mulpli.. multiplie ça fait un nombre pair plus un, ça fait un impair... Les nombres entre n et $n+1$ il n'y a qu'un d'écart, en fait... [313 Prof] Je vous donne le transparent [314 F] huit plus vingt huit ça fait combien ? [315 F2] Mais là c'est la table de trois... [316 F1] Non, là c'est dans la table de quatre... [317 F2] Je sais pas comment on peut prouver... [318 F3] On a trouvé [319 F2] Non on n'est pas sûr ! [320 F3] Si on en est sûr
12h50	[321 F2] Non, on n'est pas sûr, si ça se trouve, il y a des nombres qui se cachent [322 G] non [323 F2] Je suis sûre qu'il y en a ; il y a toujours des nombres qui se cachent ! [324 G] Y'a pas que les deux puissance n qui marchent pas... [325 F3] on en prend un, quatre vingt huit... [326 F1] quatre vingt huit ? [327 F2] quatre vingt huit ? Ben on va voir ! On va essayer. *Elle utilise sa calculatrice* Allez... Pas deux nombres consécutifs, pas trois, pas quatre, ... [328 F1] pas cinq c'est pas un multiple... [329 F2] pas six...On peut aller loin comme ça,... pas sept,... Qutrevingt huit moins vingt huit divisé par huit... pas huit ... [330 F1] Et c'est quoi le premier chiffre qu'on avait dit pour six ? [331 F3] Quinze. Quinze plus six x [332 F2] pas neuf ... [333 F3] celui là... et c'est quoi le premier... Par quoi ça commence ? [334 G] *inaudible* [335 F2] Oui, eh ! les gros ! ça marche. [336 Prof] Il faudra penser à mettre vos conclusions sur transparent. Donc éventuellement la conjecture, si vous en avez une, et puis si vous avez des démonstrations partielles, des morceaux qui vous semblent intéressants ... voilà. Essayez de voir ce que vous pouvez retirer de tout ça... Vous marquez le numéro de votre groupe ; alors vous c'est G... [337 F1] Attention aux fautes d'orthographe...

Temps	dialogues
	[338 F2] Fallait pas me donner le truc, alors...*Elle écrit* Quelles sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ? A au moins y'a un s ? [339 F3] aucune idée... [340 F2] En fait, on n'a rien démontré, on a juste ... [341 F1] Si on a démontré qu'il n'y a pas des nombres impairs [342 F2] Donc, je peux faire un premier truc... Les nombres impairs [343 G] Ouais [344 F2] Une première étoile... Et je mets tous les nombres impairs ? [345 G] ouais : avec deux entiers consécutifs, ça fait toujours un nombre impair [346 F3] Tu mets l'équation, ou je sais pas quoi... [347 G] Ouais vaut mieux ... deux fois un nombre c'est pair plus un c'est impair [348 F2] Oui, ben deux x... [349 G] deux x plus un [350 F2] Ben non, faudrait pas mettre un signe pour toutes... Pour tout x...Non ? Tu mets pas pour tout x entier naturel [351 F3] De toutes façons, c'est marqué dans la consigne, donc euh [352 G] De toutes façons c'est les entiers naturels... [353 F2] ouais, c'est marqué dans la consigne ben ouais faut le mettre [354 F3] Bon, vas y... Marque le ! [355 F2] j'sais pas moi... Parce que je le marque jamais, pour tout x je sais pas quoi... [356 F3] Allez, marque le... Marque là, à côté, c'est pas grave [357 F2] Pour tout quoi j'ai dit ? [358 G] x... *(rires)* [359 F2] grand N c'est entier naturel ? [360 G] Ouais [361 F2] de N, point. Donc on va faire x... On dit quoi alors ? [362 G] On dit qu'on a une suite...j'sais pas... $f(x) = 2x + 1$ [363 F2] Ouais... $f(x) = 2x + 1$ [364 G] Non, f... [365 F3] C'est une fonction [366 G] De toutes façons, ça ne changera rien... [367 F3] ou sinon, tu marques juste l'équation, pis voilà ! [368 F2] Oui, donc c'est $2x + 1$... On peut dire que c'est égal à la... aux entiers naturels qui sont sommes de deux entiers naturels consécutifs. [369 G] Voilà

Temps	dialogues
	[F] Oui *(rires)* [370 F2] *Elle écrit* Qui... sont ;.. sommes... de deux entiers... consécutifs. Mais ça cette formule il faut la démontrer ou pas ? [371 G] Ouais, on dit juste que, que... tous les n seront impairs... les $2x$ plus un [372 F1] puisque c'est impair... [373 G] On dit que pour tout x de N, $2x$ est pair et donc $2x$ plus un c'est impair [374 F2] Ah oui... Donc, deux fois x c'est égal à un nombre pair [375 F1] Ben que ça soit pair ou impair, de toutes façons... [376 F2] Ben oui, non... deux fois x c'est égal à tout nombre pair... [377 G] ça sera toujours un nombre pair... [378 F2] toujours ? [379 G] Ben oui [380 F2] avec un « s », non ou pas... Et un nombre pair plus un... [381 G] Ca fait un nombre impair [382 F2] On le démontre comme ça ? [383 G] Oui... Pair, y'a pas de « e » [384 F2] Ah ouais... Des nombres pairs tu mets pas de « e » ? [385 F1] Ben non ! [386 F2] C'est vrai ? *(rires)*... Ah, mince alors j'me suis gourrée, là j'ai mis impair ave un « e » ! *(rires)* J'suis en S, j'suis pas en L [387 F1] Ben justement ! [388 F2] ... J'ai le droit de faire des fautes d'orthographe... Comme dit la prof de français, j'aurai six à l'écrit, mais une bonne note à l'oral ! Ca rattrapera... [389 F1] Moi, ça sera plutôt le contraire... [390 G] On met la démonstration tout de suite ou... [391 F2] Ben on l'a démontré ! Quelle démonstration ? [392 G] Ah oui, si si, on l'a démontré [393 F2] Et après on met... [394 F1] On met la conjecture... [395 F2] Non, on peut mettre ça, et on met la conjecture à la fin. [396 F1] OK... On met ça fait deux plus un tcha tcha, avec des petites flèches [397 F2] Ouais... Voilà... Donc je mets quoi ? [398 F1] Tu marques trois nombres consécutifs [399 F2] Non, là d'abord je mets deux nombres consécutifs... Donc là... Là j'en mets quatre... cinq... [400 F3] Tu vas jusqu'à où, parce qu'on va peut être pas tous les faire ! [401 F1] Tu vas jusqu'à dix

Temps	dialogues
	[402 F2] deux point, deux points, deux points : regarder là, je fais comme ça, tac, tac, tac. [403 F1] six plus quatre$x$... dix plus cinq x... quinze plus... [404 F2] Attensez là, vous allez trop vite... vingt huit plus huit x... plus $9x$... [405 F1] et quarante cinq plus dix x. [406 F2] et là on peut faire les flèche pour montrer que c'est là... Et là maintenant conjecture... tous les nombres... entiers naturels... sauf.. [407 G] sauf les puissances de deux [408 F2] sauf les puissances de deux... supérieures à zéro [409 F1] strictement [410 G] Il faut montrer, justement que deux puissance n est différent de tout ça. [411 F3] Ben tu montres deux trois fonctions... j'sais pas [412 F2] Ah c'est pas bête... deux puissance x est différent à tout ça... Ben on peut aller loin [413 F1] Ils sont tous partis... [Obs] Je vous remercie. [Tous] De rien *(rires)* Fin de la séance.

Groupe G :

> Quelles sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?
>
> * Tous les nombres impairs sont somme de 2 nombres consécutifs
>
> pour tout x de N
>
> $2x + 1 =$ nombre entier naturel qui soit somme de deux entiers naturels consécutifs.
>
> $2 \times x =$ nombre pair
>
> $\hookrightarrow +1$: nombre impair
>
> * $\underline{3}$nb consécutif : $3 + \underline{3}x$
>
> $\underline{4}$ " " : $6 + \underline{4}x$
>
> $\underline{5}$ " " : $10 + \underline{5}x$
>
> $\underline{6}$ " " : $15 + \underline{6}x$
>
> $\underline{7}$ " " : $21 + \underline{7}x$
>
> $\underline{8}$ " " : $28 + \underline{8}x$
>
> $\underline{9}$ " " : $36 + \underline{9}x$
>
> $\underline{10}$ " " : $45 + \underline{10}x$
>
> * Conjecture :
>
> Tous les nombres entiers naturels sauf les puissances de 2 strictement supérieurs à zéro

Eléments à interroger :

Dans la situation de P-constructeur, les éléments de la ressource et le livre de Arsac ont été des éléments importants de mise en place du problème ouvert dans la classe.

Réflexion du professeur : dans la ressource, il manque des éléments qui peuvent vous sembler évident mais par pour moi de la constitution des groupes et c'est des choses qu'on trouve dans le livre.

8.4 Le lycée La Martinière Duchère

Situé au Nord-Ouest de Lyon, le lycée la Martinière Duchère est un ensemble d'une douzaine de bâtiments implantés dans un domaine de 10 hectares.

Sept établissements scolaires, trois à Lyon et quatre en Inde, portent le nom de la Martinière, c'est l'héritage du Major Martin dont il faut retracer en quelques lignes l'exceptionnelle histoire...

Né en 1735, Claude Martin, fils d'un modeste tonnelier lyonnais, s'engage dans la Compagnie Française des Indes, qui en ce milieu du 18e siècle, s'opposait aux Anglais pour la possession d'un pays très riche. A la fin de la guerre, Claude Martin accepte la proposition des Anglais qui lui offrent un brevet d'enseigne dans leur Compagnie, étant entendu qu'il ne serait jamais tenu d'agir contre les Français. Bientôt affecté au corps de l'inspection, il passe 24 ans à Lucknow, le Nabab de la province fait appel à ses services pour diriger son arsenal. Claude Martin Architecte, ingénieur, fabricant de canons, négociant avisé, industriel novateur (il fut le pionnier de la culture et de l'industrie de l'indigo), militaire, diplomate... Claude Martin fait preuve d'une intelligence ouverte et surtout universelle.

A sa mort, survenue le 13 septembre 1800, Claude Martin, lègue la plus grande partie de ses biens à des fondations charitables, et surtout une somme très importante à la ville de Lyon à charge pour elle « d'établir une institution pour le bien public de cette ville » et il suggère la création d'une « école pour instruire un certain nombre d'enfants des 2 sexes ». [1]

Il s'agit d'un lycée d'environ 2400 élèves et 260 enseignants, 500 élèves préparant un baccalauréat technologique (seconde, première et terminale), 800 élèves en baccalauréat général ; sont également présentes dans l'établissement un grand nombre de filière de techniciens supérieurs (treize BTS y sont préparés) et des classes préparatoires (Classe Préparatoire Economique et commerciale option technologique, ENS CACHAN section D1 ou section D2) ;

[1] Site du lycée : http ://www.martiniere-duchere.fr

Chapitre 9

Annexe 3 : entretien

Entretien avec la professeure de la classe de première S. Dans toute la suite, I désignera l'interwiever et P la professeure.

1 I Dans un premier temps je voulais te poser des questions sur ce que je n'ai pas vu, c'est à dire après, comment tu as repris les choses en classe, comment ça s'est passé ?

2 P Après, le soir j'ai repris les affiches qui avaient été produites le matin et j'ai essayé de les classer par ordre, plus ou moins croissant de ce qui avait été écrit sur les affiches et de mettre ensemble les affiches qui pouvaient se ressembler... Voilà... Et qu'est ce que j'ai fait avec ces affiches, j'ai essayé de repérer, éventuellement les erreurs et puis, donc après, au cours de la restitution j'ai décidé d'en présenter certaines moi-même et ensuite de donner aussi la parole aux élèves pour qu'ils puissent venir expliquer certaines qui étaient difficiles... Voilà, donc...

3 I Et celles que tu as présentées c'était lesquelles et sur quels critères...

4 P Voilà, en fait j'en ai présenté une grosse partie moi-même mais à chaque fois j'avais préparé un certain nombre de points, bon j'ai essayé de faire ressortir ce qu'ils avaient fait, ce qu'ils avaient dit etc. mais par exemple, la première affiche que j'ai présentée c'était celle-ci (cf. fig.1) et les élèves n'avaient pas réussi à identifier que les nombres qui n'étaient pas trapézoïdaux étaient les puissances de deux, et donc, ils l'avaient exprimé autrement... zéro, deux, quatre, huit, seize, etc. et donc ils l'avaient écrit sous forme de suite, et puis je leur ai demandé finalement à ce groupe quels étaient les nombres et ils ont réussi à voir que c'étaient des puissances de deux.

5 I Oui, c'est intéressant, parce que dans le groupe que j'ai observé il y a eu une longue discussion pour identifier les nombres deux, quatre, huit, seize, etc. comme les puissances de deux...

6 P Oui, oui et dans plusieurs groupes, enfin il y a plusieurs groupes qui ne les ont pas identifiées, en fait en tant que puissance de deux ; ils ont vu, que de l'une à l'autre on faisait fois deux, voilà.

7 I Oui, oui,...

8 P Et c'est vrai que c'est quand même... oui, ça mérite d'être relevé, parce qu'on s'attendrait pas à ça de la part d'élèves de première S... Après, oui, qu'est ce que je leur ai dit alors... Ah oui, donc ils ont écrits que tous les nombres impairs sont

trapézoïdaux, mais par contre ils ne l'ont pas... Ils ont écrit ça : « Tous les nombres impairs sont trapézoïdaux car la somme de deux entiers naturels consécutifs correspond à la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair », mais je leur ai demandé si ça constitue une démonstration... Voilà, alors, je ne sais plus trop comment ils ont répondu, mais ils ont dit que c'était pas une démonstration... Et donc là, on a écrit que $2n + 1$ comme somme de deux nombres consécutifs, puis ils ne parlaient pas des puissances de deux mais des puissances de nombres pairs, alors, je leur ai demandé si c'était juste et après, ils ont dit « mais non, en fait, on s'est trompé et ce sont les puissances de deux » ; voilà. Après donc, sur celle ci (cf. fig. 2) il y avait aussi le fait que les impairs étaient trapézoïdaux, mais pareil, pas de démonstration non plus, par contre pas de conjecture ici. Après on a regardé celle-ci (cf. fig. 3), où là le travail avait été amorcé... et donc il était poursuivi et là les élèves ont mis en évidence un lien récurrent en expliquant à chaque fois comment on pouvait passer d'une ligne à la suivante... Mais pareil : « il semble qu'il faille multiplier par 2 », ils n'ont pas reconnu les puissances de deux... Après, j'ai montré ça (cf. fig. 4), ici... et qu'est ce qu'il y a eu de spécial ? Oui, donc là quand j'ai vu ça « il semble qu'il faille multiplier par 2 », j'ai fait expliciter pour m'assurer qu'ils avaient bien vu que c'étaient les puissances de deux, et puis, pareil, dans les conjectures, il y a quelque chose... Là il n'y a pas la démonstration pour les nombres impairs... Mais aussi avec la même idée que là (*référence aux deux affiches fig.3 et fig.4*)

9 I Dans le groupe, ils ont vraiment utilisé ces formules pour déterminer si un nombre était trapézoïdal ou non

10 P D'accord... Et je leur ai dit que par cette méthode on pouvait tous les écrires, mais que on avait du mal à voir pourquoi les puissances de deux ne pouvaient pas s'écrire sous cette forme et également que c'était difficile à partir de ça de décomposer un nombre... Voilà, mais quand même ils les avaient tous, mais qu'ils n'étaient pas arrivé à une formule générale, alors qu'ils avaient essayé de le faire, j'ai entendu « est ce qu'on mettrait pas une grosse formule » (rires)... Oui, alors, le C (cf. figure 5) alors, ... Ah ! donc voilà alors la dessus avec des méthodes où on a peut être du mal à décomposer les nombres, on est passé à cette affiche, et la, il y a quelqu'un qui est venu au tableau pour expliquer sa méthode,... une des personnes du groupe...

11 I Le groupe C, c'était dans la première heure...

12 P Voilà, c'était celui qui était au fond, un peu isolé, qui a fait des algorithmes, en fait il y en a un qui a dit « on va faire des algorithmes, comme ça les autres ils vont rien comprendre » (rires), pas de bol, j'ai demandé un rapporteur pour venir expliquer la méthode au tableau ! Et en fait, c'était intéressant parce que pour lui c'était quelque chose d'assez simple, et donc il a expliqué sa méthode et rapidement, donc les autres ont rien compris, parce que lui, il maîtrisait sa méthode et il est arrivé ici (*fin de l'affiche*) et les autres lui ont demandé de reprendre, parce que là, franchement ils étaient un peu scotchés... Donc il a repris, il a fait l'exemple au tableau...

13 I Cet exemple il était sur l'affiche ?

14 P Oui, oui, oui, cet exemple était sur l'affiche

15 I D'accord.

16 P Je crois que, je leur ai mis un exemple au tableau, soixante, avec... avec un nombre un peu plus petit,... en le décomposant sous forme, en produit de nombres premiers, donc je leur ai dit que soixante était divisible par deux au carré, donc on va le diviser par deux au cube selon leur méthode, et donc on a appliqué leur méthode et donc visiblement il y a un certain nombre d'élèves qui ont compris, mais quand même ils ont posé des questions : « pourquoi huit termes ? » etc. il y a eu pas mal de discussions à ce sujet... euh... quoi dire d'autre ?

17 I Et là, les élèves est-ce qu'ils ont compris la méthode, est-ce qu'ils ont été convaincu que là, on avait une réponse au problème ?

18 P En fait, ce groupe là n'a pas vu que... Il y a plusieurs points qu'ils n'avaient pas vu ; déjà ce qui se passait pour les puissances de deux ; ils l'avaient pas regardé de près. Alors je crois qu'on en a pris une, ...

19 I Pour faire fonctionner pour une puissance de deux...

20 P Voilà, oui... alors là on a vu que ça s'annulait pour tous les nombres... Non, ce n'est pas venu comme ça, euh... on a regardé un nombre avec lequel ça pouvait aller sur des négatifs, ils n'avaient pas pensé que ça pouvait aller jusqu'à des négatifs, donc on a regardé avec vingt-quatre et puis voilà, et on a vu qu'en simplifiant tout on y arrivait quand même, et puis on a essayé, voilà, on a essayé ... Il ne faut pas que y soit égal à un, ils le disent à un moment

21 I oui en effet...

22 P ah oui voilà il ne faut pas que y soit 1, en fait c'est zéro cinq, ils l'avaient corrigé, et on a regardé pour une puissance de deux, c'est zéro cinq, donc on a vu que tout se simplifiait, comme pour vingt quatre mais qu'il restait que le nombre lui-même et que ça ne marchait pas...

23 I Ca prouve que leur méthode n'est pas correcte pour déterminer une somme de nombres consécutifs égale à une puissance de deux, mais ça ne prouve pas que les puissances de deux ne pourraient pas être atteintes.

24 P Ah oui, oui, oui, voilà, tout à fait. Par contre pour rédiger quelque chose de général... pour justifier qu'on ne peut pas décomposer une puissance de deux, on ne peut pas à partir de ça...

25 I Oui, en effet, mais ce qu'on peut faire c'est à partir d'un nombre, trouver une décomposition quand elle existe...

26 P oui, oui, trouver la décomposition... Donc, c'était très bien, je trouve... Après ce groupe qui a beaucoup parlé des moyennes (cf.fig. 6), alors je leur ai donné la parole pour voir s'ils avaient eu une idée un peu comme eux, d'algorithme, et en fait non, ils ont dit que non, ils n'étaient pas allé jusqu'à trouver une méthode de décomposition... Donc, c'est pas allé vraiment plus loin avec ce groupe du point de vue de la présentation... Après, on a regardé le A (cf. fig. 7). Donc après on est arrivé aux deux groupes qui avaient finalement presque démontré... et donc on a vu qu'ici,... J'avais repris l'affiche du groupe G (fig. 4) avec toute la série des ... et on a vu qu'ici (fig. 7) ils avaient trouvé une formule

27 I ... la grosse formule !

28 P La grosse formule, et donc ici, ils avaient la forme de tous les entiers trapézoïdaux, mais ils n'avaient pas démontré qu'on n'avaient pas les puissances de deux. On a

regardé celle-ci aussi en parallèle (fig.8) et donc je leur ai dit que ça, là, j'avais repris les deux formules et mis en parallèle de façon à harmoniser les notations et finalement on arrivait à la même formule et du coup dans ce groupe (fig. 7) ce qui les avait géné pour conclure, puisqu'ils avaient écrit « on suppose que ça ne marche pas pour les puissances de deux » c'était le fait d'avoir pris des décimaux alors qu'on travaillait sur des entiers et donc ça ne leur avait pas permis de travailler sur les pairs et les impairs, mais qu'ils étaient quand même près du résultat si on faisait fois deux, à deux doigts de la démonstration du fait que grand N ne pouvait pas être une puissance de deux... Et puis, il y avait encore une chose qui n'avait pas été prouvée mais qui avait été écrite (*La formule de la somme de n nombres consécutifs*) là, comment ils avaient fait pour obtenir ça, et donc on l'a démontré aussi, et donc, euh... j'ai essayé de faire expliciter comment ils étaient arrivés à ça ($x = an + (a-1)(0,5a)$, $x = an + 0,5a^2 - 0,5a$... fig.7) et en fait c'était vraiment... comment ils avaient déduit la formule, et en fait c'est de l'intuition.

29 I C'est par induction...

30 P ... voilà ! on trouve une forme qui a l'air de se répéter, c'est ça...

31 I et dans l'autre affiche, il y avait la formule, c'était un élève qui la connaissait explicitement ?

32 P Je ne sais pas, mais dans le groupe il y avait un redoublant... ou un autre, bien cultivé et bien du genre à connaître ce genre de chose... Alors que dans ce groupe là, je pense qu'il ne la connaissait pas, mais qu'ils l'ont intuité à partir des exemples... Oui, donc, après, je crois qu'on avait fait la démonstration complètement...

33 I en repartant de ce qui avait été fait ?

34 P oui... non pas tout à fait... On a déjà démontré le un plus n, là, et puis après, oui effectivement, on a exprimé de façon générale la façon d'écrire un nombre comme somme d'entiers consécutifs, la démonstration que vous avez faite sur votre, euh, votre CD, et puis on a vu qu'on était arrivé là et qu'après il y avait une discussion sur les nombres pairs et impairs... Ca a été difficile pour eux, il y en a beaucoup qui ont eu du mal à comprendre la démonstration générale... Mais je dirai que, mon but c'était de leur montrer qu'ils étaient à deux doigts de terminer la démonstration.

35 I Par rapport à ces affiches, il y a des groupes qui étaient assez proches et qui n'ont pas du avoir trop de mal à comprendre la démonstration, en revanche, peut être dans d'autres groupes ils étaient plus loin de ces idées là...

36 P Tout à fait, oui, alors, là le travail il n'a pas forcément été utile pour tous, la démonstration complète, d'ailleurs dans les papiers, il y a quelqu'un qui a dit que la démonstration faite par la prof était difficile et que peut être elle aurait mérité qu'on passe plus de temps et en fait on a passé une heure et quart sur tout ça, alors la démonstration on ne s'est pas trop étalé ; c'est vrai qu'il y avait quand même pas mal d'indices, c'était quand même vraiment formel, ... Par contre, tu vois cet élève dans ce groupe (fig. 7), lui, il a écrit « les trois heures sont passées à une vitesse incroyable », il a écrit « on a pu résoudre un problème a priori évident », alors il dit évident, parcequ'ils avaient vu tout de suite, eux, que les puissances de deux n'étaient pas trapézoïdales, donc pour lui on a pu le résoudre avec la démonstration

37 I Oui, donc lui il avait un problème évident mais dont la démonstration lui échap-

pait...

38 P oui, mais lui, il avait l'impression d'être quasiment arrivé, puisque ... qu'est ce qu'il a raconté, lui, alors : « Enfin des vrais Maths ! ! ! De la recherche, des démonstrations, des conjectures, tout ce à quoi se sont intéressés les plus célèbres mathématiciens. Quel intérêt à apprendre par cœur une formule tirée d'on ne sait où ? Mais quel bonheur de la trouver, ou seulement de la chercher ! ! Nous avons finalement pu résoudre un problème à première vue évident, à l'aide des outils mathématiques acquis au cours des années précédentes, réalisant ainsi une véritable démonstration. 3 heures de travail qui sont passées à une vitesse incroyable. A refaire ! ! »

39 I C'est bien ça ! (Rires)

40 P Il y a tout ce qu'on veut ! C'est tout ce qu'on demande... A la fin des une heure et quart, je leur ai demandé d'écrire ce qu'ils en avaient pensé, je leur ai dit aussi que c'était dans le cadre d'une recherche... Voilà, et ils ont écrit ça ! (Rires) Mais, tu vois, « enfin des vrais maths », ça ne m'étonne pas de cet élève, c'est un élève qui s'ennuie en cours quand on fait de la recette de cuisine, et là il s'est éclaté, et il y en a plein, la plupart des élèves se sont éclatés... Donc voilà, donc, on a passé quand même une heure et quart, comme bilan j'ai trouvé ça trop long personnellement...

41 I le bilan ?

42 P oui, si c'était à refaire, je ne sais pas comment on pourrait faire,... la démonstration, et ils ont eu du mal à comprendre déjà les méthodes des autres, alors la démonstration là, je ne sais pas...

43 I Tu vois une autre façon de faire, que tu aurais pu utiliser ? Tu dis c'était trop long...

44 P Visiblement ça n'a pas été trop long pour tout le monde, mais pour certains, j'en ai perdu certains là, non, j'en sais rien, justement, je n'avais déjà jamais fait de problème ouvert et encore moins de bilan de problèmes ouverts, alors là, j'ai un peu géré sur le tas... Au départ, tu sais je t'avais dit, j'avais pensé qu'un élève par groupe irait rapporter, puis, c'était impossible, beaucoup trop long, du coup, on a essayé de faire quelque chose où les élèves participent...

45 I Oui...

46 P Mais moi, j'ai trouvé intéressant le bilan, parce que comment dire, ils se sont beaucoup écoutés, quand même... La partie où l'élève a exposé la méthode algorithmique, c'était intéressant, parce que, moi, à ce moment j'ai été me mettre au fond de la classe, puis, je les ai laissé se débrouiller... Oui, oui, il y a eu pas mal de choses intéressantes, du point de vue du débat,...

47 I Et alors, quand tu dis que c'était trop long, qu'est ce qui te fait dire que c'était trop long ? Est-ce qu'il y a eu des incidents ?

48 P Non, il y a eu... je pense, au bout d'un certain temps, j'ai eu l'impression qu'un certain nombre d'élèves en avait marre d'être sur ce problème, parce qu'en fait, on passe jamais autant de temps, on passe jamais une heure et quart sans qu'ils aient un papier un crayon, des exercices à faire ou un cours à écrire... Une heure et quart sans qu'ils aient quelque chose de concret à faire, pour certain, je pense que ça a été un peu long, je pense qu'il y a eu un peu de bavardage qui s'est installé au fur et à mesure, et que la démonstration était difficile et que certains élèves n'ont pas trop

essayé de comprendre... je pense, qu'ils n'ont pas cherché à comprendre, qu'ils ont vite laché, et ça faisait déjà une heure qu'on faisait le bilan sur les affiches et le quart d'heure de démonstration, faite par la prof en plus (rires)...

49 I Et si au lieu de faire la démonstration tu avais renvoyé les élèves en leur demandant d'écrire cette démonstration, est-ce que ça aurait été jouable ?

50 P ... euh ... démontrer cette formule, je trouve ça quand même difficile... la démontrer euh le raisonnement entre les pairs et les impairs... Peut-être, en devoir maison, en donnant une piste avec les pairs et les impairs, ne serait ce qu'en leur donnant cette écriture et puis, ça, oui à mon avis ils auraient pu le faire, c'était difficile en direct, mais là, oui, j'aurais pu le faire à partir de là, j'aurais pu dire à partir de cette écriture raisonnez avec les pairs et les impairs, et montrer que ça ne peut pas être une puissance de deux... Oui, je referai... Voilà ! Le bilan avec les affiches, je laisserai, plus ou moins comme ça, la démonstration, non, et pourtant quand on en est là, on a besoin de terminer.

51 I Et tu disais, cet élève qui a participé à cette affiche (fig. 7) il avait l'impression d'être arrivé au bout de la démonstration, parce qu'il dit au bout de trois heures de travail, il comptait donc le bilan...

52 P Oui, en effet, mais il avait bien cherché... Pour lui, c'est passé tout seul la démonstration ;

53 I Oui, dans ce groupe, ils avaient déjà formalisé beaucoup de choses, ça devait être surement plus parlant... Et par rapport au groupe qui avait fait, si on a deux nombres la forme sera $2n+1$, si on a trois nombres etc. est-ce que pour eux tu as des souvenirs de comment ils ont vécu la démonstration , comment ils ont raccroché à leur travail ?

54 P Je ne sais pas, on a bien vu qu'on retrouvait des cas particuliers, mais non, je ne sais pas, je ne peux pas répondre... Et... oui, si c'était à refaire je ne referai pas la démonstration, faudrait trouver une autre solution, voilà, parce que c'est trop de formalisme alors qu'ils étaient à deux doigts de la solution... Démontrer proprement comment on arrive là, est-ce qu'il faut demander... Je ne sais pas, vraiment, je ne sais pas... gérer cette partie, c'est pas simple...

55 P Oui, j'ai un peu sous-estimé l'écart entre la démonstration et là où ils en étaient arrivé, parce que je me disais, là il y a juste une petite discussion sur les pairs et les impairs et ça ne vaut pas le coup de relancer la recherche, mais en fait c'est beaucoup plus que ça... tu vois

56 I oui, il y a tout le formalisme, toute l'écriture...

57 P oui, c'est ça, toute l'écriture qui a été un peu pesante, un peu lourde... Donc, oui, là quand on a fait le bilan je me suis dit qu'il n'y avait plus trop de travail, mais c'était une erreur, parce qu'il n'y avait plus trop de travail pour eux (fig. 7, 8), mais pour les autres... Donc on a fait quelque chose de progressif pour arriver au bout, pour la classe, mais... parce que oui, je me suis dit, il n'y a plus assez de matière pour faire un DM, on fait pair impair et puis c'est bon ; moi, c'était ça, et ce n'est pas du tout comme ça que ça s'est passé... C'est vrai que je ne me suis pas mis dans la peau de quelqu'un qui n'avait pas vu que les puissances de deux n'étaient pas trapézoïdales, alors, eux, en une heure et quart ils ont du parcourir un chemin qui était vraiment très long, plus toutes ces notations...

58 I Alors, maintenant, toi, de cette expérience, tu disais tout à l'heure que c'était la première fois que tu mettais en place un problème ouvert dans la classe, comment tu l'as vécu, pas trop stressée, pas trop stressant ?

59 P Ah, non, pas du tout, ni stressée, ni stressant... euh.. très bien, je l'ai vécu très bien, avec beaucoup de plaisir, en fait, je suis en train de découvrir ce que c'est qu'une classe où ce sont les élèves qui font des maths et plus le prof, et je trouve que c'est autre chose, que c'est une autre dimension du cours de maths... Moi, après ça, je me suis dit je vais le refaire, en seconde, en BTS, (rires) maintenant que je l'ai bien travaillé... allons y gaiement ! Mais je ne l'ai pas fait pour des questions de temps... Mais, très positif aussi pour les élèves, ils l'ont écrit, d'ailleurs,...

60 I Oui, mais là on a lu quelque chose de bien particulier...

61 P oui, c'est vrai mais on pourra tous les lire ; après ça fonctionnera pas forcément de la même façon avec toutes les classes, mais eux, ils ont accroché particulièrement... Moi, je pense que je referai plus tôt dans l'année, pour lancer quelque chose dans la classe et créer justement cette dynamique qui fait que les élèves vont s'impliquer, comme là, comme je te disais, il y avait un élève qui était au tableau, moi j'étais au fond, et puis les autres qui lui posaient des questions, donc... il me semble que ça peut être un très bon moyen pour eux de s'impliquer dans le cours de maths, de s'investir, de s'engager aussi... voilà... pour moi extrêmement positif ; visiblement ils ont pris beaucoup de plaisir et moi, c'est quelque chose que je trouve important, réinsérer du plaisir dans les maths, c'est quelque chose qui m'interpelle (rires) parce que je trouve que c'est tellement une matière qui peut être faite sans plaisir... par rapport à je sais pas, un cours d'anglais si tu regardes un film, déjà on va prendre du plaisir à voir le film après on fera de l'anglais, bref... et en maths je trouve que c'est pas forcément immédiat, les supports, les façons de présenter les choses... Après moi, on a eu d'ailleurs cette discussion au stage, et quelqu'un qui enseignait au collège disait qu'il y a beaucoup d'élèves qui prennent du plaisir à rabacher, à faire dix factorisations pareilles à la suite, et alors pourquoi ils aiment bien ça, et bien parce qu'ils y arrivent ! Ils sont mis en situation de réussite... oui, je sais pas. Moi j'ai l'impression que les première S ça ne les satisfait pas. Tu verras ce qu'ils ont écrit, mais si on fait que de la recette de cuisine, ils s'éclatent pas quoi ! (rires) Même si ils y arrivent, ils s'éclatent pas ! Là, moi je trouve que c'est un outil génial pour les amener à faire des maths, et comme tu disais, à faire des vrais maths comme ils peuvent le dire... Ils étaient contents... Ah oui, autre chose sur laquelle je voulais insister, il y a la notion de plaisir, pour eux les élèves et je dirai aussi pour le prof, parce que comme je te le disais, je voudrais en faire plus, un en début d'année, un... voilà, trois par an, ça me semble quelque chose de bien puis dans les autres classes aussi mais également aussi la liberté de faire des maths... Ca ils l'ont écrit plusieurs fois : « être libre de chercher dans tout ce qu'on connait en maths pour résoudre le problème », voilà un petit peu, pour une fois, on débride un petit peu tout ça...

62 I Oui, on n'est pas obligé d'aller là où on veut nous mener...

63 P Voilà, et ça, il y en a un certain nombre qui ont apprécié ça, qui ont été receptifs à ça ; alors qu'apparemment, on en parlait avec des profs de collège, ça peut déstabiliser, enfin, certains élèves étaient déstabilisés si on leur disait pas un peu quel chemin

suivre, que c'était pas rassurant pour eux... voilà...

64 I Oui, alors, par rapport à toi, il y a une difficulté parce que tu ne sais pas où les élèves vont t'emmener ; cette liberté que les élèves apprécient, en tout cas que certains élèves apprécient, pour le prof c'est peut être aussi une difficulté, parce que tu ne sais pas ce qu'ils vont produire, où ils vont être... Alors ça est-ce que tu l'as rencontré ?

65 P Ah oui, oui, oui, déjà le problème, même s'il y avait la ressource pour m'aider, j'ai quand même passé du temps à le décortiquer, à essayer de le fouiller un peu dans tous les sens, pour dire d'être préparée au mieux à ce qu'ils pourraient produire... Donc, il y a eu l'étape, avant, où finalement j'ai passé un certain temps pour me familiariser avec tout ça, pour voir un peu ce qu'ils pourraient faire, et puis il y a eu l'étape qu'on a passé ensemble à décortiquer leurs affiches, et puis il y a eu le soir, où de nouveau je me suis dit bon ben alors voilà (rires)... Donc, effectivement ça demande un travail ! Et un travail qu'il faut prévoir de faire rapidement, parce que au bout d'une semaine, ils oublient, donc ça demande un travail, après, je pense que tout prof de maths à tête reposée, chez lui, est capable de comprendre ce que les élèves ont fait, il me semble donc, non, enfin je crois qu'il faut passer le temps nécessaire pour arriver à organiser la synthèse, et puis après, ça se gère... Moi, je suis arrivée pour la synthèse, j'avais l'impression d'être ... au point, quoi, par rapport à ce qu'ils avaient pu produire... Mais ça n'a pas été en trois minutes, effectivement, la fiche de l'algorithme, on s'est demandé un petit moment si ça marchait, pourquoi, etc. voilà...

66 I Oui, et puis, en plus la trace écrite que donnent les élèves n'est pas le reflet de ce qu'ils ont réfléchi...

67 P oui, oui, mais c'est très satisfaisant aussi pour le prof, très surprenant, moi, je ne m'attendais pas à voir ça, à avoir une telle qualité, que des élèves soient à deux doigts de la démonstration... D'ailleurs au tout début de la séance, quand deux groupes ont dit que les puissances de deux ne fonctionnent pas au bout de cinq minutes, je me suis dit, ouh là là, mais qu'est-ce qu'ils vont faire, là, pendant cinquante minutes, parce que pour moi, c'était impossible qu'ils arrivent à... Pour moi, il n'y avait pas tellement d'alternatives entre la démonstration et la conjecture... Je ne voyais pas trop ce qu'ils allaient pouvoir faire entre les deux... et en fait, ils ont fait des tas de choses, totalement innattendues, enfin, pour moi, je ne m'attendais pas à de telles productions... Donc ça, aussi pour moi, très positif parce que ils ont pu faire des choses excellentes en maths que je ne soupçonnais pas, c'est quand même génial, enfin de se dire..., d'être étonnée, de se dire : et oui, ils sont capables de ça ! Et ça c'est pas tous les jours qu'on s'en rend compte... Alors peut-être, quand tu corriges les olympiades, tu peux te dire ah tiens, mais bon, dans le quotidien de la classe...

68 I Oui, parce que là, tous les groupes ont été capables de produire des choses non négligeables...

69 P Oui, donc ça pousse, ça pousse le prof aussi... Oui, c'est intéressant pour le prof d'un point de vue intellectuel, c'est pas dans un DS... si peut être des fois pour des devoirs à la maison, un exercice de géométrie, où ils auraient pu utiliser une méthode à laquelle on s'attendait pas... si dans un DM quand même, c'est le genre

de chose, dans un problème de recherche un peu plus ouvert, on se décarcasse pour comprendre ce qu'ils ont fait, mais là c'est cinquante minutes quand même, donc ... c'est impressionant...

70 I Et alors, on peut revenir à ce moment quand tu préparais ce problème, tu as utilisé la ressource à ce moment ?

71 P Oui, oui... J'ai utilisé j'ai regardé tout ce que vous aviez proposé autour du problème sur la ressource, ah oui... je pense que sans la ressource je n'aurais pas fait ce problème, parce que ça m'aurait demandé trop de temps pour faire moi-même tout ce que vous avez déjà fait,... je l'aurais pas fait ! Donc, oui, oui...

72 I Dans les différents éléments de la ressource, il y a une analyse, des solutions, il y a les différents scenarios, ce qui a été fait dans la classe,...

73 P Oui, je m'en suis servi de ça, les cinq minutes individuelles, et puis après la recherche collective, les productions d'élèves... J'ai lu, déjà pour imaginer ce qu'ils auraient pu produire, j'ai surtout lu ce que vous aviez mis en ligne, au collège, au lycée, ça aide bien à se préparer... Moi, je ne me suis pas préparée avec autre chose que la ressource ; j'ai passé un petit moment à regarder ce qui avait été fait, parce que c'est quand même riche ; je ne suis pas allé partout, tout ce qui était tableur, par exemple, je n'ai pas trop approfondi ce que vous aviez écrit sur le tableur...

74 I Mais pourtant, tu l'as organisé en salle informatique et tu as dis aux élèves au départ : « vous avez les ordinateurs à disposition et vous pouvez vous en servir ». Le choix de la salle informatique c'était pour ça ?

75 P Je suis allée qu'une seule fois depuis le début de l'année avec le tableur... Donc je savais qu'ils ne seraient pas très à l'aise mais qu'il y en avait qui bricolaient bien excel ; il y en a qui font SI, il y en a qui l'utilisent chez eux etc. donc je me suis dit si un élève savait bien manipuler, autant lui offrir la possibilité de l'utiliser... Et concrètement, dans le deuxième groupe, il y a certains élèves qui sont allés, qui ont essayé d'utiliser le tableur, mais en fait ils s'en sont servi comme d'un papier, c'est à dire qu'ils ne savent pas écrire des formules... = A2 plus trois et tirer vers le bas, ça ils ne maîtrisent pas... Donc, ça n'avait pas d'intérêt... La plupart, je savais qu'il n'avaient pas la maîtrise suffisante, mais certains l'avaient mais ils ne sont pas allés. Et les quelques uns qui y sont allés, ce sont des élèves qui ne maitrisaient pas bien, donc rapidement ils se sont aperçus qu'ils n'en avaient pas besoin... Mais voilà, dans la salle parce que je me suis dit, on sait jamais, si quelqu'un veut s'en servir... Tout en sachant que moi je ne les avais pas formé à ça...

76 I Et, dans la ressource, les exemples des classes précédentes, c'est quelque chose que tu es allée voir ?

77 P Tu veux dire les productions, ce qui s'appelle compte-rendu d'élèves, ça ?

78 I oui

79 P oui, oui, oui, alors, j'ai beaucoup été voir pour me préparer à ce qu'ils allaient faire... J'ai bien regardé aussi ce que vous aviez écrit, ce que ça pouvait apporter pour le cours de maths, le raisonnement les pairs, les impairs,... Au départ, c'est comme ça qu'on a choisi le problème, d'ailleurs, on avait regardé ce que ça faisait travailler et puis on s'est dit ça ça nous intéresse et donc on l'avait choisi avec ces objectifs

80 I Ah oui, d'accord, les objets travaillés ; et ça tu penses que c'est une entrée qui

peut être intéressante pour un prof ?

81 P Oui, un prof il va toujours se demander pourquoi il fait ce problème. Et même si... Ca permet de faire énormément de choses... Moi, pour l'instant, je me dis que l'objectif essentiel c'est de leur faire chercher des maths et de les faire chercher vraiment, même si après, on va pas forcément formaliser tout ce qui est démonstration, je ne sais plus ce qu'il y avait, bon, mais il y avait des tas de choses : de l'absurde, on en a parlé, hein de la démonstration par l'absurde... Pour moi, ce n'est pas ce qui est le plus important, c'est la recherche des élèves...

82 I ce que tu crées dans la classe ?

83 P Oui, voilà, ...

84 I Mais en même temps, pour les élèves qui étaient plus loin, s'apercevoir qu'ils avaient pris conscience que les nombres impairs, ce n'était pas seulement les nombres qui se terminent par un, trois, cinq, sept, neuf, mais avoir une définition opérationnelle, c'est peut-être important, non ?

85 P Ah oui, oui, oui, effectivement !

... *Lecture des commentaires des élèves*

86 I Il me semble que beaucoup d'élèves insistent sur le manque de temps, alors que au contraire, toi tu trouvais tout à l'heure que ça avait été trop long...

87 P Je pense qu'ils parlent plus de la recherche, et moi, je parle plus de la synthèse, je pense... Il me semble que c'est là le décalage... Mais tu vois R. il a bien dit que les trois heures sont passées à une vitesse fulgurante, mais, pas tous...

I Merci

Fin de l'entretien

• Tous les nombres impairs sont trapézoïdaux car la somme de deux entiers naturels consécutifs correspond à la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair.

$$2n + 2n + 1$$

• Nous avons remarqué comme des nombres tels que 0, 2, 4, 8, 16... ne sont pas trapézoïdaux. Or on remarque que ces nombres sont des puissances de nombres pairs.

⇒ Tous les nombres entiers naturels sont trapézoïdaux saufs les puissances des nombres pairs

Figure 1

Soit n un entier naturel : → nombres non trapézoïdaux • nombres impairs :

$$n + (n+1) = \underbrace{2n+1}_{\rightarrow\text{impaires}}$$

• multiple de 3 :

$$n + (n+1) + (n+2) = \underbrace{3n+3}_{\rightarrow\text{multiple de 3}}$$

Figure 2

(Pour tout $n > 0$? ?)

pour 2 nom bres consécutifs : : $u_n = 2n + 1$ (tous les nombres impairs vont)
pour 3 " " : $u_n = 3n + 3$ (multiples de 3)
pour 4 " " : $u_n = 4n + 6$
pour 5 " " : $u_n = 5n + 10$(multiples de 5)

(nombre des entiers consécutifs ajoutés) (premier terme de la suite)

2) $u_n = 2n + 1$
↓ +2
3) $u_n = 3n + 3$
↓ +3
4) $u_n = 4n + 6$
↓ +4
5) $u_n = 5n + 10$

nombres qui ne sont pas trapézoïdaux :(0) 2, 4,
8, 16
Il semble qu'il faille multiplier par 2 ...

Figure 3

Quelles sont les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs ?
* Tous les nombres impairs sont somme de 2 nombres consécutifs
pour tout x de N

$$2x+1 = \text{nombre entier naturel qui soit somme de deux entiers naturels consécutifs.}$$

$2 \times x =$ nombre pair
$\hookrightarrow +1$: nombre impair

* $\underline{3}$nb consécutif : $3 + \underline{3}x$
$\swarrow$
$\underline{4}$ " " : $6 + \underline{4}x$
$\swarrow$
$\underline{5}$ " " : $10 + \underline{5}x$
$\swarrow$
$\underline{6}$ " " : $15 + \underline{6}x$
$\swarrow$
$\underline{7}$ " " : $21 + \underline{7}x$
$\swarrow$
$\underline{8}$ " " : $28 + \underline{8}x$
$\swarrow$
$\underline{9}$ " " : $36 + \underline{9}x$
$\swarrow$
$\underline{10}$ " " : $45 + \underline{10}x$

* <u>Conjecture :</u>
Tous les nombres entiers naturels sauf les puissances de 2 strictement supérieurs à zéro

Figure 4 (groupe observé, voir annexe 3)

On définit ω l'ensemble des nombres naturels qui sont la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.
$x \in \omega$ si : $\frac{x}{2^n} = y$ avec n entier naturel et y le ~~plus grand~~ décimal
Tel que y soit le $\oplus$ gd décimal.
$\hookrightarrow x = 2^n \times y$
On pose $y_1 = y - 0,5$
et $y_2 = y + 0,5$
$x = \underbrace{y_1 - n + \cdots + y_1 + y_2 + \cdots + y2 + n}_{2^n \text{ termes}}$
On constate que si $x = 2^n$ alors $x \notin \omega$ car il ne faut pas que $y = 1$
Exemple : pour 300 : $\frac{300}{2^3} = 37,5$
$300 = 8 \times 37,5$
$y_1 = 37$
$y_2 = 38$
$300 = 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 \hookrightarrow$ les 8 termes

Figure 5

Pour déterminer si un nombre est trapézoïdal :
on divise ce nombre par le nombre de valeurs dont on fera la somme
* si on divise par un nombre pair, il faudra que le résultat soit de valeur $n + \frac{1}{2}$ $(n \in N)$
En effet le nombe obtenu par la division devra être la moyenne des entiers de la somme.
Dans le cas d'un nombre pair de valeurs, la moyenne sera $n + \frac{1}{2}$.
Dans le cas d'un nombre impair de valeurs, la moyenne sera un nombre entier.
* Si on divise par un nombre impair il faudra que le résultat soit un entier naturel.
Il semblerait que les puissances de 2 ne soient pas trapézoïdales.

Figure 6

Si x est impair, il peut s'écrire sous la forme $x = 2n + 1$ donc $x = n + (n+1)$. Ceci marche pour tout n donc tous les impair sont solution, sont des entiers trapézoïdaux.
Conjecture : $S = N/2^b$ avec b un entier naturel.

$$\begin{array}{lll} \text{pour} \quad a=2 & x=2n+1 & \\ \phantom{\text{pour}} \quad a=3 & x=3n+3 & \\ \phantom{\text{pour}} \quad a=3 & x=4n+6 & \rightarrow x = an+b \\ \phantom{\text{pour}} \quad a=3 & x=5n+10 & \\ \phantom{\text{pour}} \quad a=3 & x=6n+15 & \end{array}$$

On démontre en fait que $x = a(0,5a + n - 0,5)$:

$$\begin{array}{lr} \text{En effet} & 1 = (2-1) \times 1 \\ & 3 = (3-1) \times 1,5 \\ & 6 = (4-1) \times 2 \\ & 10 = (5-1) \times 2,5 \end{array}$$

$b = (a-1)(0,5a)$
$x = an + (a-1)(0,5a)$
$x = an + 0,5a^2 - 0,5a$
$x = a(0,5a + n - 0,5)$
On suppose que ceci ne marche pas pour les puissances de 2

Figure 7

Conjecture : Tous les entiers naturels sont définis, exceptées les puissances de 2.
On a déterminé la suite représentant le résultat de la somme de n nombres entiers consécutifs. v est définie sur N à partir de $n = 1$ par
$v_n = (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}$
Ex : si $n = 3$: $v_3 = (3+1)x + \frac{3(3+1)}{2} = 4x + 6$
or $v_n = x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6$

Figure 8