Université Claude Bernard
Lyon 1

MASTER HPDS
Spécialité Recherche
Deuxième année

Histoire, Philosophie et Didactique des Sciences

Pavages semi-réguliers du plan. Élaboration d'une situation favorable à la dialectique théorie-objets

Mathias Front

Sous la direction de
Viviane Durand-Guerrier

21 septembre 2010

Résumé

L'intégration des problèmes de recherche par les enseignants dans les cours de mathématiques bien que longuement étudiée et institutionnellement encouragée n'est encore que faiblement réalisée. Une équipe de recherche à laquelle nous participons a construit une ressource dont l'objectif est d'aider à cette intégration en mettant en évidence les différents apports pour les apprentissages de la mise en oeuvre des situations élaborées. Le propos de ce mémoire est d'étudier pour une situation caractéristique de cette problématique, mais inédite, l'engagement dans un processus de va et vient entre l'exploration du problème, en appui sur les manipulations d'objets, et les élaborations théoriques qui permettent d'en rendre compte. Les analyses sont étayées par une étude croisée des points de vue didactique d'une part et historiques et épistémologiques d'autres parts.

Mots clés

Pavages archimédiens, problème, Kepler, action sur les objets, élaboration théorique, dimension expérimentale.

Citations

L'homme n'est rien d'autre que son projet, il n'existe que dans la mesure où il se réalise, il n'est donc rien d'autre que l'ensemble de ses actes, rien d'autre que sa vie.
Jean Paul Sartre

Toi qui chemines, de tes seules traces
est fait le chemin, et de rien d'autre.
Toi qui chemines, de chemin il n'y a
le chemin se fait en marchant
En marchant se fait le chemin
et en regardant derrière soi
on voit le sentier qui jamais
ne pourra de nouveau se faire.
Antonio Machado

Ce n'est pas la conscience des hommes qui détermine leur existence, c'est au contraire leur existence sociale qui détermine leur conscience.
Karl Marx

Remerciements

Merci, à tous ceux qui par leur action quotidienne participent, à tous niveaux, à l'enrichissement des consciences.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction, problématique et méthodologie

> « Quelles consciences ont ou devraient avoir scientifiques et citoyens, des fondements et des méthodes légitimant les « connaissances valables » que les uns et les autres produisent, interprètent et transforment en permanence ? Peut-on continuer à « faire comme si » existait dans l'empyrée des académies quelque gardien discret qui veille sur la qualité scientifique des connaissances, en se référant à une certaine sagesse que l'on pourrait dès lors ignorer ? »
>
> Jean-Louis Le Moigne

> « Rien n'est donné, tout est construit »
>
> Gaston Bachelard

1.1 Une épistémologie

« Admettons-le, la raison fut inventée, en Grèce, au cinquième siècle avant notre ère », [Châtelet, 1992].

Puis Platon crée les Idées, Aristote définit l'empirisme, Copernic et Galilée bouleversent pour longtemps notre vision du monde. Comte révolutionne les sciences et Kant fonde la pensée expérimentale ...

François Châtelet, dans « Une histoire de la raison » retrace « l'invention de la raison » mais aussi les grandes étapes de la pensée philosophique. Après une passionante remontée aux sources, il revient sur l'idée de progrès : « Le passage d'un outil à un autre plus perfectionné dans un domaine donné est progrès. De la même manière, il est aisé de montrer qu'il y a un progrès dans les sciences physiques, ou chimiques, ou mathématiques. Mais ce qui est à récuser, c'est l'idée qu'un progrès dans un certain domaine serait la garantie d'un progrès global ... Je crois que la réflexion nous invite à refuser purement et simplement l'idée du progrès global. »

Pour autant donc, il est indéniable qu'un certain formalisme a permis à la science d'évoluer de l'empirisme premier à un déterminisme, source de progrés scientifiques indéniables. On peut alors rappeler que ce déterminisme parfois même réductionniste permet à la science « normale » de fonctionner dans 80% de son activité. Un des apports de Khun, après d'autres, a été toutefois de mettre en évidence que en dehors de ce fonctionnement « de base » le déterminisme ne fonctionne plus dans l'élaboration de concepts nouveaux. En particulier les chercheurs inventifs sont ceux qui savent au delà du fonctionnement « conventionnel » s'engager dans des démarches « alternatives », qui savent au delà de la prédiction permise par le déterminisme s'engager dans l'incertain.

C'est sans doute ainsi, que nous nous devons donc d'imaginer qu'il est maintenant nécessaire de franchir les obstacles actuels, ceux qui commencent à transparaitre, révélés par les impasses dans lesquelles semblent s'être engagés certains pans des sciences et des techniques et pour ce qui nous concerne ici, certaines épistémologies.

Jean-Louis Lemoigne,[LeMoigne, 1995], nous engage à penser que l'épistémologie institutionnelle actuelle, positiviste ne répond plus aux nécessités du moment. L'héritage philosophique positiviste, porté par un nombre considérable de grands noms, a créé une épistémologie basée sur des hypothèses (réalité postulée à l'extérieur de l'observateur, tout ce que nous pouvons connaître est connaissable, il existe des formes de détermination propre interne à la réalité connaissable) qui ont atteint leurs limites.

Jean-Louis Lemoigne plaide pour une épistémologie basée sur des hypothèses différentes :

- une hypothèse phénoménologique : Le sujet connaissant est au cœur de la construction de la connaissance, interactionnisme entre le sujet et l'objet (phénomène). « rien n'est donné, tout est construit » [Bachelard, 1938].

- une hypothèse téléologique : Intentionnalités du sujet connaissant, « la méditation de l'objet par le sujet prend toujours la forme du projet » [Bachelard, 1934]

Nous aurions envie comme Jean-Louis Lemoigne d'imaginer une alternative efficace à l'épistémologie institutionnelle positiviste. L'esprit de ce mémoire doit se comprendre dans une telle intention, s'inscrire dans une dimension qui envisage de dépasser certains usages qui aujourd'hui montrent leurs limites.

Il s'agit alors d'imaginer des modèles qui permettent non pas de supplanter l'existant mais de le compléter pour le dépasser, la validité de ces modèles se devant évidemment d'être prouvée.

L'autre objectif complémentaire est sociétal. D'après Le Moigne « le citoyen postule que les chercheurs réfléchissent scrupuleusement à leurs réponses aux trois questions fondatrices de l'épistémologie et du statut de la connaissance : quoi ? comment ? pourquoi ? »

Les temps présents nous montrent que, pour autant que ce postulat ait pu avoir une quelconque pertinence par le passé, il devient encore plus aujourd'hui nécessaire que chacun, à sa place, s'engage dans l'étude du statut, de la méthode et de la valeur de la connaissance. Il faut pour cela que la société en fournisse à chacun les moyens.

1.2 Une instanciation

Dans un texte de mai 2006, « Les savants et l'école », [Lafforgue, 2006], Laurent Lafforgue critique sévèrement les prises de position de l'Académie des Sciences « qui consiste à soutenir en toutes circonstances le programme *La main à la pâte* ». Pour Laurent Lafforgue, promouvoir les dispositifs de ce type, dans les termes où le fait l'Académie des Sciences, revient à prôner un constructivisme radical, contre lequel il s'élève (ce qui pourrait être raisonnable, si ceci était avéré).

Ceci amène à une première constatation : il y a bien, encore actuellement, débat dans le « monde des savants » concernant la mise en œuvre de certaines démarches (ré)novatrices s'appuyant sur la démarche scientifique et une approche constructiviste.

Dans ce même texte Laurent Lafforgue dessine une autre ligne de fracture « marquée par le choix de définir l'enseignement comme une transmission de connaissance ou une acquisition de compétences ». Il voit dans la volonté, qu'il prête à certains savants, de définir l'enseignement comme une acquisition de compétences, la naissance d'un nouveau paradigme et il estime alors que « nombre de savants paraissent las des connaissances ... au point de pas désirer avec force que celles qu'ils ont acquises soient transmises aux jeunes générations ». Il poursuit ainsi : « la meilleure preuve en est le fort engagement d'un bon nombre d'entre eux dans la recherche de nouvelles pratiques pédagogiques, telles que celles préconisées par *La main à la pâte*, en contraste saisissant avec leur manque d'intérêt pour les programmes et les manuels ... ».

Deuxième constat clair : Les réticences concernant les pratiques permettant un travail de savoirs non directement disciplinaires sont fortes et affirmées.

Ces positions de Laurent Lafforgue ne sont pas étayées scientifiquement et ne peuvent donc être considérées comme une ressource pour une réflexion théorique, mais elles montrent malgré tout que
- le débat d'idées qui nous aménera à une évolution épistémologique est indispensable, et se devra d'être argumenté et convaincant.
- la légitimité de tout dispositif à visées éducatives quelqu'il soit ne peut se construire que sur un travail approfondi dans le cadre de recherches en didactique au delà de conceptions non élaborées sur l'apprentissage et sur les objets d'apprentissages.

Dans cette optique, l'équipe de recherche EXPRIME[1] dans laquelle nous sommes engagés, explore plusieurs voies dont celle de l'expérimental en mathématique. Cette simple évocation peut dans certains contextes amener de longs débats, nous y reviendrons plus loin. Nous pensons, nous, que les travaux produits dans le cadre de ce paradigme peuvent enrichir une épistémologie des mathématiques en évolution.

A son niveau, le présent mémoire participe de cette exploration et espère mettre en évidence quelques potentialités pour les apprentissages.

Pour éviter les critiques non fondées, nous allons essayer de le faire, comme nous y invite Laurent Lafforgue avec l'exigence intellectuelle nécessaire. Celle qui « fait naître le désir des vérités particulières, [vérités] qui attendent encore d'être pressenties, nommées et montrées dans la lumière d'une claire évidence. Exigence intellectuelle qui porte le désir vers d'autres vérités, dès que les premières se sont laissées dévoiler ».

1. EXPRIME, EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'Ecole, est une équipe de recherche regroupant des chercheurs de l'Université Lyon 1 (UFR de Mathématiques, IREM, LEPS, IUFM) et de l'INRP.

1.3 Champ de recherche

Nous avons alors élaboré un mémoire qui s'inscrit dans le cadre de la didactique des mathématiques. Il s'intéresse aux situations de recherche pour la classe et plus particulièrement au travail sur les objets mathématiques qui a lieu lors de la mise en œuvre de telles situations. Dans cette étude, nous tenterons de construire une situation efficiente basée sur la recherche des pavages archimédiens du plan. Nous en étudierons les enjeux en nous appuyant sur des travaux récents de recherche dont ceux menès par T. Dias et V. Durand-Guerrier, autour de la dimension expérimentale en mathématique.

1.4 Des éléments du contexte de l'étude

Avant de préciser notre problématique, nous souhaitons ici reprendre brièvement deux éléments de contexte :

1.4.1 Les orientations actuelles de l'institution Éducation Nationale

Le débat, précédemment évoqué, traverse aussi l'institution Education Nationale. Il a par exemple engendré des modifications importantes des programmes de l'école primaire. Il a eu des effets moins brutaux sur les programmes du second degré. Illustrons le ici sur les deux versions successives des programmes de seconde, une première version de consultation qui, amendée, a donné la version actuelle des programmes. Considérons deux extraits équivalents des introductions :

En mars 2009 : « Pour autant, l'objectif de formation pour chaque élève est ambitieux et centré sur la résolution de problèmes. L'acquisition de techniques, certes indispensable, n'est pas un objectif en soi, mais est au service de la pratique du raisonnement qui doit être la base de l'activité mathématique des élèves. En effet, il faut que chaque élève, quels que soient ses projets, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction ».

Programmes de mai 2009 [DGES, 2009] : « Pour chaque partie du programme, les capacités attendues sont clairement identifiées et l'accent est mis systématiquement sur les types de problèmes que les élèves doivent savoir résoudre. L'acquisition de techniques est indispensable, mais doit être au service de la pratique du raisonnement qui est la base de l'activité mathématique des élèves. Il faut, en effet, que chaque élève, quels que soient ses projets, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction ».

Dans la version définitive, l'objectif de formation n'est donc plus centré sur la résolution de problèmes et, par ailleurs, les modifications ultimes qui ont suivi la phase de consultation ont conduit à une réintégration de certaines notions, ce qui a eu raison des espaces qui avaient été créés dans les programmes. Pour autant, l'esprit de cette dernière mouture permet encore de considérer que « l'expérience personnelle » de chaque élève et la pratique du raisonnement restent au coeur des apprentissages.

C'est cet état d'esprit que nous retiendrons pour notre travail qui nous aménera à étudier une situation qui doit pouvoir s'intégrer dans ce curriculum.

1.4.2 Les travaux de l'IREM de Lyon

Depuis plus de vingt ans l'IREM de Lyon produit autour de l'étude et de la diffusion des problèmes ouverts [Arsac *et al.*, 1991] ; [Arsac et Mante, 2007]. Ces travaux et les échos qu'ils ont reçus montrent à la fois l'intérêt des enseignants pour ces pratiques de classe mais aussi la difficulté de mise en œuvre [Peix et Tisseron, 1998]. Une publication récente du groupe EXPRIME [EXPRIME, 2010] poursuit l'étude avec une problématique que nous reprenons ici :

Les expériences accumulées depuis près de vingt ans tant au collège, qu'à l'école élémentaire et au lycée concernant la mise en oeuvre de problème de recherche en mathématiques dans différents contextes montrent d'une part les apports en termes d'apprentissage de la démarche scientifique : développement d'heuristique ; élaboration de conjecture ; mobilisation d'outils de contrôle et de validation etc.., et d'autre part la possibilité d'insérer des situations de ce type en classe [2]. Pour autant, bien que de telles situations de recherche continuent à vivre dans certains contextes scolaires, et malgré un certain nombre de recommandations institutionnelles, elles ne se sont pas généralisées.

Nous faisons l'hypothèse que parmi les freins à ce développement, les points ci-dessous sont déterminants :

1. La part importante de la dimension expérimentale [3] dans le travail de recherche rentre en conflit avec la représentation contemporaine dominante parmi les enseignants, et au delà dans la société, de ce que sont les mathématiques.
2. L'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences transversales liées au raisonnement, en laissant au second plan les apprentissages sur les notions mathématiques en jeu est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs, en particulier en ce qui concerne l'avancement dans le programme.
3. Les difficultés pour le professeur de repérer ce qui relève des mathématiques dans l'activité des élèves, et par suite de choisir ce que l'on peut institutionnaliser à l'issue du travail en lien avec les programmes de la classe.
4. Les difficultés rencontrées par les professeurs pour évaluer ce type de travail, comptetenu de ce que les modes d'évaluation habituels ne sont pas appropriés.

Le groupe EXPRIME développe alors trois axes principaux de recherche et porte une attention particulière :

- Aux notions mathématiques susceptibles d'être mobilisées ou construites au cours de la résolution de problèmes classiques et consistants.

- Aux éléments qui caractérisent une démarche expérimentale lors des phases de résolution.

- A l'activité des élèves dans la perspective de repérer avec précision comment se tisse la toile mathématique autour des objets mathématiques susceptibles d'être mobilisés dans un problème donné, en étudiant particulièrement les objets mathématiques qui sont effectivement travaillés, les modes de raisonnement développés sur ces objets, les

2. Des travaux sur une problématique proche, sont menés dans le cadre de l'ERTé « Maths à Modeler » depuis de nombreuses années. Ils ont abouti à l'élaboration du dispositif SiRC (Situations de Recherche en Classe) qui se révèle fécond, en particulier, pour le travail sur la preuve. On pourra se référer à [Grenier, 2008].

3. En un sens que nous préciserons plus avant.

propriétés et relations travaillées et/ou élaborés au cours du problème, les catégories langagières et logico-mathématiques mobilisées et leur contribution à l'avancement de la recherche.

Nos travaux s'inscrivent directement dans ce cadre, la situation considérée puisant par ailleurs en partie son origine dans des réflexions menées lors de l'élaboration de cette ressource.

1.5 Problématique

La ressource du groupe EXPRIME, prend le parti pris du rôle fondamental de la part expérimentale pour les apprentissages dans le cadre des problèmes de recherche. En ce sens, dans la ressource, sont mis en évidence pour chaque situation proposée des objets mathématiques potentiellement travaillés. Et, s'il est clair que les situations permettent l'intégration dans le milieu objectif des élèves des objets identifiés, le rôle de la dimension expérimentale doit être maintenant mis en évidence de façon plus fine, en particulier en précisant comment le recours à l'expérience contribue à l'avancement de la recherche, à l'élaboration de « connaissances ».

Considérant de plus, avec Viviane Durand-Guerrier(Durand-Guerrier, 2004), qu' « une caractéristique essentielle du travail des didacticiens des mathématiques est une interrogation forte sur la dimension épistémologique des savoirs de l'école. [...] » et que « au coeur de l'enseignement des mathématiques [...] se trouve posée la question de la signification des objets mathématiques, question difficile s'il en est, mais incontournable si l'on veut bien considérer que l'apprentissage des mathématiques ne se résume pas à l'appropriation d'un formalisme opératoire », il se révèle indispensable d'envisager une exploration, au cœur de la complexité mathématique et épistémologique.

Dans ce cadre, des travaux précédents nous ont mis sur la voie d'un candidat-situation, potentiellement favorable. Nous nous posons alors la question de savoir s'il est possible de transformer ce candidat, vierge d'étude didactique, en une situation d'enseignement et d'apprentissage consistante et ambitieuse. C'est ce que nous allons tenter en faisant l'hypothèse qu'une étude croisée historique, épistémologique et didactique approfondie permettra de confirmer les potentialités en tant que problème de recherche répondant à nos attentes en termes d'apprentissages.

1.6 Questions de recherche

En lien avec notre problématique des questions apparaissent alors, qui vont guider nos choix méthodologiques :

- Comment élaborer, pour autant que cela soit possible, autour d'un noyau épistémologique consistant une situation didactique favorable à nos attendus ?

- Quelles sont les voies à explorer pour s'assurer de la consistance épistémologiques d'une situation ?

- Dans la situation envisagée, qui s'appuie sur la recherche des pavages archimédiens, comment apparait puis intervient la dimension expérimentale ?

- A quel moment apparait l'activité mathématique au delà de la manipulation des objets « naturels » ?

- Quels « objets » apparaissent dans la situation proposée ? Quelle théorie mathématique associée ?

1.7 Méthodologie - Première étape

Notre introduction a motivé nos intentions et en particulier la nécessité que nous ressentons d'élaborer une situation de recherche pour la classe. La façon de procéder fait elle partie de nos questionnements initiaux. I. Bloch, [Bloch, 2002], a développé une réflexion que nous interrogerons et qui doit permettre d'apporter des éléments en ce sens. Cette présentation constituera un des éléments de notre section « Quelques éléments théoriques ».

Par ailleurs, le questionnement sur les objets en jeu dans une situaton de recherche, l'organisation des actions sur ces objets, l'élaboration de « théories » en lien, nécessite le recours à un cadre théorique précis. Ce sera l'objet de la deuxième partie de cette même section.

1.8 Quelques éléments théoriques

Nous développons ici deux cadres théoriques principaux indispensables pour notre recherche. Le premier est celui développé par I. Bloch autour des modèles de milieux, en référence à la Théorie des Situations de Guy Brousseau. Le deuxième, autour de la dimension expérimentale, permettra de proposer des pistes d'analyse spécifiques.

1.8.1 De Guy Brousseau

De la théorie des situations didactiques [Brousseau, 1998] nous retiendrons tout, tant notre point de vue lui doit tout. Nous avons choisi de développer ici deux points particuliers :

La notion de situation adidactique

Brousseau définit ainsi la notion de situation didactique [Brousseau, 2003] :

« Une situation est :

D'une part, un jeu hypothétique (qui peut être défini mathématiquement), qui explicite un système minimal de conditions nécessaires dans lesquelles une connaissance (mathématique) déterminée, peut se manifester par les décisions aux effets observables (des actions) d'un actant sur un milieu.

D'autre part, un modèle du type ci-dessus, destiné à interpréter la partie des décisions observables d'un sujet réel qui relèvent de son rapport à une connaissance mathématique déterminée. »

Guy Brousseau classe alors les situations ainsi introduites : « Les situations hypothétiques considérées appartiennent à deux catégories : les situations didactiques où un actant, un professeur, par exemple, organise un dispositif qui manifeste son intention de modifier ou de faire naître les connaissances d'un autre actant, un élève par exemple et lui permet de s'exprimer en actions, et les situations « non didactiques » où l'évolution de l'actant n'est soumise à aucune intervention didactique directe. »

Brousseau est alors amené à préciser cette notion de non didacticité dans les enseignements :

« La modélisation des enseignements effectifs conduit à combiner les deux : certaines situations didactiques ménagent au sujet de l'apprentissage des situations partiellement libérées d'interventions directes : les situations a-didactiques. »

Guy Brousseau définit trois autres types de situations : les situations adidactiques d'action, de formulation et de validation.

« Situation (a-didactique) d'action (relative à une connaissance) : C'est une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire.

Situation (a-didactique) de formulation (d'une connaissance) : C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. ...

Situation (a-didactique) de validation (sociale et culturelle) : Une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. » [4]

Notre propos concernera quasi exclusivement ces situations d'action, de formulation et de validation. Il sera toutefois indispensable de ne pas passer à côté du rôle fondamenal des situations d'institutionnalisation pour les apprentisages dans le cadre de la classe.

La structuration du milieu

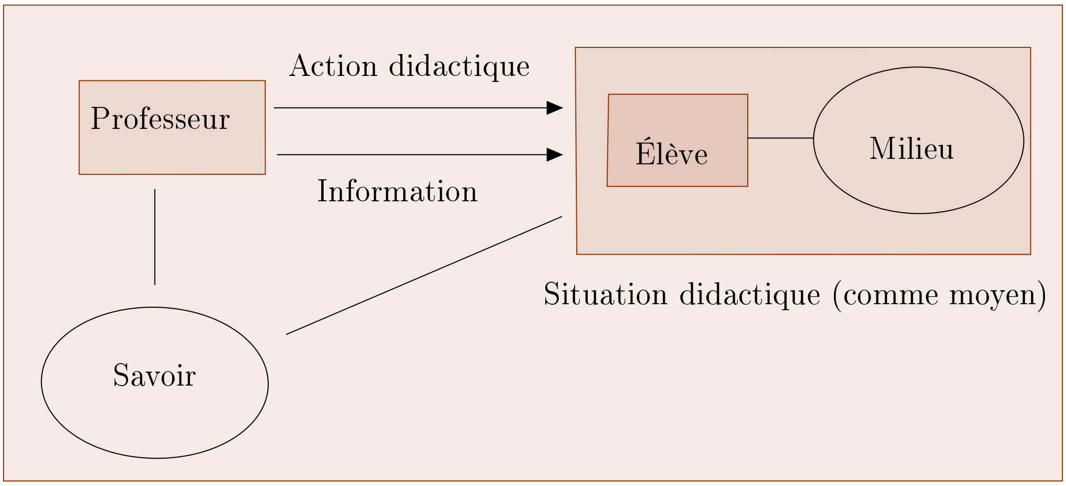
La théorie des situations propose un cadre théorique de l'apprentissage par des processus d'adaptation de l'apprenant à son environnement. Les analyses de situations que mènent Brousseau en terme de jeu rendent nécessaire l'introduction de la notion de milieu.

La définition proposée actuellement par Brousseau dans [Brousseau, 2003] est la suivante : « Le milieu est le système antagoniste de l'actant. » et en particulier « Dans une situation d'action, on appelle « milieu » tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit. [...] La structuration du milieu didactique de l'élève fait apparaître un emboîtement de situations correspondant à des projets distincts et dont chacune sert de milieu à la suivante. »

Nous devons cette structuration actuelle du milieu d'une situation, en un sens généralisé, à Brousseau, bien entendu, et à Margolinas qui dès 1995 [Margolinas, 1995] enrichit les premiers travaux de Brousseau.

Brousseau dans, [Brousseau, 1997], a tout d'abord remplacé le triangle didactique classique « [qui] a l'inconvénient de réduire l'environnement didactique à l'action du professeur et d'occulter complètement les rapports du sujet avec tout milieu a-didactique » par le schéma suivant :

4. Concernant les développements récents de V. Durand Guerrier à propos du schéma de validation explicite, [Durand-Guerrier, 2005b], nous ne reprendrons que quelques éléments que nous présenterons dans la section consacrée à l'approche expérimentale.



Situation didactique (comme environnement)

Cette modélisation permet de traduire le fait que le professeur : « crée donc, effectivement ou fictivement, un autre « milieu » où l'élève agit de façon autonome ».

Il développe ensuite les bases de la structuration du milieu dont on doit une version particulièrement aboutie à C. Margolinas, [Margolinas, 2002].

M3 : Milieu de construction		P3 : P-noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur
M2 : Milieu de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	tique
M0 : Milieu d'apprentissage	**E0 : Élève**	**P0 : Professeur pour l'élève**	**S0 : situation didactique**	
M-1 : Milieu de référence	E-1 : E-apprennant	P-1 : Professeur en action	S-1 : situation d'apprentissage	a
M-2 : Milieu objectif	E-2 : E-agissant	P-2 : P-observateur	S-2 : situation de référence	didac
M-3 : Milieu matériel	E-3 : E-objectif	P-3 : P- organisateur du milieu matériel	S-3 : situation objective	tique

Nous utiliserons cette modélisation, en particulier la structuration évoquant les niveaux « adidactiques » car elle a fait ses preuves pour analyser des situations de mises en œuvre de problèmes de recherche. On pourra par exemple consulter [Houdement, 2004].

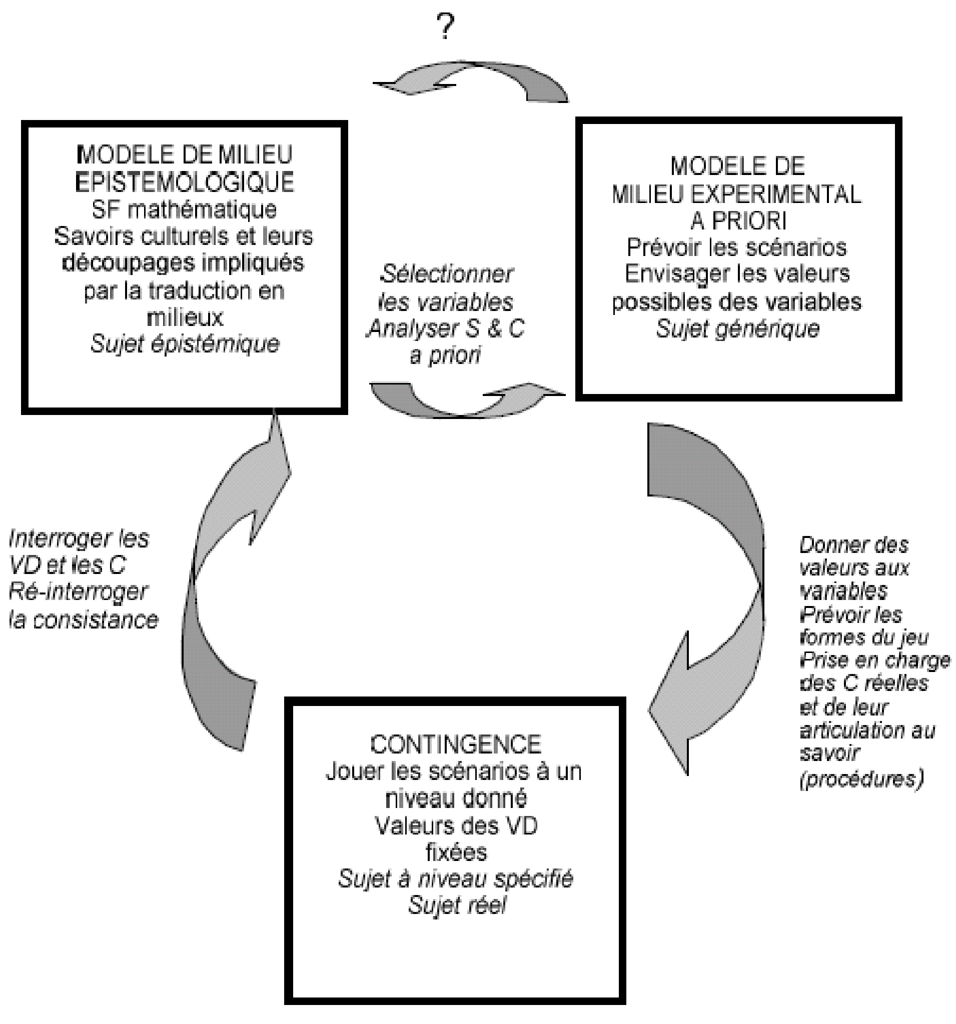
Différents niveaux de modèles de milieu

Parmi les nombreux travaux questionnant cette notion du milieu, nous nous intéresserons aussi à ceux d'I. Bloch et à sa réorganisation des niveaux de modèles de milieu.

Nous lui emprunterons le schéma ci-dessous qui interroge les relations entre différents modèles de milieu et la contingence. Les modèles proposés sont :

- Le modèle de milieu épistémologique dont « le but est, pour un savoir donné, de trouver un jeu qui le fasse fonctionner comme connaissance et qui permette l'institutionnalisation » . Deux directions : celle du savoir mathématique et des connaissances (modalité mathématique, épistémologique et cognitive) et celle des institutions d'enseignement, et les scénarios prévisibles avec les variables correspondantes .

- Le modèle expérimental a priori : C'est un deuxième niveau de modèle, « celui où le jeu est identifié, le milieu antagoniste prévu, les variantes pertinentes définies. Il permet de construire des ingénieries didactiques effectives, relatives à un objet de savoir dans une institution donnée ; d'anticiper, de prévoir des comportements ; de prévoir, de recueillir des observables, de les organiser, de les interpréter ; de fournir une (des) référence(s) pour analyser les situations d'enseignements, qu'elles aient été construites commes des ingénieries ou non ; d'analyser les connaissances mises en jeu, les jeux possibles de l'élève et les jeux du professeur ».



Légende : SF : situation fondamentale, VD : variables didactiques, S & C : savoirs et connaissances

Le schéma de l'articulation milieu théorique/milieu expérimental

Le retour d'expérimentation permet alors de discuter le modèle a priori suivant deux composantes « clinique et théorique » :

Composante « rapport situation réelle / modèle a priori »

(1) tout d'abord une description de la situation jouée experimentalement : qu'a-t-on observé, et a-t-on bien vu ce qui etait attendu, les acteurs ont-ils pu fonctionner comme prévu ;

(2) une interprétation du modèle par rapport à l'expérimentation : de quoi le modèle rend-il compte, et qu'est-ce qui, dans la situation expérimentée, se rapporte aux hypothèses faites dans ce modèle.

Composante « consistance théorique »

(3) Discussion du rapport entre le modèle épistemologique et la contingence : la contingence est-elle une « réalisation » (fortement ou faiblement équivalente) de la situation fondamentale ? Et qu'est-ce qui permet d'en juger ? Quelles composantes du savoir ont été sauvegardées ? Comment s'en assure-t-on ? Que considère-t-on comme des traces probantes ? Lesquelles a-t-on du sacrifier ?

(4) Enfin, reprendre la discussion de la consistance théorique, au vu des résultats de l'expérimentation : l'observation falsifie-t-elle le modèle théorique, en tout ou en partie ? qu'est-ce que serait une mise en cause du modèle de situation fondamentale par la contingence ? qu'est-ce qui, dans la contingence, pourrait invalider la situation fondamentale ? »

Le modèle proposé est mis en place par I. Bloch pour traiter de l'étude de situations fondamentales. Nous essayerons de montrer qu'il est également pertinent pour l'étude que nous avons entreprise. Les allers-retours entre les différents modèles de milieu et la contingence devront nous permettre d'étudier la consistance de la situation du point de vue considéré et d'envisager les évolutions nécessaires.

1.8.2 La dimension expérimentale en mathématiques

En lien avec notre introduction, il s'agit d'ouvrir les approches possibles de l'étude des objets mathématiques, et de se dire que si la démarche déductive reste le fondement de notre discipline, il est indispensable de savoir imaginer des démarches différentes. Un des objectifs du présent mémoire est dès lors de confirmer, que ce regard se doit d'être considéré si on veut mettre en évidence les raisonnements productifs que des étudiants peuvent produire en particulier dans des situations de recherche de problème.

Ces développements donneront également une référence pour les analyses.

Nous pensons que c'est particulièrement dans la thèse de Imre Lakatos, « Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery », [Lakatos, 1974] et [Lakatos, 1984], que nous trouvons les traces des éléments qui se révèlent pertinents pour notre étude. Lakatos élabore non seulement un nouveau paradigme épistémologique mais également explicitement ou en germe les objets nécessaires à son développement ... les erreurs et les réfutations comme sources de découverte, les dialectiques, une remise en cause du rôle de la définition, les notions de domaine de validité, la question de l'objet de connaissance ...

Nicolas Balacheff, [Balacheff, 1988] retient comme modèle épistémologique, pour « l'analyse des processus de preuve chez les élèves et leur évolution dans le cours de la construction de leurs connaissances mathématiques » celui que propose Lakatos. Ce modèle épistémologique, discuté en ce qui concerne la construction des mathématiques elle-même, propose : « les mathématiques non formelles, quasi empiriques, ne se développent pas par un accroissement continu du nombre de théorèmes indubitablement établis, mais dans l'amélioration incessantes des conjectures grâce à la spéculation et à la critique, grâce à la logique des preuves et des réfutations ».

Nombreux sont ceux, Balacheff en premier, qui ont mis en évidence la pertinence de ce modèle pour l'étude de phénomènes didactiques [5] et en particulier pour appréhender les mathématiques en jeu dans les situations de résolution de problèmes. Le rapprochement des travaux de Lakatos et de Piaget permet alors à Balacheff de mettre en évidence que « le processus de validation [...] est fondé sur une analyse du pour et du contre, sur la prise en charge de contradictions potentielles. Par là ce processus est essentiellement dialectique ».

L'accent peut alors être mis sur le rôle des phases de débat dans la mise en œuvre de situations en classe. Il est évident que c'est un élément que nous retenons, mais d'autres travaux ont eux questionné ces processus dialectiques au niveau de la démarche elle-même et ce sont eux que nous souhaitons approfondir.

Avant d'aller plus loin, et pour réduire un peu notre champ d'étude nous continuons à emprunter à Balacheff : rappelons tout d'abord qu'il distingue parmi les preuves pragmatiques et intellectuelles quatre principaux types de preuve : l'empirisme naïf (vérification sur quelques cas), l'expérience cruciale (mise à l'épreuve sur un exemple pour lequel on ne se fait pas de cadeau), l'exemple générique (explicitation des raisons de la validité sur un objet présent non pour lui-même, mais comme représentant d'une classe), l'expérience mentale (invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un cas particulier). Il introduit aussi le calcul sur les énoncés qui désigne des preuves d'élèves qui vont au-delà de l'expérience mentale mais ne peuvent pas être reconnues comme des démonstrations. Balacheff classe les trois premiers types dans les preuves pragmatiques, la quatrième marquant l'entrée dans les preuves intellectuelles, dont la démonstration est en quelque sorte la forme achevée. Ainsi « l'expérience mentale marque véritablement le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles dans la mesure où ce ne sont plus des actions effectives, mais des actions intériorisées qui sont mises en œuvre ». Et dans le contexte qui nous concerne, celui de la géométrie plane, Balacheff exprime le fait que « c'est souvent le lot de la géométrie [de se cantonner] à des opérations « appliquer », « faire coïncider », qu'il s'agit de réaliser par la pensée mais qui n'ont pas de statut mathématique ». Des avancées ont été faites historiquement dans ce domaine permettant aux mathématiciens de s'engager dans des voies différentes mais nous constaterons que les documents analysés relèveront plus de ce statut de la preuve que de la démonstration.

Nous nous interrogeons donc sur les dialectiques permettant la découverte en mathématique dans des situations où vont interagir des preuves pragmatiques et des expériences mentales. La question se pose alors de l'identification des objets de ces « expériences ».

Il est clair, dans la problématique envisagée, que le terme « objet » ne peut être réduit ni à la désignation d'objets matériels, ni à l'évocation d'objets mathématiques, théoriques. A la suite de T. Dias,[Dias, 2008], nous considérerons ainsi « des objets [qui] ne sont rendus visibles et accessibles que par les actes portant sur eux ». [6]

Alors dans le cadre « d'une activité de réflexion consistant à manipuler (concrètement et mentalement) des objets permettant la construction de connaissances ou l'accès aux savoirs mathématiques », ce que nous appellerons expérience c'est « un dialogue du sujet avec les objets ». Plus précisément ce que nous appellerons dimension expérimentale c'est le va et vient entre des objets suffisamment familiers pour le sujet qui servent de domaine d'expérience et l'élaboration de nouvelles connaissances.

La dimension expérimentale, ainsi évoquée, rééquilibre la présentation de la démarche de découverte en mathématiques.

Il doit être clair à ce moment de la présentation, que la dialectique envisagée intégre totalement les phases de preuves. Comme l'évoquait Lakatos, l'avancée dans la détermination des

5. Lakatos lui même visait « à concevoir les conditions d'une véritable épistémologie artificielle, à savoir un rapport épistémologique provoqué et contrôlé par l'enseignant pour l'acquisition d'un savoir mathématique authentifiable ».

6. C'est pourquoi nous serons parfois amenés à évoquer des objets que nous estimerons, par l'observation de l'action des sujets, potentiellement manipulés.

nouveaux objets de connaissances nécessite souvent une imbrication des phases de preuve et des retours aux objets de l'expérimentation [7], c'est à dire aux actions sur les objets.

Alors pour nos analyses et dans le cadre de cette modélisation, il nous faut questionner l'organisation du processus de structuration des connaissances par le sujet dans la dialectique présentée. Nous avons besoin d'un cadre pour l'interprétation des énoncés mathématiques rendant compte des actions du sujet que nous aurons à considérer.

Nous ne pourrons pas pour ce mémoire développer le cadre théorique global nécessaire mais nous emprunterons quelques éléments des travaux de V. Durand-Guerrier autour des théories de Tarski, développés dans [Durand-Guerrier, 2005b] et [Durand-Guerrier, 2005a]. Ils ont mis en évidence « la pertinence de la théorie élémentaire des modèles pour étudier, dans une perspective didactique, l'articulation entre la logique et le raisonnement ». Ceci se fait par l'utilisation « d'un métalangage, ou d'une métathéorie [...]. Cette élaboration d'une théorie sémantique de la vérité [...permet] d'établir un rapport original entre forme et contenu. »

Ainsi « Étant donnée une théorie déductive (termes primitifs et termes définis, axiomes et théorèmes), on lui associe un système axiomatique formel pour lequel on pourra considérer des réalisations ou modèles, c'est-à-dire des domaines d'objets dans lesquels les interprétations des axiomes sont vraies » et « Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système ».

Alors « Dans la théorie élémentaire des modèles de Tarski, [...] c'est l'articulation entre forme (dans les langages formalisés) et contenu (dans les théories mathématiques) qui se trouve au cœur des outils d'étude de la validité » et « la théorie des modèles apparaît ainsi comme une logique d'objet ; la valeur de vérité d'un énoncé logique, ou mathématique, est indépendante de l'activité des sujets [...] »

Ceci autorisera, lors de nos analyses d'expérimentations, l'évocation des dimensions sémantique (ainsi définie) et syntaxique. Toutefois il est nécessaire de compléter par une dimension pragmatique qui peut apparaitre dans des phases d'interactions et pour laquelle nous retiendrons que « le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font ». Cette dimension « ne regarde la rationalité que pour autant que celle-ci dépend du discours du contexte ».

Cet outillage doit nous permettre d'analyser la signification des échanges quand les mots ont du sens parce qu'ils permettent de faire des phrases vraies dans un monde possible.

1.9 Méthodologie - A la lumière des modèles de milieux

A la lumière des apports théoriques nous pouvons désormais préciser la méthodologie envisagée.

Il s'agira dans un premier temps d'étudier les conditions nécessaires à l'élaboration de la situation du point de vue du « théorique ». Nous serons amenés à présenter :

- une analyse de la structure mathématique de « l'objet à savoir » au centre de l'enseignement envisagé

- une analyse de la genèse historique du savoir sur cet objet et ses manifestations anciennes ou contemporaines, sa place dans les mathématiques actuelles, les obstacles épistémologiques relatifs à cet objet ;

7. Dans [Dias, 2008], on trouve une différenciation entre expérience et expérimentation : « l'expérience proposant un jeu sur les objets et l'expérimentation portant un projet de création de nouveaux objets accompagné nécessairement d'un processus de validation. »

- la mise en évidence des savoirs mathématiques et connaissances mathématiques ou culturelles ou personnelles reliés au savoir visé ».

Puis débutera l'élaboration d'un jeu relatif au savoir mettant en présence un acteur et un milieu matériel susceptible de rétroaction, d'une situation adidactique fondamentale du savoir. Nous étudierons aussi des conditions suffisantes pour qu'un jeu existe avec :
- une première analyse de la pertinence de la situation envisagée par rapport au savoir mathématique et au savoir antérieur requis,
- une recherche des variables de commandes de la situation et la déduction si il y a lieu de variables dérivées, c'est à dire de variables nécessaires (celles qui devront figurer dans toutes les réalisations envisageables de la situation),
- une analyse de la consistance de la situation : vérifier que les variables retenues ne sont pas contradictoires c'est à dire ne conduisent pas à des connaissances incompatibles même provisoirement pour l'actant.

Ces points feront l'objet des chapitres 2 et 3.

Le chapitre 4 tentera de mettre en place le modèle a priori qui permet :
- de construire l'ingénierie didactique effective, relative à l'objet à savoir dans une institution donnée ;
- de fixer les variables, de définir le milieu avec exactitude ;
- d'anticiper, de prévoir des comportements, les jeux possibles de l'élève et les jeux du professeur ;
- de prévoir de recueillir des observables, de les organiser, de les interpréter dans le cadre défini.

Les chapitres suivants rendront compte des confrontations à la contingence, et nous permettront d'apporter des éléments sur la mise en œuvre de la situation de recherche en développant le point de vue de l'engagement dans un processus de va et vient entre l'exploration du problème, en appui sur les manipulations d'objets, et les élaborations théoriques.

Chapitre 2

Enquête sur quelques aspects épistémologiques et historiques

2.1 Introduction

C'est le lien établi, il y a déjà quelques années, entre une présentation d'A. Deledicq sur les pavages et la question de la décomposition de 1 en somme de fractions de numérateur 1 qui fonda le questionnement personnel initial : « L'étude des décompositions de l'unité ne permet-elle pas de conclure quant aux assemblages de polygones réguliers dans le plan ? »

Cinq ans plus tard de nombreuses étapes ont été parcourues qui, bien entendu, ont ouvert d'autres portes ... historique, épistémologique et didactique.

La présentation ci-dessous ne reprend pas tout à fait le chemin parcouru, mais essaie d'en rendre compte.

2.2 Paver le plan

L'observation des sols des habitats des populations antiques, qui ont su donner à l'art de la mosaïque une richesse extraordinaire, permet rapidement de se convaincre que l'art du pavage n'est pas un art mineur.

Certaines mosaïques montrent non seulement une virtuosité dans la réalisation technique, mais aussi du point de vue mathématique une connaissance certaine de la possibilité d'assemblage de polygones, et en particulier de polygones réguliers. Ces œuvres d'art auraient ainsi pu être, par elles-même, la source d'inspiration de nos travaux car on s'aperçoit rapidement, que l'organisation de l'espace-plan, au delà des pavages classiques par exemple à base de carrés, réserve quelques défis.

Nous verrons que la plus ancienne étude avérée des pavages du plan utilisant des polygones réguliers semble être celle de Johannes Képler (27 décembre 1571 - 15 novembre 1630). Toutefois les investigations concernant les pavages se sont essentiellement développées à la fin du siècle dernier. Une part importante des apports a été réalisée par les chimistes et les cristallographes. Aujourd'hui les mathématiciens ont retrouvé un intérêt pour cet espace à explorer.

2.3 Formulation mathématique du problème

Nous proposons ici quelques éléments mathématiques :

On considère le plan euclidien, noté E.

▷ Un polygone est une partie compacte connexe du plan, limitée par un nombre fini de segments, et qui est d'intérieur non vide.

▷ Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Soit I une partie de $\mathbb{N}$.

▷ Un pavage du plan E, est un recouvrement $\wp = (P_i)_{i \in I}$ de E par des polygones à intérieurs disjoints :

$$E = \bigcup_{i \in I} P_i \ , \ P_i \cap P_j = \emptyset \text{ pour tous i et j dans I, avec } i \neq j.$$

▷ Les polygones d'un pavage sont aussi appelés pavés, tuiles, ou briques.

▷ Un pavage est dit monoédral s'il a un seul pavé modèle, c'est-à-dire si tous ses polygones sont égaux, diédral [respectivement triédral, ...] s'il a deux [resp. trois, ...] pavés modèles.

▷ Un pavage est côte-à-côte ou strict si l'intersection de deux polygones distincts est :

- ou bien vide,
- ou bien un sommet commun de plusieurs polygones,
- ou bien une arête commune des deux polygones.

▷ Dans ce cas, on définit de manière naturelle ce que sont un sommet, une arête (ou côté) et une face du pavage.

Nous ne considérerons dans cette partie mathématique du texte que des pavages stricts.

▷ Un pavage est archimédien (ou semi-régulier), s'il est strict, si tous les pavés sont des polygones réguliers et si tous les sommets ont des voisinages identiques à une symétrie près (si par exemple, en tournant autour du nœud N dans le sens direct, on trouve successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone, on trouvera aussi successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone en tournant autour de tout autre nœud soit dans le sens direct soit dans le sens rétrograde.)

▷ Un pavage régulier, est un pavage archimédien monoédral.

Les résultats ci-dessous fournissent une partie de la réponse à la question initiale :

▷ **R1 : Il existe 3 et seulement 3 pavages réguliers.**

▷ **R2 : Il existe 11 pavages archimédiens à similitude près (12 à similitude propre près)**.

2.4 Analyse mathématique

La littérature concernant les pavages est considérable. Les principaux ouvrages de référence sont en langue anglaise. Nous citerons pour les ouvrages de synthèse : le traité de Grünbaum et Shephard « Tilings and patterns » [Grünbaum et Shephard, 1987], le livre récent de Conway, Burgiel et Goodman-Strauss « The symmetries of things » [Conway *et al.*, 2008], très abondamment illustré, et l'ouvrage de E. Martin « Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry » [Martin, 1987].

Dans le cadre de ce mémoire et afin de clarifier les propos ultérieurs, nous proposons ici des premiers éléments de preuves élémentaires.

2.4.1 R1 : Il existe 3 et seulement 3 pavages réguliers du plan.

Démonstration : L'angle intérieur d'un polygone régulier à n côtés est $\frac{n-2}{n}\pi$. En effet, la somme de tous les angles intérieurs est égale à n-2 fois la somme analogue pour un triangle, qui est π. Comme les angles d'un n-gone régulier sont tous égaux, le produit par n de cet angle vaut (n-2)π.

S'il existe un pavage régulier, la condition suivante est une condition nécessaire : En un sommet du pavage on doit avoir : $k\frac{n-2}{n}\pi = 2\pi$, où k est un entier, $k \geq 3$. Cette condition s'écrit aussi : $(n-2)(k-2) = 4$.

Les seules solutions entières qui conviennent sont $n = 3$ et $k = 6$, $n = 4$ et $k = 4$, $n = 6$ et $k = 3$. Elles correspondent à des pavages par, respectivement, des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers.

2.4.2 R2 : Il existe 11 pavages archimédiens à similitude près

Le début d'une démonstration : Autour d'un nœud d'un pavage archimédien on a la relation :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$$

où k est le nombre de polygones et donc de secteurs angulaires autour d'un nœud et où a_i est la mesure en radian d'un des k secteurs.

Par ailleurs, si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i , on a : $a_i = \frac{n_i - 2}{n_i}\pi = (1 - \frac{2}{n_i})\pi$, et donc la relation précédente devient (R) :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$$

.

On retrouve une expression équivalente dans l'ouvrage de Grünbaum et Shephard ainsi que dans celui de G.E. Martin [Martin, 1987]. Dans les deux ouvrages la suite est pour le moins elliptique. Par exemple dans Grünbaum et Shephard : « It is easy to check that only 17 choices of the positive integers n_i satisfy this equation and hence only 17 choices of polygons can be fitted round a vertex so as cover a neighborhood of the vertex without gaps ou overlaps ».

La détermination de ces n-uplets d'entiers n'a rien d'immédiat, et reflète une des difficultés du problème qui est l'exhaustivité des n-uplets obtenus. Nous verrons que plusieurs auteurs ont éprouvé des difficultés dans cette étape.

Nous proposons en annexe 1 la preuve complète de R2 que nous avons publiée dans [Front et Legrand, 2010]. Elle comble cette lagune et permet ensuite de déterminer explicitement les 11 pavages semi-réguliers du plan.

2.4.3 Commentaires à propos des démonstrations

La preuve que nous proposons présente un intérêt intrinséque en particulier en ce qui concerne les objets manipulés, les outils et méthodes employés, qui pour certains sont peu usités. Toutefois, cette preuve est comme beaucoup d'autres l'aboutissement d'un parcours beaucoup moins direct qu'il ne le parait a posteriori.

Elle trouve son origine, comme cela a déjà été dit, dans la rencontre avec la question de la décomposition de 1 en somme de fractions de numérateur 1, question que le groupe EXPRIME propose comme situation de recherche.

Les lecteurs intéressés trouveront dans [EXPRIME, 2010] la preuve initiale que nous avions élaborée, quand interpellés par cette question laissée sans réponse lors d'une conférence nous avions utilisé quasiment exclusivement les décompositions de l'unité.

Cette preuve, née dans un contexte particulier, parait aujourd'hui présenter un certain décalage avec le problème et est donc parfois difficile à appréhender [1]. En effet, elle s'écarte du cadre géométrique et investit totalement le cadre numérique dans lequel nous avions des techniques affirmées.

Dès lors, les allers-retours avec les objets initiaux, les pavages, se font plus tardivement et la preuve s'en trouve allongée. Pour autant c'est elle qui a créé la nécessité d'invention de nouvelles techniques qui, en retournant aux objets et à un point de vue plus global, ont permis d'éliminer des candidats pavages que fournit la première condition nécessaire. La preuve publiée dans [Front et Legrand, 2010] doit se lire comme l'aboutissement d'interactions entre l'espace théoriques des décompositions additives de 1 à l'aide de fractions de numérateurs 1 et l'espace sensible des pavages du plan.

2.5 Éléments historiques

Une fois le problème résolu, on ne peut pas ne pas se questionner sur la pertinence de la preuve élaborée. Compte-tenu du problème, un regard épistémologique et historique s'impose.

Un cours en ligne de O. Bachmann de l'École Polytechnique de Lausanne

1. Comme nous l'a fait remarquer un étudiant qui, après une recherche en classe, s'est lancé dans son étude via internet.

(http ://ima.epfl.ch/prst/enseignement/math-geom/) énonce lui le résultat R2 sous l'intitulé « Théorème de Kepler (1619) ». Sans autre indication la piste restait ténue.

Le texte en ligne et en français « Ornements et cristaux, pavages et groupes, I »,de Pierre de la Harpe, [De la Harpe, 2009], nous a donné les premières pistes d'investigation historique. Il nous informe, lui aussi sans plus de précision, que le résultat R1 était connu de Pappus. [2]

2.5.1 Les premières traces

Au delà des mosaïques magnifiques qui nous prouvent que la question est étudiée depuis longtemps, nous nous intéressons ici aux premières traces écrites.

Il est dit que les pythagoriciens savaient déjà que seuls trois polygones réguliers, le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont capables de paver le plan. Nous retrouvons ceci avec Proclus, commentateur d'Euclide [3], qui s'attarde sur le porisme suivant, certainement interpolé, « A partir de ceci [4], il est alors évident que si deux droites se coupent l'une l'autre, elles feront au point de section, des angles égaux à quatre droits ». Il remarque alors, d'après B. Vitrac, [Euclide, 1990], que ce porisme est au point de départ du théorème pythagoricien remarquable selon lequel les seules figures - sous entendues régulières - qui peuvent remplir la région autour d'un même point sont le triangle équilatéral (il en faut 6), le carré (il en faut 4) et l'hexagone équilateral et équiangle (il en faut 3).

Tournons nous alors vers Pappus et sa « La collection mathématique », [Pappus, 1933].

C'est dans le livre V que nous obtenons non seulement une référence aux pavages réguliers, mais également une démonstration de R1. Cet apport est fourni dans le préambule de ce livre que Pappus adresse à Mégéthius, géométre connu seulement par cette mention de son nom. Ce préambule, reproduit en annexe 2, contient : « les comparaisons des figures planes ayant même périmètre entre elles et avec le cercle, et les comparaisons des figures solides ayant même surface entre elles et avec la sphère ». [5]

Dans cette interpellation à Mégethius, Pappus évoque « une certaine intuition géométrique des abeilles ». Ce sont en fait les premières traces écrites du problème mathématique suivant : Pour une quantité de matériau donnée, quelle est la forme plane qui va permettre aux abeilles de construire des alvéoles renfermant le plus de miel. Pappus, qui parait reprendre en partie le traité de Zénodore sur les figures isomorphes (environ 180 avant J.C. ; aujourd'hui perdu) énonce donc et prouve que « ce sont les triangles, les quadrilatères et les hexagones équilatéraux juxtaposés qui peuvent avoir ainsi leurs côtés communs sans qu'il y ait entre eux de compléments dissemblables ». Et Pappus d'étudier l'organisation de « l'espace qui règne autour d'un même point » et ceci de façon exhaustive.

Ce préambule permet à Pappus d'introduire effectivement son étude, toutefois on ne peut que constater qu'il n'a pas tenté de le généraliser aux pavages semi-réguliers alors qu'il semble avoir tous les éléments à portée de main. On peut peut-être rapprocher cette première « déception »

2. Pappus, mathématicien grec vécut entre la fin du III $^{\text{ème}}$ siècle et la première moité du IV$^{\text{ème}}$ siècle après JC.

3. Dates incertaines. Euclide aurait été contemporain d'Archimède (né en -287 et mort en -212), naissance vers -325 et mort vers -265.

4. Proposition 15 du livre I : *si deux droites se coupent l'une l'autre, elles font des angles au sommet égaux entre eux.*

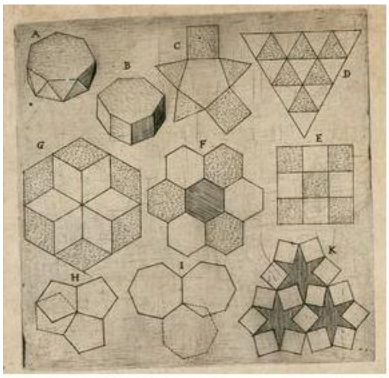
5. Les cinq corps réguliers sont étudiés dans la quatrième partie de livre III. D'après l'introduction de Paul Ver Eecke « Il n'ajoute rien d'essentiel aux propositions du maître de l'école d'Alexandrie mais il les reprend dans une conception absolument différente ... ». Leur étude est donc ensuite reprise dans le cinquième livre et là on peut noter le parallélisme entre l'étude comparative des figures planes isopérimètres et des figures solides de même surface. Mais les liens qui lient le plan et l'espace n'apparaissent pas aussi forts que ceux que l'on pourra observer chez Kepler.

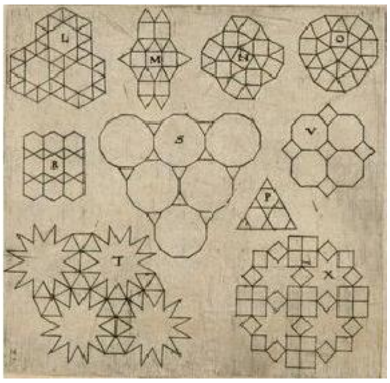
d'une deuxième pointée par Ver Eecke qui parle d'une difficulté de Pappus dans l'étude en toute généralité de la comparaison des polyèdres inscrits dans la sphère (Voir proposition XVIII page 276). Et effectivement alors que Pappus a à sa disposition les 13 polyèdres d'Archimèdes [6] il écrit : « nous négligerons pour le moment ces treize figures comprises sous les polygones inégaux et dissemblables parce qu'elles sont moins régulières ... ».

L'étape suivante, et autrement plus ambitieuse, semble avoir été menée par Kepler.

2.5.2 Kepler et les pavages

Pierre de la Harpe dans le document déjà cité, nous indique que « les trois pavages réguliers sont illustrés dans l'Harmonices Mundi, [Kepler, 1619] par les figures D,E,F de la page 73 » . On pourra consulter en annexe 3 des planches figurant dans cet ouvrage et constater (extraits ci-dessous) que sur ces planches figurent également, mêlés, un certain nombre des autres pavages archimédiens ainsi que d'autres objets mathématiques et vérifier qu'effectivement les trois pavages y sont bien présents.

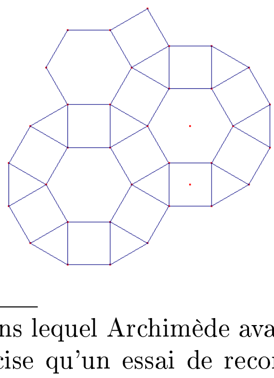




Des planches de l'Harmonices Mundi

Toujours en quête d'éléments épistémologiques, nous nous proposons alors d'étudier dans un premier temps, plus en détail, les planches de la fin du Livre II, plus précisément les dessins figurant sur les pages 59, 60, 61 et 62.

Nous adopterons ici la notation utilisée dans notre démonstration (voir annexe 1) qui code les pavages et plus généralement les assemblages autour d'un nœud par un n-uplet composé par le nombre de côtés, en commençant par un des plus petits, des polygones rencontrés. Par exemple le pavage ci-dessous sera codé (3,4,6,4) :



6. On ne possède plus l'ouvrage dans lequel Archimède avait traité de treize polyèdres semi-réguliers de son invention mais Ver Eecke précise qu'un essai de reconstitution de la manière dont Archimède aurait obtenu la génération de ces polyèdres a été donné par Kepler dans Harmonices Mundi libri V.

Dès lors, en ce qui concerne les planches évoquées ci-dessus nous pouvons observer :

- Figures A et B : deux dessins dont le statut sans référence au texte est ambigu. Sont-ce des représentations planes de solides comme le laisse penser l'ombrage de certaines faces ou des essais de pavage du plan dans une page qui semble les concerner ?
- Figures C : un début de pavage associant pentagone, triangle et carré qui peut éventuellement montrer que le pavage du plan est impossible avec ces 3 polygones réguliers.
- Figures D, E et F : les trois pavages réguliers.
- Figures G : sans doute un pavage avec des losanges non carrés.
- Figure H et I : deux dessins montrant que le pavage avec des pentagones et des heptagones réguliers est impossible.
- Figure K : présentation d'un début de pavage utilisant un polygone régulier étoilé.
- Figure L : un des pavages archimédien non régulier, celui que nous coderons (3,3,3,3,6) où chaque sommet du pavage est entouré de 4 triangles équilatéraux et un hexagone.
- Figure M : le pavage (3,3,3,4,4).
- Figure N et figure O : des représentations différentes du pavage (3,3,4,3,4).
- Figure P et figure R : le pavage (3,6,3,6).
- Figure S : le pavage (3,12,3,12).
- Figure V : le pavage (4,8,8).
- Dans la suite des planches on ne retrouve pas tout de suite les autres pavages archimédiens. Képler dessine certains assemblages utilisant là encore des polygones étoilés. Pour Aa on peut penser que la construction se poursuit longuement pour vérifier l'impossibilté du pavage.
- On retrouve d'ailleurs en Cc, Dd et Ll et certainement Ee entre autres, des constructions qui sont certainement là pour invalider les assemblages (3,4,3,12) , (3,3,4,12) et (4,5,20). Rappelons que ces n-uplets sont des candidats potentiels pour paver le plan. Ceci dit il y en a d'autres possibles et l'analyse des dessins ne suffit pas pour comprendre la démarche de Képler et en particulier comprendre sa recherche d'exhaustivité, si elle existe.
- On reconnait en Kk un essai de pavage non strict.
- Figure Li : le pavage (3,4,6,4).
- Figure Mm : le pavage (4,6,12).
- Ce dessin Mm se trouve sur la dernière planche en compagnie des solides de Platon aisément reconnaissables par leur symbolique classique et d'autres solides réguliers ! Cette question des solides réguliers non platonicien ne sera pas étudiée ici mais cette proximité sur la page correspond, nous le verrons plus loin, à une proximité conceptuelle pour Képler.

Nous constatons donc que Képler a mis en évidence les 11 pavages semi-réguliers qui apparaissent clairement sur ces planches.

On peut alors en s'appuyant sur ces dessins, faire l'hypothèse qu'il avait par ailleurs une démarche lui permettant d'exhiber des candidats potentiels pour le pavage du plan, candidats qu'il testait avant de les retenir ou de les exclure. [7]

B. Grübaum et G.C. Shepard [Grünbaum et Shephard, 1977] nous rejoigne dans cette interprétation : « The drawings reproduced in Figure 1 show that Kepler had a rather pragmatic and experimental approach to tilings. »

Sur la base de cette hypothèse, on peut commencer à requestionner certains « postulats » de l'épistémologie dominante actuellement en mathématiques : Comment se construisent les mathématiques ? Qu'est-ce que faire des mathématiques ? ...

Mais pour aller plus loin, il nous parait nécessaire de progresser dans cette étude de la

7. on peut par ailleurs noter la qualité remarquable des dessins, qualité sans doute indispensable pour mettre en œuvre ces (in)validations.

démarche de Kepler, et il nous faut alors savoir en particulier :

- quels étaient les candidats pavage et comment Képler les obtenait-il ?

- quel est le rôle des polygones étoilés dans ces planches ?

- Képler a-t-il bien formulé le résultat R2 dans sa généralité ?

- Képler en a-t-il fourni une « preuve » complète, avec toutes les précautions concernant la forme de cette preuve.

- ...

Or la source primaire est en latin.

Deux sources secondaires

Dans un premier temps nous nous sommes atelés à l'étude des sources secondaires, pas très nombreuses, concernant cette partie des travaux de Kepler. En voici deux principales :

D'après A. Papadopulos [Papadopoulos, 2007], dans l'Harmonie du Monde, Kepler aborde certaines questions de géométrie, « dont certaines, qui étaient complètement nouvelles et originales à leur époque, gardent aujourd'hui encore toute leur actualité » .

Le Livre I de l'Harmonie du Monde est entièrement consacré à des questions de scibilité, c'est-à-dire (suivant la terminologie de Kepler) de constructions à la règle et au compas, tandis que le Livre II de cet ouvrage est « consacré à des questions de congruence, c'est-à-dire (toujours suivant la terminologie de Kepler) de pavages d'une surface par des polygones réguliers, ou d'un espace tri-dimensionnel par des polyèdres réguliers de dimension trois ». C'est ce livre II qui nous intéresse ici.

A. Papdopoulos évoque « les considérations sur le « degré de congruence » des polygones et des polyèdres, considérations qui conduisent à des questions qui aujourd'hui ne sont pas encore résolues. Certaines idées de Kepler contenues dans l'Harmonie du Monde mènent à des développements de la théorie des pavages qui ont été l'objet de recherches intenses durant les dernières décennies, souvent sans que leurs auteurs se rendent compte que Kepler en était à l'origine ».

L'étude la plus approfondie a été réalisée par H.S.M. Coxeter. Il publie tout d'abord un ouvrage en 1948, [Coxeter, 1948], sur les polytopes réguliers dans lequel figurent des éléments sur les apports de Kepler. Nous nous appuierons ici sur l'article : Kepler and Mathematics, [Coxeter, 1974] qui reprend et complète un certain nombre de points de vue, essentiellement sur les polyèdres.

Concernant les pavages, il affirme, par exemple, que les liens entre pavages et polyèdres sont très forts pour Képler :

« The second way in which Kepler sought to generalise the Platonic solids was by regarding the polyhedra as regular tessellations of the surface of a sphere and then, by analogy, considering the regular tessellations of the Euclidean plane ».

Coxeter insiste de plus sur la performance de Kepler et sur la mise en évidence d'un pavage chiral : « More remarkably, he enumerated the uniform tessellations (analogous to the Archimedean solids). In these the tiles are regular polygons of several kinds, but with the same arrangement at each vertex [ref 3, p. 117, Figs. D, E, F, L, N, S, V, Mm, Li]. One of them (his Fig L, our Fig. 11 .8), is exceptional, because it is chiral like his snub dodecahedron : it cannot be continuously moved into the position of its reflected image.

In 1881 the French geometer A. Badoureau made a fresh attempt to enumerate the uniform tessellations. Although he rediscovered all the rest, he missed the chiral one, Kepler's L, and this mistake was copied by at least two later authors ».

Ces sources secondaires ouvrent quelques pistes mais il est impossible d'en tirer une interprétation claire de la démarche de Kepler en ce qui concerne les pavages du plan. Dès lors, pour pouvoir aller au delà des hypothèses, après l'étude des planches de dessins, et pour pouvoir entrer réellement dans cette démarche, il nous a semblé nécessaire de nous référer au texte.

Etude de la traduction française du livre II

Dans une première approche, dans le cadre de ce mémoire de master, nous nous contenterons de prendre appui sur la seule traduction française de l'Harmonices Mundi, due à Jean Peyroux [Kepler, 1980]. D'après A. Papadopoulos « cette traduction est difficile à lire, parfois même inintelligible, mais elle a au moins le grand mérite d'exister » . Il semblerait par ailleurs que Peyroux n'ait pas eu sous les yeux toutes les planches de dessins puisqu'il précise en note, page 409 : « les figures correspondant aux lettres A,B, ainsi qu'à toutes les lettres simples et à quelques lettres doubles manquent dans l'ouvrage ... ».

Lançons nous alors dans l'étude du livre II : « De congruentia Figurarum Harmonicarum » .

L'essentiel de la suite de ce texte sera orienté sur l'étude des pavages archimédiens mais nous ne pourrons pas ne pas évoquer les problématiques plus complexes dans lesquelles cette recherche est intégrée pour Kepler.

De l'introduction de ce livre II nous citerons le passage suivant :

« En effet, puisque nous avons entrepris d'expliquer l'origine de l'harmonie et les Effets les plus remarquables dans tout le Monde, comment ne ferions nous aucune parole au sujet de la congruence des figures qui sont les sources des proportions harmoniques ? puisque être en harmonie et Congruence signifient par les mots latins la même chose que par les mots grecs « être d'accord », « harmonie » ».

Même si la traduction est peu fidèle, nous pouvons comprendre dès à présent que l'étude des congruences sur laquelle nous allons revenir s'incrit dans une quête d'intelligibilité de « l'harmonie du monde » . Et en effet, si le livre I s'intéresse aux figures constructibles à la règle et au compas, le livre II s'intéresse donc aux « figures régulières » dans le plan et dans l'espace, le livre III aux « origines des proportions harmoniques et de la nature et des différences des choses se rapportant au chant », les livres IV et V aux « configurations harmoniques des rayons des astres ... » et à « l'harmonie très parfaite des rayons célestes » .

Cette vision globale transparait partout et dans cette œuvre les points de vues sont très souvent multiples et les discours sur les différents objets entremêlés.

Après son préambule Kepler nous invite donc à réfléchir à la congruence des figures régulières :

« Définition I : Une congruence est autre dans une surface, autre dans un solide. Il y a congruence dans le Plan, lorsque les angles de plusieurs figures concourent un à un en un point, de sorte qu'aucune ouverture n'est laissée ».

Cette définition montre l'approche commune pour le plan et l'espace et précise une définition de congruence dans le plan. Les definitons II et III précise les notions de congruence parfaite et très parfaite que l'on pourrait associer aux notions de pavage archimédien et de pavage régulier.

La définition V nous parle de la congruence solide. Ceci ne peut faire l'objet d'approfondissement ici mais l'étude de la simultanéité des constructions reste à faire. On la retrouve encore dans les trois premières propositions de ce livre : les propositions XIV, XV et XVI :

- « Pas moins de trois des angles des figures planes congruent dans le plan ».

- « Pas moins de trois angles des figures planes congruent ou se dressent pour former un angle solide ».

- « La somme des angles des congruences dans le plan est toujours de quatre droits ; celle des congruences dans le solide est plus petite que cette somme ».

Dans une des démonstrations Kepler énonce : « Si les angles couvrent le plan, ils ne se lèvent pas vers la solidité » ... On retrouve ici un élément fondamental au coeur par exemple des travaux de [Dias et Durand-Guerrier, 2005] ou [Grenier et Tanguay, 2008] pour d'autres situations de recherche, sur les polyèdres réguliers. Il nous semble important ici de pointer que cette affirmation de Kepler met particulièrement en évidence que ces travaux sur les pavages donnent des pistes pour établir un apprentissage solide sur les relations qu'entretiennent le plan et l'espace.

Passons maintenant à l'étude des pavages archimédiens proprement dite. Nous utiliserons pour cette partie des notations modernes et noterons a_i la mesure en degré de l'angle du polygone régulier à i cotés et utiliserons des mesures en degré plutôt qu'en fraction de l'angle droit ou des ses multiples.

Dans la proposition XVII Kepler énonce une condition nécessaire pour la congruence dans le cas où l'une des figures a un nombre impair de côtés. On trouve ici un lemme qui permettra d'éliminer certains candidats pavages.

La proposition XVIII traite le cas des pavages réguliers. Kepler est exhaustif dans sa démonstration, les dessins D,E,F,H et I de ces planches (voir annexe 1) ne sont là que pour l'illustration. On notera ici que Kepler complète son étude de cas par une étude de congruence avec des Rhombes (figure G) et des polygones étoilés. Ceci se retrouvera dans l'étude des pavages archimédiens. Nous n'approfondirons pas ici ce point. Il faudrait éventuellement le relier, nous semble-t-il, à deux aspects : l'idée de dépasser la restriction aux polytopes convexes (aussi bien dans le plan que dans l'espace) et le développement de la notion de degré de congruence d'un polygone. A. Papadopoulos écrit ceci : « Le degré de congruence d'un polygone est une mesure des différentes possibilités pour ce polygone de s'associer avec d'autres polygones pour former un pavage d'une surface. Cette définition heuristique n'est pas pratique à utiliser telle quelle, mais elle est suffisante pour que Kepler puisse donner un tableau des premiers polygones réguliers en termes de leur degré de congruence : (1) hexagone ; (2) carré ; (3) triangle ; (4) dodécagone ; (5) dodécagone étoilé ; (6) octogone ; (7) octogone étoilé ; (8) pentagone ; (9) pentagone étoilé ; (10) décagone ; (11) décagone étoilé ; (12) icosagone ».

Les propositions XIX, XX et XXI.

Nous présentons ici quasiment l'intégrale de la démarche de Kepler, malgré sa longueur, non pour l'aspect mathématique mais pour les éléments épistémologiques que nous allons mettre en évidence. Voici donc le cœur de la présentation, trois propositions essentielles :

XIX : « Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles ».

XX : « Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces ».

XXI : « les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier ».

Commençons par XXI, la proposition la plus simple :

Les quatre figures considérées étant différentes, la somme des angles est la plus petite possible pour $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 378^\circ$, ce qui ne permet déjà pas un assemblage...

Pour la proposition XIX, il s'agit de comprendre que Kepler traite le cas où l'on ne considère que des figures de deux espèces différentes.

Il énonce tout d'abord qu'on ne peut associer 6 telles figures car si il existe a_i tel que $a_i > 60^\circ$ alors la somme des a_i est supérieure à 360.

Puis il cherche à assembler 5 figures de 2 espèces différentes.

$4 \times 60^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ... on obtient le pavage (3,3,3,3,6) figure L

$3 \times 60^\circ + 2 \times 90^\circ = 360^\circ$ ... (3,3,3,4,4) figure M ou (3,3,4,3,4) figure N

$2 \times 60^\circ + 3 \times 90^\circ > 360^\circ$ et idem si on prend trois autres figures à la place du carré.

Kepler n'en dit pas plus pour 5 figures. On peut supposer qu'il a là été exhaustif, même si ici tout n'est pas écrit.

Il passe à 4 figures de 2 espèces différentes :

$2 \times 60^\circ + 2 \times 120^\circ = 360^\circ$ on obtient les pavages (3,3,6,6) figure R ou (3,6,3,6) figure P, mais la figure R ne représente pas un pavage archimédien.

Puis « toutes les fois que tu associeras autrement quatre angles ensemble tu feras toujours plus ou moins que quatre droits ». On ne peut, là encore, que faire confiance.

Pour trois figures de deux espèces :

$2 \times 60^\circ + 1 \times a_i$ ou $2 \times 90^\circ + 1 \times a_j$ ne conviennent pas, compte-tenu du complément mais

$1 \times 60^\circ + 2 \times a_{12} = 360^\circ$ et on obtient (3,12,12) figure S,

$1 \times 90^\circ + 2 \times a_8 = 360^\circ$ et on obtient (4 8 8) figure V.

Si nous laissons de côté les constructions à base de polygones étoilés, Kepler traite ensuite le cas du pentagone ayant épuisé triangles et carrés.

$2\times 108^\circ + a_{10} = 360^\circ$ donnerait un candidat pavage. La condition n'est pas suffisante d'après la figure Z.

Puis $1 \times 108^\circ + 2 \times a_i = 360^\circ$ n'est pas possible

Puis $2 \times 120^\circ + a_i = 360^\circ$ implique $a_i = 120^\circ$ et $1 \times 120^\circ + 2\ a_i = 360^\circ$ est impossible.

Puis « au sujet de ces figures qui ont des angles en plus petit nombre et plus petits que l'hexagone [...] il est déjà pour nous achevé auparavant ».

Kepler a ainsi étudié exhaustivement tous les assemblages de 2 espèces de figures. Il semble obtenir en plus des 3 pavages réguliers 6 pavages archimédiens. [8] [9]

Une « erreur » de Kepler ?

Terminons avec le proposition XX qui traite les assemblages de 3 espèces : Kepler annonce 4 congruences.

360° - $3 \times 60^\circ = 180^\circ$ qui est plus petit que la somme des angles les plus petits, le droit et l'angle du pentagone. Donc on ne peut utiliser trois ou davantage d'angles du triangle.

$2 \times 60^\circ + 1 \times 90^\circ + a_{12}$ est possible mais n'aboutit pas à un pavage, figures Cc, Dd et Ee.

$2 \times 60^\circ + 1 \times a_5$ ne convient pas.

$2 \times 60^\circ + 2 \times 120^\circ$ convient mais à déjà été obtenu (et ne convient pas ici pour le nombre d'espèces).

Donc ensuite « deux angles à la fois du Triangle ne pourront exister ».

$1 \times 60^\circ + 3 \times 90^\circ$ ne laisse pas assez de place.

$1 \times 60^\circ + 2 \times 90^\circ + 120^\circ$ convient. L'assemblage (3,4,4,6) ne pave pas mais on obtient par contre (3,4,6,4), figure Ii. Kepler indique que c'est le second cas de congruence.

$1 \times 60^\circ + 2 \times a_5$; $1 \times 60^\circ + 1 \times a_5$; $1 \times 60^\circ + 1 \times a_6$ ne conviennent pas.

Et « un angle du triangle n'est pas joint [...] ni avec l'angle de l'Heptagone ou de l'octogone ou du polygone de neuf côtés chacun en particulier en effet il reste pour l'angle des figures de troisième espèce ou 40 vingt-et-unièmes, ou 11 sixièmes, ou 16 neuvièmes [de droit], tels que n'a aucune figure régulière ».

8. Kepler pointe les assemblages, mais le dénombrement des pavages n'est pas réalisé, ce qui laisse un doute par exemple sur la figure R

9. Nous écartons dans notre propos toute l'étude portant sur les polygones non convexes. Pourtant les démonstrations de Kepler intègrent ces polygones. Et on ne peut pas là encore ne pas faire référence aux études suivantes sur les polyèdres qui l'amèneront à enrichir la famille des polyèdres réguliers !

En dehors d'une erreur éventuelle de traduction, ce passage est extrêmement surprenant. Kepler, particulièrement familier avec les polygones réguliers, ne semble pas reconnaitre les angles des polygones réguliers à 42, 24 et 18 côtés. En effet l'angle « 40 vingt-et-unièmes de droit » est l'angle du polygone à 42 côtés, « 11 sixièmes de droit » est celui du polygone à 24 côtés et « 16 neuvièmes de droit » est celui du polygone à 18 côtés. Kepler passe à côté des candidats pavage (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18).

Une rapidité excessive dans la justification peut-elle être susceptible d'expliquer ce manque d'attention ... ?

Nous pourrions attribuer cette erreur de Kepler à sa démarche qui semble s'appuyer sur une nécessaire familiarité avec les polygones réguliers. Une hypothèse qui peut être faite est que la difficulté de construction soignée de tels polygones à plus de 12 côtés a fait de ceux-ci des objets beaucoup moins familiers à Kepler et que le contrôle du raisonnement par le retour aux objets présente ici une difficulté. Ceci semble également prouver que la démarche de Kepler oscille bien entre étude numérique systématique et recours à l'expérience sensible.

Kepler reprend ensuite avec le candidat (3,10,15) qu'il écarte à l'aide de la proposition XVII et par le fait que « certes le Décagone par un nombre pair des côtés pourrait être entouré par un Triangle et un polygone de quinze côtés successifs, mais aussitôt deux tels polygones de quinze côtés se jettent mutuellement sur soi et s'embarassent ».

Plus généralement on retrouve là encore, dans le vocabulaire employé par Kepler une référence constante au monde sensible et à l'expérience concrète.

Ensuite $1 \times 60^{\circ} + 2 \times a_{11}$ ne convient pas, (3,12,12) a déjà été obtenu, et considérer des angles supérieurs à a_{12} nous ramène à des angles plus petits pour la troisième espèce. On a donc fini pour l'introduction du triangle.

On ne peut ensuite ôter plus d'un angle de carré, Kepler teste alors (4,5,20) qui ne convient pas, figure Ll « et ceci est le troisième cas » . Kepler confirme ici que dans cette proposition la congruence considérée est locale et pas globale, pour autant il n'a pas comptabilisé le triplet (3,10,15).

Il obtient ensuite (4,6,12) et le pavage de la figure Mm.

$1 \times 90^{\circ} + 1 \times a_7$ ne convient pas.

$1 \times 90^{\circ} + 1 \times a_8$ redonne (4,8,8) et il acheve avec l'angle du carré.

$a_5 + a_6$, $a_5 + a_7$, $a_5 + a_8$, ne conviennent pas car le complément ne correspond pas à l'angle d'un polygone régulier (ce qui cette fois est vrai) et ensuite on retrouve des compléments inférieurs à a_8. « Il est donc achevé avec le pentagone ».

Kepler termine : « Un angle triple Hexagonal emplit le lieu plan ; et il ne peut donc être mélangé avec deux plus grands que soi. Et ainsi il est achevé avec le mélange de trois figures ».

En synthèse :

La démarche de Kepler apparait finalement clairement. Et ainsi la première étude systématique des pavages semi-réguliers semble donc pouvoir être attribuée à Kepler.

Cette présentation pointe la nécessaire familiarité avec les objets et en particulier les « polygones réguliers » pour espérer l'exhaustivité attendue. Par ailleurs, si nous avions à étendre l'étude du texte de Kepler, nous ne pourrions pas ne pas relever que

- d'une part Kepler inscrit sa recherche dans le plan dans un cadre plus général que celui présenté, et qu'il prend donc en compte les polygones étoilés. Cet aspect et les pistes qu'il a laissées aux chercheurs contemporains abondent également dans le sens d'une approche expérimentale des pavages par Kepler.

- d'autre part cette démarche est en relation forte avec l'étude des polyèdres semi-réguliers et que l'étude dans le plan apparait totalement liée à l'étude des solides. A ce niveau d'étude, il apparait complexe de savoir qui de l'espace ou du plan nourrit l'autre.

Retour sur une erreur

Pour conclure sur les travaux de Kepler, nous revenons sur l'erreur observée.

Une vérification du texte latin semble devoir écarter une erreur du traducteur. Pour mieux comprendre une erreur qui nous apparait alors surprenante, il nous faut faire un effort pour, là encore, questionner le contexte qui a procédé à sa réalisation.

La définition I du livre I, « Est dite figure plane régulière, celle qui a tous les côtés et tous les angles tournés au dehors égaux » nous confirme que Kepler concevait les polygones réguliers de façon générale et que des polygones à quatre-vingt-seize angles (de la classe contenant ceux à 24 et 48 angles) ont leur place dans son « bestiaire ». Ceci montre que ce n'est pas la taille du nombre de côtés qui limite la prise en considération des polygones à 18, 24 et 42 côtés.

Une partie du début du livre I porte sur la création d'une classification des polygones réguliers en termes de « degrés de science » qui permettent de traduire la complexité du lien entre cordes et diamètre, ou carré du diamètre ... Kepler crée ensuite des classes en s'appuyant sur la primalité du nombre des côtés ce qui permet à Belyi, [Belyi, 1974], d'écrire « he [Kepler] further gives a classificationof regular polygons, distinguishing those with a prime number of sides (note de l'auteur : quadrangle are also included here). The other polygons have a number of sides that is a multiple of the number in a fundamental figure ». Ceci confirme la familiarité théorique de Kepler avec les polygones.

Notons que pour Kepler : « Décrire une figure, c'est déterminer par une opération géométrique le rapport des lignes sous-tendues par les angles, aux côtés de l'angle ... » , Définition V du livre I. Ainsi son étude sera plus orientée sur des rapports de longueur que sur des angles.

Toutefois, concernant les angles :

- la proposition XLI du livre I dans lequel il étudie les propriétés du décagone et celle de l'étoile décagonale montre que la détermination de l'angle du décagone n'est pas problématique.

- La proposition XXIII ôte tout doute sur l'éventuelle absence d'une formule générale sur l'angle d'un polygone régulier à n côtés : « Si tu enlèves 4 du double des nombres des angles d'une figure, tu formeras le Numérateur des parties de l'angle droit que vaut l'angle de la figure ; de plus le Dénominateur des parties est le nombre lui-même des Angles » . La démonstration s'appuie sur le découpage du $n-gone$ en $n-2$ triangles.

Si on fait malgré tout l'hypothèse que Kepler ne « reconnait » pas les angles des polygones à 18, 24 et 42 côtés on peut se questionner sur :

- la connaissance que Kepler peut avoir des objets : est-ce une connaissance empirique ou théorique ?

- et donc, comment est constitué le milieu de la situation de recherche pour Kepler : les polygones qui font partis du milieu objectif, sont-ils ceux que l'on est en capacité de construire réellement ou théoriquement ? sont-ils ceux que l'on a déjà manipulé ou tous ceux que nous serions amenés à manipuler ?

Ces questions restent à ce jour sans réponse.

Pour poursuivre l'étude, il serait maintenant nécessaire de questionner au delà de l'Harmonices Mundi, les connaissances et acquis sur lesquels Kepler pouvait s'appuyer en 1619. Cette recherche devrait permettre de mieux appréhender les sciences du début du 17ème siécle, et en particulier les composantes mathématiques, cristallographiques. Aller au fond de la démarche de Kepler nécessite cet effort supplémentaire.

On peut éventuellement terminer ici par une hypothèse, moins coûteuse dans le cadre de ce mémoire, mais pas totalement satisfaisante : On peut imaginer que les calculs de Kepler auraient pu être les suivants en fraction de l'angle droit :

$2/3 + 10/7 = 44/21$ et $4 - 44/21 = 40/21$
$2/3 + 12/8 = 52/24$ et $4 - 52/24 = 44/24$
$2/3 + 14/9 = 60/27$ et $4 - 60/27 = 48/27$

Or si l'on dresse une table des angles des polygones réguliers en fraction de l'angle droit, on obtient dans l'ordre d'apparition des dénominateurs considérés : 38/21, 44/24 et 50/27, ce qui ne correspond pas pour deux des résultats. [10] Et alors pour aller chercher les polygones à 42 et 18 côtés il faudra considérer que $40/21 = 80/42$ et que $48/27 = 32/18$ qui eux figurent bien dans la table.

Cette hypothèse introduirait donc une difficulté arithmétique et organisatrice, mais ne rend pas compte de l'erreur pour 44/24.

2.5.3 Des successeurs

Cette section ne peut être une étude exhaustive des apports des successeurs. Elle ne se veut qu'une trame de l'histoire qui mène de Képler aux auteurs du vingtième siècle. Elle permet surtout d'enrichir notre questionnement épistémologique.

A. Badoureau et son mémoire sur les figures isoscèles

A. Badoureau dans son mémoire paru dans le journal de l'école polytechnique, [Badoureau, 1881], cite ses sources, Lidonne, Gergonne et Catalan dont il poursuit les travaux sur les polyèdres. Il propose ses résultats géométriques, suite à une étude de travaux sur la cristallographie. Dans sa première partie sur les polyèdres on observe une approche nouvelle avec une forme presque contemporaine, par exemple, page 53 : « Pour qu'on puisse former un angle polyèdre convexe

avec deux, trois, quatre ou cinq polygones réguliers, il faut que l'on ait $\sum(2 - \frac{4}{m}) < 4$ ... ».

Et on retrouve page 85, le lien entre pavages du plan et polyèdres réguliers : « Nous allons maintenant poser, pour le plan, un problème analogue à celui que nous venons de résoudre pour la sphère. ». L'approche de Badoureau est ensuite très proche de celle que nous avons utilisée. Il est amené à « considérer des assemblages binaires, ternaires, quaternaires, quinaires et senaires » puis énonce que la somme des angles devant être égale à quatre droits, les valeurs de n, p, q ... doivent satisfaire à l'équation $\sum(2 - \frac{4}{n}) = 4$ ou $\sum \frac{1}{n} = \frac{K}{2} - 1$.

Badoureau donne ensuite sans justification une liste des assemblages possibles (sans en oublier) puis en utilisant un théorème sur la nécessaire parité du nombre de côtés d'un des polygones dans un assemblages ternaire, il exclut un certain nombre de pavages et donne alors une liste de 8 pavages, page 88, dans laquelle il manque les pavages (6,6,6), (3,3,3,3,6) et (3,3,4,3,4). Ce dernier sera réintégré par la suite. La planche finale, page 93, fera dire à Coxeter, à juste titre, que Badoureau a oublié le pavage (3,3,3,3,6) si important à ses yeux.

L. Lévy, un article dans la revue de la société philomathique

Cet article du bulletin de la société philomathique est cité par quelques auteurs contemporains dont A.M. Décaillot, [Décaillot, 2002]. Dix ans après Badoureau, le texte de L. Lévy s'avère être un additif aux travaux de Badoureau que Lévy estime trop peu connus et qu'il reprend sans critique. Le texte permet de préciser des assemblages possibles associant polygones étoilés et polygones convexes de façon très sommaire mais l'apport principal, bien que mineur par rapport aux intuitions de Kepler, offre quelques éléments pour l'étude de ce que l'on pourrait

10. Si on considère les numérateurs on obtient 40/22, 44/24 et 48/26.

aujoud'hui nommer les pavages n-réguliers (Les pavages n-réguliers possèdent des sommets de n types différents).

Des récréations mathématiques ...

Un dernier document dont nous rendrons compte est un extrait de l'ouvrage : Mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes, [Ball, 1908]. Les auteurs justifient l'intérêt du texte par une discussion initiée par Montucla [11] (5 septembre 1725 - 18 décembre 1799), Lucas [12] (4 avril 1842 - 3 octobre 1891) et d'autres auteurs. En 1908, ils tentent alors de faire entrer ce problème des pavages réguliers dans « les classiques ». Les formulations sont celles de A. Badoureau pour la recherche des pavages archimédiens, mais la présentation n'est pas générale (A. Badoureau n'est d'ailleurs pas cité), et le texte de L. Lévy est abondamment utilisé. Cet ouvrage s'apparente en fait à un ouvrage de vulgarisation sous la forme de présentation de « récréations mathématiques ». Et si d'autres résultats de l'ouvrage ont pu connaitre un certain succés, il n'en pas été de même pour ceux concernant les pavages archimédiens.

2.5.4 Conclusion

En réalité le lien avec les travaux de Kepler ne sera réalisé que vers 1905 par Sommerville et leur richesse ne sera intégrée que postérieurement. Il aura donc fallu, de façon surprenante, près de 300 ans pour que ces travaux fondamentaux dans ce domaine voient à nouveau le jour.

L'étude complète réalisée précédemment montre que la synthèse concernant ce problème n'a en fait été réalisée que récemment. Après différents travaux au cours du vingtième siècle, c'est l'article de Grünbaum et Shephard, [Grünbaum et Shephard, 1977] qui reprennant les travaux anciens, présente le problème dans sa globalité et donne les pistes de recherche en cours. Cette synthèse tardive, 1977, pourrait expliquer la quasi-absence des pavages archimédiens dans la culture mathématique de base contemporaine.

On observe donc dans les différentes études passées de ce problème, deux approches essentielles, celle de Kepler et celle de Badoureau. Les époques sont différentes, les formulations sans rapport. [13] Il est aussi remarquable qu'ils ont l'un et l'autre débuté leur étude par des considérations non strictement mathématiques, par des motivations différentes [14]. On peut y voir un exemple du dynamisme des mathématiciens, développant des points de vue personnels, complémentaires qui enrichissent des synthèses que sauront construire les successeurs.

Il apparait que les objets considérés ici, aussi faciles d'accès soient-ils, ont eu et ont encore une vie mathématique mouvementée et que la fiction d'une rigueur parfaite des mathématiques n'a pas lieu d'être. L'étude des démarches historiques qui ont mis à jour les pavages semi-réguliers prouve que si rigueur il y a, elle apparait a posteriori, et bien après l'élaboration des concepts.

La richesse de cette étude historique montre également que, le « débroussaillage » réalisé par les précurseurs, les premières avancées dans la définition des objets, sont autant de pistes à explorer pour progresser dans la connaissance de ces objets et surtout dans la compréhension des élaborations théoriques qui les font naitre.

---

11. Avec un renvoi à Ozanam - édition de 1803, volume 1, p.100.
12. Avec un renvoi aux Récréations mathématiques, volume II, 1882-3.
13. Badoureau dans son mémoire ne fait pas référence à Kepler.
14. B. Morando, [Morando, 1974], parlant de Kepler : « ... he had tried unsuccessfully to inscribe these orbits in regular polygons when he suddenly thought of the regular polyedra » alors que Badoureau annonce que : « le présent mémoire [...] a pour objet de faire connaitre le résultat de recherches géométriques auxquelles j'ai été conduit par l'étude des travaux de Bravais sur la symétrie et la cristallographie ».

Chapitre 3

Analyses préalables complémentaires

Nous poursuivons ici l'étude épistémologique en identifiant les éléments essentiels pour une mise en oeuvre d'une situation à visée didactique.

3.1 Premiers éléments de justification préalable au choix du problème

L'enquête menée dans le chapitre précédent nous apporte clairement plusieurs éléments :

- le problème mathématique est relativement simple à formuler, le résultat obtenu est accessible à tous,

- c'est un problème consistant et résistant,

- il semble montrer des potentialités en termes de démarche expérimentale, comme le prouvent les textes de Kepler, ceci en lien avec des objets mathématiques nombreux et relativement familiers,

- en particulier, de nombreux résultats intermédiaires peuvent être établis en cours de recherche,

- le cadre géométrique premier se lie assez rapidement avec différents cadres, ce qui doit pouvoir engendrer des changements de registres que l'on sait fondamentaux pour les apprentissages (confère [Duval, 1996]).

On retient également qu'une certaine familiarité avec les polygones réguliers semble nécessaire dans l'élaboration d'une démarche proche de celle de Kepler et qu'une certaine expertise se révèle nécessaire pour une approche plus arithmétique, proche de celle de Badoureau.

Ces premiers éléments constitueront la trame qui structurera notre modèle théorique qu'il nous faut maintenant enrichir. Notre hypothèse, à ce moment de l'étude, est donc que ce problème peut être un bon candidat pour un problème de recherche. Il faudra nous assurer qu'il en a bien toutes les caractéristiques. Nous revenons tout d'abord ici sur deux points cruciaux dans la problématique considérée, les objets identifiables et les premières démarches possibles dans l'exploration du problème.

3.2 Objets mathématiques potentiellement en jeu

Nous essayons ici d'identifier les objets susceptibles d'apparaitre dans une recherche, en donnant également quelques éléments relatifs au curriculum.

3.2.1 Les polygones

Ils apparaissent parmi les objets centraux.

Les polygones non réguliers

Ils peuvent apparaitre lors de l'étude des domaines de validité des objets construits.

Les polygones réguliers

De l'acquisition d'une certaine maitrise à leurs sujets, antérieure à l'étude du problème ou pendant l'étude, dépendra l'avancée de la recherche sur les pavages semi-réguliers.

- le triangle équilatéral, le carré : ces deux polygones sont particulièrement classiques et apparaissent très tôt dans le curriculum. On peut s'attendre à une bonne maitrise de ces objets.
- l'hexagone : souvent rencontré dans la scolarité pré-bac on ne peut considérer qu'il y ait été étudié. Aucune connaissance n'est exigible à son propos au lycée. L'approche des nombres complexes dans les programmes de TS peut éventuellement se prêter à un travail sur les racines de l'unité mais là encore, aucune connaissance systématisée n'est exigible. Une certaine familiarité avec l'hexagone est par contre attendue des étudiants préparant le concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE), public avec lequel nous expérimenterons également.
- l'octogone, le pentagone, l'heptagone : ces polygones ne font également l'objet d'aucune étude dans le curriculum. L'octogone peut apparaitre plus familier, les pentagones et hexagones ne sont eux quasiment pas fréquentés.
- les n-gones pour n supérieurs à 9.
- les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. La construction à la règle et au compas d'objets de la géométrie plane étant un exercice incontournable de la préparation au CRPE, on peut s'attendre à ce que les étudiants montrent une certains dextérité en ce domaine. Ce n'est par contre plus un élément du curriculum dans le second degré, sa dernière apparition remontant aux avant-derniers programmes de spécialité mathématiques en première et terminale L qui se sont éteints respectivement en juin 2004 et juin 2005.
- les polygones réguliers dont la mesure de l'angle est entière c'est à dire tels que $\dfrac{360}{n}$ soit entier.

3.2.2 Les angles

Nous nous plaçons ici suffisamment en aval du collège pour pouvoir faire l'hypothèse que les conceptions des élèves-étudiants concernant la notion d'angle assurent aux connaissances un caractère opératoire, [1] qui permet de faire et de réussir. Ceci reste toutefois à confirmer.

Pour des élèves plus jeunes il serait nécessaire de questionner la construction du concept d'angle au collège et de cerner les conceptions des élèves lorsqu'ils abordent ce problème.

Sont à considèrer :

- l'angle plein. Mais est-il bien perçu comme un angle ? A la limite de la perception comme angle déterminé par deux demi-droites nous ne sommes pas certains qu'il puisse réellement être perçu par tous comme un objet à part entière. Il reste à questionner si son utilisation au moins « en actes » peut être effective.

1. Confère [Vergnaud, 2001] et [Vergnaud, 2005]

- l'angle plat. Dans le problème posé l'angle plat peut intervenir par exemple comme angle limite de deux polygones convexes dont l'association autour d'un nœud recouvrirait le plan.
- l'angle droit. Plusieurs conceptions peuvent cohabiter. Celle qui apparait la plus pertinente ici et que nous pourrions retenir comme définition est : l'angle droit est l'angle obtenu quand on cherche à former à partir de l'angle plein quatre angles égaux.
- les angles des polygones. Leur reconnaissance est favorisée après l'observation que dans un pavage archimédien tous les côtés des polygones doivent être de même longueur.
- dans un assemblage les angles peuvent être associés soit à un angle de polygone soit à un « trou ». Dans ce dernier cas la perception peut être plus difficile.
- les mesures de ces angles, avec ou sans unité de mesure, en portion de l'angle plat, de l'angle droit. La familiarité avec ces mesures est un point clé.

3.2.3 Les entiers

- les multiples de 30, 90, 120, des mesures des angles des polygones réguliers ;
- les diviseurs de 360 ... qui permettent d'obtenir des angles polygonaux entiers ;
- les décompositions additives de 360.

3.2.4 Les assemblages autour d'un nœud

Nous revenons sur cet objet « assemblage » dans la section considérant les démarches. Rappelons simplement qu'il n'est pas exclu que des pratiques antérieures de manipulations de pièces diverses (tangram, puzzle) aient déjà engendré une certaine familiarité avec ces objets.

3.2.5 Les fractions et les relations de la forme $\sum 1/n = k/2 - 1$

Pour des détails sur cette partie nous renvoyons à la situation « fractions égyptiennes » du groupe EXPRIME qui étudie particulièrement le travail sur ces objets.

3.2.6 Les pavages

Au delà des assemblages, la pratique des puzzles, initiée précocement à l'école, rend relativement familière la notion de recouvrement d'un domaine plan par des « pièces » identiques ou non [2]. Pour autant dans la situation considérée, il sera nécessaire d'envisager que la réalisation d'un assemblage autour d'un nœud n'est pas suffisante et que la réussite globale ne va pas de soi. Dans ce cadre l'objet « plan » est, lui aussi, à questionner.

Les pavages réguliers

La familiarité culturelle dont ils font l'objet peut laisser envisager que ces objets, non seulement apparaissent, mais qu'ils permettent l'élaboration des premiers éléments de la théorie. Il peut toutefois s'avérer que les pavages réguliers soient perçus dans leur globalité et non comme des assemblages ce qui rend plus difficile le repérage des propriétés.

Les pavages archimédiens

Ils sont l'« objet » de la recherche.

2. On pourra consulter une étude sur une situation de pavage au collège dans [Puig-Renault, 2006]

Les pavages moins réguliers

Il est envisageable non seulement que des pavages avec des tuiles non régulières apparaissent, mais également que des pavages à tuiles polygonales régulières mais non archimédiens soient mis à jour.

Nous nous arrêtons ici à ce niveau d'objets, en faisant l'hypothèse que ce sont les actions sur les objets décrits qui suffiront pour les élaborations théoriques. Nous présentons ensuite des pistes pour l'élaboration de démarches.

3.3 Des démarches envisageables

Les démonstrations que nous avons construites, ainsi que celle de Kepler, laissent peu apparaitre les indispensables essais sous forme de dessins, d'esquisses, de croquis (éventuellement mentaux pour les plus familiers avec les pavages) que ne manquera pas de réaliser pour débuter, tout chercheur confronté au problème.

3.3.1 Les essais initiaux

a. Des essais plus ou moins systématiques sur les pavages monoédraux devraient apparaitre ;

   Ces essais sont faciles à mener pour les pavages avec des triangles, des carrés, des hexagones. Ils peuvent s'appuyer sur des connaissances bien ancrées sur les premiers polygones réguliers, se faire par des tracés à la règle et au compas, ou l'utilisation de papier quadrillé. Ils sont plus difficiles à mettre en œuvre avec des octogones, des pentagones et particulièrement des heptagones ...

   Pour les figures plus longues à construire, on peut envisager l'utilisation de gabarits découpés dans du papier.

   Les premières procédures numériques peuvent apparaitre, avec détermination de l'angle des polygones réguliers, la validation pouvant se faire ensuite pour les pavages par :
   – le tracé de polygones réguliers utilisant le rapporteur,
   – le calcul.

   Il n'est pas exclu que les premiers essais initiaux soient immédiatement numériques pour les chercheurs les plus familiers avec les polygones.

b. Des essais plus ou moins organisés combinant deux types de polygones réguliers différents.

   Ces essais sont là encore relativement simples s'ils utilisent des triangles, des carrés, des hexagones.

c. Des essais plus ou moins organisés combinant plusieurs types de polygones réguliers différents.

   L'utilisation de plus de deux types de polygones différents peut aussi intervenir par l'observation des compléments nécessaires, par exemple après l'utilisation des hexagones et des carrés.

3.3.2 Les premières étapes dans l'élaboration de théories locales au niveau des assemblages

Certaines observations répétées peuvent amener à l'élaboration de premières conjectures, de premiers tests, de certaines preuves ... concernant :

a. L'égalité des longueurs des côtés des polygones réguliers intervenant dans un même pavage.
b. La valeur de la somme des angles des polygones constituant un assemblage autour d'un sommet.
   Le fait que cette somme vaille 360° peut relever pour certains de l'évidence qui n'a pas à être énoncée, pour d'autres du résultat de l'étude d'une condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas de trou. [3]

3.3.3 Étude d'une condition nécessaire à la construction d'un nœud d'un pavage potentiel

Il s'agit d'aller au delà des deux conditions évoquées ci-dessus. Il est à noter que cette étude relève d'une difficulté multiple :
- une centration sur un élément local de l'objet étudié,
- un changement de registre nécessaire, du dessin au numérique, pour les cas non triviaux,
- l'engagement dans une procédure d'analyse par condition nécessaire,
- la projection dans une démarche où des caractéristiques des polygones réguliers vont s'avérer nécessaires alors qu'elles ne sont peut-être pas disponibles.

Elle peut se mettre en place sur les premiers essais, par exemple par l'étude du complément à 360° lorsqu'on assemble deux polygones réguliers de même type.
Une étude formalisée et systématisée peut donner des pistes pour des avancées conséquentes.

3.3.4 Les essais de validation globale des pavages

Engager des validations globales pour les pavages à ce moment là de la recherche n'est sans doute pas le plus simple car les candidats sont encore très nombreux. Pour autant la question se pose pour ceux qui ont obtenu des premiers assemblages. Il s'agit de construire une structure dans les assemblages successifs qui convaincra que le pavage global est possible.
Ces constructions sont quasiment inutiles pour certains candidats, mais peuvent s'avérer laborieuses et fastidieuses sans outils de dessin assisté. Elles peuvent être facilitées par l'utilisation de gabarits.
Elles peuvent aussi amener à la découverte de pavages moins réguliers que les pavages archimédiens.
Et il est clair qu'une étude par analyse-synthèse efficace facilitera cette phase.

Par ailleurs, l'étude conjointe du trajet autour d'un polygone et des nœuds rencontrés, qui doivent tous être semblables, peut permettre de simplifier la démarche, comme nous avons pu le faire dans notre démonstration (annexe 1).

3.3.5 Les procédures engageant dans des études plus systématiques

Les étapes à franchir sont là encore multiples, il s'agit :

3. On peut ici faire référence aux travaux déjà cités, autour de la situation des polyèdres réguliers, qui montrent que la relation $\sum a_i < 360°$, au cœur des élaborations potentielles, n'est en aucune façon d'une disponibilité immédiate.

– d'avoir une familiarité avec les éléments précédemment établis, et en particulier la condition nécessaire portant sur les angles adjacents d'un assemblage et la mesure de l'angle d'un polygone régulier à n cotés, pour n assez grand,
– d'accepter l'utilisation du registre numérique et l'éloignement temporaire du registre graphique,
– de s'engager dans une recherche avec une volonté d'exhaustivité,
– d'élaborer la démarche structurée qui permettra d'avancer.

Lors de l'élaboration de cette démarche, la question importante reste celle de la nécessité du plus ou moins grand recours aux objets « concrets » précédemment côtoyés ... l'abstrait devenu familier.

Les pistes qui peuvent être explorées :

a. Celle utilisée par Kepler : organiser la recherche suivant le nombre de types de polygones réguliers différents, et faire une étude exhaustive à l'intérieur de cette typologie en maximisant le nombre de polygones en commençant par les triangles, puis les carrés ...
b. Celle proche, que nous présentons en annexe 5, mise en œuvre par un enseignant de mathématiques qui a opté pour l'utilisation d'un arbre. La recherche de l'exhaustivité se fait alors par la recherche de tous les cas possibles utilisant :
   - un, puis deux, trois, quatre, cinq et six triangles équilatéraux
   - ensuite aucun triangle, mais un puis deux, trois et quatre carrés
   - ...
   On peut noter que l'utilisation d'un tableur a ici facilité l'organisation des calculs et qu'un logiciel de géométrie dynamique aide à la validation des candidats-pavages.
c. Pour les chercheurs qui aboutiront à des expressions de la forme $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$ par exemple, un engagement supplémentaire sera à réaliser. Cette situation a été particulièrement étudiée par le groupe EXPRIME [EXPRIME, 2010] et a fait l'objet d'un grand nombre d'expérimentations.

Nous avons ici évoqué les grandes pistes pour des démarches possibles. Nous n'avons pas évoqué concernant les objets en particuliers les relations fines qui peuvent s'établir entre eux, les allers-retours possibles entre les objets et les éléments de théories locales en élaboration ...

Nous prolongeons cette analyse préalable par une étude du milieu matériel.

3.4 Le milieu matériel

Cette partie essaie d'analyser les apports au milieu de différents matériels. Toutefois comme le rappelle D. Fregona, [Fregona, 1995],« un milieu efficace pour l'enseignement de la géométrie doit envisager des interactions effectives d'un sujet avec l'espace[4] mais [...] dans une situation donnée, il n'existe pas un seul milieu a-didactique. ». Cette partie se veut donc étude de l'enrichissement du milieu matériel a priori. Des pistes sont ouvertes et certains choix seront à faire. Ces choix seront alors validés ou invalidés comme pertinents pour la réalisation d'un milieu objectif.

Nous rajouterons qu'il est nécessaire que le milieu objectif des élèves soit suffisamment riche pour que les rétroactions produites par les objets « sensibles » au sens large, induisent des possibilités de contrôle sur les théories locales mises en place.

Nous envisageons donc concernant le milieu matériel les possibilités suivantes :

4. Pour ce qui nous concerne, nous envisageons les interactions avec les objets de ces espaces.

a Environnement papier-crayon

Cet environnement de base doit permettre les premiers essais et conjectures. Il reste le support fondamental pour organiser les premiers raisonnements. Doit-il être complété ?

b Quel matériel complémentaire envisagé ?

Le fait de proposer le problème initialement dans un cadre géométrique ? mais aussi la richesse des registres potentiels, semble devoir imposer d'enrichir le milieu matériel avec des éléments courants :

- le matériel de base en géométrie : règle graduée ou non, équerre, compas, rapporteur.

- du papier blanc et coloré, ou des fiches cartonnées, des ciseaux, de la colle, du scotch permettant des manipulations simples dans l'espace sensible.

c Utilisation de matériel de construction ?

Il est tentant d'imaginer d'enrichir le milieu matériel par du matériel type géomag, polygones réguliers rigides ...

Toutefois il est nécessaire de se rappeler qu'il est important de ne pas réduire la situation et en particulier les raisonnements initiaux sur l'égalité des longueurs des côtés, sur les angles des polygones réguliers. Or le matériel existant n'offre pas les degrés de liberté nécessaires.

d Utilisation de la calculatrice

L'anticipation des procédures montre plusieurs niveaux possibles d'utilisation de la calculatrice.

- Pour des procédures utilisant des mesures d'angles en degré la calculatrice peut s'avérer nécessaire pour à la fois la détermination des angles des polygones réguliers et aussi pour des tests sur les assemblages potentiels. Compte-tenu des objectifs l'usage de la calculatrice apparait alors pertinent.

- Pour des procédures qui s'orienteraient sur la recherche d'entiers n_i tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = 1$$

les expérimentations du problème dit des « fractions égyptiennes » par le groupe EXPRIME ont montré que l'utilisation de la calculatrice était particulièrement profitable et évitait les écueils d'un calcul littéral complexe.

e Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique (LGD)

La réalisation de dessins suffisamment soignés permet de visualiser qu'un assemblage va ou non permettre de paver le plan. Et il se trouve que certaines fonctionnalités du logiciel geogebra, par exemple, permettent de construire facilement des assemblages de polygones réguliers. Ainsi la question de l'instrumentation se pose ici de façon non anecdotique. [5]

Les nombreux travaux qui ont établi des résultats sur de telles instrumentations montrent leurs intérêts et leurs inconvénients et en particulier le risque de détournement des démarches mathématiques au profit d'une manipulation non structurée. Ainsi ici, si l'aspect validation des propositions d'assemblages oriente vers l'utilisation d'un LGD, l'aspect élaboration d'axiomatiques locales, d'axiomatiques globales au niveau d'un pavage et de raisonnements structurant la recherche d'exhaustivité nous incite dans un premier temps à la prudence.

Par ailleurs, il est nécessaire de s'assurer que la genèse instrumentale ait été établie.

5. Nous ne pouvons, dans le cadre de ce mémoire de master, approfondir suffisamment le cadre théorique nécessaire, ceci reste à faire.

f Utilisation d'un tableur et/ou d'un logiciel de calcul formel
La question peut là aussi se poser. Un tel outil peut permettre de structurer la démarche, de décharger les étudiants de certaines difficultés techniques en particulier du point de vue organisationnel. Ces deux outils peuvent être utiles pour les deux démarches principales envisagées, ils nécessitent tous les deux une maitrise technique à prendre en considération.

A l'issue de ce premier travail il apparait vraisemblable de mettre en place un jeu effectif d'un actant relativement à la recherche des pavages archimédiens du plan. Nous irons plus loin dans l'élaboration d'une situation adéquate mais nous revenons pour terminer ce chapitre sur une considération écologique :

3.5 Ce problème dans l'institution Éducation Nationale

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la notion de pavage archimédien a mis très longtemps a trouvé sa place dans la communauté mathématique et n'a que très peu diffusé après les premières synthèses du début du vingtième siècle. On ne trouve aujourd'hui que très peu d'ouvrages français l'évoquant. On peut citer le « manuel » de C. Rousseau et Y. Saint-Aubin, Mathématiques et Technologie, [Rousseau et Saint-Aubin, 2009] et un ouvrage de classe préparatoire de Xavier Gourdon.

Il semble donc que, de par ses caractéristiques, ce thème ne puisse trouver sa place dans les manuels du second degré en particulier. Sa « pseudo-complexité » parait effrayer les rédacteurs d'ouvrages, au point donc qu'il n'est proposé que comme activité de recherche à faire hors la classe.

Ce résultat, pourtant élémentaire, n'est donc pas un résultat connu de la communauté des enseignants de l'Education Nationale. Il vit aujourd'hui plutôt comme élément de théories plus générales dans le monde de la recherche mais n'a pas su trouver sa « niche écologique », au sens de Chevallard, dans l'enseignement mathématique secondaire. Pourquoi en est-il ainsi ? Pourquoi le domaine « Travaux géométriques » ne peut-il l'accueillir ? Serait-il possible de l'introduire ? Sous quelles conditions ?

Ce mémoire doit aussi donner des premiers éléments de réponse en cherchant à questionner, au delà de l'intérêt de la présentation de ce résultat, les situations qu'il peut contribuer à nourrir.

Chapitre 4

Élaboration d'une ingénierie - Analyses a priori

4.1 Élaboration d'une ingénierie

4.1.1 Lignes directrices

Pour reprendre les objectifs envisagés par I. Bloch, il s'agit ici :

« - de construire l'ingénierie didactique effective, relative à l'objet de savoir dans une institution donnée ;

- d'anticiper, de prévoir des comportements ;

- de prévoir de recueillir des observables de les organiser de les interpréter ;

- de fournir une (des) référence(s) pour analyser les situations d'enseignement qu'elles aient été construites comme des ingénieries ou non.

- d'analyser les connaissances mises en jeu dans la situation, les jeux possibles de l'élève et les jeux du professeur. »

4.1.2 Modalités

Le problème considéré n'avait pas à notre connaissance fait l'objet d'expérimentation. C'est pourquoi l'étude approfondie du milieu expérimental a priori se révèle à la fois indispensable et délicate. Pour la mener à bien nous avons considéré nécessaire de réaliser une primo-expérimentation. Nous présentons ici l'ingénierie élaborée qui doit permettre tout d'abord de se donner les moyens d'élaborer un milieu expérimental fiable puis de réaliser des confrontations à la contingence pertinentes. [1]

Primo-expérimentation

Le statut de cette primo-expérimentation est bien celui d'une source permettant d'alimenter les modèles de milieux épistémologique et expérimental et non comme une confrontation de notre situation à la contingence. Cette primo-expérimentation, qui se déroula en septembre 2009 à mi-parcours de nos travaux, devait donc permettre :

– d'obtenir un premier aperçu de la pertinence de la situation envisagée par rapport aux objectifs visés,

1. Ce qui est rédigé dans cette partie est un instantané sur une ingénierie qui évoluera pour produire à l'avenir d'avantage.

- un premier regard sur la consistance de la situation didactique,
- d'observer des jeux possibles de l'élève dans un milieu donné,
- la mise au jour de variable de commandes de la situation,
- de recueillir des observables de les organiser de les interpréter,
- de confirmer la pertinence de certaines références pour les analyses,
- poursuivre la mise en évidence des connaissances mises en jeu dans la situation,
- de confirmer la possibilité de poursuivre les expérimentations approfondies en termes déontologiques.

A l'issue de cette primo-expérimentation un premier modèle expérimental pourra être élaboré, la situation sera soumise à la contingence.

Expérimentation 1

La première expérimentation permettra cette première confrontation à la contingence.

Il s'agit en particulier rappelons le, d'étudier de manière fine les actions des élèves en situation de recherche. Les productions finales ne peuvent suffire, car elles ne rendent pas compte de la diversité des cheminements intellectuels et ne permettent pas de comprendre les obstacles et le erreurs. Ainsi, pour étudier aussi précisément que possible l'activité mathématique des élèves (schémas et figures construits au fur et à mesure de la résolution, actions sur les objets, pistes abandonnées, calculs, conjectures, preuves, élaboration de théories locales) nous avons choisi une observation « clinique » et une expérimentation en « laboratoire ».

Cette expérimentation ne se déroulera ainsi pas en classe « ordinaire » mais nous avons conviés deux groupes de trois élèves à participer à notre recherche. Dans les ingénieries actuelles l'expérimentation en classe est souvent posée comme un préalable à l'étude. Nos modalités de travail nous apparaissent pertinentes pour notre travail de recherche et dans la mise en place de cette première boucle liant modéle et contingence. L'expérimentation en classe, indispensable pourra ensuite être menée à bien ultérieurement et faire l'objet d'une étude lors d'un travail complémentaire.

Expérimentation 2

L'organisation initiale prévoyait une primo-expérimentation et une expérimentation. Mais la confrontation à la contingence doit se concevoir comme un va et vient entre modèle et expérimentations, en fonction des résultats intermédiaires et des nécessités. A la suite de l'expérimentation, nous avons mis en place une deuxième expérimentation beaucoup plus légère dont nous souhaitons rendre compte brièvement dans ce mémoire en ciblant quelques éléments particuliers. Sa mise en œuvre permettra de répondre à un questionnement issu de l'expérimentation. Elle se déroule dans le cadre d'un stage de formation continue.

4.2 Primo-expérimentation

4.2.1 Les éléments à cibler lors de cette primo-expérimentation

Précisons encore ici les objectifs qui guident cette phase. Il s'agit particulièrement :

a. De vérifier que la situation est viable, c'est à dire :

   - que le milieu objectif pour les élèves ou étudiants est suffisament riche, et donc qu'ils peuvent s'engager dans la recherche, émettre des conjectures, construire des premiers raisonnements locaux ...

- que l'identification et la représentation des pavages réguliers n'est pas un obstacle à l'appropriation de la situation et qu'au contraire ces objets sont suffisamment naturalisés pour permettre un travail plus approfondi sur les pavages semi-réguliers,

- que des premiers dessins ou schémas d'assemblages de tuiles dissemblables peuvent apparaître.

b. D'observer que la situation est potentiellement riche, c'est à dire :

- que les éudiants vont être capables de créer de nouveaux objets (les associations de polygones réguliers autour d'un sommet) et d'identifier le problème,

- que les étudiants vont dans ce contexte élaborer des résultats simples : par exemple déterminer la mesure des angles d'un polygone régulier,

- que des raisonnements autour d'un candidat-sommet vont apparaître,

- qu'en particulier une condition nécessaire sur la somme des angles des polygones sera exhibée.

c. D'observer l'apparition d'un changement de registre, preuve d'un enrichissement dans la compréhesion du concept de pavage archimédien,

d. Plus globalement, de commencer le repérage des modes de raisonnement développés sur les objets, des propriétés et relations travaillées et/ou élaborés au cours du problème et leur contribution à l'avancement de la recherche.

e. De repérer les variables de commandes et les variables dérivées.

4.2.2 Le contexte

Cette primo-expérimentation a lieu en début d'année scolaire avec des étudiants de l'IUFM de Lyon préparant le concours de professeur des écoles, pour la deuxième année consécutive. Cette expérimentation se déroule en deux épisodes. Le premier a lieu le mercredi 16 septembre 2009 après midi, le deuxième se déroule le 18 septembre 2009. Le premier groupe concerné est constitué de 23 étudiants qui ont choisi une majeure histoire-géographie pour le concours et ont très globalement un parcours universitaire non scientifique. Le deuxième groupe de 18 étudiants est a priori plus familier avec les démarches scientifiques.

Tous ont déjà vécu au moins une séance de problème de recherche, certains en ont déjà mis en œuvre lors d'un stage de pratique accompagnée à l'école primaire, avec un suivi à l'IUFM, et ont eu plus globalement des apports didactiques sur les problèmes et les problèmes de recherche en particulier.

Cette séance est une reprise de contact non seulement avec les problèmes de recherche, mais aussi avec les mathématiques et la préparation au concours.

Dans le cadre de la formation de ces étudiants, cette mise en œuvre d'un problème de recherche comme entrée en formation a, d'expérience, montré tout son intérêt. Nous espérons enrichir encore cette séance en nous appuyant sur la question des pavages semi-réguliers.

4.2.3 les choix didactiques

L'organisation didactique

Lors de la primo-expérimentation la survenue du plus grand nombre possible de procédures, cheminements, pistes possibles est souhaitée. Cette profusion doit nous permettre de construire notre modèle a priori.

L'organisation didactique que nous envisageons est fondamentalement basée sur la gestion proposée par Arsac et Mante pour la mise en œuvre de problèmes ouverts. Nous renvoyons à [Arsac et Mante, 2007], pages 49 à 55, pour un exemple de gestion détaillée.

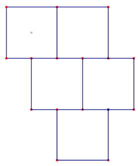
L'énoncé initial proposé est le suivant :

Une situation de recherche en classe

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

Un pavage archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers,
sans trou, ni superposition,
et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones.

On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygones appartienne au côté d'un autre comme sur la figure ci-dessous :



La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.

A l'issue de la recherche :
- Faire une affiche présentant vos résultats, leur justification, la démarche de résolution et les difficultés éventuelles.
- Prévoir un rapporteur et le contenu de ce rapport si possible par écrit.

et le déroulement prévu est le suivant :

1. L'enseignant présente le type d'activité abordée ce jour et les différents temps (écoute, recherche individuelle, recherche collective, rédaction d'une affiche par groupe, présentation des productions et débat, institutionnalisation).
2. Il dispose ensuite au tableau une version lisible par tous de l'énoncé et demande à un étudiant de le lire.
3. L'enseignant demande ensuite à un autre étudiant ou éventuellement au même d'expliquer quel est le problème mathématique. Cette phase d'explicitation sera particulièrement nécessaire avec les étudiants les moins familiers avec les objets considérés et le vocabulaire associé. Elle participe de l'appropriation du problème. Nous souhaitons qu'il n'y ait pas d'ambiguïté immédiate sur les notions de polygones réguliers et de pavage du plan pour entrer dans la phase de recherche suivante.
4. Le premier temps de recherche est donc individuel et dure environ cinq minutes. Ce temps permet une première appropriation de l'énoncé par tous, un début de représentation de certains objets les plus familiers, et éventuellement des premiers raisonnements pour les plus rapides.

5. A la fin de ce temps, si l'enseignant après avoir circulé auprès des étudiants constate une incompréhension majeure, il peut faire un point d'explicitation avec la classe. Sinon il propose de passer à la deuxième phase de la séance : un temps de travail collectif. Pour cette expérimentation ce temps de recherche sera d'environ une heure et quinze minutes [2]. Compte tenu du public les modalités de regroupement s'imposent : les étudiants se groupent par affinité ou proximité. [3]
6. Le temps suivant sera celui de la présentation des productions et du débat sur ces productions.
7. La séance se termine sur un temps d'institutionnalisation. Compte-tenu du contexte l'institutionnalisation est ici d'autant plus nécessaire. Elle porte sur la définition d'un polygone régulier, la valeur en degré des angles d'un polygone régulier, la preuve de R1, un début de démarche amenant à la preuve de R2, avec un aperçu de la démarche de Kepler et des planches qu'il a produites, la présentation des 11 pavages archimédiens.

Retour sur le milieu matériel

Les choix suivants ont été faits pour cette primo-expérimentation :
- la salle est préalablement disposée pour favoriser le travail en groupe de 4, l'écoute et le débat. Pour chacun des deux épisodes les étudiants se sont répartis en groupes de 4, éventuellement 3.
- sur une table de la salle, des règles graduées, des compas, des calculatrices, des ciseaux, du papier, des rapporteurs sont mis à disposition des étudiants qui ont la possibilité ou non de les utiliser, une annonce est faite en ce sens en début de recherche.
- aucun autre matériel (pièces rigides prédécoupées, geomag, ...) n'est proposé.
- les étudiants disposent de leur calculatrice.
- aucun matériel informatique n'est mis à leur disposition.

4.2.4 Premières analyses suite à la primo-expérimentation

Les deux séances ont été filmées, la gestion de la deuxième est réalisée par une collègue expérimentée, au fait des pratiques de recherche. Lors de cette séance un groupe a prioritairement été enregistré.

L'énoncé et son appropriation

La projection et la reformulation de l'énoncé ont engendré quatre questions avec le premier groupe d'étudiants :

Trois immédiates : « Sans trou, ni recouvrement ... ? », « Quelle est la forme à paver ... ? », une troisième à propos de la restriction au pavage strict. Une dernière question a été formulée après 5 minutes de recherche individuelle « Peut-on utiliser plusieurs types de polygones réguliers ? »

Avec le deuxième groupe, contenant plus de scientifiques, cette quatrième question n'est pas sortie à l'issue de la reformulation par une étudiante et du temps d'appropriation.

Un groupe de quatre étudiantes a alors longuement cherché à comprendre l'intérêt du problème, n'imaginant que des pavages réguliers et il a fallu l'intervention du professeur pour que ce

2. D'une façon générale lors de la mise en œuvre d'une séance de ce type il est nécessaire de prévoir un minimum de deux heures pour permettre des temps de recherche et de familiarisation minimaux avec les objets mathématiques approchés.

3. Dans d'autres situations ces modalités sont à travailler : cela peut être au volontariat des élèves ou suivant des préconisations de l'enseignant bien précises en fonction des compétences des uns et des autres, des (in)compatibilités de caractères, ...

groupe investisse la notion de pavages archimédiens dans toute sa généralité au delà des pavages réguliers.

En dehors de ce cas nous n'observons aucun blocage. Il apparait ainsi que l'énoncé permet une appropriation satisfaisante. Et en effet très rapidement de nombreux dessins apparaissent (y compris des pavages à base de parallèlogrammes) et aussi les premiers questionnements : « Qu'est-ce qu'un polygone régulier ? » « Peut-on tous les construire, en particulier celui à 5 côtés ? » ...

Les objets qui semblent devoir apparaitre et les actions sur ces objets

Les polygones réguliers : les étudiants considérés ont tous une proximité avec la géométrie de collège et en particulier avec le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier. Ils sont par ailleurs relativement habiles dans la manipulation de la règle et du compas. Il n'est donc pas surprenant de voir apparaitre pour tous les groupes les trois pavages réguliers. Mais il semble bien que la familiarité de ces étudiants avec ces objets n'aille pas bien au delà. En effet, le pentagone est en général manipulé très maladroitement, on observe pour quelques groupes l'utilisation des polygones à 10 et 12 côtés, parfois 16 mais les polygones à 7 et 9 côtés sont peu évoqués et les autres non évoqués.

Pour un certain nombre d'étudiants le fait de ne pouvoir construire dans l'espace graphique un représentant de l'objet bloquera la progression.

On peut toutefois émettre l'hypothèse que pour certains étudiants, l'exigence de soin attendue dans le cadre de cette préparation au concours et l'importance donnée aux constructions à la règle et au compas peuvent agir comme des freins à l'expérimentation sur les objets polygones réguliers. Ceci sera à tester lors de l'expérimentation principale.

Nous proposons ci-dessous des extraits des retranscriptions des échanges pour un des trois groupes filmés ou des descriptions de gestes afin de montrer l'obstacle lié à la construction de l'octogone.

Début de la recherche collective à 6'30.

14'35 : une étudiante du groupe qui a déjà tracé un triangle équilatéral et un carré, dessine à main levée, un octogone, efface puis retrace un hexagone, puis pendant une longue minute hésite, débute le tracé d'un polygone, l'efface, recommence et finit par abandonner ce tracé qui devait compléter une liste de polygones réguliers.

19' : une autre étudiante : « je sais même pas comment on dessine l'octogone ».

40'53 : une troisième : « putain, il m'énerve ce putain d'octogone je sais même pas combien c'est son angle ».

56'58 : la même : « Faut qu'on le sache l'octogone, déjà j'arrive pas à le dessiner ».

Il apparait bien ici que la familiarité avec les polygones réguliers, qui doit pour certains aller jusqu'à la possibilité de les construire de façon sufisamment précise, est nécessaire à la progression dans la recherche, à l'avancée dans la connaissance des pavages semi-réguliers.

Concernant le nombre de polygones réguliers et toujours pour le même groupe :

59' : E2 : « Est-ce qu'on les a tous les polygones réguliers ? »

E3 : « une infinité ».

E2 : « Tu crois qu'il y en a une infinité ? »

E3 : « Vu que 180 c'est un angle plat ... 135 ... Faut qu'on aille ... là on a 135 faut qu'on aille jusqu'à ce qu'on obtienne inférieur à 180. Tant que t'es inférieur à 180 tu pourras faire un truc qui tournera au bout d'un moment ».

Cet extrait montre une approche pragmatique de l'infinité du nombre de polygones réguliers qui se base sur l'idée que la création d'un angle même petit suffit après un certain nombre d'étapes à faire une courbure sensible et sans doute finalement un tour complet.

Mais elle montre en même temps, ce qui peut se confirmer aussi par la remarque suivante : E3 : « A 100° ça existe pas sinon on le connaitrait », que leur approche des polygones réguliers est hésitante, pragmatique, sensible. Pour ce groupe, le manque de familiarité avec les polygones réguliers qui se retrouve donc tout au long de la recherche, a limité les avancées.

Les angles des polygones réguliers : pour aller un peu plus loin dans l'analyse de ce passage, on peut confirmer que la difficulté se focalise à partir d'un certain moment sur la détermination de l'angle de l'octogone :

18'34 « il faudrait savoir l'angle ».

19'53 « il doit bien y avoir un moyen de calculer l'angle ... l'angle de l'octogone »

Puis toujours à propos de l'octogone mais déjà au bout de 30 minutes :

30' 03 : E1 : « Mais vous êtes sur, qu'un octogone, ça a tous le même angle ? »

E2 : « Oui, c'est obligé c'est un polygone régulier ».

E2 : « C'est obligé, sinon ça serait pas beau hein ».

E1 : « Comment on fait ? »

E1 : « Là je suis en train de construire un hexagone ».

E2 : « Oui avec 120 tu construis un hexagone ... Faut agrandir, oui à mon avis c'est 135, c'est pas 120 ».

E1 : « 150 ... ».

E1 : « Faut qui soit moins grand que l'hexagone ».

E2 : « Si, non il doit être plus grand ».

E3 : « Il doit être plus grand pour arriver à écarter ».

E2 :« Oui c'est ça c'est 150 ».

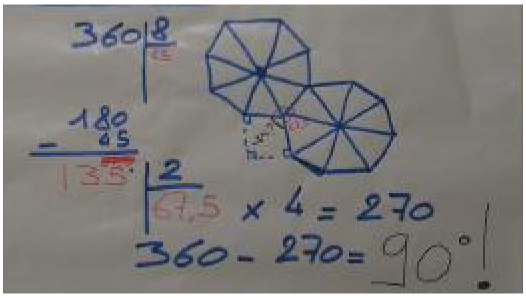
On retrouve là encore une approche très pragmatique ... un point de vue esthétique et aussi une idée très physique de l'angle des polygones réguliers et en particulier l'idée qu'on va écarter les côtés pour obtenir un angle plus grand.

Il apparait finalement que ce groupe d'étudiantes n'a pu élaborer un raisonnement sur les angles des polygones réguliers permettant de les cerner avec suffisamment de précision pour pouvoir construire la suite de la recherche sur une base solide. Ce n'est pas le cas pour tous les groupes, en effet nombreux sont ceux qui s'appuyant sur une certaine familiarité avec l'hexagone ont pu déterminer son angle et reproduire la démarche pour les autres polygones réguliers.

De nombreux autres éléments (absence de manipulation des pentagones, heptagones, ennéagones, ..., recherche d'angles de mesure entière, ou a contrario appui sur une liste des angles pour produire une recherche fructueuse) confirme que cet objet joue un rôle central dans cette situation.

L'angle plein et les assemblages autour d'un nœud : pour de nombreux groupes la condition $\sum a_i = 360^\circ$ apparait assez vite comme constatation sur le dessin en premier lieu pour les nœuds d'un morceau de pavage régulier. Elle apparait plus tardivement comme condition nécessaire en tant que telle.

Comme on peut le voir sur l'image ci-dessous, elle peut permettre soit de vérifier qu'un assemblage potentiel est valide, soit de déterminer la mesure de l'angle « manquant ».



Cette configuration a été relativement souvent étudiée. Cet extrait nous montre ici, un groupe relativement à l'aise sur la détermination de l'angle d'un octogone régulier et sur l'étude de l'angle nécessaire pour compléter un assemblage initié avec deux octogones réguliers.

Pour autant tous les groupes ne sont pas passés clairement au registre numérique et on observe fréquemment des constructions très soignées dans l'espace graphique, et aussi un recours à l'utilisation de gabarit de polygones réguliers, ceci afin de déterminer si tel ou tel assemblage est possible. Ainsi le groupe PE1R2_5 (affiche en page 2 de l'annexe 5) travaillera essentiellement en manipulant des polygones réguliers découpés dans du papier. Cette manipulation lui permettra d'émettre la conjecture suivante : « si le nombre de côté du polygone est un multiple de trois il peut être assemblé par un triangle, si multiple de quatre assemblages par un carré ». Cette conjecture sera déstabilisée par le cas du dodécagone et invalidé par expérience dans le monde sensible par l'étude de l'ennéagone et du 16-gone. Pour ce groupe, l'essentiel de la validation s'effectue dans l'espace physique par manipulation de polygones en papier. Le changement de registre et le passage à l'espace géométrique ne s'est réalisé que très partiellement.

Des pavages : sur les affiches produites on peut observer de nombreux développements entre assemblage local et pavage assuré. On observe des dessins précurseurs des pavages réguliers, des quasi-pavages (8 8 4), (3,4,3,3,4), (3 3 3 3 6), (3 4 6 4), (12 12 3), et des propositions erronées.

L'observation du passage d'assemblage autour d'un nœud à un pavage plus global s'avère délicate. En effet le besoin de vérifier que les assemblages construits permettent de paver le plan apparait inégalement ressenti sachant que cette vérification est pour certains assemblages immédiate. On observe toutefois des embryons d'argumentations du fait qu'il faut prolonger partout (vérification globale) pour vérifier qu'on peut paver le plan. Mais ceci reste peu explicite.

On peut relever à ce propos deux extraits des échanges du premier groupe enregistré :

- un questionnement assez précoce : 19'15 première remarque à caractère global « oui, mais tu peux pas le répéter ».

- un autre après 51 minutes de recherche. Certains éléments du groupe travaillent à l'extension d'un assemblage : « Ben on est en train de reproduire notre figure en fait. On est en train de se rendre compte que que dès qu'la on arrive à faire 360 on essaie de voir si ça marche on a fait celle-ci ... puis ça marche à l'infini ». La validation se fait là par un dessin très soigné.

Les « dessins » les plus étendus utilisent les triangles, carrés, hexagones et octogones réguliers. On peut y voir l'influence des deux facteurs liés : la bonne connaissance de ces polygones réguliers et la facilité de représentation.

On observe dans ces représentations, la présence de nombreux pavages 2-réguliers. Les groupes ont, soit écarté, soit mal compris la notion de voisinage identique autour des nœuds. C'est un élément constitutif de la notion de pavage semi-régulier qui est ici en jeu. Le débat qui a suivi la recherche a permis aux étudiants d'échanger à ce propos et de trancher. On peut faire l'hypothèse, puisque la réalisation effective de pavages n-réguliers ne rentre pas en conflit avec le milieu (celui-ci ne fournissant pendant le temps de recherche aucune autre rétro-action que la non-conformité avec l'énoncé), que c'est bien le temps de débat et d'échange qui permettra dans la plupart des cas de revenir sur cet aspect de la définition.

Enfin, il faut ici noter qu'un groupe d'étudiants avait à sa disposition un ordinateur personnel portable. Un des membres du groupe a assez rapidement utilisé le logiciel geogebra pour valider des candidats pavages. C'est ce groupe qui s'est ensuite engagé dans une recherche exhaustive.

Observation de premiers raisonnements.

- A la recherche de conditions :

Lors de cette expérimentation, le premier registre est bien graphique. Les manipulations dans cet espace ont été particulièrement nombreuses et prolifiques. Ensuite, très grossièrement, on a pu constater que pour la moitié des groupes environ il y a eu un réel investissement du registre numérique, avec par exemple certains raisonnements initiés sur le résidu après association de deux polygones réguliers.

On observe aussi des essais d'obtention de régularités, de formules, par exemple $60^\circ x+90^\circ x+120^\circ x+135^\circ x+150^\circ x+165^\circ x=360^\circ$ et aussi des essais liés à une décomposition primaire de 360 : $360=1\times 2^3\times 3^2\times 5=1\times 360=2\times 180=3\times 120=...=18\times 20$.

Pour tous ces groupes la condition sur l'égalité des longueurs des polygones réguliers apparait peu problématique. Si on observe des questionnements parfois tardifs : 44'50 « c'est pas obligé que les gones ils aient tous la même longueur de côté ? », les traces écrites ne portent aucun indice du fait que ce point ait nécessité plus que quelques instants d'étude.

- Autour de l'exhaustivité.

Pour certains groupes de l'épisode 1 on a pu constater un début d'organisation permettant d'envisager une étude de l'exhaustivité.

L'affiche produite par l'un d'entre eux s'organise ainsi :

Polygones réguliers : 3 côtés : oui, 4 côtés : oui, 5 côtés : non, 6 côtés : oui, 7 côtés : non, 8 côtés : oui, 12 côtés : non.

Essais d'association de polygones différents pour réaliser un assemblage : 3 et 6 : oui, 5 et 10 : oui, 4 et 8 : non, 4 et 3 : non, 4 et 5 : non, 12 et 4 et 3 : oui, 6 et 12 : non

On constate ainsi un début de systématisation. La suite semble toutefois montrer que cette organisation tient autant de la recherche d'exhaustivité que de la présentation de résultats préliminaires permettant l'élaboration de conjectures.

Par contre la production du groupe le plus avancé dans la recherche, présente clairement un raisonnement qui se voulait exhaustif.

Ce groupe présente tout d'abord une liste des angles des polygones réguliers de 3 à 12 côtés. « on s'est arrêté à 150° car 60° est le plus petit angle utilisable de PR. 360 moins 60 égal 300°. Un PR a forcément un angle inférieur à 180° donc pour obtenir 300° il faut au moins 2 PR. 300 sur 2 égal 150°. Donc il faut combiner 3 PR dont les angles sont inférieurs à 150° ... ».

Il apparait à la lecture du texte de l'affiche que le groupe s'est engagé sur cette piste en considérant que le plus grand des angles restant était bien de 300° mais que cet angle ne pouvait être comblé qu'avec deux angles identiques, donc au plus de 150° chacun.

Les échanges oraux laissent apparaitre la même impression, mais moins assurée :

« A l'angle où se rassemblent les polygones on pouvait pas en mettre que deux car ça voudrait dire que l'angle doit être à 180, et c'est pas possible et si on veut en mettre trois le plus petit qu'on peut mettre pour compléter c'est 60, donc ça veut dire que les deux autres ça doit être 150 maximum. C'est complexe ... pff ... faut être sur d'avoir bien compris ».

E2 réexplique alors à E3 et conclut par « ... et donc c'est le minimum à trois, c'est le minimum qu'on peut avoir pour avoir 360 ».

E1 : « donc 150 c'est le maximum qu'on peut utiliser et 60 c'est le minimum ».

E2 « et donc pour les trois, après c'est deux de 60 et deux de 120 ... Ah oui on passe à 4 ».
... Les échanges se poursuivent, mais ne parviendront pas à clarifier ce point. Lors de ce temps de rédaction d'affiche, il apparaitra que le raisonnement n'est pas encore stabilisé.

4.2.5 Conclusion

Cette primo-expérimentation confirme totalement les potentialités du problème en particulier comme support d'une situation de recherche en classe.

La dévolution s'est globalement avérée non problématique. La question de la pluralité des polygones réguliers dans un pavage doit toutefois faire l'objet d'une attention certaine.

Ainsi le milieu proposé semble offrir l'environnement suffisant pour une activité objective des étudiants. La notion globale de pavage ne semble pas être un obstacle pour l'engagement dans la situation. Apparaissent en effet très rapidement sur les feuilles de brouillon, y compris pendant la recherche individuelle, des assemblages et des pavages variés. On voit même le pavage régulier avec des hexagones arriver en premier pour certains étudiants.

Ce qui apparait plus problématique, c'est sans soute la non disponibilité de certaines propriétés d'objets dont la manipulation est indispensable, ou des modélisations d'objets qui s'avèrent non pertinentes. La suite de nos travaux devra permettre d'étudier plus finement :

- le degré de disponibilité dans le milieu objectif des élèves des différents types de polygones réguliers,

- la disponibilité des caractéristiques angulaires de ces polygones,

- l'incidence de ce degré de disponibilité sur l'engagement dans des démarches de type expérimentales suffisamment complexes permettant conjectures, élaborations diverses ...

- l'apparition d'une activité mathématique, activité qui a globalement pris place ici, des changements de registre et leurs effets,

- l'élaboration de théories plus ou moins locales, de raisonnement plus ou moins exhaustifs ...

4.3 Finalisation de notre modèle expérimental a priori

Nous pouvons désormais concevoir un modèle expérimental viable en faisant l'hypothèse que la situation se révélera aussi consistante que ce qui a pu être observé jusqu'à présent. Le modéle proposé est relativement général mais nous déterminons ici certaines variables en fonction des conditions et du public de l'expérimentation, deux groupes de trois élèves de terminale S.

4.3.1 Dispositif effectif retenu

a. Nous décidons d'une mise en œuvre conforme à celle d'un problème de recherche selon les modalités précédemment décrites et que le professeur responsable maitrise. Pour cette expérimentation, la gestion de la classe est confiée à une doctorante dont le travail de mémoire de master 2 nécessitait également la mise en œuvre d'un problème de recherche. Notre positionnement est celui du chercheur dans des postures d'action (dévolution) puis d'observation. Nous insistons en amont sur l'importance des phases d'appropriation de l'énoncé en anticipant une dévolution aux élèves semblable à celle réalisée lors de la primo-expérimentation et une phase adidactique productrice de sens.

b. Le milieu créé lors de la primo-expérimentation avec des étudiants de l'IUFM, s'est avéré suffisamment riche pour permettre l'élaboration des premières axiomatiques locales, mais tous les groupes ne se sont pas engagés dans une réflexion fine sur les validations globales et l'élaboration des raisonnements permettant de structurer une recherche de l'exhaustivité.
Le public pour notre expérimentation principale est différent. Pour des élèves de Terminale S, il n'est pas évident que le milieu proposé s'avère aussi fécond. En effet, les programmes de première S et de terminale S en mathématiques [4] n'assurent pas que les outils de la géométrie euclidienne soient disponibles et plus globalement que la familiarité nécessaire avec les objets en jeu dans la situation soit suffisante pour que des rétroactions fécondes apparaissent.
La situation est toutefois proposée à des élèves scientifiques et on notera que les élèves avaient, avant cette expérimentation, abordé dans le cadre de la classe les nombres complexes et qu'ils avaient travaillé avec des expressions du type $e^{\frac{ik\pi}{4}}$ ou $e^{\frac{ik\pi}{3}}$, mais sans aller au delà.
Nous choisissons de ne pas modifier le milieu, qui reste identique à celui décrit précédemment. Toutefois nous nous sommes laissés la possibilité de répondre dans le détail aux questions éventuelles concernant la définition des polygones réguliers, lors du temps d'appropriation de l'énoncé.

c. Nous reprécisons certaines autres variables de la situation et les fixons pour l'expérimentation :
- Le problème n'est modifié sur aucun point. [5]
- Les variables suivantes, liées à l'énoncé du problème, sont à considérer : choix ou non de préciser la notion de polygone régulier, de présenter ou non un pavage archimédien non régulier, choix du pavage non strict présenté.
Fixer ces variables en l'état de l'énoncé initial a permis de réaliser des séances consistantes. Un seul groupe a eu des difficultés pour envisager la diversité des polygones. Nous choisissons de garder la même valeur de ces variables.
Ainsi le choix est fait de conserver l'énoncé original.
- nous ne revenons pas sur les variables liées au milieu matériel et qui ne sont pas modifiées.
- concernant le jeu du professeur :
Les interventions du professeur pendant le lancement de la séance ont été évoquées. Il est possible d'envisager des interventions qui pourraient être jugées nécessaires en fonction de la richesse du travail dans la phase conçue pour être adidactique, par exemple pour des groupes isolés n'utilisant qu'un seul type de polygone par pavage, ou pour d'autres ne s'engageant pas dans une réelle activité mathématique. L'expérimentateur pourra intervenir en ce sens si besoin.

4.3.2 La méthode d'analyse

L'analyse déjà menée permet une certaine anticipation. Nous pouvons envisager que tous les éléments observés jusqu'ici sont susceptibles d'être à nouveau recueillis et la nouvelle observation devra les prendre en compte. Pour l'analyse fine :

4. B.O. HS N°7 du 31 août 2000 et B.O. Hors-série N°4 du 30 août 2001

5. Pour un travail avec des élèves plus jeunes, il pourrait être envisagé de réduire le nombre de type de polygones réguliers utilisables, ou le nombre de pavages à produire, mais ceci entraine de fait un changement de situation.

1. Le recueil, l'organisation, l'interprétation des observables sont anticipés : le recueil s'effectue par l'observation de visu, l'enregistrement audio et vidéo des deux groupes. L'analyse fine des actions d'au moins un groupe est prévue, avec en particulier appui sur la transcription des échanges. Les interprétations se feront à l'aide des cadres théoriques présentés (jeu des élèves dans les niveaux adidactiques, dimension expérimentale).

2. L'interprétation des observables doit permettre :
   - une analyse suivant l'axe « dialectique théorie-objets »
   - une analyse suivant l'axe « élaboration d'une situation à visée d'enseignement » et donner un premier aperçu de la pertinence de la situation envisagée par rapport aux attendus.

C'est sous cette modélisation que nous soumettons notre élaboration à la contingence.

Chapitre 5

Mises en œuvre de l'ingénierie - Analyses a posteriori

5.1 Expérimentation en terminale S

5.1.1 Contexte

Cette expérimentation concerne donc deux groupes de 3 élèves de terminale S. La classe dont ils sont issus est d'un niveau moyen, les élèves considérés ont des compétences en mathématiques inégales. Ces élèves se sont portés volontaires pour deux heures de recherche sur un « problème de géométrie ».

L'expérimentation a lieu le 14 janvier 2010 de 15h à 17h. Les deux groupes de 3 élèves sont filmés (2 caméras) et doublement enregistrés. Les affiches produites sont présentées en annexe 7. Seuls les échanges du groupe 2 sont ici transcrits dans leur intégralité (annexe 8). Les brouillons des groupes ont été récupérés. Lors de la séance nous observons particulièrement un des groupes, le 2.

5.1.2 Compte-rendu de la recherche et analyses

Des contraintes horaires ont amené à réduire la durée de la séance. Le temps imparti, se répartit alors comme suit : cinq minutes d'appropriation de l'énoncé, cinq minutes de recherche individuelle, 1h30 de recherche en groupe et rédaction des affiches, 30 minutes qui permettent aux deux groupes de présenter leurs résultats et de débattre de leur validité.

Début à 15h environ : Après la lecture de l'énoncé par une élève, une demande de reformulation du professeur n'aboutit pas. Celle-ci a alors été amenée à poser des questions qui ont obtenu des réponses assez peu explicites, ce qui est observable sur un extrait du script à propos de la notion de recouvrement : (Codage : P le professeur, VB, M des élèves.)
P : ensuite euh alors sur ce pavage archimédien le recouvrement est-ce que ça ça va ? est-ce que vous avez des question là dessus ?
VB : j'ai pas compris ce que c'était
P : alors qu'est-ce que t'as pas compris exactement ?
VB : ben alors ça veut dire quoi un pavage archimédien ?
P : alors un pavage archimédien du plan c'est un recouvrement du plan alors est-ce que ça ça va recouvrement ?
P : comment ?
M : des carrés par dessus des carrés
P : par exemple avec des carrés voilà vas-y dis donc explique parle un peu plus fort pour les

autres
M : on remplit le plan de polygones réguliers
P : voilà donc là [...] des carrés on remplit le plan avec des carrés

Il est alors difficile de percevoir à ce moment la qualité de l'appropriation de l'énoncé. Toutefois, le constat final est que les pistes suivies par les deux groupes seront très différentes.

Observons tout d'abord quelques éléments des travaux du groupe 1.

Groupe 1

Le groupe 1, dont nous n'analyserons pas la production dans le détail, a déterminé tous les pavages réguliers du plan. L'affiche produite figure en annexe 7, nous proposons ici un extrait de sa présentation lors de la mise en commun (B, F, M sont les trois élèves du groupe 1) :

B : Heu donc euh donc on a trouvé qu'y avait heu trois polynones réguliers heu qui pouvaient être possible heu qui pouvaient marcher pour faire un pavé donc y a le triangle équilatéral le carré et euh l'hexagone ben on a marqué que l'angle qu'était ici c'était un cercle ça faisait 360 ici là on a déduit que pour pouvoir heu qui s'assemblent il fallait que ces trois heu diviseurs de 360 pour pouvoir un nombre d'arêtes qui servaient heu pour pouvoir s'emboiter
M : ensuite on a trouvé un rapport entre heu entre le l'angle et le nombre d'angles dans un polynôme on en a fait une équation on a créé un cercle en fait et on a trouvé une équation entre n et k on a donc euh on a donc mis heu [...] pour n parce qu'on savait que c'était compris entre 60 pour les triangles équilatéraux forcément
B : vu que c'est plus petit heu le plus petit polynôme
M : on peut pas avoir un polynôme à deux angles donc c'était forcément le minimum et entre 180 parce que plus que 180 ça donnait un angle euh
B : c'est un angle plat donc une droite
M : ça donnait un angle négatif donc ça revenait au même on s'est dit que 180 était le maximum et euh et donc du coup on a calculé heu on a calculé les angles qui se trouve entre 3 et 6 parceque heu le nombre d'angles trouvé pour 180 c'était euh
B : 2
M : 2 ben oui 2 donc c'était impossible et ensuite entre 3 et 6 on a remarqué que 5 ne marchait pas non plus parce que ça donnait un chiffre qui n'était pas entier
B : ça veut dire que le nombre de
M : donc c'était impossible
B : le nombre de le nombre de polygones qu'on s'est s'est emboité ça doit forcément être un nombre naturel parce que sinon ... donc ben du coup on n'a trouvé qu'y restait que ces trois là.

Nous retenons ici que :

Suivant la composante « consistance théorique » : Seule l'étude des pavages réguliers du plan est traitée. Le groupe a abouti à une preuve :

qui intègre la détermination d'une formule permettant de déterminer l'angle d'un polygone régulier en fonction du nombre de ses angles,

qui met en évidence la condition nécessaire sur la somme des angles autour d'un nœud,

qui utilise au moins en acte des conditions nécessaires sur le nombre d'angles autour d'un assemblage et permet la détermination des candidats pavages.

En effet si on reprend la preuve proposée on peut la faire correspondre à la démarche suivante, même s'il reste des incertitudes qui seraient à lever par une transcription complémentaire :

- L'angle plein est associé à l'image du cercle
- Un assemblage doit vérifier $\sum n = 360$ avec n l'angle d'un seul type de polygone

- Recherche des diviseurs de 360 (ce qui sous entend que la valeur de n (l'angle des polygones) est entière).
- Parallèlement la détermination de l'angle d'un polygone régulier en fonction du nombre d'angle (k) est réalisé : $n = 180 - \dfrac{360}{k}$
- Détermination des valeurs limites de n.
- Détermination des valeurs de k associées par la relation $n = 180 - \dfrac{360}{k}$ ou par familiarité pour 3,4,6
- Détermination de l'angle du pentagone et invalidation pour les assemblages
- Validation des assemblages.

Il apparait que ce groupe s'est engagé dans une démarche utilisant de façon importante le registre numérique et ce dès le début de la recherche. La production montre une certaine aisance dans ce registre, avec une manipulation permettant en particulier la restriction des cas à étudier. On observe aussi une difficulté à questionner le fait que les angles des polygones réguliers puissent ne pas être entiers.

Suivant la composante « rapport situation réelle / modèle a priori » : Les acteurs n'ont pas fonctionné comme prévu.

On observe un engagement dans la recherche et l'élaboration d'une démarche pertinente, toutefois l'organisation didactique n'a pas permis que ce groupe questionne le niveau de généralité des pavages produits.

Sont potentiellement en cause : la formulation de l'énoncé, les rétroactions du milieu y compris les interventions du professeur, le type de démarche des élèves y compris leur conception.

Nous reconsidérerons les deux premiers points plus loin. Concernant le troisième on peut apporter quelques éléments en appui sur l'extrait suivant :

00 : 12 : 40 : M : tu rajoutes autant de points que possible sur le cercle

M : tu divises plutôt par 180 ah quoi que

B : attends, moi ce que je dirai c'est que la recherche le nombre de pavages archimédiens du plan c'est un nombre illimité, si on suit le raisonnement.

M : oui mais faut que tu leur laisses une certaine dans un certain type euh de

B : oui mais faut pas que ça fasse un cercle parce qu'un cercle tu peux pas les mettre contre

M : j'fais un cercle c'est pour les mettre ensemble c'est pas pour

B : oui

F : ça veut dire quoi

M : c'est simplement pour trouver

F : autour de chaque sommet le même assemblage

M : c'est juste pour trouver le polygone

B : ouais

M : mais regarde si tu prends un carré le carré tu prends une distance entre chaque point c'est la même longueur, de toute façon, t'auras le même angle

B : oui je suis d'accord, oui je vois le principe

F : oui je vois ok

M : donc là aussi

00 : 14 :15 : B oui j'suis d'accord tu peux prendre n'importe quel polygone avec toutes sortes de longueurs et avec les angles pareils y en a une infinité du coup

B : ouais mais remarque c'est vrai que tu peux aussi prendre [...]

M : ben parce que regarde si tu prends un polygone à 180 côtés, à 180 d'angle ...

B : non il peut pas faire 180 ça t'ferais un angle plat

M : Pas un angle à 180, j'veux que mes angles de 30°

B : mais les angles, l'angle minimum c'est 60

F : pourquoi 60 ?

B : parce que qu'un triangle équilatéral c'est 60 degré. A chaque fois que t'augmentes le nombre de côté t'augmentes la valeur de l'angle

F : ouais

M : mais moi je te parle pas de l'angle là, j'te parle de l'angle par rapport au centre, c'est 30° et ça de toutes façons c'est un triangle euh isocèle

F : isocèle non ?

M : ouais de toutes façons c'est des, c'est tous des triangles isocèles de toute manière. c'est dans un cercle ...

Dans cet extrait, des approches différentes apparaissent. F et B semblent avoir une vision plus globale, avec F qui questionne la phrase « ça veut dire quoi, autour de chaque sommet le même assemblage ? » et B qui imagine une infinité de pavages archimédiens et envisage des juxtapositions : « oui mais faut pas que ça fasse un cercle parce qu'un cercle tu peux pas les mettre contre ». M, lui, s'attache rapidement à l'étude des angles d'un polygone régulier.

F aura dans ce groupe une attitude en retrait, M a plus tendance à prendre la parole. Il montre une aisance dans le registre numérique qui lui permet de s'engager rapidement dans des raisonnements productifs. [1]. L'extrait montre qu'il prend un point de vue local et ne dévie pas de son idée initiale. Il entraine le groupe dans l'étude des angles d'un polygone régulier.

On constate donc d'une part, que les deux aspects, local et global, peuvent se présenter initialement et d'autre part, qu'il peut alors être envisagé qu'un engagement fort dans un registre numérique familier, associé à un point de vue local, bloque le questionnement global nécessaire.

Ce groupe n'ayant traité que les pavages réguliers, nous nous intéressons désormais, en lien avec notre problématique, à la recherche du groupe 2.

Groupe 2

Ce groupe s'est également engagé sans difficulté dans une recherche qui aboutira à la mise en évidence de plusieurs pavages, dont des non réguliers, lors du débat qui suivra leur présentation. L'intégralité des échanges du groupe ont été retranscrits et sont présentés en annexe 8. Dans les analyses ci-dessous, les numéros renvoient aux passages de la retranscription. Codage : P le professeur, CS,CQ,VB les membres du groupe. Il est utile de savoir que les élèves de ce groupe ont utilisé du papier de couleur : orange pour les hexagones, vert pour les triangles, jaune pour les octogones, blanc pour les carrés ainsi que pour un pentagone.

Nous proposons tout d'abord une première structuration de la recherche du groupe qui s'appuie sur cette retranscription.

0. Lecture de l'énoncé par CQ
1. Clarification suite à des questions du professeur
2. Recherche individuelle
3. Repérage de deux pavages réguliers
4. Cas des losanges
5. Topologie d'un noeud, congruences des nœuds ... conjecture
6. Variétés des pavages possibles ... validation conjecture
7. Début d'organisation des polygones ... pavage octogones-carrés
8. Conjecture : il existe un grand nombre de pavages
9. Début du travail avec le « matériel »

1. Il affirmera, par ailleurs, au détour d'une conversation à la suite de l'expérimentation, « pour moi les maths faut que j'démontre »

10. Questionnement sur les angles d'un polygone régulier en vue de sa construction
11. « Jeu » de puzzle
12. Conjecture sur la congruence des côtés ... conclusion partielle
13. Confrontation au sensible lors de la construction de certains polygones réguliers
14. Retour aux angles des polygones réguliers et fabrication
15. Validation à propos de la congruence des côtés
16. Les assemblages ... entre mathématique et espace sensible
17. Premiers pas vers le global
18. Rédaction de l'affiche ... rédaction de conditions nécessaires et suffisantes
19. Présentation de l'affiche du groupe 1
20. Présentation de l'affiche du groupe 2

La démarche du groupe 2 prend un parti totalement différent de celui du groupe 1. Les premières constatations portent sur des aspects globaux avec la validation de deux pavages réguliers conformes à la définition donnée, celui à base de carrés et celui à base de triangles équilatéraux. Cette définition est ensuite testée en regard de la régularité des polygones à utiliser : « et un losange ça marche ? » « non parce que le losange les angles c'est pas les mêmes ». On peut donc observer que les connaissances de base sur les polygones réguliers sont suffisamment disponibles pour s'engager dans une première élaboration.

A ce point, si on note Ω l'ensemble des pavages archimédiens du plan, ce groupe a établi que Ω contenait deux des pavages réguliers et que les pavages de Ω ne contenaient que des polygones réguliers.

Cette entrée se prolonge par un regard pragmatique sur la situation et permet d'envisager une diversité des pavages archimédiens :

304 ... « Il doit y avoir un truc parce que ... parce que ce que je comprends pas c'est que t'as qu'à mettre plein de carrés et puis là t'as trouvé », « ben oui c'est ça ben oui c'est simple » « ben ouais c'est ça que je comprends pas ».

Ceci va amener le groupe à tenter l'association de triangles équilatéraux et de carrés. On constate ici une manipulation sur les objets particulièrement familiers. C'est d'ailleurs cette familiarité qui va permettre de porter une conjecture incertaine :

502 : est-ce que par exemple ça veut dire que si t'as un triangle par exemple là ... t'as un carré

503 : ben non tu peux pas parce que là autour de ton sommet t'auras un carré

504 : et alors

505 : alors t'as pas le droit

506 : tel qu'un sommet de polygone appartient au ... non c'est pas ça tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones

507 : ah oui

508 VB : est-ce que c'est pas justement c'était ça j'voulais te demander si c'était pas par exemple un j'fais un truc au pif tac tac tac t'as un truc comme ça donc là en fait faut qu'à chaque sommet de chaque machin ça soit des ...

00 :15 :00 *CQ montre du doigt la première association carré triangle*[2] ouais peut être

Cette première partie met bien en évidence une manipulation d'objets très familiers pour les élèves et qui permet de construire une nouvelle connaissance de l'objet pavage archimédien. Par contre le déficit langagier pour désigner les nouveaux objets est clair.

Dans le modèle en construction, Ω semble pouvoir contenir désormais des potentiels pavages associant des polygones réguliers différents. Toutefois, pour l'instant, cette conjecture n'a pas

2. cette association au brouillon ne sera pas exploitée

encore le statut d'axiome de la théorie en élaboration. CQ en particulier reste dubitative et incertaine.

La relance se fera après une pause dans les échanges et un retour à l'énoncé : « Ah la détermination de tous les pavages ! ». Les membres du groupe se convainquent de la présence de plusieurs pavages archimédiens. Par contre le milieu ne semble pas permettre d'aller au delà et CQ va faire appel au professeur pour valider « est-ce que c'est par exemple faut que par exemple ces trois figures là elles sont sur un sommet faut que sur le même sommet il y ait les trois figures ».

La théorie s'enrichit d'un nouveau résultat toutefois imprécis ou insuffisamment explicite puisque s'il apparait nécessaire d'avoir les mêmes figures en deux noeuds d'un pavage, la notion de type n'est pas encore précisée.

Les temps 7 et 8 de la recherche du groupe montrent un enrichissement de la collection de pavages avec, le pavage régulier à base d'hexagones, une association hexagones-carrés et, les brouillons le confirment, l'usage de l'octogone régulier associé au carré. C'est un temps de travail à l'intérieur de la théorie établie avec une manipulation des polygones relativement familiers.

Les cinq « candidats » dont le statut est encore incertain et qui figureront sur l'affiche, sont déjà présents à cet instant.

L'expression de CQ : « et tu crois qu'on doit en trouver combien 1 milliard 732 000 » confirme une certaine vision de la pluralité à envisager mais ce travail se confine pour l'instant à l'empirie sans « point de vue » plus élaboré que celui que permet la théorie en cours.

Le temps 9, doit permettre de faire le point (après 22 minutes de travail) sur la recherche accomplie : « et si on mettait au propre tous ceux qu'on avait déjà » , « Ben tiens y en a déjà un là », « Ben j'en ai un là un là ».

Ce temps nécessite alors pour ces élèves un retour à la manipulation. Mettre au propre, semble vouloir dire, construire les assemblages. En effet un certain nombre de dessins étaient jusqu'à présent faits à main levée, il s'agit désormais de produire des figures qui pourront être présentées lors du débat. C'est de cette double exigence de présentation et de retour au sensible que nait la phase suivante.

C'est pendant ce temps 10, qu'un changement de registre va s'opérer ... mais avec difficulté. Donnons en un exemple :

1005 : 1 2 3 4 5 6 7 7 donc 180 divisé par 7
1006 : t'es sur
1007 : oui parce que tous les angles [inaudible] ça donne un angle droit après
1008 : pas un angle droit un angle plat
1009 : ouais un angle plat
1010 : Ah c'est bon hein
1011 : on va attendre je vais voir
1012 : c'est pas possible ça fait 25
1013 : Ben 25 de l'autre coté tu prends
1014 : Ah ouai c'est 25 de là
1015 : Ah ben oui
1016 : pis après tu fais 180 - 25
1017 : Voilà
1018 : et ça fait combien
1019 : ça fait 165 non 135
1020 : ç'est pas possible
1021 : ça fait ça ça fait 135 ?

Les élèves manipulent le papier, le crayon, le rapporteur, la calculatrice. Ainsi la démarche lie raisonnement géométrique, résultat calculatoire, tracé et rétroaction liée à ce tracé. Ainsi ici le calcul 180 divisé par 7 semble devoir émerger de la considération de l'angle au centre d'un heptagone avec une erreur sur la mesure en degré de l'angle plein. Puis la démarche joue sur l'égalité entre $\frac{360}{7}$ et le supplémentaire de l'angle de l'heptagone, égalité considérée dans le registre graphique et dans le registre numérique.

Cette démarche se confirme avec un nouvel essai pour la construction de l'octogone et est cette fois menée à son terme. Toutefois la démarche s'avère totalement pragmatique et finalement très peu opératoire pour la suite. Une des trois élèves ne maitrisera jamais complètement la « technique »[3]. Contrairement au groupe 1, l'aspect syntaxique sera absent de cette partie du travail.

00 : 25 : 51 : « bon bref, si on mettait des formes dans des dans des ... ça serait plus simple. » L'investissement du registre numérique est abandonné. On peut toutefois supposer que le milieu s'est enrichi, pour au moins deux des trois élèves, d'une capacité à construire les hexagones et les octogones. Ce sont avec le triangle équilatéral et le carré, les polygones qui seront à présent manipulés.

Une répartition de polygones réguliers à construire s'effectue alors dans le groupe. C'est ce travail collectif[4] qui permet à ce moment l'émergence de la remarque suivante : « ouais mais y faut ça fasse la même taille aussi » et l'échange suivant :

1201 : ben non pourquoi

1202 : c'est pas dit qu' c'est obligatoirement la même taille

1203 : ouais faut qu'on en fasse plein

1204 : faut que chaque carré est la même

1205 : je pense

1206 : oui

1207 : ben alors maintenant tu fais les euh les euh

1208 : ah si si parce que de toute façon

1209 : les euh

1210 : ah mais non c'est pas dit

On constate, une divergence d'appréciation. Pour deux élèves la congruence des côtés des polygones réguliers semble « aller de soi », pour la troisième qui s'appuie sur la définition, il y a quelque chose à prouver.

A 00 : 26 : 51, une première preuve, entre l'expérience cruciale et l'expérience mentale, est avancée :

1214 : oui mais non mais justement parce que si c'est pas de la même longueur ça refait deux possibilités en plus

1215 : ouais

1216 : Ah ben non parce que après y aura un sommet qui sera dans la longueur

1217 : et alors ?

1218 : ben genre si tu fais un truc comme ça plus grand, plus grand par exemple tu le fais comme ça et après tu va refaire un triangle comme ça, eh ben là t'auras

1219 : eh ben là y a un triangle, voilà

1220 : ouais mais j'suis pas sur donc

Ce premier échange ne permet pas d'aboutir. Il va être nécessaire pour le groupe de se relancer dans la construction.

3. Ce qui se confirmera plus tard, repère 1418

4. Une recherche individuelle n'aurait, à coup sur, pas permis la formulation d'un tel énoncé.

Le groupe s'engage alors pendant vingt minutes dans une activité de réalisation des pièces. Ce sont les temps 13 et 14. Durant le temps 14 on retrouve la difficulté réelle liée à la détermination des angles avec un appui constant sur le perceptif et l'instrumenté pour conclure avec des échanges du style : « tu vois ç'est euh là c'est ... c'est pareil c'est 108 donc c'est pt'être ça ».

C'est à la suite de ce temps 14 qu'un retour à la question de la congruence se fait. Il faut encore cinq minutes d'échanges pour conclure avec une manipulation constante des polygones découpés :

1568 : tu veux dire que si on nous fait un de c'te longueur là

1569 : hum

1570 : tu veux dire si on en prend un de c'te longueur là et ben ça marche

1571 : mais on peut pas

1572 : et pourquoi

1573 : ben parce que le coin de là il est dans la longueur là et c'est dit euh on exclut heu assemblages voilà

1574 : ah ouais c'est vrai

1575 : on exclut de ce problème les pavages tels que le sommet d'un polygone appartienne au coté ...

1576 : on aurait du y penser tout de suite alors

La conclusion s'appuie là encore sur un retour à l'énoncé après une manipulation longue et discutée. L'énoncé proposait un exemple de pavage non strict, mais il apparait que les configurations possibles peuvent être différentes au point de masquer cette proximité. Pour certains élèves, ce temps semble donc nécessaire.

La théorie, s'enrichit ainsi d'une condition nécessaire d'existence qui se traduira sur l'affiche par : « Pour former un pavage archimédien il faut que chaque formes utilisées aient leurs côtés de même longueurs ».

Le temps suivant dure 25 minutes. Il est très peu productif du point de vue de l'avancée des connaissances. Les élèves se révèlent particulièrement maladroites dans les manipulations numériques et ne se libèrent pas de l'espace sensible, comme on peut le constater sur les extraits suivants :

16040 : un carré ça marche pas non plus ?

16041 : j'sais pas

...

16046 : non mais parce que ça tu pourras pas parce que avec après t'auras le coin de l'autre

16047 : pourquoi celui là il rentre pas

16048 : ah ben non

16049 : lui non plus il rentre pas parce que l'angle

16050 : là faudrait qu'y ait un angle comme ça

16051 : c'est pas les mêmes angles ça peut pas rentrer

16052 : oui mais est-ce que c'te figure là aussi elle marche

16053 : ah t'sais la sorte de maison ?

avec des essais calculatoires laborieux :

1 : 11 : 20

16271 : pourquoi ça marcherait pas par le calcul ?

...

16274 : vous avez fait comment ? 180 divisé par euh

16275 : On a fait 180 divisé par le nombre d'angles 5 là le nombre d'angles

16276 : pourquoi 180 ?

16277 : 5 et 360 - 36 324

16278 : 324 et là ça fait combien 90 et 60 150

16279 : et alors

1 : 12 : 20 :

16280 : 150 ben c'est un angle de 150 qu'est entre les deux

16281 : pourquoi tu dis que ça marche pas ChloChlo j'comprends pas

16282 : parce que ça ça fait ça c'est un angle de 108 et 108 plus 108 plus 90 et tu rajoute à ça pour avoir tu sais un angle enfin tout le tour

16283 : parce que tu peux pas en faire un deuxième là et tu calcules carrément

16284 : oui parce que y

16285 : de toutes façons on doit recommencer l'affiche

16286 : ben alors ouais ça marche peut-être

...

16301 : parce que sinon là ça déborde de quelques degrés

01 : 14 : 05

16303 : faut savoir en fait l'écart entre les deux ce que c'est

16304 : et mais on peut pas

16305 : attends j'reprends ma feuille de brouillon 360 divisé par 5 ça fait j'l'avais fait ça fait 72 72 c'est pour ça que j'étais partie sur le principe que j'faisais 360 - 72 ce qui valait à 200 non 186 non

On peut aussi extraire de ces échanges la confirmation que la condition nécessaire d'assemblage autour d'un nœud est présente au moins en acte. Elle sera d'ailleurs formulée explicitement sur l'affiche : « Il faut qu'à chaque sommet la somme des angles des figures soient égales à 360° ».

Le problème semble se poser clairement au moins dans le domaine graphique avec par exemple des essais d'ajustements de pentagones et d'octogones et le constat que l'assemblage n'est pas possible. Pour autant le groupe ne basculera jamais dans la démarche numérique malgré une certaine perception de la nécessité de ce genre d'approche : « 1 : 08 : 05 tu préfères pas calculer c'est quand même plus simple. » ou « 1 : 11 : 20 pourquoi ça marcherait pas par le calcul ? ». Les difficultés calculatoires et les rétroactions mal interprétées du milieu ne semblent pas permettre ce pas. Ainsi il y a bien ici appui sur les objets mais, étonnamment pour ces élèves, la familiarité insuffisante bloque l'élaboration de résultats supplémentaires.

On retrouve également dans ce temps de courtes formulations qui montrent un début de vision plus globale, par exemple sur le pavage régulier avec des triangles équilatéraux : 1 : 04 : 08 : « quand tous les triangles sont sont ... mais Charlotte les triangles en pointe ou ceux-là ça revient au même ». On observe donc un premier décentrage au delà d'un nœud. Mais l'essentiel de l'élaboration dans ce domaine se fait au bout 1h et 15 minutes avec la manipulation des polygones de différentes couleurs :

1734 : ouais et ouais et là j'suis d'avis à mettre un autre blanc ah mais non parce que là regarde c't'angle regarde deux blancs et un jaune si y a un blanc là

1735 : ben oui et après

1736 : ben oui mais regarde là y a orange jaune blanc et là y a deux blancs un jaune

1737 : parce que là tu mets un orange

1738 : ouais

1739 : bon après tu mets un blanc là

1740 : hum donc ça va pas

1741 : et l'autre là ça marche ou pas

1742 : lequel ?

1743 : celui avec le triangle et le carré

18 : bon on va peut être passer à l'affiche

On peut voir ici la naissance d'un questionnement sur la possibilité de paver globalement à partir d'un assemblage, stoppé ici par le passage à la rédaction de l'affiche. Ce passage confirme que l'élaboration théorique pour ce problème peut emprunter des voies variées, et qu'ici le fait que la condition $\sum a_i = 360^\circ$ n'est pas suffisante peut être établi indépendamment d'une avancée dans le registre numérique.

La rédaction de l'affiche pour ce groupe permettra de faire le point sur les objets considérés et les éléments de théorie construits. Les polygones utilisés sont précisés, avec un rajout de dernière minute, valorisant les n-gones avec n pair. Les résultats obtenus sont rédigés. Ce temps de rédaction ne permettra pas de dépasser l'obstacle déjà rencontré.

Présentation et débat

Les présentations vont permettre de mettre en évidence les deux démarches proposées.

La détermination de l'angle d'un polygone régulier, exposée par le groupe 1, trouve un écho auprès du groupe 2. Un des membres de ce groupe demandera une explicitation de la formule proposée par le groupe 1, et les deux autres membres lui préciseront : « mais si c'est ce qu'on a fait », « ben oui tu divises 360 par k et ... ». Mais c'est M, du groupe 1, qui expose très précisément la méthode. Ces échanges confirment les observations des temps précédents mais ne permettent pas de savoir exactement le degré de maitrise pour les élèves du groupe 1.

Les échanges auraient pu également permettre d'affiner la notion de type d'un pavage, mais l'invalidation du candidat pavage (3,3,6,6) n'aboutira pas, malgré une construction de VB au tableau, sous les critiques du groupe 1 :

2041 : donc forcément quand tu vas tourner si tu mets un hexagone à droite les sommets y vont pas tous y toucheront pas la même chose du moins pas dans le même sens
2042 : VB : attends vas y donc c'est pas très heu là y en a un autre là là y en a un là y en a un autre ... là [Rires] bon ben bref donc là y a bien deux deux rouges deux bleus deux rouges deux bleus y aura deux rouges ... ah ben non
2043 : CQ ben si
2044 : ah oui ben non ça marche pas là y a deux rouges et un bleu ah et deux bleus (*VB hésite car elle considère un nœud où les deux bleus ne sont pas côte à côte*)
2045 : VB ah ben si ça marche
2046 : ça marche pas bastien ?
2047 : j'sais pas si

Nous terminerons ce compte-rendu par des expressions de M et de VB au tableau laissant peut-être entrevoir un début d'organisation permettant de prolonger la recherche :

2064 : M : le fait que les triangles équilatéraux y passe pas avec tous les euh avec tous les polygones mais qu'avec euh qu'avec l'hexagone [...] parce que ça fait 120° et euh et le carré avec l'octogone et le reste ça marche pas

2090 : VB : mais parce que d'un côté si on met euh 10 enfin 10 machins 10-gones là ah après l'angle y va y sera plus petit parce que à chaque fois l'angle comme là on a vu que avec 8 c'est un carré donc là on met 90 ah on passe à 6 de 6 à [...] donc si on rajoute logiquement l'angle il s'ra plus petit donc je pense que là normalement c'est impossible à faire.

5.1.3 Conclusion

Il apparait difficile de donner une conclusion globale pour cette expérimentation tant les deux groupes se sont comportés différemment. Le milieu matériel que nous avions construit s'est révélé objectivement différent pour les deux groupes. Mais ceci n'a rien de surprenant, tant il est fréquent, dans une situation adidactique, que certains participants restent dans le milieu objectif alors que d'autres se positionnent plus facilement dans le milieu de référence.

Concernant plus précisément le groupe 2, nous pouvons constater, en lien avec ce qui a été montré, que :

Des premiers allers-retours entre les objets sensibles et la construction théorique ont permis une avancée initiale relativement rapide. Le milieu matériel proposé contenait suffisamment d'objets familiers que les membres du groupe ont su manipuler. Le milieu objectif alors constitué a tout d'abord bien joué son rôle, celui de milieu heuristique permettant les essais, les erreurs et les premières élaborations théoriques. Ce sont ici, les interactions avec les objets qui ont ainsi produit les premiers résultats de la théorie et en particulier les premières conditions nécessaires.

Dans un deuxième temps toutefois, le milieu objectif s'est révélé insuffisamment riche, avec des familiarités avec les objets qui ne permettent pas que les résultats, en particulier numériques, soient réellement disponibles. L'élaboration de la construction s'en trouve stoppée et durablement. La dernière avancée (aspect global) s'opérera grâce à un retour aux objets et prouve, par ailleurs, que l'approche des pavages archimédiens peut être multiple et que l'objet de la recherche peut-être ainsi cerné bien qu'encore dans l'ombre.

Le groupe a ainsi, malgré tout, construit, à partir d'un milieu objectif peu stable, un ensemble Ω déjà riche et une théorie affirmée sur les objets de cet ensemble. On peut imaginer qu'une poursuite du travail, après un temps d'échange, aurait permis de poursuivre la structuration du modèle.

5.2 Expérimentation en formation continue du second degré

Pourquoi cette nouvelle expérimentation ?

A l'issue de l'expérimentation en terminale S, une incertitude persiste quant à la capacité du modèle théorique à rendre compte de la réalité et à résister à la contingence. Est-il possible que l'objet à savoir apparaisse réellement, dans sa globalité, dans le cadre du modèle proposé ?

Une intervention en formation continue du second degré, dans le cadre du stage « enseigner par les problèmes » nous offre la possibilité d'une nouvelle mise à l'épreuve. Il est bien évident que d'autres objectifs pourraient être assignés à cette expérimentation. Dans le cadre de ce mémoire nous effectuerons une analyse restreinte, même si nous gardons à l'esprit l'étude de l'ensemble des éléments en jeu de la situation.

5.2.1 Contexte

Le milieu matériel pour cette expérimentation est inchangé. La situation est proposée à 19 enseignants de mathématiques, de collège ou lycée, répartis pour l'occasion en 4 groupes de 4 et un groupe de 3. Le temps imparti se révélera légèrement plus long, 2h30 de durée globale, que pour la précédente expérimentation. Pour l'occasion, nous mettons en œuvre cette séance et envisageons d'intervenir si nous en sentons la nécessité. Un observateur se place auprès d'un groupe.

Deux micros placés auprès de deux groupes distincts, enregistreront la totalité des échanges dans ces groupes et la mise en commun qui suivra.

5.2.2 Quelques éléments de compte-rendu

Nous retrouvons dans cette mise en œuvre une entrée rapide dans la recherche de tous les groupes et des manipulations dans un milieu objectif qui permettra ici dans tous les cas sauf un, d'identifier rapidement l'objet d'étude.

Nous ne pouvons revenir sur l'intégralité des démarches. Les échanges seraient à étudier finement. Notons toutefois, tout d'abord, que le milieu objectif s'est enrichi, au moins pour un groupe, des ressources liées aux transformations. Voici un extrait de la présentation de ce groupe :

02 : 07 : 12 . Donc on a fait pas mal de dessins en partant au départ d'un triangle équilatéral, ensuite le carré et par un calcul on a trouvé une formule qui est ici, en prenant i le nombre de polygones et puis n_i le nombre de côtés des polygones qu'on mettait autour du point on a remarqué que le nombre de polygones devait être égal à 2 plus 2 fois la somme des 1 sur n_i, et donc cette formule là, on a essayé de l'appliquer à toutes les figures qu'on avait trouvées avant, ça avait l'air de fonctionner donc à chaque fois qu'on trouvait cette égalité, là, les formules qui marchaient avant ça marchait bien et on a remarqué que cette formule, là, c'était pas une condition suffisante parce que, pour le cas du pentagone, donc en prenant 3 figures de 5 côtés, 5 côtés et 10 côtés la formule fonctionnait correctement mais, par contre, on pouvait pas, y avait un problème pour que, on arrivait pas à paver un plan en entier donc une condition encore une fois qu'on a trouvé nécessaire c'est que il fallait qu'y ait un axe de symétrie, c'est à dire que la figure par laquelle on partait, il fallait que tous les axes de symétrie de la figure de départ soient aussi des axes de symétrie du pavage entier, on a pas bien trouvé pourquoi ça devait être nécessaire, on ne sait pas si c'est suffisant aussi à vérifier ...

L'observateur : *Votre condition sur la symétrie c'est une conjecture ?*

Non en fait la condition sur la symétrie quand on regarde cette figure là donc ici on a des angles de 144 et 156 degrés et donc on doit avoir deux angles de 144 degrés à l'extérieur ici deux angles de 156 degrés à l'extérieur 144 156 et là d'après ce polygone là il nous faudrait 156 ici et d'après l'autre polygone 144.

On retrouve ici, des élaborations de conjectures en termes de conditions nécessaires ou suffisantes, dans un nouveau registre celui des transformations. Les retours se font là encore sur les angles des polygones réguliers. La familiarité avec ces objets a ici été construite grâce à l'élaboration d'une liste relativement exhaustive. Cette démarche utilisant les transformations est à approfondir.

Dans le cadre de notre étude nous revenons sur le début de recherche d'un groupe pour lequel nous retrouvons une démarche très similaire à celle du groupe 1 de l'expérimentation en TS. Sous l'impulsion d'un des membres du groupe qui affirme que tous les angles sont les mêmes c'est tout d'abord l'étude des angles des polygones réguliers qui est réalisée avec une idée de généralité, l'obtention de la formule $180 \times \dfrac{n-2}{n}$, l'idée de valeur maximale. Suit alors une étude d'un nœud d'un pavage (régulier !) avec rapidement, après l'observation du cas $p = 3$, la proposition $\alpha_n = \dfrac{360}{p}$ avec n le nombre de côtés du polygone considéré, α_n l'angle de ce polygone et p le nombre de fois où ce polygone apparait autour du nœud.

Les extraits ci-dessous montrent l'esprit du début de la recherche :

moi je sais pas j'ai réussi à faire une formule, l'angle qui est là c'est 180 fois n(n-2)sur n
t'en es sur de ça
ben l'angle de l'autre triangle y fait 60, là c'est 90, va y avoir 108
parce qu'en fait j'ai pris une situation à n côtés, donc ici le petit angle qu 'il y a là c'est 360 sur

n, là y a deux angles qui restent
...
pour un même p peut-il y avoir plusieurs n ?
non
pour un même nombre on obtient un angle et pour un angle y a pas 25 polygones
donc doit y avoir un lien entre n et p
comment on exprime le nombre de côtés en fonction de l'angle
faudrait trouver un lien entre n et p
...

On observe donc un appui sur les objets qui se révèlent ici très familiers et un engagement franc dans les registres numérique et arithmétique. Après environ 12 minutes, c'est la résolution de l'équation $180 \times \dfrac{n-2}{n} = \dfrac{360}{p}$ qui occupe l'essentiel du temps de recherche de ce groupe.

On peut observer un instant critique, après environ 25 minutes de recherche, devant la difficulté de résolution de l'équation en n et p :

Non mais c'est des trucs que tu vois en term ... *en référence à des équations diophantiennes*
... si on en met plus de 6 on va peut-être trouver un angle trop aigu
si si on va s'en sortir parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement, on peut pas faire moins que 60 ... et oui oui ... n il est forcément plus grand ou égal à 60 euh non pas n p
non p c'est un nombre de côté, non c'est le nombre de polygones
...

Apparait clairement ici le fait que la résolution d'un problème de la théorie se réalise en appui sur l'expérimentation. C'est la manipulation « mentale » des objets de la famille des polygones réguliers, qui permet de constater une impossibilité « ça marche plus ». On peut aussi constater que l'élaboration de cet élément de la théorie, s'appuie cette fois, non pas sur les objets polygones réguliers mais sur la famille des ces polygones. Il est également à noter que se joue ici un moment crucial, avec une minoration de $\dfrac{360}{p}$, qui est délicate à obtenir non seulement du fait de la nature de cet angle mais également du fait de la manipulation de l'inégalité et des variations contraires de p et α_n. C'est ainsi sans doute l'idée de variations, ou tout au moins de majoration, minoration qui apparait au cœur du raisonnement et qui permet ensuite rapidement de conclure pour les pavages réguliers.

Après 30 minutes le cas de ces pavages est ainsi réglé. Les 14 minutes suivantes seront consacrées à des clarifications, à la rédaction de l'affiche. Durant ce temps le terme pavage est employé sans que cela induise un retour sur ce qui a déjà été fait.

Nous nous sommes alors décidés à intervenir :

Donc là vous avez démontré que ?
Il y a trois pavages archimédiens
Et ils sont faits comment ces pavages ?
Avec des triangles ...
...
Et donc ce que vous avez démontré c'est qu'il y a trois pavages réguliers

Ceci permettra à un des membres du groupe d'affirmer : « et on peut pas mettre un triangle avec ... avec un hexagone » et à un autre « Et ouais le truc c'est que c'est marqué tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même type de polygone » puis aux autres d'enchainer.

Le collègue « mis en cause » pour la voie qu'il a proposée initialement enchaine alors rapidement :

non mais y a encore des histoires de plus grand ou pas ou nombre limité quand même ...

Et c'est cette piste poursuivie, qui mènera le groupe quasiment au bout de l'étude. Nous avons retranscrit en annexe 9, la fin de leur recherche et la présentation qu'ils ont fait à leurs camarades. La démarche consiste en une étude exhaustive suivant le nombre de polygones autour d'un nœud.

5.2.3 Conclusion

Cette expérimentation nous permet de confirmer deux aspects :

a. La consistance de la situation est affirmée et le modèle épistémologique élaboré n'est pas fondamentalement falsifié par la contingence. L'essentiel de ses composantes sont validées par cette dernière expérimentation. Il faudra toutefois le compléter :

   - pour prendre en compte un registre supplémentaire (celui des transformations) et ses interactions possibles.

   - pour rendre compte des raisonnements sur les objets qui se font jour et préciser le milieu de référence de cette situation. Il faudra en particulier mieux prendre en considération les questions de majoration-minoration.

b. Le modèle expérimental, tel qu'il a été proposé, permet le jeu prévu à une exception près qui se confirme : certains groupes, isolés, n'étudient que les pavages réguliers. Il apparait alors indispensable de modifier certaines variables de la situation pour que tous les actants puissent interroger les objets visés.

5.3 Compléments d'analyse a posteriori : une vision élargie

5.3.1 Modèle épistémologique

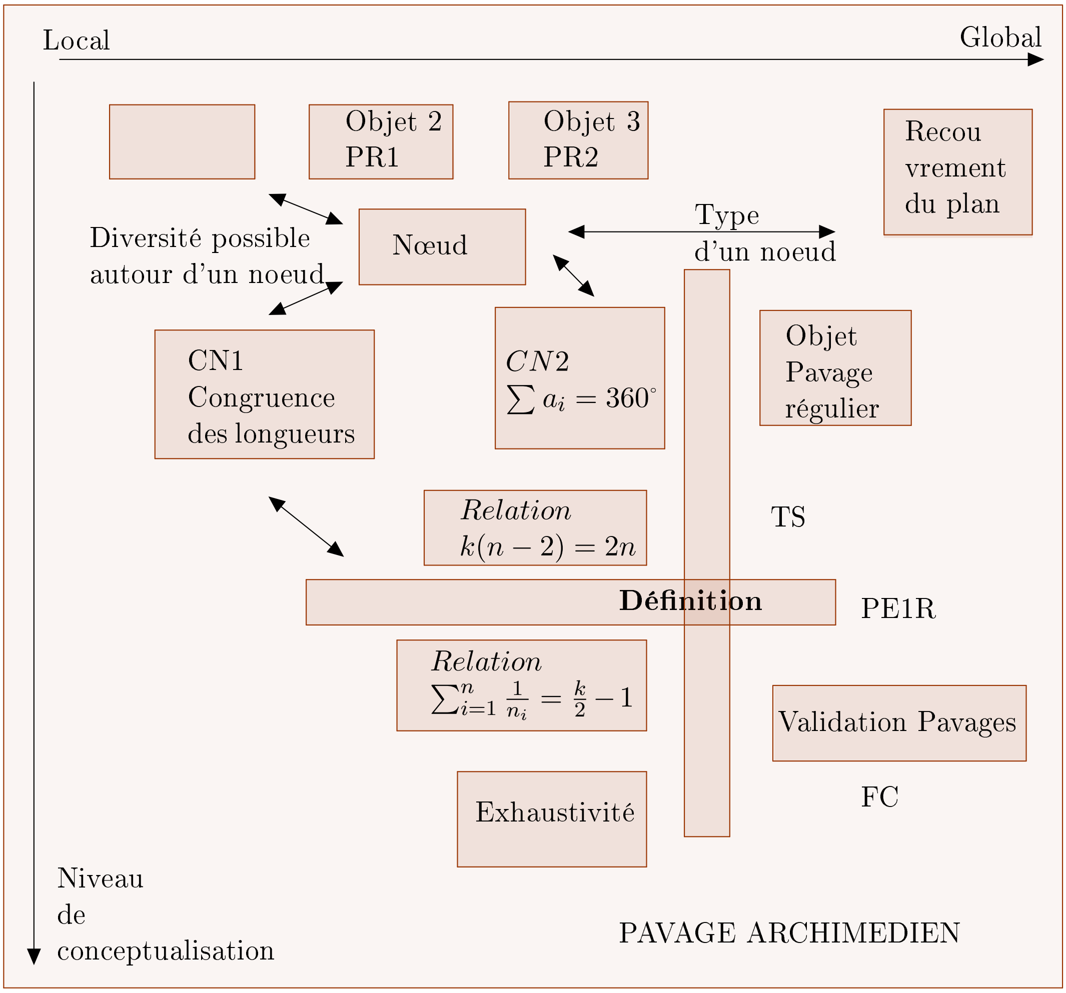
On peut à l'issue de ces allers retours entre modèles et contingence, esquisser une carte (page ci-contre), que nous organisons ici suivant deux axes, le niveau de conceptualisation et le point de vue local-global. Les flèches noires représentent quelques allers-retours entre objets qui ne sont pas tous représentés. Cette présentation rapide ne peut remplacer une carte conceptuelle plus détaillée qui pourra être établie après une analyse du corpus complet.

Quelques éléments de réflexion :

Le schéma présenté permet une première visualisation mais sa structuration ne rend pas forcément compte du rôle central des polygones réguliers qui sont au cœur de tous les va et vient qui permettent le passage du sensible au théorique, comme nous l'avons montré.

La présentation des relations en termes numériques rend aussi très mal les interactions entre les registres et en particulier l'appui sur le sensible géométrique. D'autant plus que, comme le montre les présentations lors du stage de formation continue, les expériences mentales décrites s'appuient fortement sur des « images » géométriques : « parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement ».

Le rôle de la définition est aussi à préciser. Elle irrigue la recherche, enrichit le milieu, mais les recherches le montrent, elle n'est pas au centre de la situation. C'est ce que nous souhaitions, il ne s'agit pas ici, en effet, de construire une définition des pavages archimédiens, mais bien d'explorer une situation problématique.[5] La définition se conçoit alors comme un objet du milieu, presque comme les autres.



Il est à noter que les objets pavages réguliers ont joué pour certains groupes plus qu'un simple rôle d'objet « exemplaire » mais également un domaine d'expérience pour les élaborations théoriques. Ceci est à prendre en considération pour un requestionnement du modèle expérimental mais plus généralement dans la structuration même du modèle épistémologique.

Le fait que peu de démarches initiales s'appuyant sur le calcul apparaissent, semble prouver que la familiarité nécessaire avec les polygones réguliers n'était pas toujours disponible. Ceci doit être pris en compte.

A l'issue de ces expérimentations, deux nouveaux points d'étude épistémologiques sont à approfondir : le rôle potentiel des transformations et l'influence des habiletés en termes de variations de grandeurs ou de majorations-minorations dans le cadre bien défini des angles de polygones réguliers.

D'autres pistes plus globales apparaissent également. Marc Rogalski, dans un résumé d'une intervention à l'université de Paris 7, écrit : « Ainsi, en géométrie ou topologie, définir un objet

5. Autrement dit, la situation n'est pas une « Situations de Construction de Définitions » au sens de C. Ouvrier-Buffet, [Ouvrier-Buffet, 2003].

par des propriétés des voisinages de chacun de ses points n'en assure pas en général une caractérisation globale, il faut y rajouter des propriétés elles-mêmes globales ; c'est par exemple le cas des variétés. » et il précise : « L'analyse d'un certain nombre de difficultés didactiques des élèves ou étudiants sur ces diverses questions nous fait penser qu'un enjeu important de l'enseignement est sans doute de développer chez eux une prise de conscience de l'existence des points de vue local et global ». Ainsi, la création d'une direction, local-global dans notre structuration, ouvre des possibilités d'analyse complémentaire et peut enrichir encore les potentialités de la situation.

La situation a fait ses preuves aussi sur ses potentialités en termes d'élaboration de théories et ceci a tous les niveaux envisagés dans cette étude. Certains éléments ont été clairement mis en évidence, et de nombreuses pistes sont apparues dans une partie du corpus que nous n'avons pu traiter finement, ceci reste à faire. Il est à remarquer que les difficultés relèvent diversement du curriculum mais que la situation résiste, y compris à des enseignants de mathématiques du second degré. L'étude débutée sur les relations objets-théorie peut ainsi être prolongée pour comprendre d'où vient exactement cette résistance.

5.3.2 Modèle expérimental

Le modèle construit a permis d'atteindre les objectifs que nous nous étions fixés pour la plupart des groupes considérés et de traiter les questions de recherche que nous nous étions posées. Pour autant il peut être amélioré, mais plusieurs pistes sont envisageables :

La question de la diversité des polygones autour d'un nœud

Dans toutes les expérimentations, il apparait que la phase collective d'appropriation de l'énoncé ne permet pas à tous les groupes de questionner la diversité possible des polygones réguliers autour d'un nœud. Plus globalement, c'est le milieu élaboré qui ne permet pas une adidacticité complète pour tous, dans la phase de recherche.

Il pourrait être envisagé de modifier l'énoncé et de donner un exemple de pavage archimédien non régulier.

Mais il nous parait pour l'instant préférable de privilégier l'intervention du professeur à un moment pertinent, de façon à permettre, ce qui a pu être observé, une élaboration théorique dans un cadre restreint qui semble propice à des développements. Ceci favorise également la prise en compte de la diversité des démarches et des conceptions.

Cette intervention peut être envisagée suivant plusieurs modalités : des interventions ponctuelles autant que nécessaires et dans la bonne temporalité ou une mise en commun permettant une première confrontation.

Pour une mise en œuvre retenant ces dernières hypothèses, une dévolution fine du scénario devra être effectuée.

La question de la familiarité avec les polygones

Le modèle a priori ne prend pas suffisamment en compte le possible manque de familiarité avec les polygones réguliers. Il est nécessaire de s'assurer, pour une mise en œuvre dans un temps restreint, ou pour certains niveaux de classe, que la mesure des angles des polygones réguliers puissent faire parti du milieu objectif des élèves et ne bloque pas l'argumentation, le contrôle de la pertinence des théories élaborées. Il peut également être envisagé un modèle expérimental intégrant plusieurs séances. Ceci permettrait éventuellement l'explicitation de certaines connaissances nécessaires à l'action sur le milieu, explicitation qui semble s'avérer nécessaire au vu de la recherche du groupe 2 de TS.

La question du milieu matériel

Certains aspects de cette question ont déjà été traités. On peut toutefois reformuler les pistes à travailler :

- L'environnement papier crayon et la mise à disposition de papier coloré, de ciseaux ... : La séparation apparait étroite entre manipulation d'objets dans le cadre d'une expérimentation et manipulation « à vide » qui ne permet pas d'envisager une réelle construction théorique. Dans notre expérimentation centrale, nous avons observé les deux cas. Le cantonnement au domaine de la manipulation étant pour ce groupe croisé avec une maladresse dans le champ numérique il sera nécessaire d'expérimenter à nouveau. La disponibilité du matériel retrouve de son intérêt dans les questions de validation au niveau global.

- Les instrumentations : calculatrice, tableur, logiciel de calcul formel, logiciel de géométrie dynamique : La calculatrice a trouvé toute sa place dans les milieux objectifs même si elle ne palie pas toutes les maladresses dans le domaine numérique. Il est à noter qu'à deux occasions, le logiciel geogebra a été soit évoqué comme moyen potentiel pour valider alors qu'il n'était pas à disposition, soit utilisé car disponible sur un PC. Une expérimentation l'utilisant est à construire.

- La piste de l'élaboration d'un matériel spécifique et de son introduction dans le milieu matériel est aussi à poursuivre. Une analyse fine des modalités d'introduction et d'utilisation est là encore à faire.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Il nous apparait à la fin (provisoire) de cette étude que nous disposons d'une situation à la consistance épistémologique certaine. La confrontation du milieu épistémologique élaboré à la contingence est probante. Lors des séances observées, de nombreux objets mathématiques ont été construits suite à des expérimentations s'appuyant sur des objets sensibles, puis mathématiques. Les interprétations que nous avons pu faire de ces observations en termes d'élaboration théorique montre la richesse du point de vue « dimension expérimentale » pour analyser cette situation.

Toutefois, le milieu expérimental déjà solide, en appui sur les résultats antérieurs concernant la mise en œuvre de problèmes de recherche, doit maintenant être affiné. Une des pistes en ce sens est la construction d'une situation moins monolithique. Ceci doit, en particulier, permettre de nous assurer de l'apparition effective, pour tous les élèves, de l'activité mathématique la plus riche possible au delà de la manipulation des objets.

De plus, quel que soit le milieu des nouvelles expériences, il sera nécessaire de retravailler les éventuelles interventions du maître pendant la phase actuellement adidactique, et pour cela concevoir une transmission entre le chercheur et les expérimentateurs qui permette de s'assurer du rôle de ces derniers. Les allers-retours entre l'étude théorique et l'analyse des expérimentations, qui fondent notre méthodologie, doivent permettre de progresser dans notre questionnement mais aussi d'aboutir à une expertise suffisamment bonne de la situation pour envisager un transfert aux praticiens (enseignants et formateurs).

De façon complémentaire à l'analyse en terme de dialectique objets-théorie, nous retenons pour la suite de l'étude de cette situation, quelques autres éléments clés :

- la pertinence de la théorie des registres de représentation sémiotique,
- la nécessité de considérer la dimension syntaxique au delà de l'usage de certaines formes opératoires,
- l'importance du regard porté sur les procédures mises en œuvre du point de vue de la logique et en particulier en terme de condition nécessaire et suffisante. La situation confirme ses potentialités de ce point de vue et nous pourrons envisager de le croiser avec un regard local-global.

Tout au long du mémoire nous avons ainsi donné des pistes pour la poursuite de l'étude qui nous préoccupe. La question est didactique mais nous espérons avoir mis en évidence la nécessité de croiser et d'articuler les études didactiques avec les questionnements historiques et épistémologiques. Dans ce cadre nous souhaitons également questionner plus avant les environnements géométrique et axiomatique de la pensée de Kepler, ceci en lien avec notre approche en termes de dimension expérimentale dans l'élaboration des théories plus ou moins locales.

Du point de vue conception, nous pouvons également envisager, à l'aune de l'étude épistémologique déjà réalisée, un réseau de problèmes, qui pourrait dans un premier temps, s'appuyer sur les démarches de Kepler interrogeant à la fois les pavages du plan, les solides réguliers et les transitions entre le plan et l'espace.

Bibliographie

[Arsac *et al.*, 1991] Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation problème.* IREM de Lyon.

[Arsac et Mante, 2007] Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* Scéren CRDP de Lyon.

[Bachelard, 1934] Bachelard, G. (1934). *Le nouvel esprit scientifique.* PUF.

[Bachelard, 1938] Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Vrin.

[Badoureau, 1881] Badoureau, A. (1881). Mémoire sur les figures isoscèles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 30:47 à 172.

[Balacheff, 1988] Balacheff, N. (1988). *Etude des processus de preuve chez des élèves de Collège. Thèse de Doctorat d'état ès-sciences. Volume 1 : Cadre théorique et étude de cas les polygones (type de preuves, traitement des réfutations, question de la définition).* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.Grenoble.

[Ball, 1908] Ball, W. R. (1908). *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes, Deuxième édition française Iraduite d'après la Quatrième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick.* Librairie scientifique A. Hermann.

[Belyi, 1974] Belyi, Y. A. (1974). Kepler and the developpement of mathematics. *Vistas in Astronomy*, 18:643–660.

[Bloch, 2002] Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage.*

[Brousseau, 1997] Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

[Brousseau, 1998] Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* La Pensée Sauvage.

[Brousseau, 2003] Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.

[Châtelet, 1992] Châtelet, F. (1992). *Une histoire de la raison.* Editions du Seuil.

[Conway *et al.*, 2008] Conway, J., H., B. et C., G.-S. (2008). *The symmetries of things.* A.K. Peters.

[Coxeter, 1948] Coxeter, H. (1948). *Regular polytopes. With eight plates and numerous diagrams.* London : Methuen and Co.

[Coxeter, 1974] Coxeter, H. (1974). Kepler and mathematics. *Vistas in Astronomy*, 18:661–670.

[Décaillot, 2002] Décaillot, A.-M. (2002). Géométrie des tissus. Mosaïques. Echiquiers. Mathématiques curieuses et utiles. *Revue d'histoire des mathématiques*, 8:p. 145–206.

[De la Harpe, 2009] De la Harpe, P. (2009). Ornements et cristaux, pavages et groupes.

[DGES, 2009] DGES (Mars 2009). Projet de programme de mathématiques - classe de seconde générale et technologique - soumis à consultation.

[Dias, 2008] Dias, T. (2008). *L'intégration de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations d'enseignement et de formation.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

[Dias et Durand-Guerrier, 2005] Dias, T. et Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM*, 60:pp. 61–78.

[Durand-Guerrier, 2005a] Durand-Guerrier, V. (2005a). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

[Durand-Guerrier, 2005b] Durand-Guerrier, V. (2005b). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques, à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? Bordeaux, 25-27 mai 2005.*

[Duval, 1996] Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 16.3.

[Euclide, 1990] Euclide (1990). *Les éléments, traduction et commentaires de B. Vitrac, préface de M. Caveing Volume 1.* PUF.

[EXPRIME, 2010] EXPRIME, E. (2010). Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'ecole. CDROM.

[Fregona, 1995] Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme " milieu " dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I. Diffusion LADIST Bordeaux.

[Front et Legrand, 2010] Front, M. et Legrand, P. (janvier 2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP.*

[Grenier, 2008] Grenier, D. (2008). *Expérimentation et preuves en mathématiques.* PUF, collection « Sciences, homme et société ».

[Grenier et Tanguay, 2008] Grenier, D. et Tanguay, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *petit x, IREM de Grenoble*, n°78:26–52.

[Grünbaum et Shephard, 1977] Grünbaum, B. et Shephard, G. (1977). Tilings by regular polygons. Patterns in the plane from Kepler to the present, including recent results and unsolved problems. *Mathematics magazine*, 50, N°5:227–247.

[Grünbaum et Shephard, 1987] Grünbaum, B. et Shephard, G. (1987). *Tilings and patterns.* Freeman and Co.

[Houdement, 2004] Houdement, C. (2004). Mathématiques, didactique et découpages : la richesse d'un problème. *Mathématiques et résolution de problèmes : un point de vue didactique. Actes des journées de formation, IREM Montpellier 13-14 mai 2004*, pages 43–52.

[Kepler, 1619] Kepler, J. (1940 [première édition 1619]). *Harmonices Mundi.* C.H. Beck, München. En ligne sur le Service de la documentation de l'Université de Strasbourg - Patrimoine numérisé http ://num-scd-ulp.u-strasbg.fr :8080/19/.

[Kepler, 1980] Kepler, J. (1980). *Harmonie du monde. Harmonices Mundi. Traduit du latin avec un avertissement et des notes par Jean Peyroux.* Blanchard.

[Lafforgue, 2006] LAFFORGUE, L. (2006). Les savants et l'école. http ://www.ihes.fr/ lafforgue/education.html.

[Lakatos, 1974] LAKATOS, I. (1974). *Proofs and refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* Thèse de doctorat, Cambridge University Press.

[Lakatos, 1984] LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique.Textes présentés par John Worall et Élie Zahar Traduction de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde.* Hermann, Paris.

[LeMoigne, 1995] LEMOIGNE, J. (1995). *Les épistémologies constructivistes.* PUF, Que sais-je.

[Margolinas, 1995] MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques*, pages 89–102.

[Margolinas, 2002] MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques .*, pages 141–156.

[Martin, 1987] MARTIN, G. E. (1987). *Transformation Geometry, an Introduction to Symmetry.*

[Morando, 1974] MORANDO, B. (1974). Kepler's scientific and astronomical achievements. *Vistas in Astronomy*, 18:109–118.

[Ouvrier-Buffet, 2003] OUVRIER-BUFFET, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[Papadopoulos, 2007] PAPADOPOULOS, A. (2007). Degré de complexité en géométrie et en musique. Réflexions à partir de l'harmonie du monde de Képler. *L'ouvert*, 114.

[Pappus, 1933] PAPPUS, d'Alexandrie traduit par Ver Eecke, P. (1933). *La Collection mathématique.* Desclée De Brouwer, Paris and Bruges. Réédition Blanchard, Paris 1982.

[Peix et Tisseron, 1998] PEIX, A. et TISSERON, C. (1998). Le problème ouvert comme moyen de réconcilier les futurs professeurs d'école avec les mathématiques. *Petit x*, 48:5 – 21.

[Puig-Renault, 2006] PUIG-RENAULT, I. (2006). Etude d'un moment sensible dans l'apprentissage de la géométrie : une situation de pavage. Mémoire de D.E.A., LIRDHIST-Université Lyon 1.

[Rousseau et Saint-Aubin, 2009] ROUSSEAU, C. et SAINT-AUBIN, Y. (2009). *Mathématiques et Technologie.* Springer New York.

[Simon, 1979] SIMON, G. (1979). *Kepler astronome astrologue.* Gallimard.

[Vergnaud, 2001] VERGNAUD, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. *In Actes du Colloque GDM-2001.*

[Vergnaud, 2005] VERGNAUD, G. (2005). Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. *Balises en didactique des mathématiques. A. Mercier and C. Margolinas. (Coord.). Grenoble : La Pensée Sauvage*, pages 123–136.

Annexes

ANNEXE A PAVAGES SEMI-REGULIERS DU PLAN

Mathias Front et Pierre Legrand

Les pavages du plan sont une source quasi inépuisable de travaux en classe. En dehors des pavages réguliers bien connus que l'on obtient à partir d'un carré, d'un triangle équilatéral ou d'un hexagone régulier, il en existe une très grande variété.

Cet article porte sur la catégorie la plus connue, les pavages dits semi-réguliers ou archimédiens. Il ne s'agit pas ici de fournir clés en main un thème d'activités, qui serait d'ailleurs trop vaste, mais d'apporter au lecteur des éléments lui permettant d'élaborer ses propres sujets.

Définition

Un *pavage semi-régulier* du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers satisfaisant aux conditions suivantes :

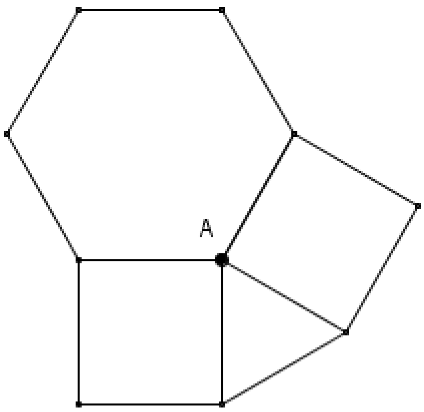
- si deux polygones du recouvrement ont un point commun unique, il est sommet de l'un et de l'autre (un tel point sera dit un *nœud* du pavage) ;

- si deux polygones du recouvrement ont plus d'un point commun, leur intersection est un côté de l'un et de l'autre ;

- la configuration locale en chaque nœud est la même à une symétrie près : si par exemple, en tournant autour du nœud N dans le sens direct, on trouve successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone, on trouvera aussi successivement un m-gone, un n-gone, un p-gone et un q-gone en tournant autour de tout autre nœud soit dans le sens direct soit dans le sens rétrograde.

De tels pavages, appelés aussi archimédiens bien qu'à notre connaissance on n'en trouve pas trace dans les œuvres d'Archimède, semblent avoir été utilisés dès l'Antiquité. Mais la première étude systématique est due à Kepler, dans le livre II de son *Harmonie du Monde* (1619). Signalons au passage que, dans le cinquième et dernier livre, il établit la fameuse troisième loi du mouvement des planètes, qui relie leur période à la mesure du grand axe de leur orbite… et que dans le quatrième, il traite d'astrologie.

Un peu de vocabulaire



A est d'ordre 4 et de type (6,4,3,4)

● le *type* d'un nœud est la liste des nombres de côtés des polygones l'ayant pour sommet, énumérés en tournant autour de ce nœud dans le sens direct ou dans le sens rétrograde. Ainsi le nœud N dont nous parlions précédemment est de type (m, n, p, q), mais il est aussi de type (n, p, q, m) ou (q, p, n, m) ; en revanche, si m, n, p, q sont distincts, il n'est pas de type (m, n, q, p).

● l'*ordre* d'un nœud est le nombre de polygones du pavage l'ayant pour sommet. Ainsi le nœud N décrit ci-dessus est d'ordre 4.

Pour un pavage semi-régulier donné, tous les nœuds ont même ordre et même type, qui sont dits ordre et type du pavage. En outre, les côtés des polygones le composant ont tous même longueur.

Remarques initiales

Relation entre l'ordre et le type

Si n_i est le nombre de côtés du polygone régulier P_i, ses angles valent $\alpha_i = (1 - \frac{2}{n_i})\pi$. Autour d'un nœud de type $(n_1, n_2, \ldots n_k)$, on a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi$. On en tire aussitôt :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1. \qquad \text{(R)}$$

Valeurs de l'ordre possibles a priori

On ne peut assembler autour d'un nœud moins de 3 et plus de 6 polygones réguliers. Le premier résultat est évident. Le second découle, avec les notations du paragraphe précédent, de ce que la plus petite valeur possible de α_i est $\pi/3$, donc que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq k\frac{\pi}{3}$.

Un pavage d'ordre 6 suppose que tous les α_i valent $\pi/3$; c'est le classique pavage régulier par triangles équilatéraux. Nous écarterons désormais ce cas.

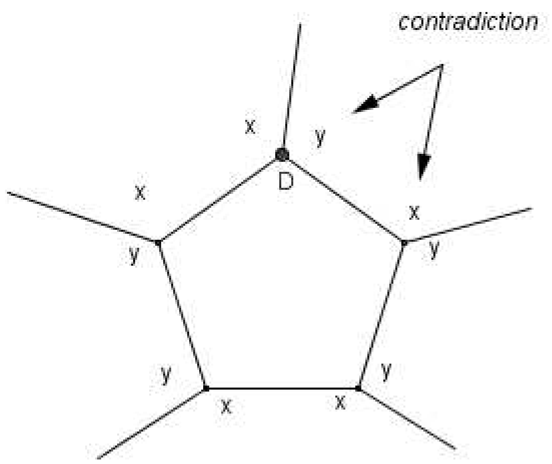
Il nous faut donc commencer par chercher à assembler autour d'un point 3, 4 ou 5 polygones réguliers… étant entendu qu'un tel assemblage ne pourra pas forcément être prolongé en un pavage semi-régulier du plan tout entier.

Pavages d'ordre 3

Avec les notations précédentes, la relation (R) nous donne $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$. Il faudra donc décomposer $\frac{1}{2}$ en somme de trois fractions de numérateur 1, mais une telle décomposition ne fournit pas toujours un pavage, comme le montrent les deux remarques ci-après, qui permettront de limiter le travail.

Lemme 1

Dans un pavage semi-régulier d'ordre 3, de type (x, y, z), si z est impair, alors $x = y$.



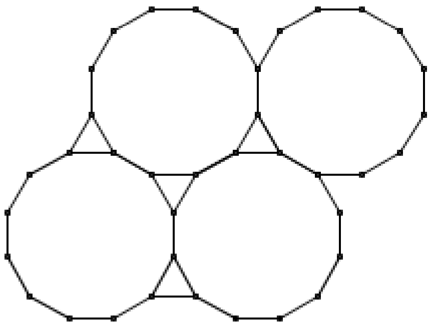
Supposons d'abord x, y, z tous distincts et observons ce qui se passe quand on décrit dans le sens direct le pourtour d'un z-gone en partant d'un point D (figure ci-contre). Le premier côté longe un x-gone, le second un y-gone, le troisième un x-gone, etc. Quand on arrive au dernier, on obtient, puisque le nombre z de côtés est impair, un x-gone alors que ce devrait être un y-gone compte tenu du type de D.

Supposons maintenant que l'on ait $x = z$ et $z \neq y$. Le même travail permet de conclure à une contradiction : si l'on décrit dans le sens direct le pourtour d'un z-gone en partant d'un point D, les côtés de ce z-gone longent alternativement un z-gone et un y-gone, ce qui exigerait que le nombre de côtés du z-gone décrit soit pair.

Lemme 2

Dans un pavage semi-régulier d'ordre 3, de type (x, y, z), si z est impair, alors $z = 3$.

Nous savons par le lemme 1 que $x = y$. On a donc $\frac{2}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire $y(z-2) = 4z$. Comme z est impair, $z-2$ est impair ; mais il divise $4z$, donc il divise z et par suite aussi $z-(z-2) = 2$, donc il vaut 1.



pavage (3, 12, 12)

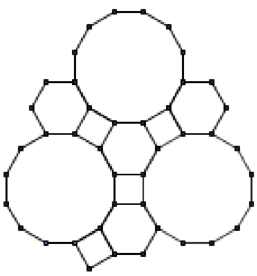
Étude du cas $z=3$

Des calculs que nous venons de faire on deduit aussitôt que $y=12$ et donc que le pavage, s'il existe, est du type (12, 12, 3). La figure ci-contre montre qu'un tel pavage existe ; il est unique à une similitude directe près, car une fois choisi un dodécagone de base et l'un des côtés sur lequel on bâtit un triangle équilatéral, la totalité de la construction est déterminée.

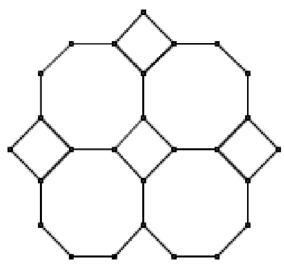
Cas où x, y, z *sont tous pairs*

On peut toujours supposer $x \leq y \leq z$. De $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, on tire $\frac{3}{x} \geq \frac{1}{2}$, donc $x \leq 6$, donc $x=6$ ou $x=4$.

Le premier cas impose $x=y=z=6$ et correspond au classique pavage du plan par des hexagones réguliers. Le second cas donne $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$; cela exige que y et z soient strictement supérieurs à 4, donc au moins égaux à 6. Mais, puisque $y \leq z$, on a $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{4}$, donc y vaut 6 ou 8. Finalement, on aboutit à (4, 6, 12) et (4, 8, 8).



pavage (4, 6, 12)



pavage (4, 8, 8)

Les figures ci-dessus montrent que de tels pavages existent. Pour la même raison que précédemment, ils sont uniques à une similitude directe près : dans le premier cas, une fois choisi un dodécagone de base et l'un des côtés contre lequel on posera un carré, la totalité de la construction est déterminée ; dans le second cas, une fois placé un carré de base, la construction s'ensuit.

Pavages d'ordre 4

Soit un pavage d'ordre 4 et de type (x, y, z, t). On classe ces quatre nombres dans l'ordre croissant : n_1, n_2, n_3, n_4. la relation (R) établie au début s'écrit ici $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4} = 1$. On en tire $\frac{4}{n_1} \geq 1$, ce qui permet d'affirmer que n_1 vaut 3 ou 4.

Si $n_1 = 4$, les quatre fractions $\frac{1}{n_i}$ sont au plus égales à $\frac{1}{4}$; leur somme ne peut valoir 1 que si chaque n_i vaut 4. Le type est donc (4, 4, 4, 4) : c'est le pavage régulier par des carrés.

Nous supposons désormais $n_1 = 3$. On a alors $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4} = \frac{2}{3}$, les n_i étant toujours supposés rangés par ordre croissant, ce qui assure l'inégalité $\frac{3}{n_2} \geq \frac{2}{3}$; donc n_2 vaut 3 ou 4.

Si $n_2 = 3$, on a $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4} = \frac{1}{3}$, donc $n_3 > 3$. De plus $\frac{2}{n_3} \geq \frac{1}{3}$ donne $n_3 \leq 6$. On a donc à essayer pour n_3 les valeurs 4, 5 et 6. On trouve immédiatement $n_3 = 4$, $n_4 = 12$ et $n_3 = 6$, $n_4 = 6$.

Si $n_2 = 4$, on a $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4} = \frac{2}{3}-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$, d'où l'on tire $\frac{2}{n_3} \geq \frac{5}{12}$, soit $n_3 \leq \frac{24}{5}$, donc $n_3 \leq 4$, ce qui prouve puisque $n_3 \geq n_2$, que $n_3 = 4$. Il vient alors $n_4 = 6$.

Nous avons, comme listes de valeurs *a priori* possibles, classées dans l'ordre croissant, (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6) et (3, 4, 4, 6). Il nous faut donc examiner la liste de types suivante :

(3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 4, 6) et (3, 4, 6, 4) (L)

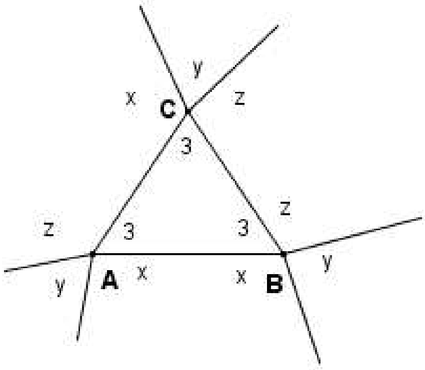
Tout autre type *a priori* envisageable se ramène à l'un de ces six. Ainsi, par exemple (4, 3, 3, 12) définit par symétrie le même type que (12, 3, 3, 4), qui par permutation circulaire se ramène à (3, 3, 4, 12).

Un lemme va nous permettre de montrer que quatre de ces six types ne permettent pas de définir un pavage semi-régulier.

Lemme 3

Il n'existe pas de pavage semi-régulier de type $(3, x, y, z)$ avec $x \neq z$.

La démonstration est voisine de celle du lemme 1. Observons ce qui se passe aux sommets d'un triangle équilatéral ABC du pavage en partant du point A.



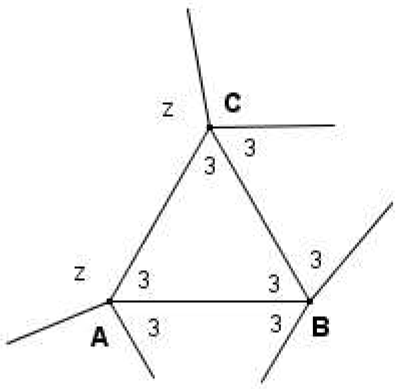
Premier cas : x et z différents de 3

Supposons, ce qui n'est pas restrictif, que le côté AB du triangle ABC longe un x-gone. Alors, compte tenu du type du nœud B (et que y soit ou non égal à 3), le côté BC longe un z-gone. Puis, compte tenu du type du nœud C, le côté CA longe un x-gone. On voit alors que le nœud A est du type $(3, x, y, x)$ et donc que $x = z$.

Second cas : $x = 3$ ou $z = 3$

Supposons par exemple $x = 3$. Dans la liste (L) ci-dessus aucun des types *a priori* possibles ne présente trois fois le nombre 3. Il nous faut donc étudier la possibilité du type $(3, 3, y, z)$, avec y et z différents de 3.

Pour un nœud de ce type, la juxtaposition des deux « 3 » signifie que ce point est sommet de deux triangles équilatéraux ayant un côté commun. Il y a donc dans le pavage un triangle équilatéral ABC tel que le côté AB longe un autre triangle équilatéral. Étant donné le type du nœud C, l'un des deux côtés BC et AC, mettons BC, est longé par le triangle ABC et un autre triangle équilatéral. Mais alors le nœud B est de type (3, 3, 3, …), ce qui est exclu.



Pavages exclus par le lemme 3

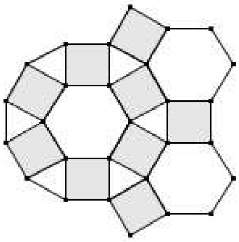
Voyons la liste (L) des cas *a priori* possibles :

(3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) (3, 6, 3, 6), (3, 4, 4, 6), (3, 4, 6, 4).

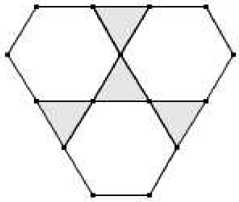
Les types (3, 4, 3, 12), (3, 4, 4, 6), (3, 3, 4, 12) et (3, 3, 6, 6) sont exclus par le lemme 3 comme étant du type $(3, x, y, z)$ avec $x \neq z$.

Restent à étudier les deux cas (3, 4, 6, 4) et (3, 6, 3, 6).

Les figures ci-après montrent que de tels pavages existent. Ils sont uniques à une similitude directe près pour la même raison que dans les cas précédents : une fois choisi un hexagone de base, la totalité de la construction est déterminée.



pavage (3,4,6,4)

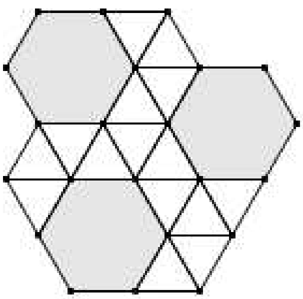


pavage (3,6,3,6)

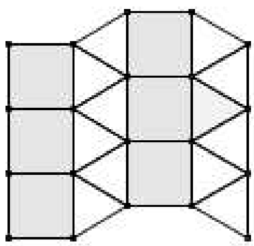
Pavages d'ordre 5

Soit un pavage d'ordre 5 et de type (x, y, z, t, u). On classe ces quatre nombres dans l'ordre croissant : n_1, n_2, n_3, n_4, n_5. La relation (R) établie au début s'écrit ici $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$. Les trois premiers n_i sont égaux à 3,car s'il n'en était pas ainsi on aurait $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; or le second membre vaut $\frac{17}{12}$, inférieur à $\frac{3}{2}$. Il reste donc à discuter $\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5} = \frac{1}{2}$, avec n_4 et n_5 au moins égaux à 3. On voit aussitôt que les seules solutions sont (3,6) et (4,4).

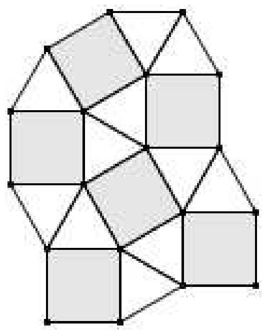
Les types *a priori* possibles sont donc (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4) et (3,3,4,3,4). Les figures ci-dessous montrent que de tels pavages existent.



pavage (3,3,3,3,6)



pavage (3,3,3,4,4)



pavage (3,3,4,3,4)

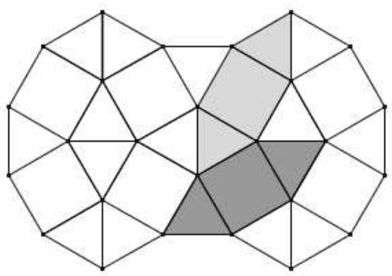
Le pavage (3,3,3,4,4) est manifestement unique à une similitude directe près. Il en est de même pour le pavage (3,3,4,3,4), mais la démonstration est un peu plus laborieuse ; on peut cependant faire constater aux élèves que, si l'on choisit comme point de départ deux triangles équilatéraux accolés, on a carte forcée pour l'ensemble de la construction.

En revanche, à partir d'un hexagone régulier donné, on peut construire *deux* pavages (3,3,3,3,6) se correspondant par symétrie, mais non superposables par déplacement. Si on construit autour de l'hexagone sa couronne de 18 triangles équilatéraux, on voit en effet que l'on a deux façons de placer les hexagones suivants. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les deux solutions sont superposables par symétrie, mais non par déplacement. Pour le type (3,3,3,3,6) *et lui seul*, l'unicité est donc à une similitude *directe ou inverse* près.

Appendice

Quelques suggestions de travail avec des élèves :

1) *Leur faire découvrir les translations, symétries et rotations* laissant invariant un pavage donné, ou plutôt (il est délicat de justifier qu'on les a toutes), *des* translations, *des* symétries et *des* rotations le laissant invariant.



C'est souvent simple, mais cela ne saute pas toujours aux yeux. Ainsi, dans le cas du dernier pavage présenté, (3, 3, 4, 3, 4), que nous avions volontairement mis dans une « mauvaise » position, il faut, pour bien voir les choses, le tourner de $\pm\pi/4$, comme nous l'avons fait pour obtenir la figure ci-contre.

2) *Leur faire trouver un « assemblage de base*[1] », c'est-à-dire une pièce constituée d'un groupement de polygones contigus du pavage et telle qu'avec un lot de pièces déduites de celle-ci par translation on puisse reconstituer entièrement le pavage. On voit par exemple aussitôt que, dans le cas du pavage (4,8,8), une solution est constituée d'un octogone et d'un carré ayant un côté commun.

Le travail est possible dans tous les cas, mais le lecteur pourra se convaincre que trouver une solution dans les cas (3,4,6,4), (4,6,12) ou (3,3,3,3,6) est nettement moins évident. Le pavage (3, 3, 4, 3, 4) a une propriété intéressante : l'assemblage des six morceaux marqués en gris dans la figure ci-dessus permet par

1 Terme non canonique.

des translations de reconstituer l'ensemble, mais à partir du bloc de trois morceaux marqués en gris foncé (ou de celui marqué en gris clair) on peut aussi reconstruire le pavage complet, à condition de ne pas se limiter aux translations et d'admettre de faire tourner les pièces.

Bibliographie

1. Sur le site anglais de *Wikipedia* (wikipedia.org), taper « tiling by regular polygons » ; pas de démonstration, mais de belles figures en couleur.

2. Taper sur *Google recherche avancée* : « Art islamique et mathématiques » et « Pochon ». Article clair, bien illustré, qui joint aux pavages semi-réguliers d'autres pavages par des polygones réguliers.

3. E. FOURREY : Curiosités géométriques, Vuibert, réédité 2001, 3e partie, ch. 2, § 3.

3. G. SIMON *: Kepler astronome astrologue*, Gallimard 1979 [ne parle pas de pavages, mais constitue une plongée passionnante dans l'univers mental d'un génie qui croyait au pouvoir des astres ; introuvable en librairie, à voir en bibliothèque].

4. G. MARTIN : *Transformation Geometry, An Introduction To Symmetry*, Springer 1987 [le chapitre 12 traite de façon claire et détaillée les pavages de tout genre].

Annexe B : Extrait du livre V de la collection de Pappus d'Alexandrie

LIVRE V DE LA COLLECTION DE PAPPUS D'ALEXANDRIE

—————

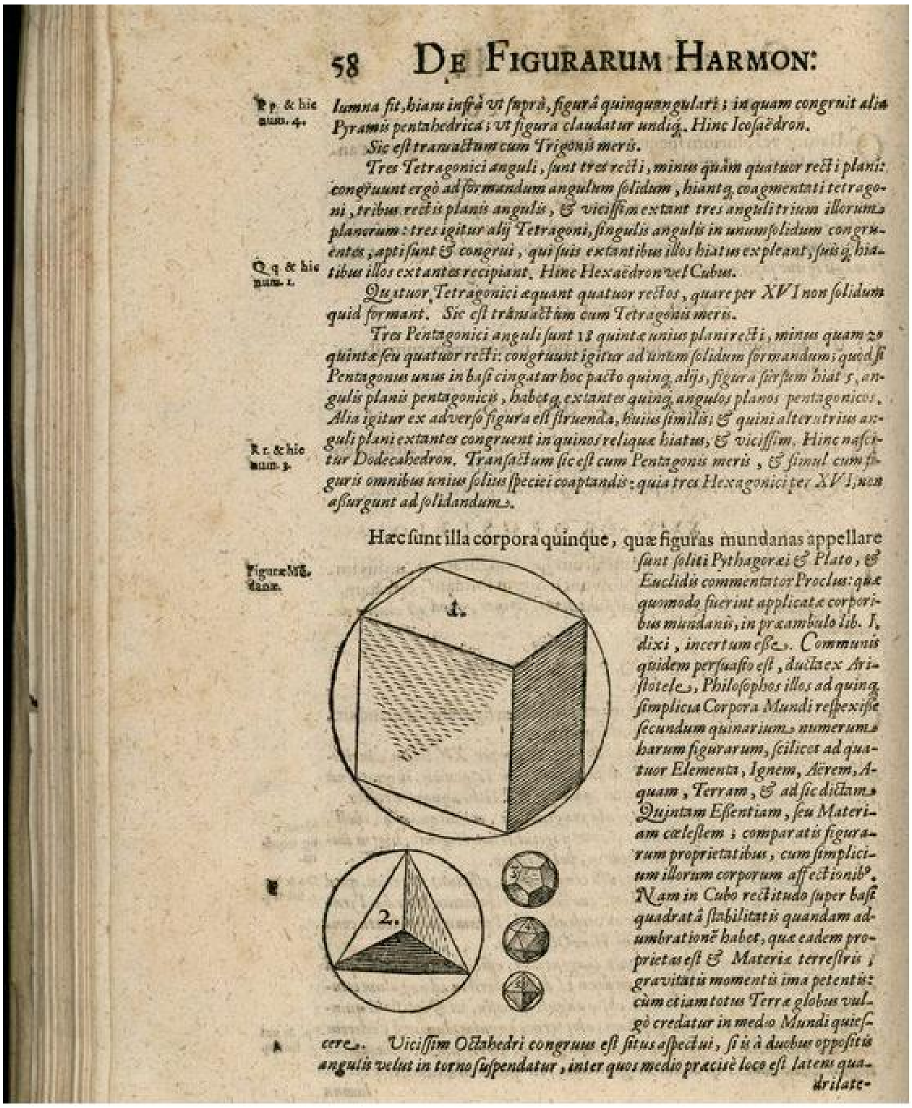
IL CONTIENT LES COMPARAISONS DES FIGURES PLANES AYANT MÊME PÉRIMÈTRE ENTRE ELLES ET AVEC LE CERCLE, ET LES COMPARAISONS DES FIGURES SOLIDES AYANT MÊME SURFACE ENTRE ELLES ET AVEC LA SPHÈRE.

——————————

La divinité cher Mégétius, a donné aux hommes la conception la plus haute et la plus parfaite de la sagesse et des mathématiques, mais n'a octoyé ce privilège que partiellement aux animaux. Elle a, en effet, accordé aux hommes de pouvoir, de par leur intelligence, faire toute chose par raison et en connaissance de cause et, quant aux autres êtres vivants, elle a octoyé à chacun d'eux la faculté d'acquérir ce qui leur est utile et de nécessité vitale, non plus par raison, mais grâce à une certaine intuition naturelle. On peut d'ailleurs observer la réalité de ce fait chez un grand nombre d'espèces animales, et tout particulièrement chez les abeilles. En effet, non seulement il y a lieu d'admirer leur discipline et leur soumission envers celles qui dirigent le gouvernement établi parmi elles ; mais, ce qui étonne encore plus, c'est leur zèle, leur propreté dans la récolte du miel, leur vigilance et leur sagesse en vue de sa conservation. On dirait que, convaincues que c'est de la part des dieux qu'elles apportent cette parcelle d'ambroisie aux hommes cultivés, les abeilles n'ont pas cru bon de répandre leur miel au hasard sur le sol, sur du bois ou sur quelque autre matière informe et irégulière ; elles choisissent les plus belles fleurs parmi les plus agréables qui croissent à la surface de la terre et, pour contenir ce miel, elles construisent des vaisseaux qu'on appelle des alvéoles, tous égaux entre eux, semblables, juxtaposés et de la forme hexagonale. Au reste, voici comment on se rend compte de ce qu'elles parviennent à ce résultat à la faveur d'une certaine intuition géométrique. Elles ont cru que ces figures devaient être absolument juxtaposées et avoir leurs côtés communs, afin que des substances étrangères ne puissent tomber dans leurs intervalles et venir ainsi souiller le fruit de leurs travaux. Or trois figures rectilignes étaient susceptibles de remplir cette condition, c'est à dire des figures régulières, équilatérales et [équiangles ; car les] figures dissemblables répugnaient aux abeilles, et ce sont donc les triangles, les quadrilatères et les hexagones équilatéraux qui peuvent avoir ainsi leurs côtés communs sans qu'il y ait entre eux des compléments dissemblables. En effet, l'espace qui règne autour d'un même point est rempli par six triangles équilatéraux en raison de six angles dont chacun vaut les deux tiers d'un angle droit ; par quatre carrés en raison de quatre angles droits, et par trois hexagones en raison de trois angles d'hexagones dont chacun vaut un angle droit et un tiers. Mais trois pentagones ne suffisent plus pour remplir l'espace qui règne autour d'un même point tandis que quatre excèdent cet espace, parce que trois angles de pentagone sont plus petits que quatre angles droits (car chacun d'eux vaut un angle droit et un cinquième), et que quatre de ces angles dépassent quatre angles droits. Et trois heptagones ne peuvent pas non plus être disposés autour d'un même point en étant juxtaposés entre eux suivant leur côtés, parce que trois angles d'heptagone dépassent quatre angles droits (car chacun d'eux vaut un angle droit et trois septièmes) ; et le même raisonnement peut s'appliquer à fortiori, aux polygones plus élevés. En conséquence, comme il y a trois figures au moyen desquelles on peut remplir l'espace qui règne autour d'un point : le triangle, le carré et l'hexagone, les abeilles ont choisi en vue de leur industrie, grâce à leur habileté, la figure la plus polygonale, après avoir compris qu'elle peut recevoir plus de miel que chacune des autres figures.

D'ailleurs, les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l'hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c'est l'hexagone qui pourra contenir plus de miel. Mais pour ce qui nous concerne, comme nous avons la prétention de posséder une plus grande part de sagesse que les abeilles, nous rechercherons quelque chose de plus remarquable. En effet, parmi les figures planes équilatérales et équiangles de même périmètre, celle qui possède un plus grand nombre d'angles est continuellement plus grande, et la plus grande de toutes est le cercle lorsqu'il a même périmètre qu'elles.

Annexe C : Planches de l'Harmonices Mundi



58 DE FIGURARUM HARMON:

P p. & hic num. 4. *lumna fit, hians infrà ut suprà, figurâ quinquangulari; in quam congruit alia Pyramis pentahedrica; ut figura claudatur undiq. Hinc Icosaëdron.*

Sic est transactum cum Trigonis meris.

Tres Tetragonici anguli, sunt tres recti, minus quàm quatuor recti plani: congruunt ergò ad formandum angulum solidum, hiantq. coagmentati tetragoni, tribus rectis planis angulis, & vicissim extant tres anguli trium illorum planorum: tres igitur alij Tetragoni, singulis angulis in unum solidum congruentes, apti sunt & congrui, qui suis extantibus illos hiatus expleant, suisq. hiatibus illos extantes recipiant. Hinc Hexaëdron vel Cubus.

Q q & hic num. 1.

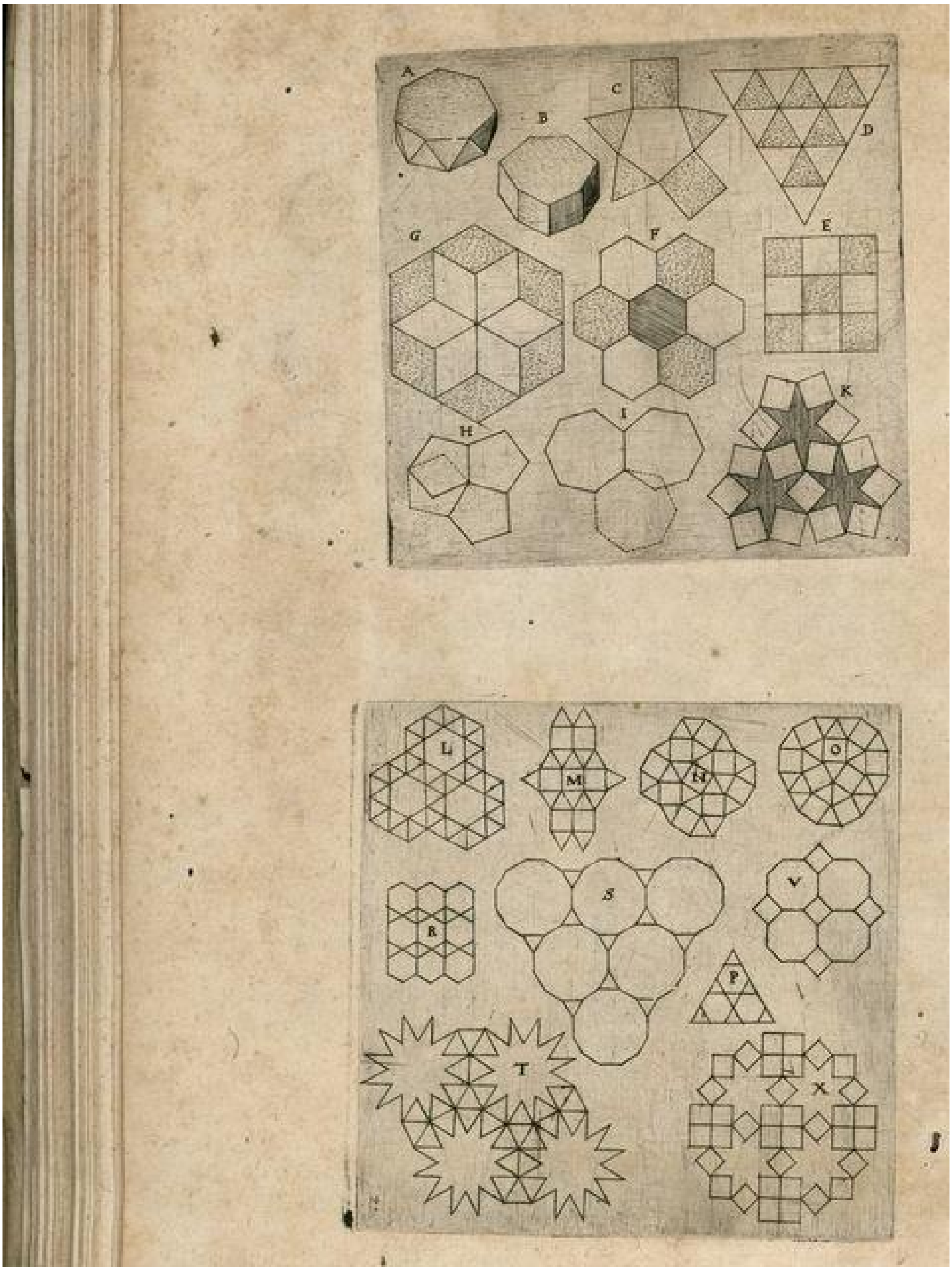
Quatuor Tetragonici æquant quatuor rectos, quare per XVI non solidum quid formant. Sic est trãnsactum cum Tetragonis meris.

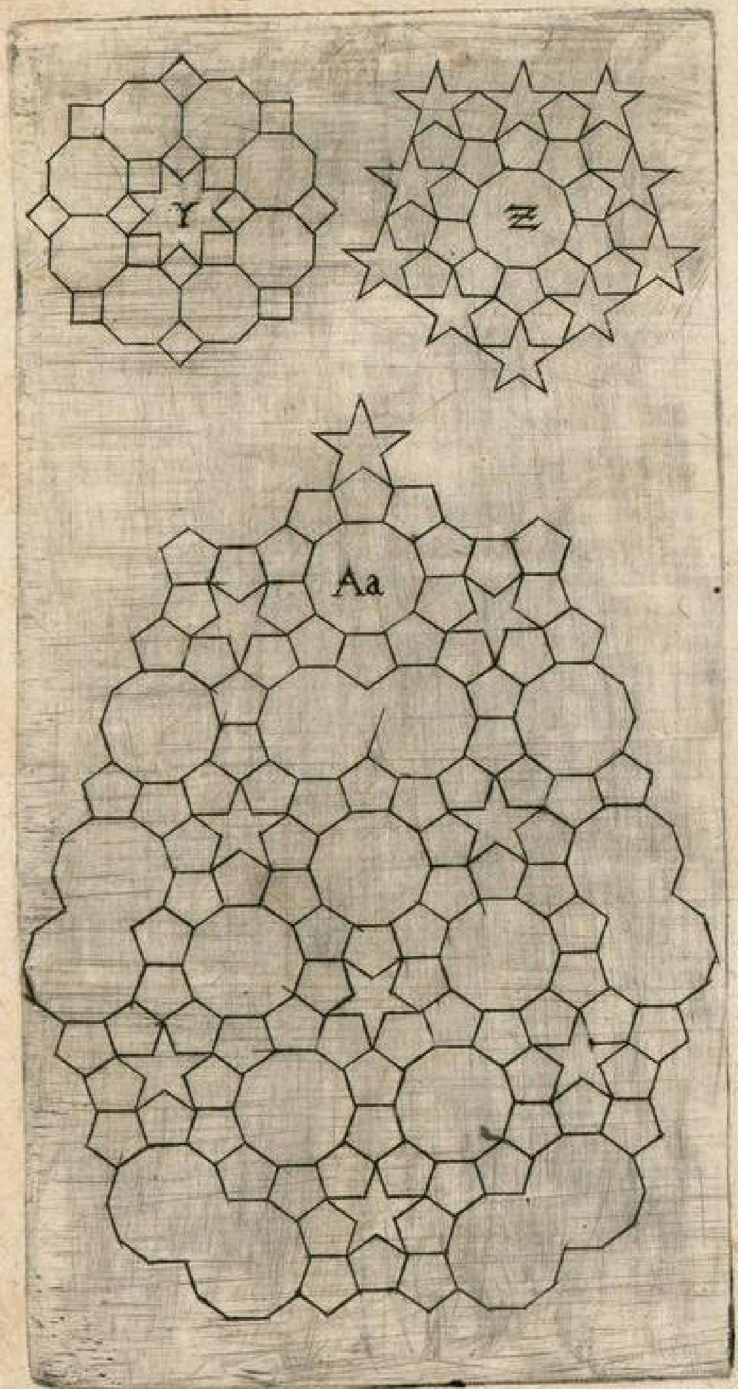
Tres Pentagonici anguli sunt 18 quintæ unius plani recti, minus quam 20 quintæ seu quatuor recti: congruunt igitur ad unum solidum formandum; quod si Pentagonus unus in basi cingatur hoc pacto quinq. alijs, figura sursum hiat 5, angulis planis pentagonicis, habetq. extantes quinq. angulos planos pentagonicos. Alia igitur ex adverso figura est struenda, huius similis; & quini alterutrius anguli plani extantes congruent in quinos reliquæ hiatus, & vicissim. Hinc nascitur Dodecahedron. Transactum sic est cum Pentagonis meris, & simul cum figuris omnibus unius solius speciei coaptandis: quia tres Hexagonici per XVI, non assurgunt ad solidandum.

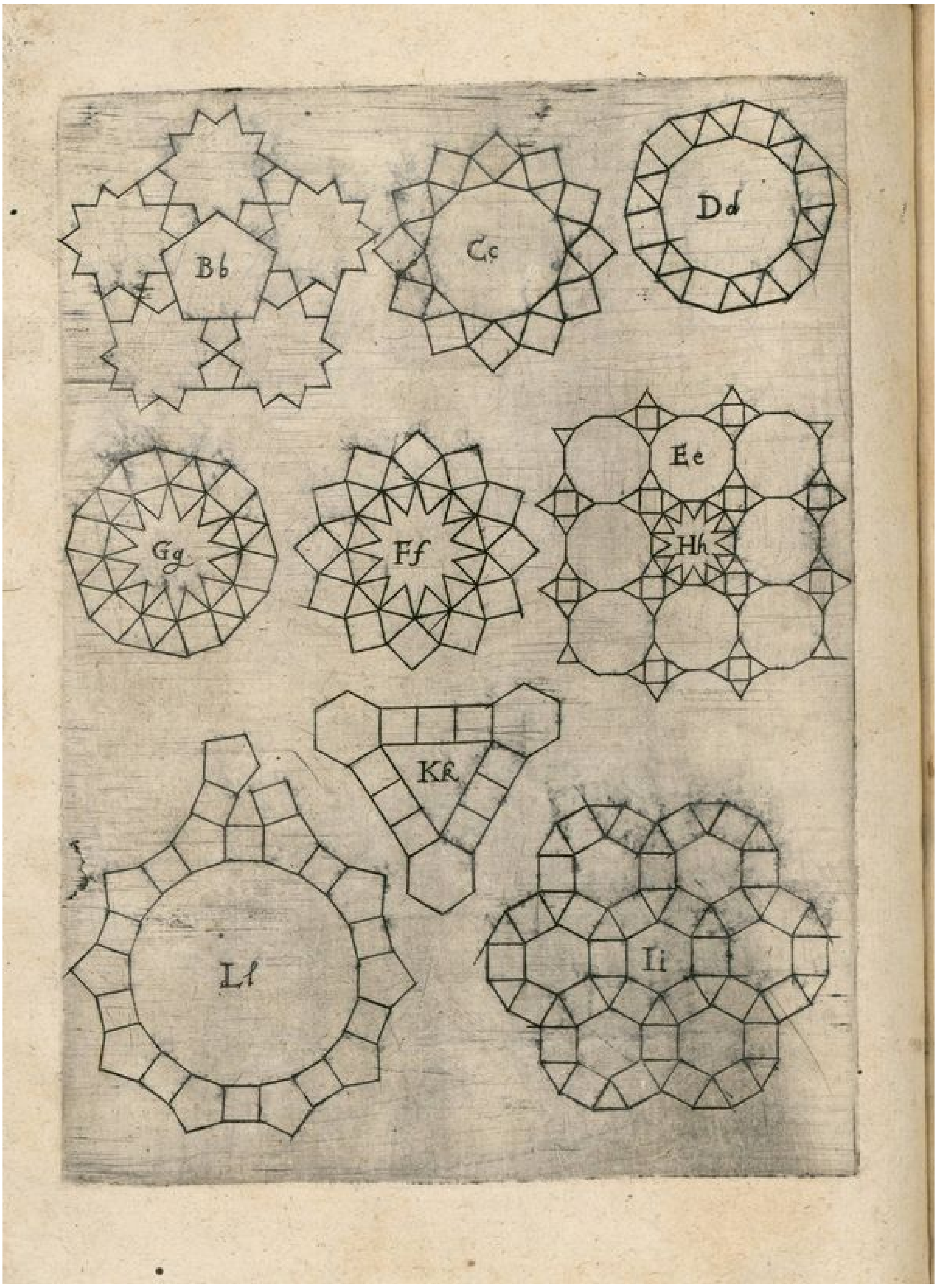
R r. & hic num. 3.

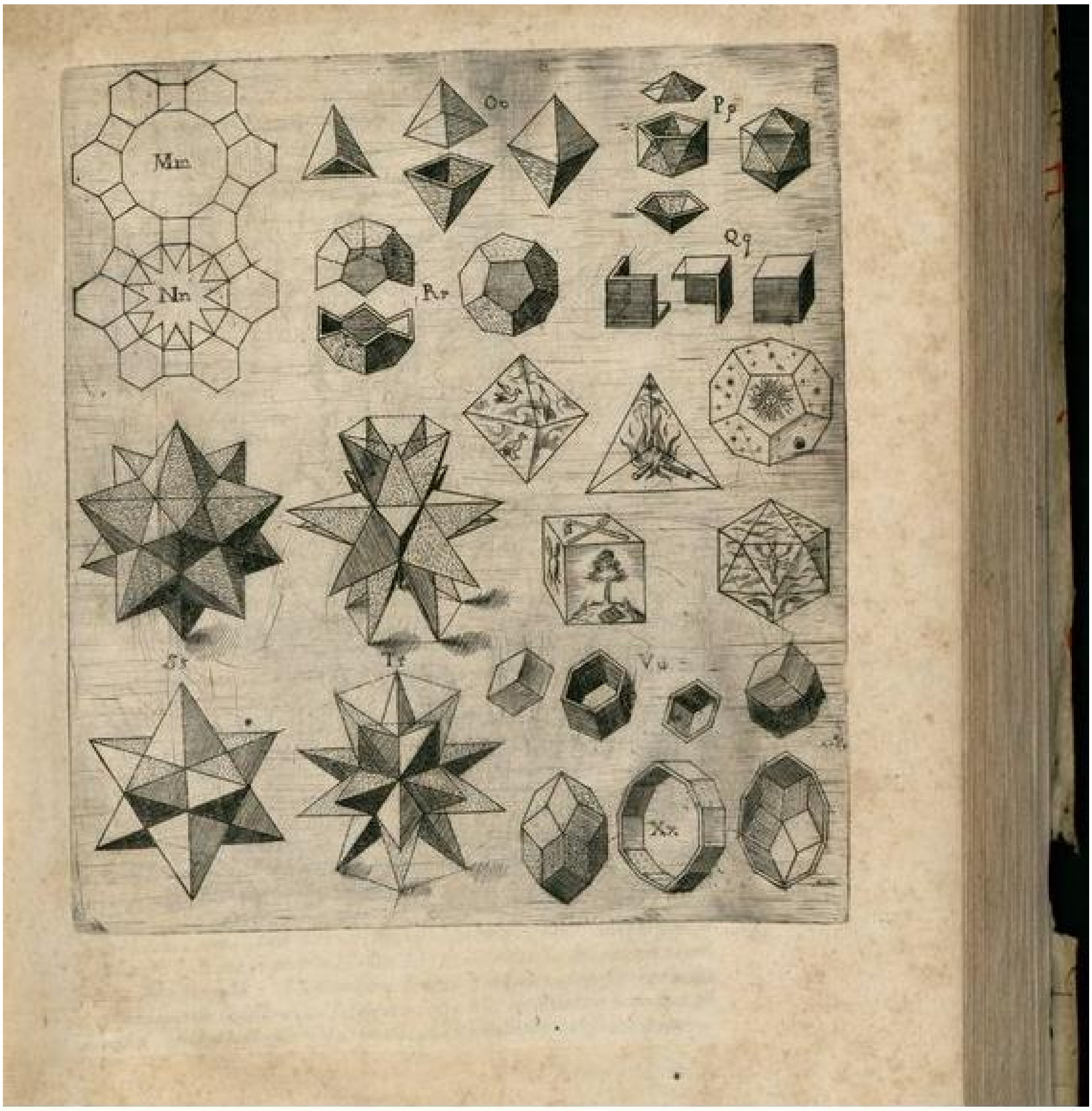
Hæc sunt illa corpora quinque, quæ figuras mundanas appellare *sunt soliti Pythagoræi & Plato, & Euclidis commentator Proclus: quæ quomodo fuerint applicatæ corporibus mundanis, in præambulo lib. I. dixi, incertum esse. Communis quidem persuasio est, ductà ex Aristotele, Philosophos illos ad quinq. simplicia Corpora Mundi respexisse secundum quinarium numerum harum figurarum, scilicet ad quatuor Elementa, Ignem, Aërem, Aquam, Terram, & ad sic dictam Quintam Essentiam, seu Materiam cœlestem; comparatis figurarum proprietatibus, cum simplicium illorum corporum affectionib⁹. Nam in Cubo rectitudo super basi quadratâ stabilitatis quandam adumbrationẽ habet, quæ eadem proprietas est & Materiæ terrestris; gravitatis momentis ima petentis: cùm etiam totus Terræ globus vulgò credatur in medio Mundi quiescere. Vicissim Octahedri congruus est situs aspectui, si is à duobus oppositis angulis velut in torno suspendatur, inter quos medio præcisè loco est latens quadrilate-*

Figuræ Mundanæ.

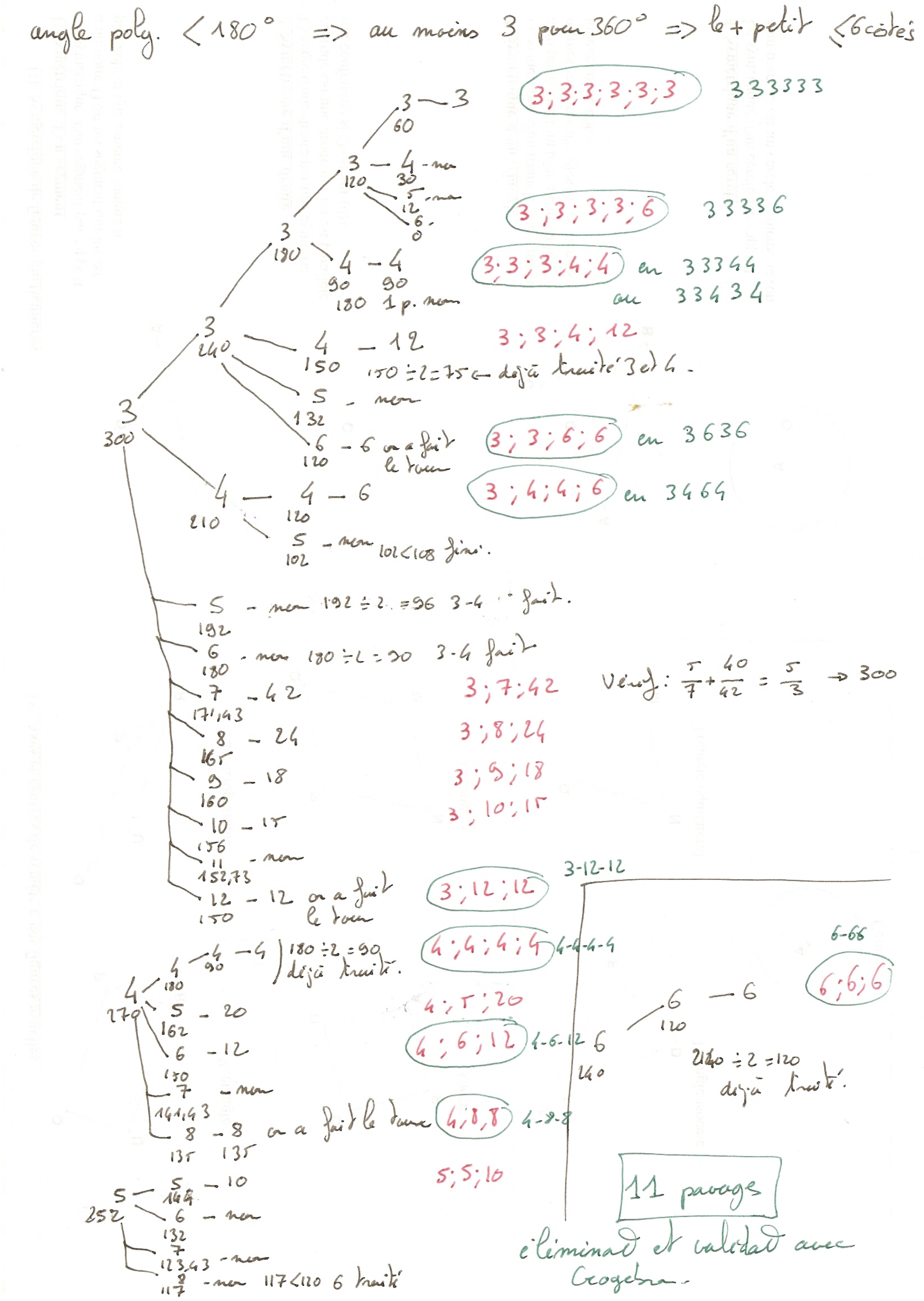

A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
R
S
V
P
T
X


Y
Z
Aa

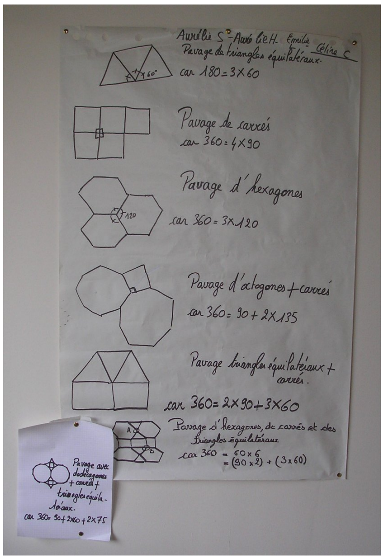

Bb
Cc
Dd
Ee
Hh
Gg
Ff
Kk
Ll
Ii

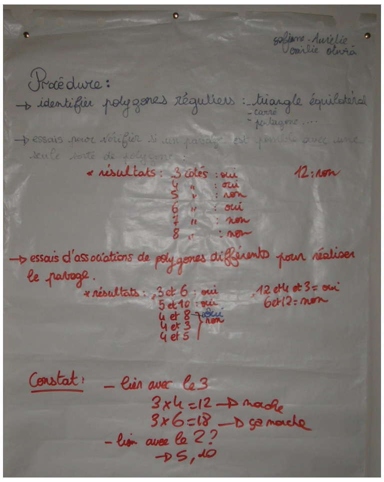

Mm
Nn
Oo
Pp
Qq
Rr
Xx

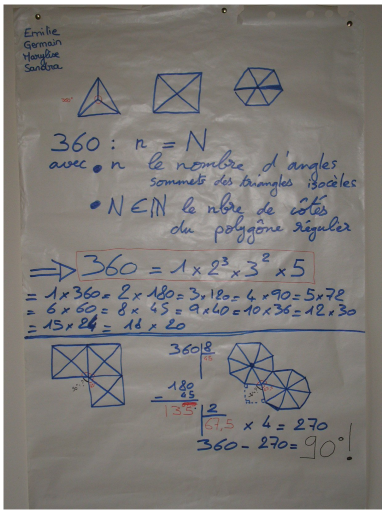
Annexe D : Structuration d'une recherche

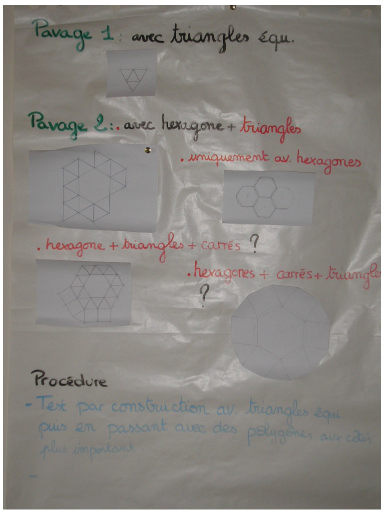


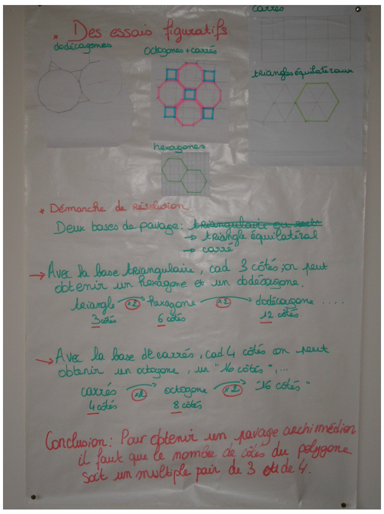
Annexe E : Les 11 affiches produites lors de la primo-expérimentation.

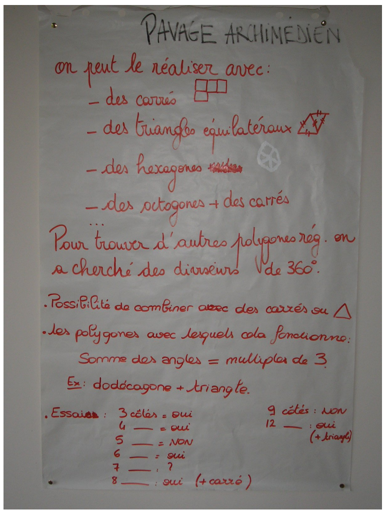


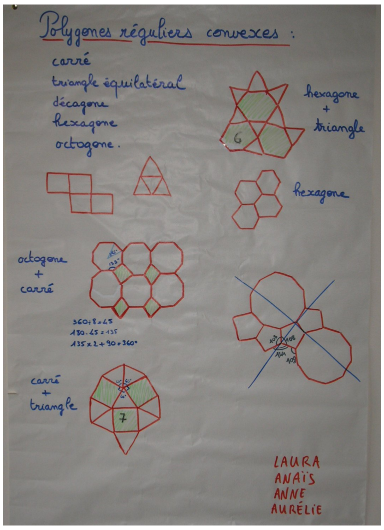


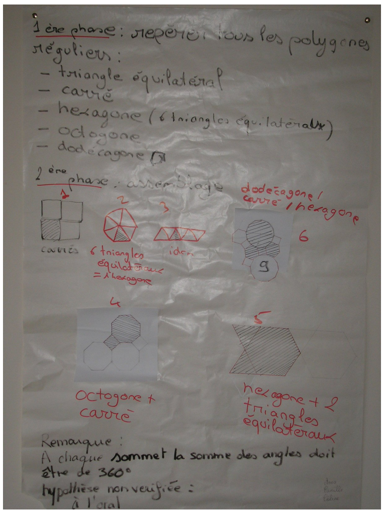


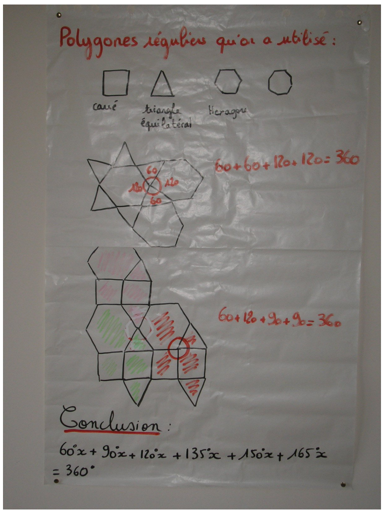


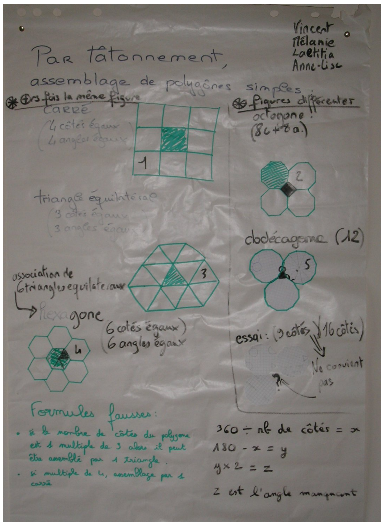


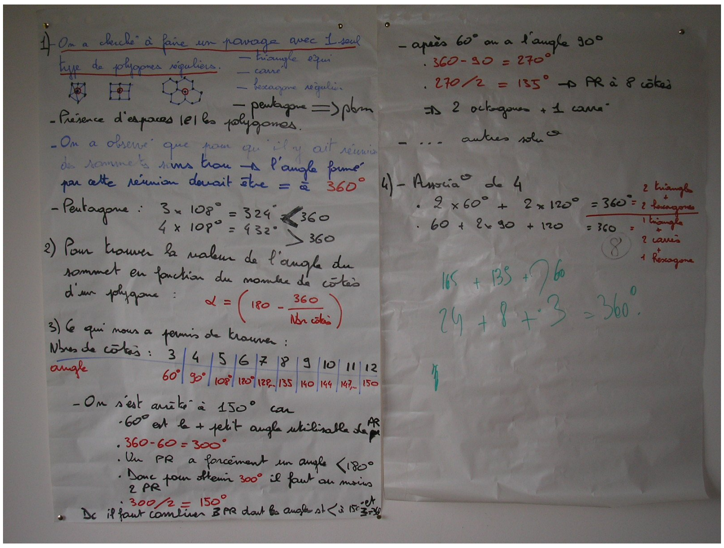



Polygones réguliers convexes :
carré
triangle équilatéral
décagone
hexagone
octogone.
hexagone + triangle
hexagone
octogone + carré
carré + triangle
LAURA
ANAÏS
ANNE
AURÉLIE


1ère phase : repérer tous les polygones réguliers :
– triangle équilatéral
– carré
– hexagone (6 triangles équilatéraux)
– octogone
– dodécagone
2ème phase : assemblage
dodécagone / carré / hexagone
octogone + carré
hexagone + 2 triangles équilatéraux
Remarque :
A chaque sommet la somme des angles doit être de 360°
Hypothèse non vérifiée :
à l'oral


Polygones réguliers qu'on a utilisé :
carré
triangle équilatéral
hexagone
60+60+120+120=360
60+120+90+90=360
Conclusion :
60°x + 90°x + 120°x + 135°x + 150°x + 165°x = 360°


Vincent
Mélanie
Laetitia
Anne-Lise
Par tâtonnement,
assemblage de polygones simples
carré
triangle équilatéral
octogone
dodécagone (12)
hexagone
Formules fausses :
360 ÷ nb de côtés = x
180 – x = y
y × 2 = z
z est l'angle manquant


1) On a décidé à faire un pavage avec 1 seul type de polygones réguliers.
– triangle équi
– carré
– hexagone régulier
– pentagone ⇒ pbm
– Présence d'espaces entre les polygones.
– Pentagone : 3 × 108° = 324° < 360
4 × 108° = 432° > 360
2) Pour trouver la valeur de l'angle du sommet en fonction du nombre de côtés d'un polygone :
α = (180 – 360 / Nbr côtés)
3) Ce qui nous a permis de trouver :
Nbre de côtés : 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
angle 60° 90° 108° 120° 128 135 140 144 147 150
– On s'est arrêté à 150° car
– après 60° on a l'angle 90°
. 360 – 90 = 270°
. 270 / 2 = 135° → PR à 8 côtés
⇒ 2 octogones + 1 carré
– ... autres solu°
4) – Associa° de 4
. 2 × 60° + 2 × 120° = 360°
. 60 + 2 × 90 + 120 = 360
165 + 135 + 60
24 + 8 + 3 = 360°

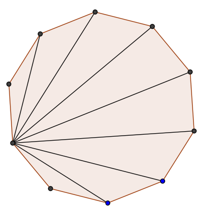
Annexe F : Éléments pour une institutionnalisation

Pistes pour une institutionnalisation dans le contexte de la primo-expérimentation, avec les objectifs associés.

Elle doit être adaptée en fonction des débats qui auront eu lieu et qui auront peut-être permis de statuer sur certains points.

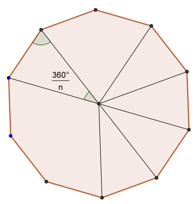
- Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les côtés la même longueur.

- Pour un polygone régulier à n côtés, la somme de tous les angles intérieurs est égale à n-2 fois la somme analogue pour un triangle, qui est 180°.



Comme les angles d'un n-gone régulier sont tous égaux et qu'il y en a n alors chacun vaut $\frac{n-2}{n}180^\circ$.

- ou : un polygone régulier à n côtés peut être décomposé en n triangles isocèles d'angle au sommet $\frac{360^\circ}{n}$.



L'angle à la base est égal à $\frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2}$; Il faut 2 angles à la base pour former un angle de polygone donc l'angle vaut $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$

- S'il existe un pavage régulier, la condition en un sommet du pavage est
$k\,\frac{n-2}{n}180^\circ = 2 \times 180^\circ$, où k est un entier, $k \geq 3$.

Cette condition s'écrit aussi :$k(n-2) = 2n$ ou $(n-2)(k-2) = 4$.

Les seules solutions entières qui conviennent sont n = 3 et k = 6 , n = 4 et k = 4 , n = 6 et k = 3.

Elles correspondent à des pavages par, respectivement, des triangles équilatéraux, des carrés et des hexagones réguliers.

- Pour les pavages archimédiens : on peut proposer en fonction des productions des étudiants le début de démarche suivant pour la recherche des pavages archimédiens composés avec trois polygones réguliers :

Autour d'un sommet potentiel on a :

$a_1 + a_2 + a_3 = 360^\circ$ où a_i est la mesure en degré d'un des 3 secteurs.

Par ailleurs, si n_i est le nombre de cotés du polygone régulier i , on a :

$a_i = \dfrac{n_i - 2}{n_i} \times 180^\circ = (1 - \dfrac{2}{n_i})\ 180^\circ$,

et donc la relation précédente devient :

$$(1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3}) \times 180^\circ = 360^\circ$$

soit : $\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} = \dfrac{1}{2}$: et il reste à chercher les triplets possibles.

On admet que les seuls triplets possibles sont :

$$(3,7,42)(3,8,24)(3,9,18)(3,10,15)(3,12,12)$$
$$(4,5,20)(4,6,12)(4,8,8)(5,5,10)(6,6,6).,$$

Mais ils ne fournissent pas tous un pavage ...

- On peut aussi présenter l'approche de Kepler, énoncer les propositions XIX, XX, XXI et débuter l'étude systématique en montrant que Kepler a choisi de travailler sur le nombre de figures différentes présentes et de réaliser une étude systématique en s'appuyant sur les mesures d'angles avec par exemple :

...

Pour la proposition XIX, il s'agit de comprendre que Kepler traite le cas où l'on ne considère que deux figures différentes. Il énonce tout d'abord qu'on ne peut associer 6 telles figures car si il existe a_i tel que $a_i > 60^\circ$ alors la somme des a_i est supérieure à 360.

Puis il cherche à assembler 5 figures de 2 espèces différentes.

$4 \times 60^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ... on obtient le pavage (3,3,3,3,6) figure L

$3 \times 60^\circ + 2 \times 90^\circ = 360^\circ$ ... (3,3,3,4,4) figure M ou (3,3,4,3,4) figure N

$2 \times 60^\circ + 3 \times 90^\circ > 360^\circ$ et idem si on prend 3 autres figures à la place du carré.

...

Kepler n'en dit pas plus pour 5 figures. On peut supposer qu'il a, là, été exhaustif, même si ici tout n'est pas écrit.

Il passe à 4 figures de 2 espèces différentes :

$2 \times 60^\circ + 2 \times 120^\circ = 360^\circ$ on obtient les pavages (3,3,6,6) figure R ou (3,6,3,6) figure P. La figure R ne correspond pas à un pavage archimédien.

...

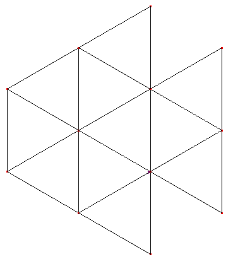
- La fin de la séance permettra de présenter les triplets possibles obtenus :

$(3,7,42)(3,8,24)(3,9,18)(3,10,15)(3,1,12)(4,5,20)(4,6,12)(4,8,8)(5,5,10)(6,6,6)$,

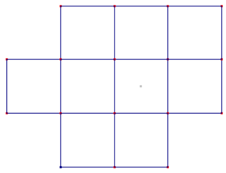
puis de faire remarquer que ces triplets vérifient une condition nécessaire, condition locale mais que ceci ne permet pas d'affirmer que l'assemblage autour d'un nœud va aboutir à la réalisation d'un pavage.

La séance se terminera avec la présentation des 11 pavages archimédiens, et en particulier ceux construits avec 3 polygones réguliers différents.

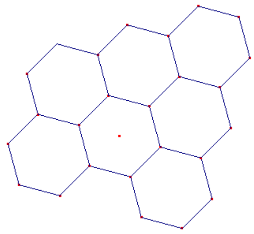
Les 11 pavages semi-réguliers :



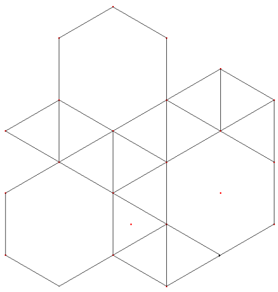
(3,3,3,3,3,3)



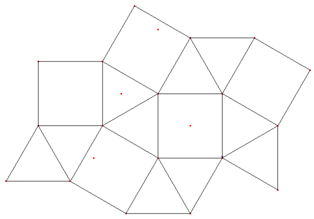
(4,4,4,4)



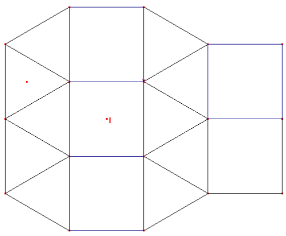
(6,6,6)



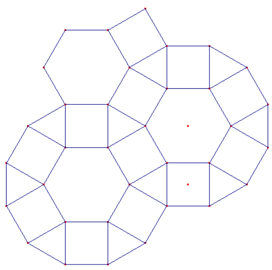
(3,3,3,3,6)



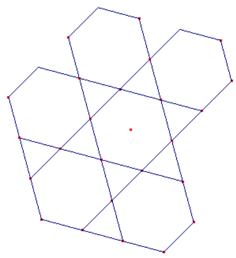
(3,3,4,3,4)



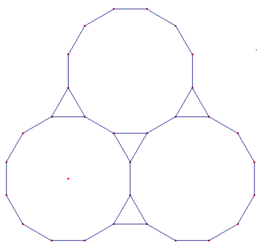
(3,3,3,4,4)



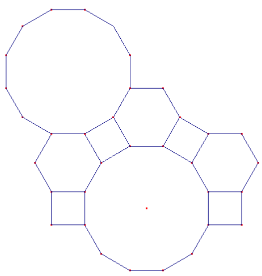
(3,4,6,4)



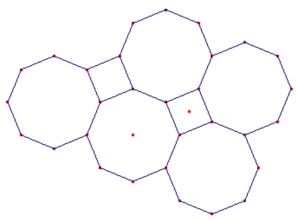
(3,6,3,6)



(3,12,12)

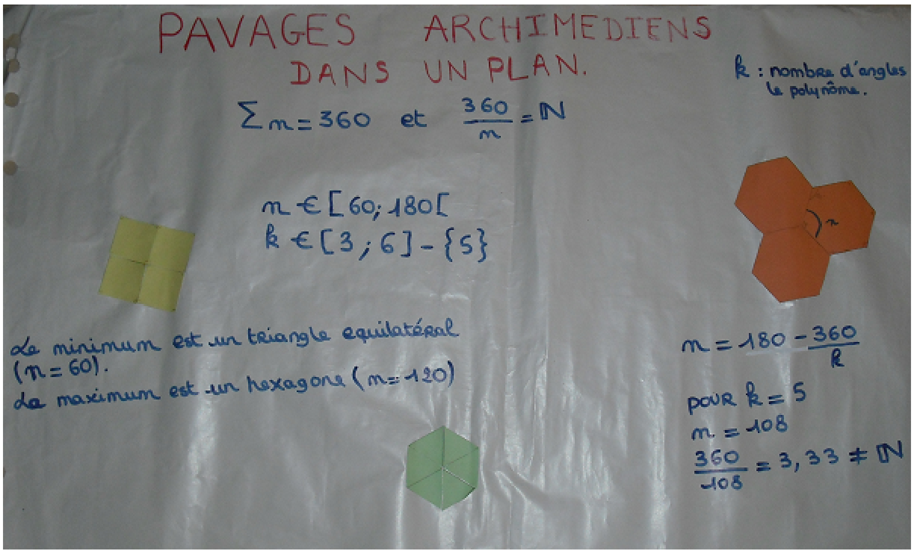


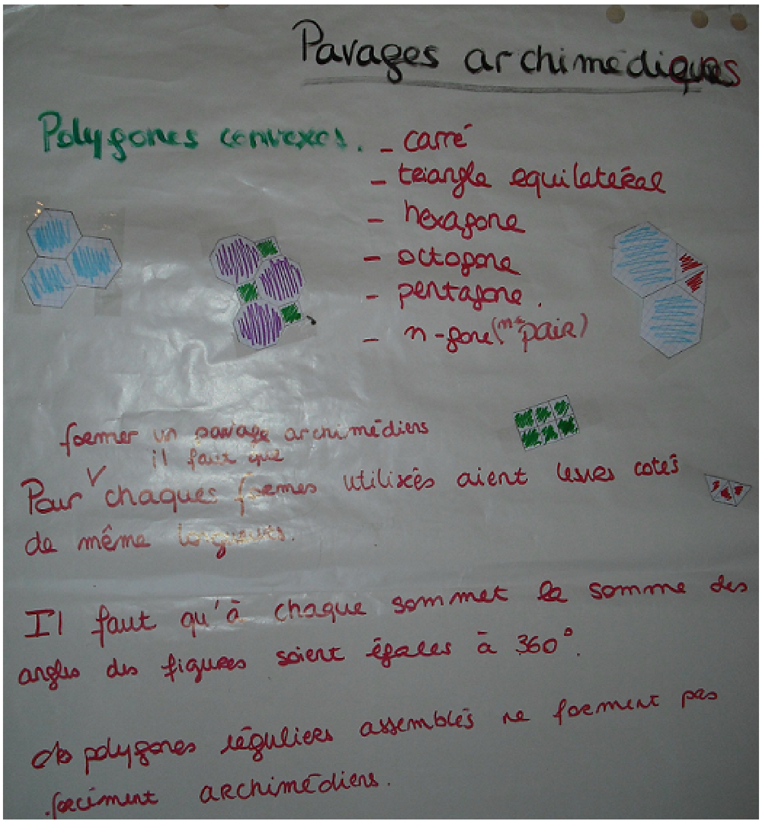
(4,6,12)



(4,8,8)

Annexe G : Les 2 affiches produites lors de l'expérimentation en TS





Annexe H : Transcription des échanges en TS

Expérimentation en TS : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 2.

Codage : P le professeur, CS,CQ,VB les membres du groupe 2, B et M deux membres du groupe 1.

[...] les courts passages inaudibles, en italique des commentaires qui font parfois référence à l'image vidéo.

Les élèves du groupe 1 ont utilisé du papier de couleur : orange pour les hexagones, vert pour les triangles, jaune pour les octogones, blanc pour les carrés ainsi que pour un pentagone.

Repère	Locuteur Temps	Texte de l'intervention
0	00 :00 :00	Lecture de l'énoncé
	CQ	Une situation de recherche en classe. Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les angles ont la même mesure et tous les les côtés qui ont tous côtés de la même longueur enfin tous.Un pavage ar archimédien du plan est un recouvrement du plan par des polygones réguliers,sans trou, ni superposition, et tel qu'autour de chaque sommet, il y ait le même assemblage de polygones. On exclut dans ce problème les pavages tels qu'un sommet de polygone appartienne au côté d'un d'un autre comme sur la figure ci-dessous. La recherche proposée est la détermination de tous les pavages archimédiens du plan.
1	P 00 :00 :28	Alors est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut reformuler, qui a compris ce qu'on vous demandait euh sur ce problème. Est-ce qu'il y a des questions sur les termes euh vous avez besoin de précisions sur certains termes qui sont difficiles alors sur les définitions des polygones polygone convexe est-ce que ça ça va
101	CS	non
102	P	Non Alors qu'elle serait ta question
103	CS	Ben j'sais pas ce que c'est
104	P	Tu sais pas quoi le polygone régulier le polygone convexe quel mot ?
105	B	carré
106	P	Alors carré c'est quoi ?
107	B	Ben c'est convexe comme polygone enfin
108	M	tous les angles qu'ont la même mesure c'est forcément des angles à 90° et vu qu'ils ont tous la même longueur c'est forcément des carrés
109	P	Voilà ça répond à la définition d'un polygone régulier Alors est-ce qu'avec cet exemple ça va où est-ce qu'il y a encore besoin de précisions c'est bon ?
110	P	Ensuite euh alors sur ce pavage archimédien le recouvrement est-ce que ça ça va ? est-ce que vous avez des questions là dessus

111	VB	j'ai pas compris ce que c'était
112	P	alors qu'est-ce que t'as pas compris exactement
113	VB	ben alors ça veut dire quoi un pavage archimédien
114	P	Alors un pavage archimédien du plan c'est un recouvrement du plan alors est-ce que ça ça va recouvrement
115		[...]
116	P	Comment
117	M	des carrés par dessus des carrés
118	P	par exemple avec des carrés voilà vas y dis donc explique parle un peu plus fort pour les autres
119	M	on remplit le plan de polygones réguliers
120	P	voilà donc là [...] des carrés on remplit le plan avec des carrés
121	CQ	y a quoi comme autre polygone convexe à part des carrés ?
122	P	ah ça ben ça sera à vous de réfléchir d'accord. Alors après donc euh sans trou ni superposition ça ça va ? et puis euh autour de chaque sommet il y a un assemblage de polygones est-ce que ça c'est bon ?
123	CQ	Hum
124	P	Ouais Donc là on vous donne un exemple qui ne convient pas euh pour le pavage alors euh on va passer aux modalités de la recherche s'il n'y a plus de question je remettrai l'énoncé après alors 5 minutes de recherche individuelle ensuite 1H30 de recherche en groupe et alors à l'issue de ce temps de recherche vous allez avoir à préparer une affiche qui se trouve là bas où vous allez présenter vos résultats et justiffications et les questions euh qui subsistent c'est à dire s'il vous reste encore des choses que vous pensez qu'il faudrait étudier mais que par le temps vous n'avez pas pu. Ensuite on va faire 30 minutes de débat euh à partir des deux affiches ... qui permettront de présenter les résultats et de débattre sur la validité de vos résultats d'accord alors pour toutes ces différentes phases de recherche vous avez à votre disposition du papier blanc de couleur euh rapporteur règle compas calculatrice des marqueurs donc ce sera pour faire l'affiche des ciseaux de la colle gomme euh scotch euh voilà donc vous pouvez venir vous servir à tout moment de la recherche, phase individuelle ou collective, et utiliser ce matériel si vous en éprouvez le besoin voilà et ben c'est parti pour les 5 minutes de recherche individuelle je vous remets l'énoncé allez
125	CQ	on doit recouvrir quoi comme plan
126	P	Alors on doit recouvrir quoi comme plan est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut répondre à cette question t'as une idée
127	B	[...] trois points
128	P	Un plan c'est dans toutes les directions comme vous voulez
129	B	Comme au tableau
130	P	Un tableau par exemple ça peut aller partout
131		y a pas les points
132	P	c'est bon allez c'est parti
133		

2	00 :04 :45	*Cinq minutes de recherche individuelle*
201	P	Bon alors les cinq minutes individuelles sont passées vous pouvez mettre en commun ce que vous avez fait individuellement et puis commencer la phase de recherche collective donc sur le problème qui va durer un petit à peu près 1h 1h et quart je vous donnerai le moment ou vous passerez à la rédaction de l'affiche
202		
3	00 :10 :50	[échanges chuchotés inaudibles]
301	P	Vous êtes pas obligé de chuchoter
302		[échanges chuchotés inaudibles]
303		Autour de chaque sommet
304	CQ	Il doit y avoir un truc parce que
305		parce que ce que je comprends pas c'est que t'as qu'à mettre plein de carrés et puis là t'as trouvé
306		ben oui c'est ça ben oui c'est simple
307		ben ouais c'est ça que je comprends pas
308		*[relecture du texte de l'énoncé]* et qu'autour de chaque sommet il y a le même assemblage de polygones
309		j'vois pas ce qu'on nous demande
310		ben là si t'as triangle équilatéral comme ça eh ben y faut qu'là t'ais un triangle équilatéral comme ça il faut que le truc
311		oui mais là ça va marcher mais pour les carrés [...]tu pourras plus les faire toucher
312		ben si
313		ben si si tu fais des carrés
314		ben oui le carré tu le mets là
315		c'est un plan
316		c'est pas à l'infini si ?
317		oui mais dans ce cas c'est pareil pour les triangles équilatéral
318		comme ça et comme ça
319		ben oui c'est ça que je comprends pas
320		
4	CQ 00 :13 :37	et un losange ça marche
401		non parce que le losange les angles c'est pas les mêmes
402		t'es sur ?
403		à moins que tu prennes un losange tordu
404		Mais non un losange c'est comme ça
405		Oui donc normalement c'te angle c'te angle là ... losange particulier en fait c'est un carré
406		ouais donc un rectangle
407		
5	VB 00 :14 :03	alors est-ce que c'est pas l'assemblage de tous les polygones réguliers qui font [...]

501		mais ce que je comprends pas c'est le pavage du plan par des polygones réguliers ...
502		est-ce que par exemple ça veut dire que si t'as un triangle par exemple là ... t'as un carré
503		ben non tu peux pas parce que là autour de ton sommet t'auras un carré
504		et alors
505		alors t'as pas le droit
506	CQ	tel qu'un sommet de polygone apppartient au ... non c'est pas ça tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones
507		ah oui
508	VB	est-ce que c'est pas justement c'était ça j'voulais te demander si c'était pas par exemple un j'fais un truc au pif tac tac tac t'as un truc comme ça donc là en fait faut qu'à chaque sommet de chaque machin ça soit des ...
509		ça *CQ montre du doigt la première association carré triangle*
510	00 :15 :00	ouais peut être
511		est-ce que c'est ça ou pas
512		attends tu veux dire quoi
513		par exemple que si t'as cette figure là
514		ben vu qu'là y a un sommet là faut qu'y ait le même truc ici
515		ça c'est un carré tu peux pas faire un carré là
516		oui mais là tu peux faire autre chose par exemple t'sais tu trouves autre chose
517	00 :15 :22	après je sais pas si c'est faisable
518		
519		ben si et [...] régulier est-ce que ça compte
520		ouais mais y a pas de côté
521		c'est pas grave
522		oui et puis y a pas d'angle
523		c'est pas grave
524		ouais c'est vrai
525		moi aussi j'me suis dit y a pas de côté y a pas d'angle
526		peut pas y avoir un angle où là ça c'est c'est et ça *une élève considère des secteurs angulaires*
527		Attends attends tu sors ça d'où toi
528		Hein ?
529		ben ça doit bien exister
530		T'sais genre un angle un angle comme ça
531		Ouais
532		y doit bien exister un truc comme ça
533		Là c'est égal là c'est égal et là quand on fait le calcul de ça c'est égal aussi
534		Pour quoi

535		Ben non un cercle si tu prends deux ... à peu près là là ça peut bien être égal
536		ouais mais là
537		ça peut bien être plus petit ça peut bien être plus grand
538		Tu veux dire non
539		Elle dit que ça peut pas être égal parce que l'angle là par exemple ici si tu prends ces deux traits là il est plus petit et si tu prends là il est plus grand entre les deux et là aussi
540		oui mais moi j'te parle de là
541		Hein là
542		là ouais mais y a pas d'angle alors après
543		ouais ben non ça c'ést pas un angle
544		ouais mais là t'as que un angle
545		mais c'est pas grave si t'as que un angle
546		[...]
547		Donc tous les angles ont la même [...]
548		Merci de me rendre ma feuille
549		C'est parce que je sais le problème
550		Allez on est parti
551		*Un temps long*
552		
6	00 :17 :50	Ah la détermination de tous les pavages
601		ça veut dire qu'ça c'en est un ça s'en est un autre
602		ben ça s'rait trop simple sinon
603		on s'dit qu'y a un truc
604		si nous on peut expliquer c'est que c'est pas trop compliqué
605		sinon on s'rait pas là on mangerait la galette
606		si tu fais j'vais p't'être dire un truc super con
607		si tu fais quoi
608	CQ	c'est des triangles équilatéral vous voyez pas mais
609		et ben après ça fait tac ça fait un autre truc
610		tu vas chercher des carrés là dedans
611		j'y ai pensé comme toi, mais voilà ... là comme ça
612		mais pourquoi tu veux chercher des carrés
613		ben j'sais pas
614		ben pourquoi vous allez faire ça
615		ben j'sais pas c'est p't-être un autre carré
616		bon déjà faut qu'on pose la question si c'est bien ça
617		On peut vous poser une question ?
618	P	J'sais pas si j'vais répondre mais bon
619		En fait faut qu'on cherche toutes les possibilités de pavage
620	P	Hu Hu
621		Donc ça par exemple c'en est un
622		Ah d'accord

623		Moi j'ai pas compris c'est
624		tel qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones
625	P	alors c'est quoi que tu comprends pas
626		c'est le même assemblage de polygones
627	00 :19 : 30	est-ce que c'est par exemple faut que par exemple ces trois figures là elles sont sur un sommet faut que sur le même sommet il y ait les trois figures
628		c'est ça
629		Hu Hu
630		ben j'avais compris
631		d'accord merci
632		[...]
633		
7		Bon on en a dèjà trouvé un
701		j'pense
702		Ben oui parce que de toute façon ça fait pareil
703		parce que là y a chaque carré là et après t'as chaque carré enfin ainsi de suite
704		Tu trouves un deuxième
705		Ouais
706		ben après y a un troisième avec ça
707		Ca s'trouve c'est pas du tout ça
708		Rires
709		Si on dit c'est ça
710		Et après tu fais ça
711		ouias mais après faut essayer de les assembler
712	CS	oui mais après mais euh déjà
713	CS	donc ça fait un de plus avec celui là
714		attends j'regarde un truc
715		mais faut pas que attends j'regarde
716		Non mais y faut pas que par exemple y faut pas que je mette comme ça
717		[...]
718		je dois mettre quoi là au bout
719	00 :20 :30	ben va y avoir un triangle
720		Ah
721		Ok ça marche
722	00 :20 :38	ça c'en est un autre
723		là c'est pareil, le même angle, le même ...
724		ça veut dire que là
725		oui mais c'est pas grave parce que là sur l'angle là y en a un là, y en a un là
726		là faut que t'en aies un autre comme ça

727		et là aussi et ainsi de suite
728		[...] *appui sur le pavage octogone-carré*
729		par exemple là autour de chaque angle y a un machin comme ça
730		c'est comment ça
731		comment on appelle un ...gone ?
732		ouais
733		là y en a huit, là on a huit
734		non octo
735		non 1,2,3,4,5,6,7 ouais y en a 8, là
736		y en a pas 7
737	CQ	y en a 8 c'est octo
738		oui ben 7 aussi c'est octo
739		y en a 8 ou 7, 8 ou 6
740		1,2,3,4,5,6,7,8 donc c'est un octogone
741		ben recompte
742		de toute façon c'est six
743		comme ça
744		c'est comme ça c'est çui là
745		l'hexagone c'est 6
746		Hum
747		et avec celui là
748		mais j'suis loin
749		tac tac tac tac et ainsi de suite
750		y a un truc c'est pas possible que ça soit ça
751	VB	non mais parce que ça c'est des simples mais y en a des compliqués j'pense et les compliqués c'est ceux là
752		faut pas écouter c'qui disent derrière
753	00 :21 :48	et les compliqués c'est ceux là
754		moi je vois pas ...
755		
8		et tu crois qu'on doit en trouver combien 1 milliard 732 000
801		hein ?
802		tu crois qu'on doit en trouver combien ?
803	00 :22 :00	ben j'en sais rien
804		[...]
805		2 octogones, un au carré, et sur chaque angle ... ainsi de suite
806		si tu continues comme ça ...
807		[...]
9	CQ 00 :22 :09	et si on mettait au propre tous ceux qu'on avait déjà
901		Ben tiens y en a déjà un là
902		Ben j'en ai un là un là
903	CQ	Et ben Valentine fais [inaudible] comme ça elle utilisera pas
904		Ah ah ah

905		ça sert à rien d'utiliser 50 feuilles
906		et après
907		après y a ceux là à faire
908		là y a lui là encore
909		Ben ça fait deux elle le fait
910		...
911		ben oui pis là tu dois encore faire avec des carrés faut que tu recommences
912		Oui mais non
913	VB	ben si parce que de ce côté faut que tu mettes un carré, de ce côté
914	VB	et pis d'ailleurs c'est tordu les trucs tes angles
915		si t 'en fais un bien, les angles sont pas
916		mais si tu mets un carré genre là
917		Ah mais ça veut dire qu'y a
918		mais il est pas très carré ton carré je vais reprendre une feuille
919		oui moi ça m'aurait arrangé aussi en fait
920		t'en veux une
921		pardon c'aurait été plus simple
922		Ah non
923		Y a des trous
924		oui ben je sais qu'y a des trous d'partout maintenant
925		t'en veux une ou pas
926		oui mais trop tard j'suis parti là dessus
927		y a même du papier millimétré si vous voulez
928		[...]
929		au pif
930		non
931		tu m'en prends une
932		ah oui
933		alors
934		ouais
935		ça ça fait un cm
936		et mais t'es sure
937		on peut aller regarder
938		on peut [...]
939		[...]
10	00 :23 :50	et c'est combien les angles dans un un un truc comme ça ... *dessin d'un octogone ressemblant à un heptagone*
1001		euh celui là ou celui là
1002		celui là
1003		celui là eh ben tu fais
1004	CQ	c'est un angle obtus déjà
1005	VB	1 2 3 4 5 6 7 7 donc 180 divisé par 7
1006	CQ	t'es sure

1007		oui parce que tous les angles [inaudible] ça donne un angle droit après
1008		pas un angle droit un angle plat
1009		ouais un angle plat
1010		Ah c'est bon hein
1011		on va attendre je vais voir
1012	CQ	c'est pas possible ça fait 25 *utilisation de la calculatrice et du rapporteur simultanément*
1013		Ben 25 de l'autre côté tu prends
1014	CQ	Ah ouai c'est 25 de là
1015		Ah ben oui
1016	CQ	pis après tu fais 180 - 25
1017		Voilà
1018		et ça fait combien
1019		ça fait 165 non 135
1020	CQ	ç'est pas possible
1021	CQ	ça fait ça ça fait 135 ?
1022		ben elles sont comme ça
1023	VB	vous cherchez quoi là
1024		combien l'angle il fait là
1025		ben regarde
1026		là il fait comme ça ton angle
1027		ton angle il est comme ça
1028		360
1029		divisé par 8
1030		Ah peut être ouais
1031		un tour complet, ça fait un tour complet
1032		divisé par 8 non divisé par 7
1033		et pourquoi ?
1034		parce que y a 7 angles
1035		1 2 3 4 5 6 7 8 non [Rires]
1036		45 c'est pas ça
1037		c'est pas possible ?
1038		et ben regarde c'est bien
1039		tu fais tac
1040		45 c'est pas un angle droit
1041		Non ça fait la moitié d'un angle droit donc c'est pas possible
1042		c'est 135 c'est 135
1043		ouais
1044		c'est très beau
1045		Ah non j'ai pas fait pareil en même temps
1046		[inaudible]
1047		tu faisais plus simple tu faisais comme ça ton angle
1048		tac tac
1049		...

1050		et ben maintenant tu
1051		...
1052		je viens de le dire ben franchement
1053		vous êtes têtues hein
1054		et j'ai une idée
1055		t'es tétue
1056		tu le fais comment le calcul
1057		n'importe quoi
1058		non là 135
1059		mais y tiennent pas là ? ? ... la formule exacte tu l'as trouvée par le calcul
1060		mais on la déjà trouvé par le calcul
1061		
11	00 :25 :51	bon bref
1101	CQ	si on mettait des formes dans des dans des ... ça serait plus simple,
1102		t'y assemble euh
1103	CQ	ouais, tu fais du puzzle
1104		bruits de manipulation
1105		je me charge des carrés
1106		et j'fais le triangle équilatéral
1107		j'vous remercie les filles c'est sympa
1108		
12	00 :26 :21	ouais mais y faut ça fasse la même taille aussi
1201		ben non pourquoi
1202		c'est pas dit qu' c'est obligatoirement la même taille
1203		ouais faut qu'on en fasse plein
1204		faut que chaque carré est la même
1205		je pense
1206		oui
1207		ben alors maintenant tu fais les euh les euh
1208		ah si si parce que de toute façon
1209		les euh
1210		ah mais non c'est pas dit
1211		là la longueur
1212		oui mais en plus
1213		là tu fais au moins la même longueur
1214		oui mais non mais justement parce que si c'est pas de la même longueur ça refait deux possibilités en plus
1215		ouais
1216	00 :26 :51	Ah ben non parce que après y aura un sommet qui sera dans la longueur
1217		et alors ?

1218		ben genre si tu fais un truc comme ça plus grand, plus grand par exemple tu le fais comme ça et après tu va refaire un triangle comme ça, eh ben là t'aura
1219		eh ben là y a un triangle, voilà
1220		ouais mais j'suis pas sure donc
1221		
13		ben on va y essayer de toutes façons, on verra mieux
1301		vous faites quoi vous ?
1302		un triangle équilatéral
1303		t'arrives ... rires
1304		j'vous remercie ... ah ben bien sur
1305		y nous manque des triangles
1306		y en a un làs bas
1307		vous avez pris des ciseaux
1308		Heu non
1309		moi j'en ai
1310		tu peux en prendre un
1311	CQ	ah mais vous avez rien sérieux
1312		ben ouais, j'ai rien
1313		oui donc ça revient au même
1314		j'en fais un grand ou pas, vous faites des grands ou pas
1315	CS	moi j'fais
1316	VB	5 cm
1317		moi j'en ai fais un de 4
1318		on en fait déjà un tous de la même forme après ...
1319		on en fait un de 5
1320		5 ?
1321	CS	4
1322		Euh tu t'es mis sur quel point toi
1323		T'es sure de toi Chloé ?
1324		oui
1325	CQ	ils font des calculs savants de l'autre côté
1326	CQ	Qui c'est qu'a une gomme
1327		[inaudible]
1328		j'crois y a des cours
1329		j'sais plus
1330		*temps long d'action*
1331		t'en as fait trois
1332		non
1333		vous en avez fait trois ?
1334		le 4 et 6
1335		[inaudible]
1336	CQ	en même temps vous m'avez laissé ... le truc que personne veut faire hop, il est pour Charlotte

1337		en tant que déléguée
1338		5 cm
1339		c'est énorme
1340		mouais mais bon, si on veut assembler ...
1341		oui mais j'veux dire j'pense pas que y fasse ...
1342		si tu veux je ferai le prochain
1343		non mais c'est bon t'inquiète
1344	CQ	j'vais en dire un plus petit
1345	VB	2 cm
1346		y sont en train de faire des calculs trop complets
1347		nous d'façon c'est trop simple
1348		il est bizarre mon truc hein
1349		j'crois que j'me suis plantée
1350		
14		euh elle a fait 135 de l'autre côté
14001		ouais
14002		au pire vu qu'on fait tous 5 cm pourquoi voulez vous qu'ça fasse ...
14003		ah non parce que là j'ai fait 6 et 4 d'façon
14004		alors j'étais pas trop chiante
14005		ben si vous respectez genre une couleur par euh
14006		faut que tu prennes une feuille jaune
14007		hein
14008		tu prends une feuille jaune
14009		pour le faire
14010		elle veut qu'on respecte les couleurs
14011	CQ	ben ouais
14012		ou alors donne lui ah ben non
14013		mais non parce que là les feuilles orange on va repartir avec les 8
14014		parce que là j'pense que tu fais le 6 toi
14015		Non j'fais le 8 on refera avec le 6
14016		c'est combien les angles pour les 6
14017		ben tu fais pareil sauf
14018	CS	ben oui mais vous m'avez pas dit ce que vous vous avez fait
14019		c'est trop savant
14020		Rires merci !
14021		Ah mais toi aussi [...]
14022	CQ	tu fais 6 ou le 8 là parce que 8 c'est 135, si tu l'fais jaune c'est 8
14023	CS	pour le 6 c'est combien ?
14024	VB	150
14025	CS 00 :34 :00	150 ?
14026	VB	normalement ça devrait être ça ... essaye
14027		si on a fait une faute euh
14028		j'faisais les 8 mais j'ai pris jaune [...] tant pis

14029		he j'vais me faire taper dessus
14030		ah ben oui juste un coup de compas
14031		c'est mieux quand on cherche à plusieurs
14032		quoi ?
14033		c'est mieux quand on cherche à plusieurs
14034		si ça trouve pour le bac on va tomber sur ce sujet
14035		ça me paraît bizarre 150
14036		il est où ?
14037	00 :35 :33	ah ben non ... non non c'est pas 150 ...
14038		mais y me paraît bizarre
14039		c'est moins de 160
14040		on dirait que c'est plus petit en haut qu'en bas
14041		ouais
14042		si ça se trouve c'est parce que t'as fait deux traits comme ça, ben tu vois
14043		
14044		pourquoi toi tu peux couper ?
14045		ben c'est ce que j'allais faire mais
14046		est-ce que les côtés sont les mêmes
14047		ben non c'est pas les mêmes
14048		c'est pas les mêmes longueurs de diagonales ?
14049		[inaudible]
14050		ben non
14051		[...]
14052		ben non c'est pas la même la diagonale
14053		[...]
14054		T'as dis quoi Aurélie euh Chloé
14055		ben c'est pas les mêmes là la diagonale
14056		logique [...]
14057		la diagonale
14058		ben le carré, le côté d'un carré et la diagonale c'est pas les mêmes
14059		non
14060		[...]
14061	CQ	c'est pi sur deux ça ...
14062		j'crois les diagonales c'est 2 2 ...la longueur de la diagonale c'est un truc du genre pi sur 2 quelque chose comme ça euh 2 racine de 2 où une connerie comme ça
14063		alors moi [...]
14064		eh ben tu prends là et là
14065		j'peux tester un truc
14066		tu veux tester quoi
14067		[...] faut qu'on mette la distance entre ces deux trucs
14068		oh regarde il est beau
14069		vous voulez que j'en fasse un autre

14070		si tu connais pas la distance entre ces points
14071		vous voulez un plus petit ?
14072		il fait combien là
14073		euh 3
14074		ben celui là
14075		c'te partie
14076		tu crois là qu c'est ...
14077	CQ	faut au moins en faire deux des comme ça parce que si on veut les assembler
14078		moi j'en prends ...
14079		là mais c'est le milieu d'un d'un triangle équilatéral
14080		ha mais le milieu de
14081		ouais de la figure
14082		même faudrait les trois de la même taille
14083		je teste un truc
14084		parce que si c'est le milieu après pour que ce soit la distance ...tu reportes là tu mets ton machin là ...
14085		j'ai suivi la conversation et j'ai rien compris de ce que tu m'dis là
14086		regarde ...c'est plein de petits triangles
14087		oui donc là
14088		là c'est le milieu du truc
14089		ouais et en fait tu fais en fait après tu prends deux tu repars de là et tu fais deux segments comme ça parallèles à celui là
14090		deux segments de la même taille mais parallèles
14091		tu m'as dit quoi Charlotte
14092		j'sais plus
14093		comme ça on saura faire des...
14094		j'ai l'impression d'être euh t'sais en maternelle
14095		moi aussi
14096		j'crois qu' nous on utilise la méthode maternelle et derrière ils utilisent la méthode terminale S
1497		Rires
14098		heu non c'est pas ça
14099		j'crois qu'j'ai fais la même erreur la même erreur que toi ...
14100		qu'est-ce que t'as fait
14101		parce que j'ai pris le rapporteur derrière donc j'ai pris 145 là
14102		hum
14103		t'avais pas ça toi tout à l'heure
14104		j'sais pas
14105	CQ	ben j'crois j'avais compté 130 au lieu de 135
14106		j'crois [...]
14107		[...]
14108		d'façon j'sais plus où j'ai pris mes [...]
14109	CQ	T'as fait un carré de 5, un carré de combien ?

14110		Euh 6 et 4
14111		6 4 5
14112		j'crois [...]
14113		et là tu fais combien de 4 de 3
14114		ouais
14115		Rires tu fais 6 5 et là tu fais 3
14116		hé mais Charlotte tu peux pas tout commencer là
14117		mais si tu rallonges tu fais des parallèles
14118	CS	oui parce que c'est Charlotte
14119	VB	oui je sais
14120		et là donc tu vas faire 4
14121		oui
14122		eh ben moi j'vais faire euh 6 [...]
14123		[...] on va connaître
14124	CQ	on a déjà commencé [...] d'façon
14125		[...]
14126		qu'est-ce que je suis intelligente des fois j'sais pas comment je fais
14127	CS	elle fait bizarre ma figure quand même
14128		ben regarde si les angles c'est les mêmes
14129	CS	ben ouais mais non j'trouve ça bizarre
14130	CS	c'est 115 moi
14131		115 ?
14132		hum
14133		120 !
14134	CS	donc d'accord c'est normal que ça soit pas pas pareil
14135		Rires
14136	VB	ben faut tu prennes entre 5 carreaux et ça
14137		hé
14138		[...]
14139		ha j'aimerais pas l'avoir à ta place
14140		hein
14141		j'aimerai pas l'avoir à ta place
14142		pourquoi ?
14143		faut peut-être marquer au dos au dos on marque le nombre de côtés
14144		oui
14145		5
14146		et les cm euh les euh les angles
14147		ah oui d'accord
14148		comme ça on saura
14149		135
14150		parce que regarde, c'est pas bon mon truc c'est pas aligné ça
14151		mais de toute façon enfin prends n'importe quelle longueur c'est les mêmes les angles
14152		oui mais on y marque quand même ... quelque part

14153	CS	parce que la longueur de l'angle là euh
14154		chut
14155		ba
14156		[...]
14157	CS	ça sert à rien ce que j'fais
14158	CQ	de quoi
14159	CS	j'dis ça sert à rien ce que je fais
14160		mais si
14161		[...]
14162		ça c'est 4
14163	CQ 00 :43 :46	p'être bien qu'faut qu'on accélère un peu
14164		ah j'suis désolée
14165		[...]
14166	CS	bon verdict des angles
14167	VB	y m'paraît déjà mieux
14168	VB	mais je sens que là ça va pas être égal
14169	CS	c'est combien là y a combien
14170		oui c'est ce qu'on avait dit entre 120 et
14171		118
14172	CS	ah non mais ça m'énerve
14173	VB	eh ben
14174	CS	120
14175	CS	en fait ça doit être 120
14176	VB	hein
14177	CS	çà doit être 120
14178	CS	parce que là j'ai trouvé 122
14179		vous êtes toujours sur vos histoires d'angles
14180	00 :45 :12	moi j'dirais c'est 119
14181		non c'est 120
14182		ben refais qu'est-ce que tu veux que j'te dise
14183		eh ben 120
14184	CQ	bientôt fini
14185	VB	hein
14186	CQ	T'as bientôt fini ton ...
14187		tu veux que j'en refasse un autre ?
14188		ouais
14189		comme ça on en a on en a tous
14190		au fait faut p'être qu'on commence un peu [...]
14191		tu galères un peu toi
14192		non !
14193		[...]
14194		ça se trouve on peut pas ...
14195		si parce que [...]

14196		quoi ?
14197		bon maintenant
14198		fais moi pas sauter
14199		
15	00 : 47 : 30	bon Valentine on va commencer parce que sinon ...
1501		par contre y'en a pas une autre forme y en a qu'une de 5
1502		de quoi ?
1503		on n'a qu'une de 5 cm y en a pas d'autres tailles
1504	CQ	de ça
1505	VB	ben oui
1506	CQ	bon on f'ra déjà avec ça et on verra après
1507		Rires
1508		T'en f'ras déjà deux comme çà et puis ...
1509	CQ	et après tu découpes et tu passes au 3
1510		c'est 4 ça
1511		hum deux de 6
1512		j'peux avoir le rapporteur s'il te plaît
1513		*fin des constructions et du découpage pour CQ et VB*
1514		merci
1515		oui mais après
1516		de quoi
1517		tu fais avec le 6 non
1518		ben j'sais pas peu importe on va essayer
1519	00 :48 :25	t'en regarde voir si on fait ça comme ça après là on peut pas assembler deux formes comme ça [...] qu'ont pas le même côté de longueur
1520	VB	j'sais pas si t'as entendu ce que je viens de dire mais parce que même un triangle ça rentre pas faut superposer
1521		ben si superposer
1522		tu peux bien superposer
1523		ça rentre bien
1524		[...]
1525		donc on peut on peut juste attends ces deux formes faut noter quelque part que les deux formes là on peut
1526		c'est quoi ces deux là t'as dis comme forme
1527		euh octo non oui octogone
1528		CQ note le résultat
1529		tu fais un 6 toi aussi pourquoi y en a trois de 6 ?
1530		parce que j'en ai fais trois
1531		tu veux faire comment ?
1532		tu vas mettre celui là [...] Rires
1533		parce que là si on met un un carré et un octogone on peut même ... ça marchera toujours pas
1534		ouais

1535		fais voir essayes en un
1536		non ça marche pas
1537		donc en fait deux formes qu'ont pas le même côté de longueur on peut pas les
1538		hum
1539	00 :50 :24	faut que faut faut que que chaque forme elles aient la même longueur
1540		ouais pour qu'on puisse les assembler
1541		pour heu qu'on puisse faire un
1542		[...]
1543	VB	Ah j'crois que t'es en train péter un cable non ?
1544	CQ	mais qu'est-ce que tu fais ?
1545		si, ils sont droits
1546	CQ	en fait faut juste que tu vérifies si t'as les angles et les longueurs et si tes angles et tes longueurs elles sont bons normalement c'est tout bon
1547	CS	ouais j'sais bien mais j'ai l'impression ça marche pas
1548	CQ	mais découpe-les tu verras bien
1549		[...] mais non j'ai l'impression que ça marche pas
1550		mais si
1551		ah j'prends avec les 4
1552		donc on saura que c'est un angle de 120°
1553		donc en fait maintenant il nous reste plus qu'à faire des des des formes de la même mesure
1554		et ça marche pas alors [...]
1555		parce que en fait on peut on peut assembler aucune
1556		attends j'te regarde j'fais juste ça
1557		t'as juste besoin ... tu peux pas assembler tu peux asssembler aucune forme qu'on pas la même longueur
1558		oui parce que là après tu peux plus mettre un angle
1559	00 :51 :30	et là si tu fais ça en plus t'as le coin blanc qui est dedans
1560		mais si attends
1561		t'en fais la moitié, donc là on prend une petite taille enfin t'sais une tout petite
1562		tu veux dire tu veux défendre la taille toi [rires]
1563		tu trouves ça
1564		mais si par exemple le truc après ça fait
1565		tu parles tu parles c'est la même longueur ça marcherait
1566		
1567		non mais tu peux pas faire ça parce que regarde t'as ton ta ton [...] dans c'te longueur tu peux pas
1568	CS	tu veux dire que si on nous fait un de c'te longueur là
1569		hum
1570	CS	tu veux dire si on en prend un de c'te longueur là et ben ça marche
1571		Mais on peut pas
1572		et pourquoi

1573	CQ	ben parce que le coin de là il est dans la longueur là et c'est dit euh on exclut heu assemblages voilà
1574		ah ouais c'est vrai
1575	CQ 0 :52 :30	on exclut de ce problème les pavages tels que le sommet d'un polygone appartienne au coté ...
1576	CS	on aurait du y penser tout de suite alors
1577		
16		on va repartir
16001		5
16002		oh ben 4
16003		bon c'est bon on va faire 4 et 5
16004		on doit faire 5 euh 5 carrés
16005		et là ça va pas
16006		mais non mais le carré tu vas le mettre où ?
16007		ça va pas là Charlotte
16008		quel carré ?
16009		tu veux mettre un carré
16010		tu peux en faire
16011		mets
16012		attends
16013		fais en un autre comme ça
16014		t'sais tu peux juste tu fais juste les points sur les côtés et tu relis après
16015		déjà on place
16016		[...]
16017		j'vais le faire en petit en plus
16018		j'en avais fais plein des 5 non c'est des 6 que j'en avais fais plein
16019		on va prendre des 5
16020		y aura peut-être un cm de plus mais on s'en fout enfin pas un cm mais
16021		y aura peut-être 15 cm de plus mais c'est pas grave [Rires]
16022		oui quelques mm du fait que
16023		ça fait 6
16024		la honte on a fini [...] enfin reste qu'un hexagone
16025		[...]
16026		tu me passes les 5 euh carrés
16027		l'hexagone ... j'me sens trop débile de faire des trucs comme ça alors [...]
16028		oui mais ici c'est pas le but
16029		non mais au moins on a au moins
16030		tu m'passes un ciseau
16031		au moins on a
16032		c'est [...] qui l'a
16033		prends celui dans ma trousse
16034		on a on [...] les choses
16035		ça m'fait décompresser

16036	CS 00 :54 :55	et c'est plus facile de pouvoir inventer d'autres figures en voyant que
16037		parce que expliquer par a + b que a et b sont
16038		5
16039		le problème c'est que tu peux faire un truc avec ça parce que ça ça fait le même coin mais après de là aller à l'autre chose tu peux pas hein
16040		un carré ça marche pas non plus ?
16041		j'sais pas
16042		[...]
16043		non excuse
16044		avec un autre comme ça
16045		avec un autre comme ça
16046		non mais parce que ça tu pourras pas parce que avec après t'auras le coin de l'autre
16047		pourquoi celui là il rentre pas
16048		ah ben non
16049		lui non plus il rentre pas parce que l'angle
16050		là faudrait qu'y ait un angle comme ça
16051		c'est pas les mêmes angles ça peut pas rentrer
16052		oui mais est-ce que c'te figure là aussi elle marche
16053		ah t'sais la sorte de maison ?
16054	00 :55 :45	ben non parce que là c'est pas l'angle de ça
16055		si tu l'fais comme ça
16056		ben oui ça c'est exactement ça
16057		non pas comme ça
16058		attends ...
16059		non c'est pas les mêmes angles
16060		ben si tu fais en sorte que ce soit les mêmes angles
16061		ah genre une étoile
16062		ouais
16063		maintenant je vois ce que tu veux dire
16064		en fait avec 5 côtés
16065		ça ça ça
16066	00 :56 :02	ben ça c'est un hexagone 5
16067		ben oui
16068		ouais j'crois
16069		ça c'est une maison ça [Rires]
16070		oui
16071		on n'a plus de couleur de feuilles
16072		c'est 6 hexag hexagone non
16073		pourquoi la ... on dit que c'est un hexagone [...] parce que ça fait tac tac tac
16074		ben après ça fait ça sauf qu'elle est plus
16075		non j'parlais de celui là

16076		et celui là c'est celui là
16077		et y a encore entre les deux
16078		oui ben vous sortez une feuille
16079		celui qui fait comme ça
16080		ça fait une étoile quoi
16081		ben attends pour l'instant je vais le faire là dessus
16082		c'est celui là qu'tu veux dire
16083		oui
16084		bon alors
16085		3
16086		[...]
16087		ben en fait tout ce qu'on voulait faire c'est autour d'eux parce qu'avec les angles c'est pas évident que ça marche pas
16088		ben oui mais si ... on aurait pas pu voir
16089		ben oui mais
16090		eh ben j'fais en petit ... j'dessine toutes les heu possibilités
16091		si tu trouves un truc qui fait qu'là attends
16092		ou pardon
16093		c'est pas grave
16094		ben y en a un là
16095		ben faut qu'y ait un truc qui reste pour que ça fasse cet angle là
16096		ouais tu me dis si c'est 72 ben j'ai trouvé
16097		l'angle c'est 115 non 105 pardon
16098		ah oui mais rien
16099		moi j'ai trouvé 105 j'ai trouvé peut être
16100		105
16101		là tu peux pas faire entre deux non c'est combien là
16102		ça marche pas
16103		et t'es sur ça fait même taille même longueur
16104		le même angle la même longueur
16105		attends j'vais essayer
16106		105
16107		105 ? T'as combien toi ?
16108		110
16109		d'accord
16110		aye
16111		tu t'es plantée
16112		mais ça me lance dans le poignet
16113	P 00 :59 :25	Il est 16h euh dans un quart faudra penser à commencer la rédaction de votre affiche
16114		hu
16115		non ça va
16116		qu'est-ce le truc c'est qu'est-ce que les angles là sont .... c'est tout
16117		on est en degré

16118		j't en ai fait un de petit de 1,5 cm Rires
16119		ça marche ça fait les bons angles
16120		celui là
16121		ça fait bien ... l'angle est bon
16122		oui ça fait 222 non 252 *CS manipule un hexagone et un octogone*
16123	1 :00 :28	108 tu vois ç'est euh là c'est ... c'est pareil c'est 108 donc c'est p'être ça
16124		fais en un de 5 pour voir si ça marche
16125		tu veux que je le fasse
16126		par contre faut qu'on s'magne
16127		là j'en ai que trois
16128		t'as fait les car les rectangles
16129		les rectangles heu
16130	CS	les triangles
16131	CQ	oui ah mais ils sont tous en pointe là
16132	CS	et ceux là après quand tu les
16133	VB	mais là aussi ils le sont bien
16134	CQ	ouais mais non quand tu les mets comme ça comme ça ils sont tous autour d'un
16135	CS	ah oui
16136		pourquoi ceux-ci y marchent pas tu peux pas les assembler ceux-ci là t'as toujours un trou là en fait
16137	CQ	ha mais si parce que là si tu mets
16138	VB	tu mets un carré
16139	CQ	mais si t'en mets un autre là par exemple ben ça fait un carré
16140		oui c'est sur ça fait rien mais
16141		ben oui ça peut pas faire un ...
16142		tandis que ceux là ça marche ou pas
16143	CQ	ben non ça fait pas un carré
16144		oui mais ceux là c'est possible de les tous les mettre ensemble *octogones carrés*
16145		ouais
16146	1 :02 :28	ceux là c'est possible de tous les assembler *hexagones*
16147		[...]
16148		oui mais c'est c'est ceux que j'ai dessiné
16149		non ça c'est ceux là
16150	CQ	et on peut mettre un carré avec
16151	CS	non tu mets
16152		non c'est ceux que tu mets à chaque fois
16153		et là on peut pas genre mettre un carré
16154		ou un triangle non on peut pas
16155		un triangle, deux triangles
16156		si on peut mettre deux triangles
16157		l'autre de 5 il est où

16158	CQ 1 :02 :50	si on peut mettre deux triangles
16159		et t'en mets euh
16160		sachant qu'y a celui aussi où tu peux faire
16161		ouais faut ... 4 en petit
16162		... fais comme sur le dessin
16163		non mais découpes pas au pire
16164		non mais ça marche p'être ça marche pas du tout
16165		y a pas un côté où ça marche *essai d'ajustement de deux octogones autour d'un pentagone dessiné*
16166		là c'est p'être là on ça fait ... c'est ceux qui font
16167		[...]
16168	VB	non parce que là on met des on met des carrés on peut pas mettre des on est bêtes
16169		j'lai pas dit
16170		eh dis donc
16171		attends j'vais dessiné un truc
16172		[...]
16173		j'commence à dessiner
16174		avec lui c'est galère
16175		t'es en train d'faire lesquels
16176 16177	 1 :04 :08	quand tous les triangles sont sont ... mais Charlotte les triangles en pointe ou ceux-là ça revient au même *comparaison de deux assemblages avec uniquement des triangles*
16178		ah oui c'est vrai
16179		si tu fais sur une grande surface ça revient au même
16180		c'est pas con
16181		bon ben j'fais ceux là
16182		eh mais tu fais lequel, avec les triangles ou celui
16183		comme tu veux toi
16184		ben importe
16185		... on fait la même figure
16186		j'ai trouvé un autre truc
16187		quoi
16188		avec ta forme ?
16189		oui
16190		c'est un angle de combien le
16191		120
16192		il est microscopique mon truc
16193		bon ben j'fais avec le triangle
16194		tu fais avec les triangles ?
16195		si tu veux
16196		tu veux quoi ?
16197		j'te l'emprunte

16198		tout ce que je prends euh
16199		attends
16200		ç'aurait été plus simple
16201		avec un triangle un triangle de 5 un autre triangle de 5 merci en fait ça fait ça fait pareil que là sauf que là autour on met des ça
16202		j'ai triché un de toutes façons là
16203		oh!!
16204		et ça fait attend combien ça fait ça
16205		de quoi
16206		ah ça va être
16207		ça va pas
16208		j'vois pas c'qu'on va pouvoir mettre pour ça
16209		attends j'te redis dans deux minutes
16210		attends tu veux faire quoi là essaye avec des trucs de 5
16211		ça mais pareil
16212		toc et si tu mets un carré ensemble
16213		non parce que l'angle il est de 60 56
16214		alors peut être avec les erreurs
16215		ou avec un triangle
16216		ça marche tu mets un carré un triangle
16217		pourquoi tu pars du principe qu'on se trompe
16218		un carré un triangle ça marche
16219		ah mais non parce que l'angle il est de 56 et le triangle il est de 60
16220		ouais mais après t'as les erreurs de
16221		ouais mais tu vois y a pas que moi Charlotte
16222		vous êtes pessimistes
16223		ça marche pas
16224		mais on est nulles
16225		fais le truc ah non tu fais attends tu fais tout le dessin avec les bons angles tu verras ça marche (manipulation entre les gabarits et utilisation du rapporteur)
16226	1 :08 :05	tu préfères pas calculer c'est quand même plus simple
16227		tu nous en trouve un autre alors Chlochlo ou pas
16228		peut-être ... j'vois pas pourquoi ça marcherait pas
16229		super
16230		dis moi qu't'as fait avec les triangles
16231		hum
16232	1 :09 :30	ha mais non ça va pas
16233		ça marche pas
16234		parce que ça fait 54 un angle de 54 et ça fait 60 l'angle
16235		L'angle d'un triangle équilatéral ç'est combien d'jà
16236		60
16237		et tu m'as dit qu'ça c'était 120
16238		non

16239		si tu m'as dit
16240		non j't'ai rien dit
16241		ah mais si oui ah mais oui pardon
16242		donc ça ça fait 120
16243		et 120 c'est le double de 60
16244		hum
16245		bon mais est-ce que ça marche tout le temps
16246		là c'est 90 et là c'est ?
16247		120
16248	1 :10 :05	non c'est plus c'est 135 j'crois ça marche pas
16249		mais de quoi tu veux faire
16250		non mais c'est ton angle là qui fait 130 135
16251		oui
16252		et celui là c'est 90 ben ça fait
16253		tu fais 135 plus 135 plus 90 normalement tu dois trouver 360
16254	CQ 1 :10 :21	bon mais en fait j'ai rien trouvé j'ai cru j'étais super intelligente
16255		houlà, il est pas un peu euh un petit peu y a un truc qui va pas là
16256		c'est pas grave d'toutes façons après on va devoir le euh le refaire sur l'affiche
16257	CQ	t'as trouvé quoi ChloChlo
16258	CS	mais y a ça mais j'trouve rien pour là pour y combler avec ...
16259	VB	ah j'me suis plantée là
16260		t'as essayé ça
16261		et deux triangles t'as essayé
16262		non ça marche pas non j'crois plus faudrait un de 5
16263		ou un carré un triangle essaye un carré un triangle
16264		mais ça marche un carré un triangle
16265		remarque il s'agit de tester l'assemblage pentagone-pentagone-carré-triangle
16266		mais non
16267		mais si
16268		regarde mais si ça marche c'est c'que j'ai fait tout à l'heure ça marche
16269		mais par le calcul ça marche pas
16270		[...]
16271	1 :11 :20	pourquoi ça marcherait pas par le calcul
16272	VB	parce que j'ai fait ça c'est un angle de 108 degrés parce que c'est euh parce que tu fais tu fais 360 divisé par 5 ouais 5 ça t'fais 30 voilà non ça fait 110
16273		mais tout à l'heure pour celui là on a fait 180 divisé par ... et après on y a soustrait à 360 le nombre qu'on a trouvé
16274		vous avez fait comment ?180 divisé par euh
16275		On a fait 180 divisé par le nombre d'angles 5 là le nombre d'angles
16276		pourquoi 180 ?

16277		5 et 360 moins 36 324
16278		324 et là ça fait combien 90 et 60 150
16279		et alors
16280	1 :12 :20	150 ben c'est un angle de 150 qu'est entre les deux
16281	CQ	pourquoi tu dis que ça marche pas ChloChlo j'comprends pas
16282	VB	parce que ça ça fait ça c'est un angle de 108 et 108 plus 108 plus 90 et tu rajoutes à ça pour avoir tu sais un angle enfin tout le tour
16283		parce que tu peux pas en faire un deuxième là et tu calcules carrément
16284	CS	oui parce que y
16285		de toutes façons on doit recommencer l'affiche
16286		ben alors ouais ça marche peut-être
16287	1 :12 :50	là tu dois trouver un angle de 150 entre les deux
16288		attends mais y a ceux là aussi
16289		j'sais pas
16290		j'peux pas prendre pour essayer ça pour essayer d'y faire
16291		mais c'est pas le bon
16292		non mais là à côté
16293		t'en a fais deux
16294		il est là le deuxième j'fais l'angle
16295		l'angle c'est
16296		ouais moi j'dis ça marche ça se voit
16297		ah quoique attends
16298		tu vas essayer de faire la construction
16299		ouais mais non parce que regarde si tu suis bien là tu vois t'es pas
16300		[...]
16301		parce que sinon là ça déborde de quelques degrés
16302		ben tu vois c'est ce que je disais personne voulait me croire
16303	CS 01 : 14 : 05	faut savoir en fait l'écart entre les deux ce que c'est
16304		et mais on peut pas
16305		attends j'reprends ma feuille de brouillon 360 divisé par 5 ça fait j'l'avais fait ça fait 72 72 c'est pour ça que j'étais partie sur le principe que j'faisais 360 - 72 ce qui valait à 200 non 186 non
16306	CS	288 *à la calculatrice*
16307		et 288 ç'est pas un angle de 190 degré
16308		là entre les deux
16309		par contre là entre là et là
16310		et ben tu fais 288
16311		vous êtes sur qu'y fait 5 cm ce carré
16312		c'est pas possible que ça fasse 288 parce que 288
17	01 :15 :10	
1701		et ChloChlo et regarde je suis en train de trouver quelque chose
1702		regarde un comme ça un comme ça tu mets

1703	CQ	ah tu remets celui là
1704		non celui là celui là
1705		celui là ah mais c'est pas celui là attends vas- y remets
1706		non parce que c'est un carré qui va là
1707		ah ouais merde
1708		mais pourquoi
1709	CQ	mais ça marchait
1710	VB	attends j'essaie celui-là après
1711	CS	oui voilà mais le problème c'est qu'on sait pas *essai avec octogone hexagone pentagone*
1712	CQ	mais après tu mets un orange un jaune un orange attends un jaune un orange un jaune un orange ah non les deux oranges y vont se toucher c'est après
1713		ouais mais si ça se trouve tu vois c'est à quelques degrés près ça marche pas et on le sait pas ça ... faut qu'on essaie de le calculer avec l'autre aussi
1714		ouais après y manque un coin
1715		ouais voilà et là on met quoi
1716		mi-jaune mi-orange
1717		mais non un jaune
1718		mais non j'crois qu'c'est un comme ça encore
1719		ça marche pas un jaune
1720		T'en a pas un deuxième
1721	P 1 :16 :12	j'vous propose de passer à la réalisation de votre affiche pour exposer vos résulats
1722		remarque : annonce peu écoutée du fait des échanges pregnants
1723		mais c'est un jaune
1724		mais non c'est un orange
1725		c'est un comme ça
1726		pourquoi c'est un orange
1727		c'est un comme ça
1728		Attends enlève c'te feuille là tu prends celui là à la base voilà mets le orange jaune ... à peu de choses près
1729		à peu de choses près non là ça marche pas j'l'ai pas fait tout à fait bien hein
1730		oui mais voilà c'est ça le problème
1731		mais ça marche pas
1732		mais avec ça marchait non c'est pas ce que tu m'as dit
1733		non là ça marchait ouais
1734	VB	ouais et ouais et là j'suis d'avis à mettre un autre blanc ah mais non parce que là regarde c't'angle regarde deux blancs et un jaune si y a un blanc là
1735	CQ	ben oui et après
1736	VB	ben oui mais regarde là y a orange jaune blanc et là y a deux blancs un jaune

1737	CQ	parce que là tu mets un orange là
1738		ouais
1739		bon après tu mets un blanc là
1740		hum donc ça va pas
1741	CS	et l'autre là ça marche ou pas
1742	CQ	lequel ?
1743	CS	celui avec le triangle et le carré
18	CQ 1 :17 :50	bon on va peut être passer à l'affiche
18001		ouais ... le bordel
18002		bruits de rangement
18003	1 :18 :35	on met un titre
18004		problème du [...]
18005		tu mets ça vraiment
18006		tu veux mettre quoi
18007		tu mets problème
18008		polygones réguliers
18009		pavages archimédiens "'arkimédiens archimédiens"'
18010		on dit archimédien ou arkimédien
18011		bon on va pas s'engueuler
18012		[...]
18013		archimédiques ?
18014		non c'est archimédiens
18015		on va corriger avec du rouge
18016		et y a pas de s ah si t'as mis un s à pavage
18017		bon alors
18018		des p'tits collages
18019	CQ	faut dire que on ça faut mettre euh
18020	CS	faut qu'on explique après
18021		moi j's'rais d'avis euh qu'on découpe quelques figures qu'on a faites et que [...]
18022		faut mettre du scotch
18023		mais tu les colles avec de la colle mais euh ç's'rait plus simple parce que
18024		ouais on en aura pas assez pour faire toutes les figures
18025		ouais avec toutes celles qu'on a refaites là
18026		ah ouais
18027		tu découpes
18028		pis genre on les colorie
18029		ouais si tu veux
18030		moi j'fais le coloriage
18031		mais parce que
18032		c'est vrai que ça va pas faire beau

18033		[...]
18034		tu veux que ...j'fais en vert
18035		mais là est-ce que j'en ai fait assez
18036		j'fais en vert
18037		ouais tu fais comme tu veux par contre faut faire les mêmes figures avec la même couleur
18038		rouge les triangles
18039		où j'l'écris elle
18040		j'ai de la colle
18041		j'mets du scotch c'est mieux le scotch
18042		découpes en gros ... non tu découpes en gros là tu t'embêtes
18043		non non y a pas de couleur
18044		si si c'est bleu
18045		j'les colle scotch euh
18046		ben on met pas d'ordre on s'en fout
18047		mais attend parce qu'elle veut écrire elle y a une phrase
18048		
18049		si on mettait déjà le nombre de tous les polygones qui machinent sur notre truc
18050		c'est les polygones réguliers
18051		oui c'est ce que j'ai dit
18052		non t'as dit arki
18053		faut découper
18054		sauf qu'elle les disaient à l'inverse
18055		[...]
18056		c'est pas de ma faute
18057		on découpe bien
18058		[...]
18059		c'est quoi ça alors
18060		ben un hexagone ah non celui là si un hexagone
18061		1 2 3 4 5 6 6 hexagone t'es sure
18062		oui
18063		et avec 5
18064		5 c'est hec pentagone pentagone 5
18065		on n'a trouvé que ça
18066		si ça se trouve ça marche [...]depuis tout à l'heure
18067		si ça se trouve ça marchait peut-être avec d'autres
18068		les triangles
18069		pour l'instant on n'a trouvé que ça
18070		avec 7 ça marche parce que si ça se trouve c'est tous les
18071		oui c'est ça
18072		y a un moment ça doit tous les faire avec
18073		tous les dérivés des gones
18074		quand tu les assembles tous y a toujours un moment où ça doit

18075		fais voir si on fait un 7
18076		y en avait d'autres les autres années
18077		*Remarque : références aux polygones d'une frise affichée dans cette salle de mathématiques*
18078		attends avec du scotch
18079		alors 7 ça fait 1 2 3 4 5 6 7
18080		et après tu peux multiplier à l'infini
18081		ben tous les machins avec n côtés
18082		et ouais parce qu'après t'a toujours moyen de mettre n'importe quoi d'abord un carré pis après t'ajoutes un triangle un truc comme ça
18083		bon on va la laisser là j'ai voulu la décoller ça marchait pas tiens j't'en remets de l'autre côté Ah ChloChlo un boulet un boulet tiens
18084		après j'mets la phrase su ...
18085		ça ça s'trouve c'est ce qu'on a fait
18086		on a fait l'autre Chloé
18087		Quel autre ?
18088		tu sais le pentagone avec le triangle et le carré
18089		ben on va le faire vite fait
18090		mais vous êtes sures que ça marche
18091		non mais en même temps d'jà le pentagone ça a servi à quoi
18092		ben parce que quand on mais c'est pas obligé là c'est les polygones convexes mais c'est pas obligé que ça fasse des trucs
18093		ben alors tu peux mettre sextagone donc tu peux mettre tous les mettre
18094		je c'est dur hein de tout mettre oh on peut pas ça va descendre jusqu'au ...
18095		ben oui parce que le nombre il est pas défini
18096		le n de ... ça veut rien dire c'est pas grave n c'est pour attirer les mathématiciens ils vont bien comprendre ben mets un tiret
18097		c'est quoi n-gone
18098		Chloé j'sais pas il est où ton ...
18099		ben j'crois qu'elle l'a jeté
18100		non mais tu veux pas en faire un plus petit
18101		non on n'a rien jeté
18102		ha si c'est là bas ma feuille de brouillon
18103		il est juste celui-là ?
18104		ouais mais après ça ce qu'on a trouvé c'est ... ça ne marche pas tout le temps
18105		mais faut expliquer toi derrière pourquoi on a trouvé ça
18106		ben parce que ça marche pas
18107		ben parce que sinon y aurait des trous quoi
18108	CS	c'était des angles de combien
18109	CQ	et puis surtout que les
18110	VB	72 - quelque chose
18111		on a on a fait que vous avez coupé que ça on a fait que ça ?

18112		si tu prends c'te angle là là c'est là l'angle hein faut que tu prennes
18113		[...]
18114		là y a un problème
18115		105
18116		on expliquera à l'oral
18117		ouais
18118		on dit quoi
18119		j'ai oublié un mot là ouais j'ai oublié la moitié de la phrase
18120		un pavage archimédien
18121		arki médiens dien chien
18122		heureusement que j't'écoute pas parce que
18123		il faut que oui j'ai oublié un gros morceau de la phrase il faut que chaque point
18124		[...]
18125		mais tu fais quoi là
18126		ben j'en fais un autre pour après dire que
18127		oh c'est bon Valentine
18128		comment on dit la même mesure sur le côté enfin le la même longueur de côté la même longueur
18129		il faut que chaque forme ait la même longueur
18130		j'vois pas ce que tu veux dire
18131		les côtés de même longueur non parce que la longueur ça peut être tu vois ça peut être ça
18132		tous les côtés la même ben j'sais pas
18133		toutes les formes aient utilisé ah non hein euh utilisent une longueur égale
18134		un côté de même
18135		les côtés de même longueur
18136		leurs côtés de même longueur
18137		on a trouvé que des exemples mais si ça s'trouve y a une loi t'sais
18138		ben oui on a trouvé n-gones quand y a n c'est une loi
18139		on pense j' mets entre parenthèses
18140		on pense
18141		on n'est pas sures
18142		ah d'accord
18143		pour pouvoir être placés côte à côte
18144		hein
18145		pour pouvoir les placer côte à côte
18146		pourqu'il n'y ait pas de trous en fait
18147		ouh la
18148		qu'est-ce qu'on peut mettre d'autre
18149		la feuille elle est bientôt finie
18150		non
18151		tiens celui là dans l'autre sens

18152		[...]
18153		mais non j'y arrive plus
18154		tu veux que j't'y passe
18155		et il est où le ChloChlo Chloé il est où blanc qu't'avais fais ton pentagone j'sais pas quoi
18156		il est là mon blanc pentagone
18157		ben non c'est ce que j'avais fait alors
18158		ben tu t'es plantée de c'te longueur là parce que si tu prends la parallèle de ça
18159		ouais c'était mal barré
18160		il est où ton blanc qu't'as découpé
18161		mon blanc
18162		t'avais coupé un petit pentagone blanc
18163		ben je sais je sais pas moi là il est dans le tas là
18164		parce que la parallèle de ça
18165		parce qu'attends j'crois que j'ai trouvé quelque chose
18166		non j'ai pas trouvé non plus ah mais ça c'est ce qu'on a trouvé
18167		Et ces deux là ils vont pas ensemble ?
18168		là je suis sure qu'y a un truc c'est obligé
18169		ah mais non ça peut mais comme si tu mets ça là et celui tu l'mets de l'autre côté
18170		après t'en mets un là
18171		oui mais là faut bien que tu combles le trou
18172		non imagine on le comble pas Rires
18173		non mais attends regarde si tu en mets un blanc là là tu en remets un orange un blanc un orange un blanc après la tu mets un blanc un jaune
18174		oui mais après tu peux pas le finir parce que vu c'est un plan le plan est à l'infini ben là y a un trou
18175		si j'mets ma main
18176		t'es sure que la tienne est elle juste au départ Chloé
18177		ben au pire refais là hein
18178		ben non ça m'embêterait quand même [...]
18179		bon j'vais coller ma petite figure
18180		attends moi j'voulais voir un truc si
18181		mais ça craint si on a trouvé que ça
18182		j'voulais faire un truc j'sais plus faire est-ce que attends c'est un de 5 y sont où les 5 de triangles
18183		j'ai que des 6 tiens
18184		non là on peut plus rien mettre y va te manquer
18185		ben là de toutes façons tu pouvais mettre un
18186		c'est c'est un blanc qui faut
18187		Charlotte elle blème
18188		ben c'est obligé qu'y ait un truc on peut pas laisser ça comme ça y a un Schmilblick

18189		pourquoi là ça irait
18190	1 :32 :10	parce que là
18191		eh ben là tu mets un jaune
18192		et là
18193		ben là tu mets un blanc
18194		bon ben là dans ce coin là y a deux blans et un orange là y a deux blancs et un jaune alors que là y a un jaune orange blanc
18195		hum hum
18196		t'es bien partie je crois
18197		bon alors ça ça marche pas non plus parce qu'alors dans ce coin là y en a trois et dans ce coin là y aura que du rouge
18198		ben non parce que tu vas remettre deux bl jau deux bleus là
18199		les bleux tu vas les mettre
18200		tiens j'en ai des bleus voilà c'est bon
18201		là tu vas mettre deux bleux là ça va faire tac et là tu vas remettre deux rouges et là tu vas remettre des rouges là
18202		on aurait peut être dû [...]
18203		ben
18204		tu veux que j'en refasse un bleu comme ça
18205		mais attends faut compléter l'affiche on va pas y laisser comme ça
18206		y vous reste plus que 5 minutes pour finir la rédaction de l'affiche mais si vous avez besoin d'apporter des éléments vous pouvez les donner aussi à l'oral
18207		donne moi un bout de feuille
18208		tu fais du décalquage
18209		j'pense que je vais faire ça
18210		alors donne moi ce bout de feuille
18211		on voit rien du tout
18212		aide moi à faire le le 5 là
18213		attends j'vais le faire
18214		c'est stressant hein
18215		c'est comment ça déjà 30
18216		pourquoi tu la refais
18217		parce que là en fait j'vois pas parce que ...on va en remettre deux comme ça
18218		[...]
18219		tu vas en remettre un second là
18220		... ça va pas
18221		là y a un dégât
18222		ah ouais pi t'en remets un là
18223		... ça va pas
18224		pourquoi
18225		parce que là ça fait un angle de 111 alors que là y a 116 ici par exemple ben tu vois déjà à vue d'œil pis ... 116
18226		mais c'est quoi qui va pas c'est le truc c'est que ça marche pas ou heu

18227		c'est que là après là tu veux bien remettre un truc comme ça ici
18228		ouais
18229		eh ben peux pas
18230		aller on recommence
18231		lui y doit pas marcher lui j'pense le pentagone
18232		c'est que c'est que c'est pas construit comme il faut ou c'est que
18233		lui il doit faire 360 divisé par 5 égal 72 180 - 72 c'est ce que je disais à la base c'est un 108 en fait et là j'ai 116 donc celui là y va pas
18234		on aurait du faire des formes plus grosses ça aurait plus combler parce que là on
18235		mais tu peux dire ouais
18236		il faut qu'à chaque coin [...] du truc eh ben ça soit égal à 360 de toutes façons l'ensemble des angles j'veux pas dire ...
18237		ça fait 150 équilatéral et carré ça fait 50
18238		j'les garde ça ...
18239		ouais 80 ouais faut qu'y fasse l'autre y fait plus 108
18240		heu 108
18241		donc ça ça fait 150 + 108 258 - 360 ça équivaut à 2 0 1 102 donc pas ça
18242		pourquoi
18243		parce que 108 et 102 c'est pas pareil
18244		euh oui [...] ben oui donc ça marche pas [...]
18245		on va présenter ça ils ont fait des trucs de fous hein
18246		ouais j'ai vu
18247		on s'tape trop la honte
18248		z'ont fait des putains de calculs
18249		nous on a fait le truc maternelle [Rires]
18250		en plus z'ont rempli la feuille pas nous
18251		tu veux qu'on active l'imprimante
18252	P 1 :37 :13	vous avez fini
18253		hum pas trop
18254	P	c'est jamais terminé
18255		et en fait ça marche pas notre truc [...]
18256		hein
18257		parce que ça marche pas sur les polygones sur le pentagone ça marche pas
18258		ben non mais ça les polygones heu convexes ben les polygones réguliers irréguliers non
18259		tu peux dire que toute euh tous les tu peux marquer comme quoi tous les polygones heu réguliers ne forment pas forcément un pavage archimédien
18260	P	bon on va commencer la la phase de débat de restitution de vos résultats de communication à l'autre groupe j'vous propose de commencer heu on va accrocher vos affiches avec les aimants votre affiche

18261		faut qu'j'écrive quoi
18262		comme quoi un polygone régulier un polygone régulier ne forme pas
18263		assemblés en fait c'est deux polygones réguliers
18264		deux polygones réguliers assemblés ne forment pas forcément un pavage archimédien
18265		Oh
18266		honte à nous
18267		
19	1 :38 :49	Première présentation : GROUPE 1
1901		alors ben expliquez ce que vous avez trouvé et ce qui se trouve sur votre affiche et puis ensuite on demandera à l'autre groupe ce qu'ils en pensent
1902	B	Heu donc euh donc on a trouvé qu'y avait heu trois polynones réguliers heu qui pouvaient être possibles heu qui pouvaient marcher pour faire un pavé donc y a le triangle équilatéral le carré et euh l'hexagone ben on a marqué que l'angle qu'était ici c'était un cercle ça faisait 360 ici là on a déduit que pour pouvoir heu qui s'assemblent il fallait que ces trois heu diviseurs de 360 pour pouvoir un nombre d'arêtes qui servaient heu pour pouvoir s'emboîter
1903	M	ensuite on a trouvé un rapport entre heu entre le l'angle et le nombre d'angles dans un polynome on en a fait une équation on a créé un cercle en fait et on a trouvé une équation entre n et k on a donc euh on a donc mis heu [...] pour n parce qu'on savait que c'était compris entre 60 pour les triangles équilatéraux forcément
1904	B	vu que c'est plus petit heu le plus petit polynome
1905	M	on peut pas avoir un polynome à deux angles donc c'était forcément le minimum et entre 180 parce que plus que 180 ça donnait un angle euh
1906	B	c'est un angle plat donc une droite
1907	M	ça donnait un angle négatif donc ça revenait au même on s'est dit que 180 était le maximum et euh et donc du coup on a calculé heu on a calculé les angles qui se trouvent entre 3 et 6 parce que heu le nombre d'angles trouvé pour 180 c'était euh
1908	B	2
1909	M	2 ben oui 2 donc c'était impossible et ensuite entre 3 et 6 on a remarqué que 5 ne marchait pas non plus parce que ça donnait un chiffre qui n'était pas entier
1910	B	ça veut dire que le nombre de
1911	M	donc c'était impossible
1912	B	le nombre de le nombre de polygones qu'on s'est s'est emboîté ça doit forcément être un nombre naturel parce que sinon [...]
1913	CQ	5 c'est un nombre naturel
1914	M	donc ben du coup on n'a trouvé qu'y restait que ces trois là
1915		5 c'est pas un nombre naturel

1916		je ben non parce que j'ai cru que vous disiez que 5 c'était pas un nombre naturel
1917		non c'est parce [...]le chiffre que l'on trouvait
1918		d'accord
1919		Alos qu'elle est la réaction de votre groupe est-ce que vous avez compris tout ce qu'ils ont donné est-ce que vous êtes d'accord pas d'accord
1920		nous on en a trouvé un en plus de de polygones convexes y a l'octogone aussi qui marche mais en fait nous on a assemblé aussi avec d'autres formes ben on n'a pas assemblé que les heu les heu c'est les hexagones on n'a pas assemblé que les mêmes formes entre elles
1921		on les a mélangé
1922		on a essayé de
1923		nous on est parti sur le principe que
1924		vous avez fait mathématique nous on a fait primaire
1925		on a ajouté que ben a fait on a compris que ça devait être que la même forme
1926		ben non
1927		moi ce que j'ai pas compris c'est la formule n heu égal 180 moins 360 sur k
1928		mais si c'est ce qu'on a fait
1929	CQ	ben oui tu divises 360 par k
1930	P	est-ce que y a quelqu'un de l'autre groupe qui peut expliquer en faisant si t'as besoin oui prends voilà
1931		on a fait un cercle le centre on s'est dit qu'en prenant n'importe quel point sur le cercle on s'est dit que de toutes façons ça créera un triangle heu isocèle et donc que cet angle ça sera égal à ça plus ça forcément un triangle isocèle il te reste forcément le même angle divisé par 2 ici c'est les mêmes et donc du coup on s'est dit que par exemple dans le carré super bien fait non on s'est dit que l'angle il était égal à deux fois celui-ci ben après on en a fait une relation en faisant le nombre d'angles enfin 360 divisé par le nombre d'angles
1932		c'est plus simple notre technique hein
1933		ça faisait ça en fait
1934		ouais ben en fait on fait pareil
1935		k c'est le nombre d'angles dans le polygone et n c'est c'est
1936		c'est l'angle en degré et puis après on a passé de l'autre coté et pis on a trouvé ça
1937		donc pour vous là si on répond à la question quelle est la réponse à la question à la question qu'on vous a posée vous répondez quoi
1938		ben pour eux y a trois solutions
1939		y a trois solutions et c'est celles-ci
1940		alors est-ce que vous avez encore des réactions à faire l'autre groupe
1941		non
1942		est-ce que vous êtes d'accord déjà que les trois solutions qui exposent sont des pavages archimédiens

1943		oui c'est ce qu'on disait [Rires]
1944		
20		Deuxième présentation : Groupe 2
2001	P	vous allez exposer votre affiche
2002		déjà on a faux
2003		notre grande affiche pleine de formules
2004		[...]
2005		t'aurais du mettre
2006		[...]
2007	E2	c'est marqué c'est le même assemblage de polygones [...] sans trou ni superposition
2008	P	Alors quel est votre problème sur le n-gone
2009		Ben en fait on vient de se rendre compte que n y devait être pair pour le
2010		on peut rajouter pair
2011		ben tu mets à côté tu mets à côté n est pair dans les conditions tu mets n est pair
2012		j'peux prendre ça
2013		oui j'pense que ça ira
2014	E1	[...] ben c'est forcément le même polygone
2015	P	Alors on va les écouter et après on reviendra sur ce qu'elles ont fait bon alors allez-y
2016		T'y vas j'y vais
2017		ben alors nous on a trouvé heu ben plus un peu plus de polygones convexes on a trouvé un carré un triangle équilatéral et un hexagone comme vous on s'est rendu compte que le pentagone y marchait pas ... et heu l'octogone
2018		c'est quand même un polygone convexe
2019		oui c'est quand même un polygone convexe mais ça marche pas pour faire un un assemblage donc voilà on s'est rendu compte que pour faire un pavage archimé archidien bref médien et ben toutes les formes qu'on devait utiliser elles devaient avoir la même longueur [...] par exemple vous pouvez pas utiliser un triangle équilatéral de côté 5 et un autre de côté heu 6 6 ben bref ça marchait pas et ben faut que y faut qu'à chaque sommet enfin c'est ce que vous avez trouvé sauf que hein
2020		k égal n égal 180 moins 360
2021		en fait un sommet tous les autres angles qu'arrivent à ce sommet et ben [...] tous les angles c'est la même et heu on a utilisé aussi tous les polygones réguliers formant un pavage archimédien nous on a trouvé on a trouvé
2022		mais qui devait y en avoir à l'infini si n pentagone n-gone si avec n-gone on pouvait faire un assemblage c'est que c'est une hypothèse
2023	P	pour vous la réponse à la question posée ça serait quoi la dérémination de tous les pavages archimédiens du plan
2024		eh ben y aurait une infinité plus heu les triangles et les pavés fin

2025		enfin avec les triangles et les carrés on pourrait heu compléter les n-gones on pourrait compléter
2026		comme on a fait euh avec euh celui là celui là on a complété avec les carrés [...]
2027		alors les autres vas-y
2028		il faut que heu il faut qu'autour de chaque sommet il y ait le même assemblage de polygones donc heu ben déjà celui là
2029		celui là
2030		ça veut dire qu'à droite il est faux déjà
2031		là
2032		ouais
2033		et ben non
2034		ben non regarde
2035		là y a un sommet qui touche un hexgone un hexagone et un autre qui touche un triangle
2036		ouais mais regarde attends
2037		donc forcément y s'ont pas tous
2038		où ça là
2039		ouais mais non ouais
2040		attends j'fais mon petit truc
2041		donc forcément quand tu vas tourner si tu mets un hexagone à droite les sommets y vont pas tous y toucheront pas la même chose du moins pas dans le même sens
2042	VB	attends vas y donc c'est pas très heu là y en a un autre là là y en a un là y en a un autre ... là [Rires] bon ben bref donc là y a bien deux deux rouges deux bleus deux rouges deux bleus y aura deux rouges ... ah ben non
2043	CQ	ben si
2044		ah oui ben non ça marche pas là y a deux rouges et un bleu ah et deux bleus
2045	VB	ah ben si ça marche
2046		ça marche pas bastien ?
2047	B 1 :49 :14	j'sais pas si
2048	VB	parce que ouais chaque sommet y a deux rouges deux bleus quoi
2049	CQ	non mais si tu ... si ça se trouve on a faux mais on comprend pas ce que tu veux dire
2050	M	si si j'sais pas faut que ça soit les mêmes nous on avait vu ça comme
2051		oui c'est vrai ... le même assemblage de polygones
2052		nous on pensait en fait que à chaque sommet en fait fallait que fallait que qu'y ait deux rouges et de bleus fallait que y ait chaque fois deux rouges de bleus on pensait pas
2053		peux y avoir le même nombre de à chaque sommet doit y avoir le même nombre de d'octogones et de triangles j'dis n'importe quoi ... le même nombre de ... à chaque sommet

2054		on pensait pas que ce soit vraiment les mêmes euh
2055	P	alors qu'est-ce que vous en pensez vous
2056		ben ça oui vu comme ça
2057	P	et avec l'explication qu'elles vous ont donné vous
2058		mais non mais si avec l'histoire des composés ça donne un nombre de solutions illimité on peut pas résoudre le problème
2059	P	alors ça donne déjà plus de solutions que celles que vous avez faites ça c'est certain, si les votres marchent hein puisqu'on a bien à chaque fois à chaque sommet mais ça donne plus de solutions ça on est bien d'accord alors elles disent qu'y en a une infinité qu'est-ce que vous en pensez ?
2060		j'pense pas qu'y en ait une infinité
2061		vous pensez pas
2062		non
2063		pour quelles raisons qu'est-ce qui vous fait dire qu'y aurait ça serait un nombre fini comme ça sans avoir
2064	M	le fait que les triangles équilatéraux y passe pas avec tous les euh avec tous les polygones mais qu'avec euh qu'avec l'hexagone [...] parce que ça fait 120° et euh et le carré avec l'octogone et le reste ça marche pas
2065		donc en fait le raisonnement que tu voudrais conduire c'est sur quoi le raisonnement que t'as envie de faire, tu dis euh avec les angles ça risque de pas passer est-ce que ça veut dire que là t'es sur une piste un peu comme celle que tu avais déjà fait enfin tu penses dans la même dans la même
2066	M	oui dans la même ligne avec plusieurs
2067		est-ce que vous avez encore d'autre chose à dire c'est bon ?
2068	Chercheur	juste revenir sur le rouge et le bleu là il marche où il marche pas celui là vous aviez des doutes
2069		oui ben oui, ce sommet là y a du rouge du bleu ce sommet là y a du rouge du bleu celui pareil donc
2070	Chercheur	Donc ça répond à la contrainte à quelle contrainte ?
2071		à la contrainte euh qui faut qu'il y ait le même assemblage de polygones ça nous perturbe aussi
2072		t'as un problème tu peux pas le finir aussi
2073		pourquoi
2074		c'est un plan c'est infini
2075		c'est infini celui-là
2076		ben celui là aussi
2077		non
2078		ben vous c'est pareil vous là bas
2079		oui du coup il est impossible à faire c'est une boucle c'est une boucle ouverte
2080		ben celui là aussi

2081		non celui là il est ter non il est non mais dans le sens ou t'es obligé de rajouter un rouge et pour rajouter le rouge t'es obligé de rajouter un bleu et pour rajouter le bleu t'es obligé de rajouter un autre rouge
2082		oui mais c'est pareil là bas parce que là-bas on a bien d'autres sommets ben tu vois ce que je veux dire y a d'autres sommets faut bien que tu le complète aussi
2083		ouais c'est bon
2084		ben tu vois
2085		c'est quand même bizarre
2086		ouais voilà fallait mettre des couleurs avec des couleurs ça marche
2087	Chercheur	vous avez combien de solutions vous, là, clairement, qu'on voit bien sur votre affiche
2088		ben là sur notre affiche 1 2 3 4 4 de sures enfin des solutions d'assemblages ou des solutions de
2089		qui répondent à la question
2090	VB 1 :53 :25	mais parce que d'un côté si on met euh 10 enfin 10 machins 10-gones là ah après l'angle y va y sera plus petit parce que à chaque fois l'angle comme là on a vu que avec 8 c'est un carré donc là on met 90 ah on passe à 6 de 6 à [...] donc si on rajoute logiquement l'angle il s'ra plus petit donc je pense que là normalement c'est impossible à faire
2091	CQ	ben si ... ben concrétement on sait pas bien parce que en fait on a tatonné on a plus tatonné à à essayer de faire les assemblages que la que d'trouver une formule ou [...] précis donc du coup on a un morceau de réponse mais on a pas toute la réponse
2092		il nous fallait plus de temps
2093	P	alors on va [...] Je vais vous donner quelques éléments
	1 :54 :35	Début de l'institutionnalisation

Annexe I : Transciption d'échanges en FC

Expérimentation en FC : Transcription des sons enregistrés par le micro placé près du groupe 2. Transcription pour la fin de la recherche et la présentation des résultats.

Repère	Locuteur Temps	Texte
1	01 :40 :50	270 - 108 ... 162 est-ce que y en a un qui fait 162 ?
2		euh oui n = 20
3		voilà [...] avec n = 20 en plus de notre carré. Est-ce qu'on va pas retomber là sur [...]
4		Allez continue allez un carré un hexa ... 150 j'en ai un à 150
5		N = 12
6		N = 12 ça ça marche aussi
7		Ouais ensuite
8		Ah oui je comprends ce que tu fais ah ouais alors l'hepta
9		270 auquel j'enlève l'hepta ce qui
10		Non
11		Oui
12		Est-ce que Thomas tu pourrais faire [...]
13		Ah ah
14		C'est pas possible
15		Pas possible
16		Octo
17		Alors octo avec huit
18		Faut faire 270 - 135
19		C'est 135
20		Ouais
21		Est-ce que t'en as un qui fait 135
22		Oui
23		Ben oui ... t'es retombé dessus
24		Il faut qu'on tombe je crois que c'est fini parce que forcément
25		Comme là on s'est arrêté aux deux octogones ?
26		Tu sais quoi c'est comme quand on cherche les diviseurs d'un nombre
27		Voilà
28		On prend la racine carrée de
29		Maintenant tu fais avec 1 N = 5
30		...
31	01 :43 :00	Début du débat
32		...

01 : 48 : 58 : Alors concernant notre recherche nous en fait on n'avait pas compris l'énoncé à la base on a cherché les pavages avec toujours euh le même polygone régulier donc à la base ce qu'on a regardé c'est dans le cas ou il y avait trois côtés l'angle, qu'on a appelé alpha n l'angle entre deux côtes consécutifs était de 60 dans le cas du carré de 90 dans le cas du pentagone de 108 et dans le cas quelconque la formule nous donne donc

on a un petit triangle 180 - 36 sur n

360

360 sur n parce que 360/n c'est l'angle qu'il y a ici là les deux angles sont identiques, somme des angles dans un triangle ...etc. donc on a établit que l'angle entre deux côtés consécutifs en fonction du nombre de côtés était 180 fois (n-2) sur n alors ensuite ce qu'on a fait c'est qu'on a posé on a appelé P le nombre de polygones réguliers qu'on allait mettre autour d'un sommet euh et donc forcément pour que ca marche qu'il n'y ait pas de superpositions dans la logique qu'on avait il fallait que se soit 360 divisé par P l'angle puisque l'angle entre deux côtés consécutifs on les met tous à la suite autour du sommet pour que ca divise parfaitement voilà après quoi il vient que comme cet angle doit être à la fois 360 divisé par P et 180 fois (n-2) sur n on a posé ça et on est arrivé à la relation suivante le nombre de côtés doit être égal a 2P sur (P - 2) alors première chose on a regardé dans le cas P = 2 on met que deux autour du sommet ça a pas de sens hein bien sur on peut pas en mettre que deux ensuite on a regarde dans le cas P = 3 en remplaçant ici on a trouvé [...] donc on a vu que ca fonctionnait avec les hexagones on est passé au cas 4 on a trouvé que ca marchait avec les carrés [...] pavages avec les carrés pour P = 6 on aboutissait à n = 3 donc c'est 6 triangles équilatéraux et on s'est posé la question puisque ça nous semblait ne jamais fonctionner par la suite donner des valeurs qui étaient pas entières pour n est ce que c'est possible que ce soit plus grand que 6 et on a répondu non car il doit forcément l'angle entre deux côtés consécutifs doit forcement être plus grand que 60 étant donne que le plus petit entre guillemets c'est le triangle équilatéral on peut pas faire un angle plus aigu pour faire un voilà donc partant du principe que cet angle entre deux côtés consécutifs etait plus grand que 60° on a remplacé par 360 sur P et on est arrivé à dire que P devait être plus petit que 6 ce qui nous a permis de trouver qu'il existait trois pavages archimédiens réguliers du plan et on était très contents pour savoir que ...rires ... et ça permet pas du tout on peut effectivement mélanger des polygones réguliers alors ici on s'est un peu reparti les tâches j'étais encore en train j'étais plus trop dans l'histoire voilà on a regardé après on s'est posé la question des pavages irréguliers là on s'est encore une fois qu'on pouvait pas être au-delà de 6 pour la même raison parce que déjà avec les triangles ça remplit juste etc on peut en avoir plus de 6 autour d'un même sommet euh on a vu donc le cas p = 2 n'était pas possible peut pas y en avoir deux seulement deux ça n'a pas de sens donc c'était forcément dans le cas où il y en a 3 autour d'un sommet 4 5 ou 6 sachant que 6 était résolu et que p = 3 était résolu aussi c'est l'hexa non c'est pas celui là qu'est résolu c'est p =6 c'est résolu où c'est des triangles [...] donc il nous restait à traiter 3 4 5 alors pour l'étape 3 4 5 on a commencé par le cas n° 5 et dans le cas où il y en a 5 euh on est partis on a constaté qu'ça qu'on pouvait pas mettre un polygone qui était qui avait un angle entre deux côtés consécutifs plus grand que l'hexagone si on faisait ça si on prenait un qui a un angle plus grand que celui de l'hexagone c'qui nous restait même les triangles déjà les plus petits si on en remettait quatre autres ça rentrait pas donc on était surs déjà qu'on pouvait pas prendre quelque chose qui ait un angle supérieur à celui de l'hexagone et on a rem et on a regardé avec le avec ce qui nous restait y nous restait des triangles des carrés des pentagones on a regardé coment mettre quatre autres pour obtenir les 360 et on a trouvé comme solution uniquement de mettre quatre triangles donc un hexagone et quatre triangles là on a fait pour l'hexagone ensuite on a regardé ce qui se passait pour le pentagone on a vu que ça faisait 108 entre deux côtés consécutifs avec ce que l'on avait à disposition on pouvait pas euh on pouvait pas trouver c'est pas

possible donc euh [...] ensuite on a regardé ce qui se passait avec les carrés donc on a soit soit y a un carré on va regarder comment mettre quatre autres pour faire 360 et on a trouvé uniquement le fait de rajouter un autre carré et trois triangles donc deux carrés et trois triangles et apparemment ça j'ai pas regardé mais y aurait - ouais - deux solutions pour paver de cette façon - au moins - euh et après triangle ça marchait plus donc voilà donc on a pu faire euh la liste exhaustive de tous les cas possibles quand y en a 5 autour donc y nous reste uniquement les cas 3 et 4 cas 3 et 4 on avait déjà trouvé les pavages réguliers il nous restait à trouver des pavages panachés entre deux et alors là je sais pas j'm'en suis pas chargé donc a priori pour p = 4 vous avez fait comment

y avait attends

en testant

ouais en fait

d'accord donc le pavage régulier on l'avait déjà

y en a d'autres mais

y en a d'autres

oui j'pense y en a d'autres ben faudrait faire ta technique après

ouais ma technique entre guillemets c'est que moi je me suis intéressé au cas comme il restait 3 et 4 j'me suis intéressé au cas p = 3 y en a 3 autour du sommet [...] ça doit être simple si y en a que trois on va trouver quelque chose comme j'avais trouvé ici qu'on pouvait pas faire plus qu'un hexagone donc ça nous laissait peu de choix possible pour faire le tour, j'me suis dit si y en a que trois on va trouvé quelque chose qui nous limite comme ça on va pouvoir bon il s'avère que ça été plus compliqué que je le pensais alors comment j'ai fait euh ben j'ai fait dans l'ordre en partant du plus petit j'ai dit euh ben j'me place dans le cas p = 3 y en a que trois autour du sommet commun si il y a un triangle ben j'commence par le plus petit euh il m'en reste il faut que j'en mette deux autres pour obtenir euh 360 faut que j'en mette deux autres pour faire 300 focément un de 60 les deux autres vont faire 300 alors j'ai essayé avec le triangle c'était pas possible j'ai fait 300 moins c'qui a pour le triangle et j'ai regardé si y en avait un c'est supérieur à 180 donc non carré pas possible en fait ensuite j'ai fait tous les cas possibles triangle carré pentagone hexagone etc et j'ai trouvé que arrivé à l'heptagone c'était possible en prenant n = 42 donc c'est à dire en mettant un un qui aurait 42 côtés un heptagone et un triangle après avec l'octogone j'ai trouvé un avec 24 côtés qu'était possible avec 9 côtés un à 18 côtés etc et ensuite j'suis arrivé à deux dodécagones je crois c'est ça donc deux avec douze côtés en plus de mon triangle de départ puisque ça fait bien 60 + 300 [...] et après si je continue je retombe sur des cas que j'ai déjà traité ça fait une boucle puisque à force d'augmenter celui qui reste y revient dans les plus petits que j'ai déjà traité avant donc je suis sur que je suis arrivé au bout de ce que j'ai fait alors après j'ai fait un carré donc j'ai un carré il m'en reste deux pour faire 270 et j'ai fait triangle pas possible, carré pas possible, pentagone et n=20 possible etc et au bout du compte je j'les ai tous trouvé dans le cas p = 3 j'vais pas vous les lire parce que ça serait déjà je suis pas sur de m'y retrouver moi-même en tout cas on peut tous les trouver on arrive au bout et j'ai pas eu le temps de finir donc pour savoir si j'peux faire la même chose aussi facilement pour p = 4 et surtout on les a pas testés aussi en les dessinant pour savoir si ils marchaient et s'il y avait plusieurs solutions ou pas ...