

Équipe LIRDHIST

**Deuxième congrès Canada - France, UQAM
Session Education Mathématique, 2 juin 2008**

**Logique, langage, raisonnement et apprentissages mathématiques
à la transition secondaire / supérieur**

*Logic, language, reasoning and learning in mathematics at the
secondary-tertiary transition*

Viviane DURAND-GUERRIER
IUFM de Lyon & LEPS-LIRDHIST

<http://lirdhist.univ-lyon1.fr>

Avec le soutien financier de l'ARDM

Association Pour La Recherche en Didactique des Mathématiques



LEPS - LIRDHIST - Université de Lyon - Université Lyon 1
Bat. La Pagode - 38 Bd Niels Bohr - 69622 Villeurbanne Cedex, France
téléphone : (+33) 04 72 44 80 13 - <http://lirdhist.univ-lyon1.fr>



Un paradoxe apparent de la transition secondaire-supérieur

An apparent paradox of the secondary-tertiary transition

Alors que le formalisme mathématique devrait permettre une clarification conceptuelle, on observe qu'il fonctionne au contraire pour de nombreux étudiants comme un obstacle presque insurmontable.

While formalism should allow conceptual clarity, it seems that, for many students, it is an obstacle nearly insuperable.

Ceci pose la question cruciale des relations entre logique, langage et raisonnement mathématique.

It raises the crucial question of relationships between logic, language and mathematical reasoning

Notre hypothèse

Les difficultés relatives aux questions de logique et de langage dans la classe de mathématiques sont le plus souvent insuffisamment prises en compte par les professeurs du secondaire comme du supérieur

Our hypothesis

Difficulties related to logic and language in mathematics are mostly underestimated by teachers, as well in secondary as in tertiary education.

- I. Trois exemples soutenant notre hypothèse :
implication ; négation ; quantifications multiples
*Three examples supporting our hypothesis :
implication ; negation ; multiple quantifiers*

- II. Quelques pistes pour la formation des enseignants du
supérieur et pour la licence
*Some propositions for future tertiary teachers and for
undergraduates*

- III. Conclusion

Trois exemples soutenant notre hypothèse
Three examples supporting our hypothesis

I.1. Le labyrinthe : un désaccord entre professeurs et élèves

The maze task : disagreement between teachers and pupils

I.2. Négation ou contraire ?

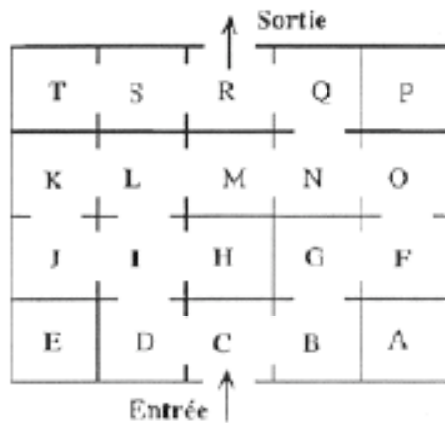
Negation or contrary ?

I.3. Une règle d'inférence non valide

An invalid inference rule

Le labyrinthe

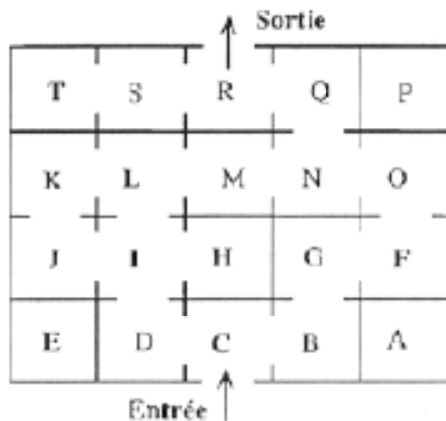
The 'maze' task



- Une personne que nous appellerons *X* a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.
- *A person named X managed to pass through this maze and never used the same door twice.*

Le labyrinthe

The 'maze' task



Pour chacune des phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

For each sentence, let say if it is TRUE, FALSE, or if one CAN'T TELL, and justify your answer

N°3 : « X est passé par M »

« *X crossed M* »

N°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

« *If X crossed L, then X crossed K* »

En général / Generally

Une réponse unanime pour la phrase n° 3:

On ne peut pas savoir car certains trajets rendent la phrase fausse,
d'autres la rendent vraie

An unanimous answer for sentence 3:

One can't tell for some routes satisfy the sentence, while others do not

Un désaccord sur la phrase n° 6 :

Certains déclarent qu'elle est fausse

D'autres déclarent : on ne peut pas savoir

A disagreement for sentence 6:

Some persons declare it is false,

Others declare one can't tell.

Quelques réponses / *some answers*
Étudiants de licence scientifique 2ème année
Scientific tertiary students, second year

- **On ne peut pas savoir.** Il existe un chemin où X passe par L et non par K et il existe un chemin où X passe par L et par K.
One can't tell. There is a route crossing L and not K, and there is a route crossing both L and K.
- **Elle peut être vraie, mais elle peut aussi être fausse. (...)** En réalité, la construction 'si alors' entraîne que la phrase est fausse (car on a pas d'implication)
It might be true, but it might also be false. (...) In fact, the structure 'if, then' entails that the sentence is false (for there is no implication)

Faux car X a pu passer par L en arrivant de I et en allant dans M (L a trois portes) et donc sans passer par K, donc l'implication est fausse, il y a un contre-exemple (cependant il est possible que X soit passé par L et K).

False for X might have cross through L, coming from I and going to M (L has three doors), then the implication is false, there is a counter example (however, it is possible that X crossed through both L and K).

Le labyrinthe été initialement proposée à des élèves de fin de Seconde en France (16 ans) par des enseignants volontaires
Les professeurs considèrent que la phrase n°6 est fausse.
Pour la phrase n°3, ils répondent « on ne peut pas savoir »
Les élèves répondent majoritairement (60%) « on ne peut pas savoir » pour la phrase n°6, surtout ceux qui réussissent bien l'ensemble du test.

The 'maze' task was first given to 15-16 years old pupils in a mathematical class in France by volunteer teachers.

Teachers consider that sentence 6 is false.

For sentence 3, they answer 'can't tell'.

Most pupils (60%), especially those who succeeded in other items answered 'can't tell'.

Quelques réponses d'élèves de Seconde

Some pupils answers

- **Vraie** : X a pu passer dans la pièce K pour se rendre dans la pièce
True : *X might have pass through K to join L*
- **Faux** : la réciproque de la phrase n°5 est fausse puisque X peut très bien emprunter un trajet sans passer par K
False : *the converse of sentence 5 is false since X may take a route without passing through K.*
- **Faux** : car X ne peut pas aller vers K puisqu'il doit aller vers la sortie
False : *for X can't go to K since he has to go to exit*

- **Faux** : cette phrase est fausse car la case I est également possible pour arriver à L.
False : this sentence is false for I is also possible to reach L
- **On ne peut pas savoir** : En effet, X aurait pu passer soit dans la pièce K, soit dans la pièce I pour rejoindre la pièce L.
We can't tell. Indeed, X might have pass either through K, or through I to reach L
- **La phrase 6 n'est ni vraie, ni fausse.** On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K, mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec L, évitant le passage par K.
Sentence 6 is neither true nor false. We can't tell. For X might have passed through K, but he might also have passed through I, a room which has a common door with L, thus avoiding K.

Le point de vue des professeurs / *Teachers' point of view*

« S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale ? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des deux assertions »

“Are they mathematical statements, which we must understand as a whole ? In that case, the important matter is the link between the two statements and not the particular truth-value of each one.”

On trouve ici l'opposition entre / *here is the opposition between*
« **implication matérielle** entre propositions » et « **implication formelle** reliant deux propriétés »

‘material implication relying two propositions’ and ‘formal implication relying two properties on a domain’

Ce désaccord renvoie à la question de l'interprétation de la lettre X
This disagreement is related with the logical status of letter X

Plusieurs interprétations possibles de la lettre X
Various possible interpretations of letter X

1. **X désigne une personne bien identifiée, c'est un terme singulier** (Pierre, Elena,) : les phrases 3 et 6 ont une valeur de vérité, mais celui qui répond ne la connaît pas.

X denotes a peculiar person, it's an individual (Peter, Helen, ...): sentences 3 and 6 have a truth-value, but those who answer the question don't know it

2. **X désigne n'importe quelle personne, c'est un terme générique** : les phrases 3 et 6 n'ont pas de valeur de vérité.

X denotes any person ; it's a generic : sentences 3 and 6 have no truth-value

3. **X est une variable libre** : les phrases 3 et 6 sont des phrases ouvertes ; elles n'ont pas de valeur de vérité
X is a free variable : sentences 3 and 6 are open sentences: they have no truth-value

4. **X est une variable universellement quantifiée** : les phrases 3 et 6 n'ont pas de valeur de vérité : il y a des contre exemples possibles, mais il n'est pas sûr qu'ils soient actualisés
X is a bound variable in the scope of a universal quantifier: sentences 3 and 6 have no truth-value : there are counter-examples, but it is not sure that the corresponding routes were used.

5. **Le trajet de X est une variable universellement quantifiée** : les phrases 3 et 6 sont fausses.
The variable « route of X » is a bound variable in the scope of a universal quantifier: sentences 3 and 6 are wrong

Conséquences didactiques / *Didactic consequences*

- La réponse majoritaire des élèves est cohérente.
The answer given by most pupils and students is coherent
- Aucune interprétation de la lettre X ne conduit à la réponse des professeurs.
No interpretation of letter X leads to the teachers' answer
- La pratique largement répandue de quantification implicite des énoncés conditionnels n'est pas partagée par une majorité d'élèves et un grand nombre d'étudiants scientifiques, même à des niveaux avancés.
The practise of implicit quantification for conditionals statements, although widely spread in mathematics education, is not shared by most pupils, and even advanced students.

Négation et contraire / *negation and contrary*

<u>Langage ordinaire</u>	<i>Calcul des prédicats</i>	<u>Ordinary language</u>
Toutes les boules sont rouges	$\forall x R(x)$	<i>All the balls are red</i>
Toutes les boules ne sont pas rouges	$\neg \forall x R(x)$ ou $\forall x \neg R(x)$?	<i>All the balls are not red</i>
Il existe (il y a) au moins une boule qui n'est pas rouge	$\exists x \neg R(x)$	<i>Exists at least a ball which is not red</i>
Certaine boule n'est pas rouge / Certaines boules ne sont pas rouges	$\exists x \neg R(x)$	<i>Some ball is not red</i> <i>Some balls are not red</i>
Il n'y a pas de boule rouge / Aucune boule n'est rouge	$\neg \exists x R(x)$ / $\forall x \neg R(x)$	<i>There is no red ball/</i> <i>No ball is red</i>

En français une phrase de la forme

« Tous les A ne sont pas B » est ambiguë.

Selon la norme linguistique, elle s'interprète par

'Il est faux que tous les A sont B », c'est-à-dire « Certain (s) A n'est pas (ne sont pas) B ». Elle traduit la négation de « Tous les A sont B »

Cependant, elle est souvent employée pour exprimer

« Aucun A n'est un B » (le contraire au sens d'Aristote)

In French a sentence such as

« All A are not B » is ambiguous. According with the linguistic norm, its meaning is 'not all A are B ', that means 'some A is (are) not B '.

However, it is often used to express that

« No A is B » (the contrary, following Aristotle)

La norme linguistique française ne respecte pas la syntaxe logique et met en défaut le principe de substitution/

The French linguistic norm does not suit with logical syntax and does not respect the substitution principle

Exemple :

Tous les diviseurs de 12 **sont pairs** (1)

Tous les diviseurs de 12 **ne sont pas pairs**
(2)

Tous les diviseurs de 12 **sont impairs** (3)

Selon la norme linguistique française
comme (1) est **Faux**, (2) est **Vrai**

Selon le principe de substitution
(2) et (3) ont la même valeur de vérité

Or (3) est **Faux**

Ceci renforce l'interprétation « Aucun »

Example

*All divisors of 12 **are even** (1)*

*All divisors of 12 **are not even** (2)*

*All divisors of 12 **are odd** (3)*

*According with the French norm, as (1) is
False, thus (2) is **True***

*According with the substitution principle,
(2) and (3) have the same truth-value*

*But (3) is **False***

This reinforce the interpretation “None”

La négation est une notion complexe, de nature sémantique (elle échange le vrai et le faux) qui obéit à des règles syntaxiques précises selon la langue dans laquelle elle s'exprime.

En français, la règle syntaxique qui consiste à faire porter la négation sur le verbe :

- est en accord avec les contraintes sémantiques pour les propositions singulières
- est source d'ambiguïté lorsque la phrase est quantifiée universellement ; se pose la question de la portée du quantificateur. En général, mais pas toujours, c'est le contexte qui permet de trancher
- est en désaccord avec les contraintes sémantiques lorsque la phrase commence par « certain(s) ».

Negation is a complex, both syntactic and semantic, notion (exchanging truth and falseness), following precise syntactic rules according with the language in which it is expressed.

In French, the syntactic rule that : negation operates on the verb

- suits semantic constraints for singular sentences*
- provides ambiguity in case of sentence heading with 'Pour tout' ; the scope of the quantifier has to be questioned. Generally, but not always, the context permits to decide.*
- Do not suit the semantic constraints for sentences heading with "some".*

Des difficultés bien réelles pour les élèves et les étudiants
Effective difficulties for pupils and students

Une enquête de la commission Inter - IREM Université
An inquiry of the CI2U

Questionnaire sur valeur absolue - limites - logique
Questionnaire about absolute value-limits-logic

Etudiants arrivant dans le supérieur, rentrée 2006
Students at the very beginning of their first university year.

Donner la négation mathématique de chacune des phrases suivantes

Give the mathematical negation of the following sentences

1 - Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

All the balls in the urn are red

2 - Certains nombres entiers sont pairs.

Some integers are even

3 - Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

If an integer is divisible by 4, then the last figure is 4

Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges

All the balls in the urn are red

- C1 : Une phrase synonyme de “il y a au moins un balle qui n'est pas rouge / A sentence synonym of “there exists at least a ball in the urn that is not red” **38%**
- C2 : La phrase ambiguë /The ambiguous sentence: “Toutes les boules ne sont pas rouges” **6%**
- C3 : Une phrase synonyme de “Aucune boule n'est rouge / A sentence synonym of “ No ball is red” **21%**
- C0 : Une phrase synonyme de la phrase affirmative / An sentence synonym of the affirmative answer **13%**
- Autres réponses / Other answers : **10%**
- Pas de réponses / No answer :**12%**

Certains nombres entiers sont pairs.

Some integers are even

- C2: La phrase ambiguë “Tous les entiers ne sont pas pairs” / The ambiguous sentence “*All integers are not even*” **5,5%**
- C4: La phrase “Tous les entiers sont impairs” /The sentence “*All integers are odd*” **15,5%**
- C5: La phrase “Aucun entier n’est pair”/ *The sentence “No integer is even”* **13%**
- C6: “ Certains entiers ne sont pas pairs (sont impairs) *The sentence “some integers are not even (are odd)”* **34%**
- C0 : “Tous les entiers sont pairs ” / All integer are even **5,5%**
- Autres réponses /*Other answers* **11,5%**
- Pas de réponse /*No answer* : **15%**

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4
If an integer is divisible by 4, then the last digit is 4

- Pour cet item, 98 étudiants (29%) ne donnent pas de réponse ; seuls 34 étudiants (10%) donnent une réponse correcte, synonyme de “Il existe au moins un entier divisible par 4 ne se terminant pas 4”. 155 réponses (45,5%) sont données sous la forme d’une implication avec des positions variées pour la négation comme dans les exemples suivants.
- *For this item, 98 students (29%) did not give an answer; only 34 students (10%) gave a correct answer, synonym of “There exists an integer dividable by 4 for which the last figure is not 4”. 155 answers with an implication with various position for the negation as in the following examples:*

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4
If an integer is divisible by 4, then the last digit is 4

- 1. Si p , alors non q / *If p , then not q*
 - Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 /
 - *If an integer is divisible by 4, then the last digit is not 4*

- 2. Si non p , alors non q / *If not p , then not q*
 - Si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4 /
 - *If an integer is not divisible by 4, then the last digit is not 4.*

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

If an integer is divisible by 4, then the last digit is 4

- 3. Si p , alors pas nécessairement q / *If p , then not necessarily q*
 - Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas forcément par 4
 - *If an integer is divisible by 4, then the last digit is not necessarily 4.*

- 4. Si p , alors il est possible que non q / *If p , then it is possible that not q*
 - Si un nombre entier est divisible par 4, il est possible qu'il ne se termine pas par 4
 - *If an integer is divisible by 4, it is possible that the last digit is not 4*

Une règle d'inférence non valide/ *An invalid inference rule*

A prouver

- Soient f et g des fonctions numériques définies dans une partie A de \mathbb{R} et a un élément adhérent à A ; si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A , alors $f(t) + g(t)$ tend vers la limite $h + k$

To prove

- “Given two functions f and g defined in a subset A of the set of real number, and a an adherent element of A , if $f(t)$ and $g(t)$ have h and k respectively for limits as t tends to a remaining in A , then $f+g$ has $h+k$ for a limit in a ”.

Une règle d'inférence non valide/ *An invalid inference rule*

Une preuve (Houzel, 1996)

- “ Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $t \in A$ et $|t - a| \leq \eta$ implique
- $|f(t) - h| \leq \varepsilon$ et $|g(t) - k| \leq \varepsilon$;
on a alors
- $|f(t) + g(t) - (h + k)|$
- $= |f(t) - h + g(t) - k|$
- $\leq |f(t) - h| + |g(t) - k| \leq 2\varepsilon$ ”

A proof (Houzel, 1996)

- “ *By hypothesis, for all $\varepsilon > 0$, there exists $\eta > 0$ such that $t \in A$ and $|t - a| \leq \eta$ imply*
- *$|f(t) - h| \leq \varepsilon$ and $|g(t) - k| \leq \varepsilon$; thus we have*
- *$|f(t) + g(t) - (h + k)|$*
- *$= |f(t) - h + g(t) - k|$*
- *$\leq |f(t) - h| + |g(t) - k| \leq 2\varepsilon$ ”*

Une règle d'inférence non valide/ *An invalid inference rule*

La première affirmation peut s'interpréter comme l'application de la règle d'inférence non valide* :

- "Pour tout x , il existe y , Fxy "
- **et**
- "Pour tout x , il existe y , Gxy ",
- **donc**
- "Pour tout x , il existe y , Fxy et Gxy "

* On peut avoir dans certaines interprétations les deux prémisses vraies et le conséquent faux.

The first assertion could be interpreted as the application of the invalid inference rule* :

- "for all x , exists y , such that $F(x, y)$ ",
- **and**
- "for all x , there exists y , such that $G(x, y)$ ",
- **hence**
- "for all x , there exists y such that $F(x, y)$ and $G(x, y)$ "

* In some interpretations, it is possible that the two premises are true and the consequent is false

Une règle d'inférence non valide/ *An invalid inference rule*

- L'utilisation de cette règle non valide est fréquente et peut conduire à
 - Une preuve incomplète facile à compléter,
 - Une preuve incorrecte d'un énoncé vrai
 - Une preuve incorrecte d'un énoncé faux
- Ceci peut se rencontrer tant dans l'histoire (Abel, Cauchy, Liouville, Seidel) que dans les preuves d'étudiants de tous niveaux.
- *The use of this invalid rule can be found in many situations, providing*
 - *a proof with a gap that can be easily completed,*
 - *an incorrect proof for a true statement,*
 - *An incorrect proof of a false statement.*
- *This may be encountered either in history (Abel, Cauchy, Liouville, Seidel) or in undergraduates or graduates students' proofs*

Une règle d'inférence non valide/ *An invalid inference rule*

- Ceci met en évidence une différence très importante entre experts et novices
 - Un expert d'un domaine mathématique sait exactement quand il est dangereux de relâcher l'application rigoureuse des règles d'inférences, tandis que les novices doivent apprendre ceci en même temps que les connaissances mathématiques
 - Ces deux aspects des mathématiques ne peuvent pas être appris séparément
- *This enlightens a very important difference between an expert and a novice in mathematics.*
 - *An expert in a mathematical field knows when it is dangerous to slack off the rigorous application of rules of inference, while novices have to learn this at same time as they acquire the relevant mathematical knowledge.*
 - *These two aspects of mathematics cannot be learned separately.*

Une formation pour les moniteurs du CIES

(centre d'initiation à l'enseignement supérieur)

A course for PhD students in the CIES (tertiary teacher training)

- Les différentes notions recouvertes par le terme générique d'implication à travers des situations permettant de les mettre en débat (le labyrinthe)
Different notions of implication through situation favouring a debate (the maze task)
- Les difficultés spécifiques liées à l'usage de la négation
Specific difficulties related to negation
- Les énoncés comportant des quantifications multiples
Statements involving multiple quantifications
- L'importance du statut des lettres dans les énoncés et les preuves mathématiques
The importance of letters' status in mathematical statements and proofs

Travail sur des textes mathématiques variés *Working on various mathematical texts*

- Textes élaborés par les participants : i.e. *un corrigé pour un problème donné pour un public donné*
Texts elaborated by participants : i.e. a problem's correction for a given population
- Extraits de manuels étudiés dans la perspective d'examiner les difficultés qu'ils pourraient soulever pour des étudiants, principalement en étudiant les éléments qui permettent ou non pour le lecteur débutant un contrôle de la validité ;
Textbooks' extracts studied in order to examine difficulties that beginning students may encounter, specially concerning validity's control.
- Textes produits par des étudiants et comportant des erreurs avec pour consigne de repérer la nature des erreurs (mathématique, logique, articulation entre logique et mathématique), de commenter le texte à destination de l'auteur et/ou de proposer un corrigé.
Students' texts involving errors in order to recognize the nature of these errors (mathematical, logical, both mathematical and logical), to comment the text for its author, and/or to propose a correction

Cette formation permet d'ouvrir des pistes pour
This course opens up paths for

- augmenter sa vigilance concernant sa propre façon de faire des mathématiques en situation d'enseignement,
becoming more vigilant about the way one practises mathematics while teaching
- proposer aux étudiants des situations pertinentes articulant connaissances mathématiques et compétences logiques.
Propose to students relevant situations articulating mathematical knowledge and logical competences.
- Le travail collectif en petit groupe révèle la variabilité des exigences de rigueur selon les enseignants et selon les catégories d'étudiants.
The collective work in small groups reveals the great variability of the rigor requirements, according to teachers on the one hand, students on the other hand

Un projet à Lyon 1 proposé par l'IREM en 2008-2009
A project in Lyon 1 proposed by the IREM in 2008-2009

- Un module “logique, raisonnement et calcul”
A course “logic, reasoning and calculation”
- A l'intention des étudiants de première année
Addressed to first year tertiary students
- Articulé aux cours d'algèbre et d'analyse
Closely related with algebra and calculus courses
- *Pour travailler simultanément les connaissances mathématiques au programme et les notions logiques élémentaires (Implication, négation, quantification, statut des lettres, modes de raisonnement, preuves, vérité et validité, algorithmes)*
In order to work with both mathematical knowledge and elementary logical notions (implication, negation, quantification, letters' status, reasoning's modes, proofs, truth and validity, algorithms)

Quelques références / *Some references*

- **Durand-Guerrier, V.** : 1999, L'élève, le professeur et le labyrinthe, in *Petit X 50*, .57-79. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier Grenoble 1.
- 2003, Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.
- **Durand-Guerrier, V. & Arsac, G.** : 2003, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295-342.
- 2005, An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educational Studies in Mathematics*, 60/2, 149-172
- **Durand-Guerrier, V. & Ben Kilani, I.** : 2004, Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien, *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9, 29-55.
- **Durand-Guerrier, V.** Truth versus validity in proving in mathematics, à paraître en 2008, in *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 3
- 2005 .: Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes, in *Actes du Colloque : Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur*, Lille , 1-3 juin 2005