Innovations et recherches didactiques sur l'enseignement des mathématiques en première année d'université

Marc Rogalski (Université de Lille 1)

I. Quelques innovations entre 1984 et 2000

II. Recherches didactiques liées à ces innovations

III. La situation présente et la possibilité d'innovations

IV. Quel impact sur la realité de l'enseignement des mathématiques à l'université ?

I. Quelques innovations

Sous une forte incitation ministérielle, de nombreuses innovations en première année d'université ont eu lieu en France entre 1984 et 2000. Nous en présentons quelques examples seulement.

1/ Avant cette periode, l'établissement de liens pédagogiques entre l'enseignement des maths et celui de la physique, en particulier à propos des procédures différentielles, a été expérimenté à l'Université Paris 7 en 1979-80 et 1980-81.

2/ Le débat scientifique entre étudiants en amphi a été développé à l'université de Grenoble ; c'était le cœur d'un enseignement annuel. Cette expérience s'est répétée plusieurs années. Elle a été particulièrement efficace à propos de l'integrale.

3/ Un enseignement des équations différentielles comme objets graphiques et qualitatifs a été mis en place à l'université de Lille 1, chaque année de 1987 à 1996.

4/ Une nouvelle manière d'enseigner l'algèbre linéaire a été introduite en 1984 à l'université de Lille 1, et améliorée chaque année jusqu'en 1996. Elle était basée sur l'idée que l'algèbre linéaire formalise, unifie et généralise plusieurs types d'activités mathématiques.

5/ Des projets ou mémoires réalisés par de petits groupes d'étudiants ont été introduits dans plusieurs universités : sur des thèmes mathematiques (Lille 1), sur des relations entre maths et physique ou d'autres domaines scientifiques (Lille 1, Paris 7), sur des professions scientifiques (Lyon 1), …

6/ Divers types d'enseignements expérimentaux sur les raisonnements mathématiques et logiques ont été réalisés dans les universités de Valence et de Grenoble.

7/ Un enseignement centré sur des jeux mathématiques et les raisonnements combinatoires est une option régulière à Grenoble depuis dix ans.

II. Didactical studies

Une première analyse de certaines de ces innovations a été faite en 1990 dans un document de la "*Commission Inter-Irems Université*" : "Enseigner autrement les mathématiques en prmière année". Une approche plus didactique y est développée sur certains points. Plus de 3000 exemplaires ont été achetés par des enseignants de mathématiques des universités !

Plus récemment, des articles de A. Robert (RDM 1998) et M. Artigue ("Notices of the AMS" 1999) font une revue de questions didactiques concernant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'université.

Nous ne parlerons ici que de certains points. On peut noter que parfois ce sont des recherches didactiques qui ont été à l'origine d'innovations, et que parfois, au contraire, ce sont des innovations qui ont motivé des recherches didactiques.

1/ Questions sur les raisonnements mathématiques et logiques

Pour ce thème, nous renvoyons à la conférence de V. Durand-Guerrier.

2/ Les liens entre mathématiques et physique à propos des procédures différentielles et integrales.

Des recherches didactiqes (en maths et physique) dans les universités de Paris 7 et Grenoble, en 1987-89, ont développé des analyses épistémologiques et didactiques des difficultés des étudiants dans l'usage des procédures différentielles et integrales pour résoudre des problèmes physiques (en particulier avec les méthodes de modélisation). Un bilan approfondi de ces questions, élaboré par un "greco" du CNRS, a été publié en 1989 par l'Irem de Paris 7.

En lien avec la décision ministérielle d'accroître les liens entre maths et physique au lycée, ce type de recherche continue de se développer. Plusieurs études, expérimentales ou théoriques, sur l'enseignement des équations différentielles en maths et physiques, sont développées (Grenoble, Didirem à Paris 7, Lille 1). Des analyses épistémologiques en rapport avec la notion d'integrale prolongent les travaux initiés d'abord à l'université de Grenoble.

3/ L'enseignement de l'étude qualitative et graphique des équations différentielles

Un enseignement expérimental a démarré en 1987 à l'université de Lille 1. Il était basé sur un projet de M. Artigue. L'analyse qu'elle a fait des effets de l'enseignement sur les étudiants a conduit a des modifications de celui-ci.

En particulier, on a pu conclure à l'efficacité de l'introduction par les champs de pentes et de l'utilisation de l'informatique graphique. L'analyse de M. Artigue a aussi mis en évidence les difficultés des étudiants à utiliser des théoremes fins d'analyse (nécessitant le concept de borne supérieure, par ex.) pour prévoir le comportement des solutions. Il a paru ainsi bien plus efficace de donner des théorèmes géométriques sur les courbes solutions d'une équation différentielle.

Il faut noter que cet enseignement a exigé d'entraîner les étudiants à utiliser des changements de registres entre graphiques et formules pour les fonctions.

4/ Recherches engendrées par l'enseignement de l'algèbre linéaire

(a) Elles ont démarré avec un travail de A. Robert et J. Robinet, qui a conduit à une analyse approfondie de la nature épistémologique de différents types de concepts mathématiques, et à rechercher les conséquences de ces différences pour l'enseignement. Par exemple, on distingue :

* Les notions qui formalisent, unifient et généralisent (FUG) plusieurs connaissances antérieures (c'est le cas de l'algèbre linéaire) ; pour ces notions, il est très difficile de trouver des problèmes initiaux ("situations fondamentales" au sens de Brousseau). Souvent il semble seulement possible d'organiser dans l'enseignement une convergence de plusieurs domaines mathématiques afin de créer une problématique menant à la notion FUG, avec l'aide d'un discours "meta".

* Les notions qui sont d'abord des outils adaptés pour résoudre un ou plusieurs problèmes ("réponse à un problème" : RAP) ; dans ce cas, la "dialectique outil-objet" de R. Douady est une approche efficace pour l'enseignement (c'est le cas pour la notion d'integrale), et il existe souvent des situations fondamentales.

* Les notions qui sont des extensions d'autres notions, ou de domaines antérieurs d'opérations (la continuité uniforme, la structure d'anneau des entiers relatifs, ou des nombres réels, ou complexes).

(b) Les travaux de J.-L. Dorier dans sa thèse et l'analyse de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université de Lille 1 ont renforcé le bien-fondé de ce point de vue pour l'algèbre linéaire. Le livre "L'enseignement de l'algèbre linéaire en questions" rassemble ces recherches épistémologiques et didactiques, et compare cette approche française à d'autres travaux au Canada ou aux USA.

Parmi les recherches françaises sur l'algèbre linéaire, nous mentionnerons aussi celles développées à l'université de Strasbourg (centrées sur les changements de registres) and à l'université Paris 7 (où l'accent est mis sur la nécessité de la flexibilité entre cadres, registres et points de vue).

5/ Recherches sur le débat scientifique et le travail en petits groupes (ou "ateliers")

Des recherches sur le débat scientifique se sont développées à l'université de Grenoble (voir par example "Enseigner autrement les mathématiques…"). Ces recherches se sont centrées sur le rôle du doute dans la construction de concepts mathématiques, et sur le rôle des discussions collectives dans une communauté scientifique.

Dans le même esprit (voir le même ouvrage) une analyse didactique du “travail en petits groupes” ou ateliers a mis en évidence les conditions de l'efficacité de ce type d'enseignement. Le point crucial est la nécessité de donner suffisamment de temps aux étudiants pour chercher réellement la solution d'un problème. La détermination des types d'activités favorables au travail en petits groupes a été aussi étudiée : introduction d'une notion nouvelle, mises en œuvre variées d'une connaissance, travail sur des méthodes, modélisation de problèmes physiques…

6/ Analyses des conceptions, connaissances chez les étudiants débutants, étude des ruptures entre le secondaire et l'université.

Plusieurs recherches sur ces sujets se trouvent dans des publications de l'équipe Didirem de l'université Paris 7. Plusieurs résultats ont été rassemblés dans "Enseigner autrement…". Nous n'évoquerons que deux points.

(a) Une étude en termes de cadres (numérique, symboliqe, graphique…) a conduit a ce qui a été appelé "l'hypothèse des blocs". Un "bloc" regroupe les scores dans un cadre donné à différents items de tests. On prédit de meilleures chances de succès à un étudiant s'il n'a aucun bloc vide (même si ses scores dans les divers blocs sont tous faibles) que s'il a un bloc vide. Cette hypothèse a été confirmée pour l'analyse mathématique (A. Robert) et pour l'algèbre linéaire (J.-L Dorier).

(b) F. Praslon a fait une étude fine des ruptures entre le secondaire et la première année d'université, en ce qui concerne le début de l'analyse. En particulier, son travail a mis en évidence l'existence de plusieurs "micro-ruptures", et a proposé des activités pour les surmonter.

7/ “Niveaux de fonctionnement” des connaissances mathématiques lors de la résolution d'exercices

Les recherches dans ce domaine ont été initiées par un travail de A. Robert, portant à la fois sur le secondaire et l'université. Elle a dégagé trois "niveaux de fonctionnement".

* Le niveau "technique" : les utilisations des connaissances mathématiques sont simples et isolées.

* Le niveau "mobilisable" : il faut adapter ses connaissances au problème, ou bien changer un peu de point de vue, ou utiliser une étape intermédiaire, mais avec une indication dans l'énoncé du problème.

* Le niveau "disponible" : les étudiants doivent penser par eux-mêmes à la connaissance ou au changement de cadre ouregistre utile pour résoudre le problème.

Des observations en classe et l'analyse des listes d'exercices données aux étudiants montre que la plupart (parfois tous !) des exercices proposés se situent au niveau technique (et souvent avec peu de temps pour les chercher).

Les effets sur l'apprentissage des exercices des trois types ont été étudiés dans un travail de J. Pian, concernant des étudiants de quatrième année d'université. D'abord, les étudiants passent un test avec des items des trois types de niveau, puis plusieurs mois plus tard ils passent un nouveau test analogue.

Si N_1 et N_2 sont leurs notes globales (sur 100), leur “progrès normalisé” est défini par

$P = (N_1/73)^2(N_2 - N_1)$ (73 est la meilleure note).

Soit t le nombre d'items de niveau technique résolus par un étudiant, et m le nombre d'items mobilisables ou disponibles résolus. Avec 50 étudiants, le plan de régression du nuage des résultats dans les coordonnées (t, m, P) est

$$P = -0{,}06 + 0{,}02\, t + 1{,}32\, m\ .$$

L'efficacité, en terme de progrès global, de la capacité à résoudre des exercices aux niveaux mobilisable ou disponible se voit clairement. Ce résultat montre l'importance de faire travailler les étudiants sur des exercies qui ne soient pas seulement techniques, et bien sûr ceci demande donc de donner du temps aux étudiants pour chercher d'autres types d'exercices).

III. La situation actuelle en ce qui concerne la possibilité d'innovations

Depuis 2000, en France, les parcours dans les universités sont éclatés en mini-unités de contenus réduit. Du coup, seules des innovations portant sur des domaines réduits de connaissances peuvent persister ou être engagées. C'est le cas par exemple pour un enseignement d'histoire, d'épistémologie et didactique des maths à l'université de Lyon 1, ou de l'option portant sur les jeux mathématiques à Grenoble.

Au contraire, par example, l'enseignement de l'algèbre linéaire qui a eu lieu à Lille 1 ne serait plus possible : il jouait sur le temps long, organisant la convergence de différents types de connaissances, une abstraction progressive et un enseignement de méthodes long à mettre en place.

Nous ne connaissons qu'une exception, avec l'enseignement organisé par F. Pham en 2001-2003 à l'université de Nice, enseignement basé sur la géometrisation de l'analyse à plusieurs variables, et sur un usage "naïf" et formel des differentielles permettant une grande diversité d'interprétations (comme Leibniz et Bernoulli).

IV. Quel impact sur la réalité de l'enseignement des mathématiques à l'université ?

1/ Un constat d'échec

Aucune des innovations que nous avons presentées dans ce texte, ni aucun résultat des recherches didactiques qui leur sont liées n'ont été pris en compte dans les cursus des universités, ni dans les pratiques pédagogiques. Dès que le leader d'une innovation la quitte, celle-ci disparaît immediatement !

Je ne crois pas être pessimiste. Il y a en fait trop d'obstacles dans l'organisation des universités et dans la profession des universitaires pour permettre de tels changements.

2/ Une alternative : la formation des enseignants universitaires ?

Depuis 1991, une partie des étudiants préparant une thèse doivent avoir une formation à l'enseignement à l'université et doivent avoir un petit service d'enseignements (ils sont "moniteurs"). Ainsi il y a environ 25 "Centres d'initiation à l'Enseignement Supérieur" (CIES), où les moniteurs doivent suivre une formation.

En fait, peu de CIES donnent une réelle formation pédagogique à leurs moniteurs. Parfois, des chercheurs en didactique participent à la formation, et de ce fait certaines connaissances didactiques peuvent passer. C'est par exemple le cas des études sur les raisonnement mathématiques et logiques dans le CIES de Lyon.

Au CIES de Grenoble, la formation est basée sur l'initiation au débat scientifique et à l'approche constructiviste de l'éducation.

Récemment, on a donné au CIES de Paris une formation basée sur la présentation de résultats des recherches didactiques sur l'enseignement à l'université. Les objectifs principaux étaient :

* la compréhension par les moniteurs de l'importance de faire chercher suffisamment longtemps les étudiants ;

* leur accès à la capacité d'analyser des énoncés d'exercices afin d'anticiper l'activité mathématique réelle des étudiants que ces exercises peuvent permettre ou déclencher ;

* leur compréhension des notion de cadres, registres et point de vue, et de l'importance d'amener les étudiants à les utiliser.

Pour ce faire, nous utilisons avec les moniteurs différents types d'exercices, afin de montrer ces analyses didactiques. A titre d'exemple, voici l'un de ces exercices : "Déterminer le signe de la fonction $f(x) := x^2 \cos x - \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$"

Quelques points que nous discutons avec les moniteurs :

* Quelle sera l'activité des étudiants si on donne l'indication "on pourra factoriser par $\cos x$" ? Et si on ne la donne pas ?

* Quel apprentissage des étudiants si on les laisse dériver 1 fois, 2 fois, 3 fois… la fonction?

* Quel va être le rôle de l'échec des étudiants s'ils utilisent cette méthode ?

* Combien de temps faut-il laisser chercher les étudiants avant que l'enseignant ne leur donne la bonne indication ? ……

***In fine*, notre espoir est que si suffisamment de moniteurs ont une telle formation, il sera peut-être possible de changer quelque chose à l'enseignement des mathématiques à l'université…**