

Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire

Françoise CHENEVOTOT-QUENTIN et Brigitte GRUGEON-ALLYS
DIDIREM, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, 75251 PARIS Cedex 5, France
Élisabeth DELOZANNE
L'UTES, Université Paris VI, 4 place Jussieu, BC 1210, 75005 PARIS, France

Résumé

Nous présentons ici une étude exploratoire portant sur la conception et le développement de ressources numériques destinées au professeur et aux élèves.

Nous décrivons un outil de diagnostic cognitif en algèbre élémentaire et son enrichissement, depuis un diagnostic individuel ou collectif, reposant sur un test systématique que nous avons fait évoluer pour l'adapter à différents niveaux de la scolarité obligatoire, jusqu'à un diagnostic dynamique.

Une expérimentation conduite sur des classes de 5^{ème} vient illustrer cette analyse.

I Introduction et problématique

I.1 Contexte

Notre contribution s'inscrit dans le cadre du sixième groupe de travail : "Technologie et enjeux de développement : formation à distance, ressources numériques, plate-forme, multimédia" et plus précisément dans son deuxième pôle : "La technologie et le développement de ressources". Nous répondrons aux deux questions suivantes :

- Comment prendre en compte, dès la conception des ressources, les besoins des utilisateurs (élèves, enseignants), les contraintes technologiques, les nécessités institutionnelles ?
- Comment enrichir les ressources à partir de l'expérience de leurs utilisateurs ?

Le travail présenté s'inscrit dans le contexte des projets Pépite et Lingot (Delozanne § al, 2005a), projets de recherche pluridisciplinaire en EIAH (Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain), fruits d'une collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique datant de plus de dix ans. Les modèles didactiques développés par les didacticiens ont permis de définir des modélisations informatiques et, réciproquement, la démarche itérative de conception en EIAH, et les expérimentations en classe, ont renvoyé des questions à la didactique des mathématiques.

Nous partons du constat que beaucoup d'enseignants éprouvent des difficultés à gérer l'hétérogénéité des connaissances des élèves et à différencier l'enseignement dans un domaine donné, notamment dans le domaine de l'algèbre élémentaire.

Le projet Pépite (de 1995 à 2002) a conduit à la construction d'un profil cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin de 3^{ème} / début de 2nd à partir de ses réponses à un test spécialement conçu à cet effet. Le projet Lingot (depuis 2002) vise à concevoir, réaliser et évaluer des environnements informatiques de diagnostic et d'apprentissage en algèbre.

I.2 Problématique

La spécificité de ces deux projets pluridisciplinaires repose sur leur conception participative et collaborative. En effet, l'orientation des recherches a été constamment guidée et enrichie par les expérimentations conduites avec les enseignants.

Ces expérimentations variées ont permis d'observer l'usage de Pépite dans différents contextes, à différents stades de la recherche. Trois questions essentielles ont été soulevées par les enseignants :

- Le prototype existant est limité à un niveau d'étude prédéfini, la fin du collège. Comment adapter le diagnostic à différents niveaux scolaires ? Est-il possible de définir des modèles de tâches à partir desquels les enseignants pourraient construire leurs propres tests ?
- Comment passer d'un diagnostic individuel à un diagnostic collectif ? En effet, le résultat du diagnostic renvoyé aux enseignants correspond à la description du profil cognitif individuel de chaque élève. Les enseignants soulignent qu'une géographie cognitive de la classe serait plus opérationnelle pour réguler les apprentissages.
- Le temps de passation du test Pépite est jugé excessif. Le test initial effectue une évaluation portant sur l'ensemble des tâches diagnostiques du domaine algébrique. Un diagnostic adaptatif, établi à partir d'un nombre limité d'exercices, ne permettrait-il pas d'établir un diagnostic rapide et fiable qui pourrait être confirmé sur d'autres exercices ?

L'enjeu de ce travail est d'apporter une réponse à ces trois questions. Pour cela, nous décrivons un outil de diagnostic cognitif en algèbre élémentaire et son enrichissement, depuis un diagnostic individuel ou collectif reposant sur un test systématique que nous avons fait évoluer pour l'adapter à différents niveaux de la scolarité obligatoire, vers un diagnostic dynamique.

Dans le paragraphe II, nous explicitons d'abord le modèle de la compétence algébrique construit pour analyser à la fois les rapports institutionnels, *via* les programmes, et les rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire, *via* le test diagnostique. Ce modèle constitue le fondement de notre outil de diagnostic.

Dans le paragraphe III, nous présentons les modalités du diagnostic cognitif individuel et son adaptation à différents niveaux puis la modélisation didactique des tâches diagnostiques obtenue en croisant le modèle de la compétence défini en fin de scolarité obligatoire et l'organisation mathématique globale relative à l'algèbre élémentaire à un niveau scolaire donné. Ce modèle didactique est illustré sur un exemple.

Dans le paragraphe IV, nous décrivons les modalités du diagnostic cognitif collectif et son adaptation à différents niveaux. Nous présentons les stéréotypes, classes de profils cognitifs équivalents en algèbre et les variables retenues pour les adapter selon les divers niveaux considérés. Suivent les résultats obtenus lors d'expérimentations menées dans deux classes de 5^{ème}.

Dans le paragraphe V, dans la perspective de faire évoluer notre outil de diagnostic statique vers un outil de diagnostic dynamique, nous présentons l'identification de tâches prédictives des compétences algébriques des élèves.

Pour conclure, nous discutons les résultats de ce travail et nous abordons les perspectives de recherche dégagées par cette étude.

II Modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire

Afin d'étudier à la fois les rapports personnels des élèves et les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire, Grugeon (Grugeon, 1995, 1997) a défini une sorte de *référence*, précisant les enjeux d'apprentissage en fin de scolarité obligatoire. S'appuyant sur des travaux théoriques du champ de la didactique de l'algèbre, Grugeon a établi un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique attendue en fin de scolarité obligatoire. Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (Douady, 1985).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, des problèmes de modélisation et des problèmes "d'arithmétique traditionnelle" visant la mise en équation. Cependant, parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière.

Sur le plan *objet*, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. C'est pourquoi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

Au niveau scolaire considéré (enseignement secondaire), deux éléments supplémentaires interviennent également dans l'évaluation de la compétence algébrique :

- l'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique (Vergnaud, 1987, Kieran, 1992),
- l'efficacité algébrique requiert, d'une part, une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural (Sfard, 1991) et, d'autre part, une capacité à adapter l'interprétation des expressions à la variété des usages visés.

Cette approche permet ainsi de caractériser les types de problèmes du champ conceptuel de l'algèbre, les objets mis en jeu dans leur résolution (lettres : variables, inconnues, indéterminées, expressions algébriques, formules, équations, identités) et leurs propriétés, les représentations associées en lien avec les différents registres de représentations du domaine algébrique. Cette étude pointe des ruptures potentielles en jeu dans l'entrée dans la pensée algébrique, tant du point de vue de la construction de la rationalité mathématique à travers la résolution de problèmes (passage de la preuve pragmatique à la preuve mathématique, mobilisation des lettres pour modéliser des relations entre les objets d'un système intra ou extra mathématique) que du point de vue de la capacité à adapter l'interprétation des expressions mises en jeu aux usages visés.

Une structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire, structurée à partir de ces différents aspects, est alors organisée autour des composantes suivantes :

- la mobilisation des lettres de façon adaptée à la résolution d'un type de problème du champ de l'algèbre en lien avec le rapport arithmétique / algèbre et le niveau de rationalité algébrique,
- la flexibilité dans l'articulation entre les différents registres de représentation,
- l'habileté dans le calcul algébrique.

III Diagnostic cognitif individuel : profil cognitif d'un élève

III.1 Diagnostic individuel à la fin de la scolarité obligatoire

Le premier outil de diagnostic, d'abord un outil papier/crayon (Grugeon, 1997), a donné lieu à une implémentation informatique partielle avec la conception du logiciel Pépite (Jean § al, 1998), qui construit en partie automatiquement le profil cognitif en algèbre d'un élève à la fin de la scolarité obligatoire (niveau fin de 3^{ème} / début de 2nd) à partir de ses réponses à un test systématique spécialement conçu à cet effet. Ce profil est une description des rapports personnels de l'élève à l'algèbre élémentaire en repérant les cohérences de fonctionnement.

Le test est composé de 22 tâches diagnostiques choisies en croisant à la fois les différents aspects du modèle de la compétence algébrique, pris comme référence, et les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes pour généraliser (un item), modéliser (7 items), prouver (3 items) ou mettre en équation (2 items) dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique) mais aussi des exercices techniques de calcul (8 items) ou de reconnaissance (6 items) impliquant différents types de tâche des programmes de collège et de seconde (produire des expressions ou des formules, mettre en équation, prouver des propriétés, calculer la valeur d'expressions, développer, factoriser des expressions, résoudre des équations).

III.2 Adaptation du diagnostic individuel à d'autres niveaux scolaires

En s'appuyant sur l'approche anthropologique (Chevallard, 2002), l'étude des programmes officiels des collèges permet d'explicitier les organisations mathématiques impliquées dans la résolution des problèmes proposés à un niveau donné : types de tâches et types de techniques attendues, relativement aux éléments technologiques et théoriques visés. Depuis 2005, dans le domaine numérique, les programmes définissent le rôle des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation, pour montrer l'insuffisance du numérique à exprimer une propriété de façon générale et la nécessité d'introduire les lettres comme variable préalablement au statut d'inconnue. Ils précisent la complexité des objets intervenant dans la résolution : expressions algébriques, formules, équations et les propriétés du cadre algébrique à mobiliser pour chaque niveau scolaire considéré. Le tableau 1 montre l'évolution de la compétence algébrique au fil des programmes officiels du collège.

Niv	Objets	Capacités	Champs de problèmes
5 ^{ème}	Expressions littérales du premier degré, à une ou plusieurs variables. Formules. Identités impliquant des expressions du premier degré.	Produire une expression littérale. Utiliser une expression littérale (pour calculer). Sur des exemples numériques ou littéraux, utiliser les égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$ dans les deux sens. Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.	Problèmes montrant la nécessité d'introduire les lettres comme variable préalablement au statut d'inconnue en lien avec le numérique et de travailler l'écriture globale parenthésée.
4 ^{ème}	Expressions du type $(ax+b)(cx+d)$. Formules, fonctions linéaires. Identités impliquant des expressions du type $(ax+b)(cx+d)$. Equations du type $ax+b = cx+d$.	Calculer la valeur numérique littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. Réduire une expression littérale à une variable, de type donné (cf. programmes 2005). Développer, factoriser une expression. Résoudre une équation du type $ax+b=cx+d$. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	<i>Extension du champ :</i> Introduction des problèmes de mise en équation. Calcul algébrique avec une complexité supérieure des expressions et une évolution des techniques utilisées.

3 ^{ème}	<i>Idem</i> a^n , a entier positif non nul, n entier relatif. \sqrt{a} , a nombre positif. Identités remarquables. Equations du type $(ax+b)(cx+d)=0$. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.	Déterminer l'expression algébrique de fonctions linéaire ou affine. Développer, factoriser une expression de type donné (cf. programmes 2005). Résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue, des systèmes. Résoudre une équation mise sous la forme $A(x)B(x) = 0$ où A et B sont deux expressions du premier degré. Mettre en équation un problème conduisant à une équation, une inéquation, ou un système de deux équations du premier degré.	<i>Nouvelle extension du champ :</i> Introduction des fonctions. Calcul algébrique avec prise en compte d'une complexité plus grande et de nouveaux objets.
------------------	--	---	---

Tableau 1 : Evolution de la compétence algébrique dans les programmes du collège.

La faisabilité de l'adaptation d'un test diagnostique à différents niveaux de la scolarité repose sur l'enrichissement successif des différents aspects de la compétence algébrique travaillés au cours de la scolarité. Elle se traduit par l'évolution des types de tâches et des objets de l'algèbre présents dans les problèmes (production de formules, généralisation, preuve, mise en équation).

III.3 Modélisation didactique du test diagnostique à différents niveaux scolaires

Nous caractérisons les tâches diagnostiques constituant le test par les variables didactiques suivantes : les types de tâches / types de techniques, la nature et la complexité des expressions en jeu, les cadres et registres de représentation, la ou les technique(s) attendue(s). De plus, nous prenons également en compte le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (disponible, mobilisable ou technique) dans la résolution des tâches diagnostiques.

C'est l'appui sur ces variables didactiques qui nous permet de travailler sur des tâches génériques et d'adapter le diagnostic à d'autres niveaux de la scolarité (Chenevotot § al, 2008). L'adaptation du test initial en un test destiné au niveau fin de 5^{ème} / début de 4^{ème}, test papier/crayon constitué de 12 tâches diagnostiques, revient à instancier les variables didactiques définies précédemment :

- Les types de tâches / types de techniques : présence de tous les types de tâches sauf la mise en équation ;
- La nature et la complexité des expressions en jeu : expressions algébriques du premier degré du type $a(cx+d)$ avec jusqu'à trois niveaux de parenthèse ;
- Les cadres et registres de représentation : poids équivalent donné aux écritures numériques (dans des tâches de calcul ou de production d'expressions parenthésées) et aux écritures algébriques ;
- Le niveau de mise en fonctionnement : peu de tâches mettant en jeu la flexibilité dans l'interprétation des expressions (structurale/procédurale) pour choisir l'expression la plus adaptée au calcul visé.

La robustesse du modèle de conception des tests est liée au recouvrement de l'étendue du champ conceptuel de l'algèbre aux différents niveaux scolaires.

III.4 Exemple : la tâche du "prestidigitateur"

Nous illustrons le modèle didactique des tâches diagnostiques génériques ci-dessus pour la tâche du "prestidigitateur" :

Énoncé 3^{ème}/2nd

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
“ Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 ”.
L'affirmation est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

Les variables didactiques caractérisant cette tâche de niveau fin de 3^{ème} / début de 2nd sont les suivantes :

- Les types de tâches / types de techniques : prouver qu'une propriété numérique est vraie (produire une expression à partir d'un programme de calcul, effectuer le calcul) avec les techniques attendues (traduction algébrique, preuve algébrique, lettre comme nombre généralisé, expression globale parenthésée ou écriture de chaque étape de calcul, égalité comme relation d'équivalence) ;
- La nature et la complexité des expressions en jeu : expression algébrique globale parenthésée à une variable x , $[(x+8)\times 3-4+x]/4+2-x$, à six niveaux de parenthèses et mettant en jeu trois additions, deux soustractions, une multiplication et une division (le programme de calcul est choisi pour que l'expression obtenue soit un nombre ou un multiple du nombre initial) ;
- Les cadres et registres de représentation : registre des programmes de calcul, registre des expressions algébriques, du registre discursif vers le registre des écritures algébriques.
- Le niveau de mise en fonctionnement : disponible, étant donné l'ouverture de la question.

Voici l'énoncé correspondant à la même tâche mais destiné à des élèves de fin de 5^{ème} / début de 4^{ème} :

Énoncé 5^{ème}/4^{ème}

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
“ Tu penses un nombre, tu ajoutes 6 à ce nombre, tu multiplies le résultat par 3 et, enfin, tu soustrais le triple du nombre de départ : tu as trouvé 18 ”.
L'affirmation est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

Qu'est ce qui distingue ces deux énoncés ? Seule la complexité de l'expression en jeu est différente. En effet, dans l'énoncé de niveau fin de 5^{ème} / début de 4^{ème} intervient une expression algébrique globale parenthésée à une variable x , $(x+6)\times 3-3x$, à trois niveaux de parenthèses et mettant en jeu une addition, une soustraction et deux multiplications.

IV Diagnostic cognitif collectif : géographie cognitive d'une classe

IV.1 Diagnostic cognitif collectif à la fin de la scolarité obligatoire

Le modèle précédent fournit une description du profil cognitif de chaque élève. Pour les enseignants, dont l'objectif est d'exploiter le diagnostic pour réguler les apprentissages, une photographie de groupes d'élèves ayant des compétences voisines en algèbre semblerait plus opérationnelle.

Outil conceptuel, les stéréotypes sont une modélisation consistant à identifier le comportement d'un utilisateur en le classant dans un ensemble de sous-groupes prédéfinis. L'enjeu est de permettre aux enseignants de proposer des situations d'apprentissages adaptées aux profils cognitifs des élèves en algèbre pour réguler au mieux leurs apprentissages.

Un stéréotype (Vincent § al, 2005) est défini comme une classe de profils équivalents, c'est à dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être

jugées suffisamment proches pour bénéficier d'un diagnostic similaire et travailler sur des situations d'apprentissages adaptées ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage.

Pour spécifier le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire, nous avons privilégié trois composantes (Delozanne § al, 2005b) :

- **UA** : l'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (dimension outil de résolution et de preuve de l'algèbre) :
 Cette composante permet d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.
- **T** : la traduction d'une représentation à une autre :
 Il s'agit ici d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).
- **CA** : le calcul algébrique (dimension objet de l'algèbre) :
 Cette composante sert à évaluer le degré de maîtrise du calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.

Pour chacune de ces trois composantes, différents niveaux de compétences ont été identifiés et traduisent des seuils à dépasser pour acquérir un aspect de la compétence relativement à une composante donnée ; ils sont présentés dans le tableau 2. Définir le stéréotype d'un élève consiste alors à attribuer un niveau de compétence selon chacune des trois composantes à partir des réponses des élèves à des types de tâches adaptés au niveau considéré.

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	<i>Niveau 1</i> : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			<i>Niveau 2</i> : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée.
			<i>Niveau 3</i> : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			<i>Niveau 4</i> : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	T	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	<i>Niveau 1</i> : Traduction correcte.
			<i>Niveau 2</i> : Traduction pas toujours adaptée.
			<i>Niveau 3</i> : Au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	<i>Niveau 1</i> : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			<i>Niveau 2</i> : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			<i>Niveau 3</i> : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 2 : Caractérisation d'un stéréotype.

IV.2 Diagnostic cognitif collectif à d'autres niveaux scolaires

Dans des travaux antérieurs (Chenevotot § al, 2008), nous avons montré que le modèle didactique de stéréotype peut être exploité à différents niveaux scolaires à condition d'être complété. En effet, en début d'apprentissage de l'algèbre, le calcul algébrique s'ancre sur la compétence numérique des élèves, c'est-à-dire sur leur capacité à produire, à interpréter, des expressions numériques et à les calculer. Or, le modèle initial de stéréotype ne permet pas d'exploiter les données concernant le calcul numérique. Pour prendre en compte l'importance du cadre numérique en début d'apprentissage, nous avons complété les trois composantes du stéréotype par la composante CN « calcul numérique » permettant d'étudier le niveau de fonctionnement à maîtriser le calcul numérique. CN est structurée en 3 niveaux, obtenus en transposant ceux organisant la composante CA (Cf. tableaux 2 et 3).

Calcul numérique	CN	Etudier la capacité à calculer numériquement.	<i>Niveau 1</i> : Traitement numérique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			<i>Niveau 2</i> : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation liées à une conception procédurale des expressions.
			<i>Niveau 3</i> : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 3 : Caractérisation de la composante numérique.

L'introduction de cette composante supplémentaire nous semble essentielle pour penser le choix de situations d'apprentissage adaptées aux différents stéréotypes d'une classe à des niveaux scolaires variés. En particulier, nous pouvons faire l'hypothèse qu'une composante CN « calcul numérique » de niveau 3 risque d'être un obstacle à l'entrée dans la pensée algébrique et nécessite la mise en place de situations d'apprentissage spécifiques du cadre numérique.

IV.3 Expérimentations

Le test de niveau fin 5^{ème} / début de 4^{ème} a été soumis, au milieu du 2^{ème} trimestre de l'année scolaire 2006/2007, à deux classes de 5^{ème} gérées par le même professeur de mathématiques. Les figures 1 et 2 présentent la géographie cognitive (ensemble des stéréotypes des élèves) obtenue pour les deux classes, la classe de 5^{ème} 2, qui comprend 18 élèves et la classe de 5^{ème} 7, qui compte 20 élèves.

Cette analyse permet de retrouver la géographie de la classe pressentie par le professeur de mathématiques qui qualifiait ces deux classes de très hétérogènes avec une très bonne classe de tête et quelques élèves en très grande difficulté.

L'analyse met clairement en évidence que, pour les deux classes :

- Une majorité d'élèves (16 pour la 5^{ème} 2 et 18 pour la 5^{ème} 7) ne mobilisent pas de lettres pour prouver ou modéliser et travaillent dans le numérique (UA4), n'ayant pas encore négocié la transition entre arithmétique et algèbre. Deux élèves seulement produisent des expressions algébriques en cohérence avec la situation, dans des problèmes mettant en jeu la disponibilité de l'outil algébrique. Ces résultats montrent la pertinence de la hiérarchisation établie entre les quatre niveaux de la composante UA ;

- Les élèves (3 pour la 5^{ème} 2, 6 pour la 5^{ème} 7) qui ne respectent pas les priorités opératoires et la structure des expressions numériques (CN3) ont majoritairement des difficultés de même nature en calcul algébrique (CA3). Le mode de fonctionnement numérique semble bien servir d'ancrage à l'algébrique ;
- La majorité des élèves (13 pour la 5^{ème} 2 et 11 pour la 5^{ème} 7) ont des résultats corrélés pour les composantes CNi et CAj, avec $i \leq j$ majoritairement (sauf pour 5 élèves). Ces résultats attestent que les connaissances numériques constituent un point d'appui réel pour la construction des compétences en calcul algébrique.

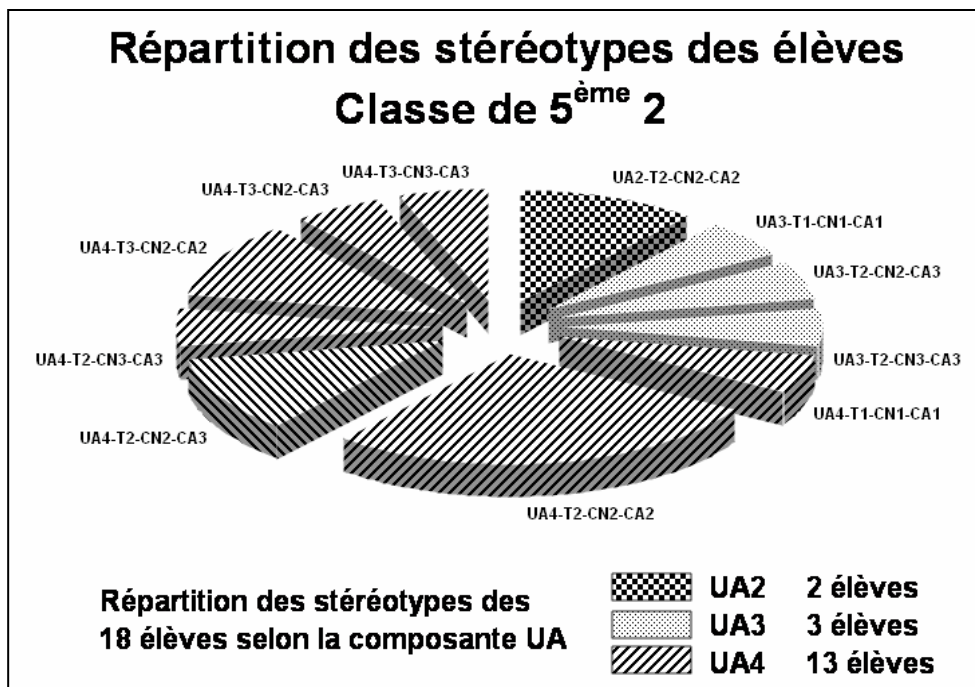


Figure 1 : Géographie cognitive de la classe de 5^{ème} 2

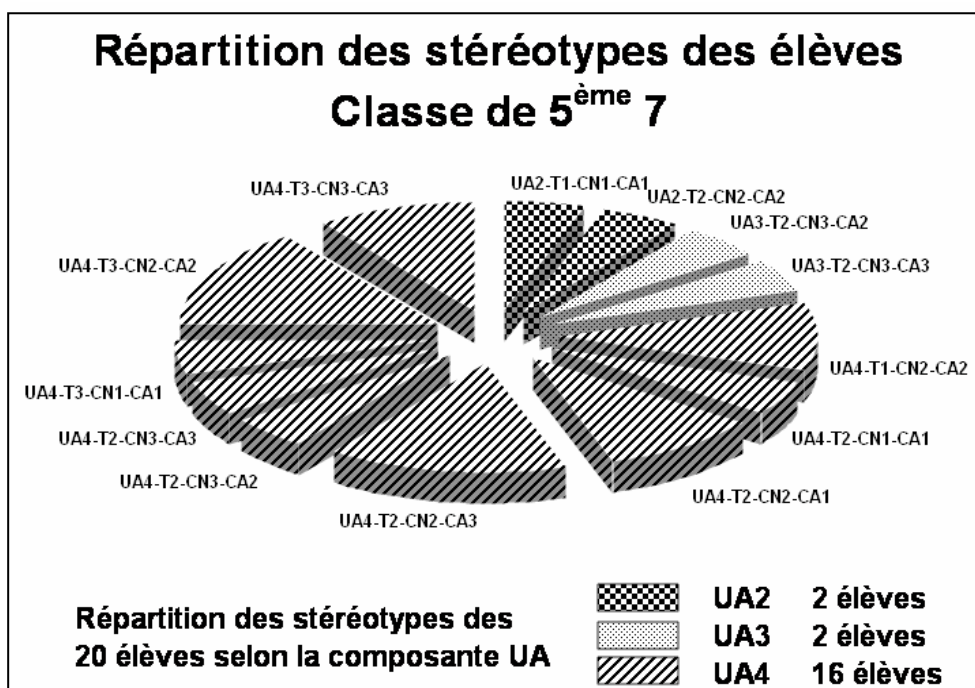


Figure 2 : Géographie cognitive de la classe de 5^{ème} 7

V Vers un diagnostic cognitif dynamique

Les enseignants demandent des outils d'évaluation à la fois adaptables à leur stratégie de régulation de leur enseignement et économes en temps. Or, les différents tests Pépité sont des tests systématiques. Ils sont coûteux en temps car leur évaluation porte sur l'ensemble des tâches diagnostiques du domaine algébrique.

Un diagnostic cognitif dynamique, réalisé à partir d'un test adaptatif, permettrait-il d'établir un diagnostic à la fois rapide et fiable ? Quelles tâches diagnostiques faudrait-il proposer ? Comment choisir la première tâche diagnostic ? Ces tâches varieraient-elles selon les réponses des élèves ?

Il est nécessaire de définir des tâches diagnostiques prédictives permettant de déterminer des aspects de la compétence algébrique considérés comme essentiels et déterminants.

Cette question a été abordée par l'équipe dans le cadre de la thèse de Prévité (Prévité, 2008) : Comment proposer des modèles génériques pour une mise en œuvre informatique de batteries de tests diagnostiques, à partir d'une analyse didactique *a priori* d'exercices particuliers et des réponses envisageables à ces exercices recueillies auprès des élèves ?

Le travail de modélisation didactique s'avère indispensable pour rendre possible la modélisation informatique. En effet, le modèle didactique des tâches diagnostiques génériques, décrit précédemment, a permis d'initier la conception du modèle informatique de classe d'exercices. Ce modèle génère et décrit des tâches supports de classes de situations diagnostiques adaptées à des niveaux scolaires allant de la 5^{ème} à la 2nd.

L'équipe engagée dans le projet Lingot a retenu quatre classes d'exercices :

- Reconnaître des égalités numériques vraies,
- Correspondance entre aire (périmètre) et expressions,
- Preuve et programme de calcul,
- Expressions algébriques d'un programme de calcul.

A ces quatre classes d'exercices, nous avons ajouté une cinquième classe destinée à prendre en compte les techniques de calcul algébrique en début de collège :

- Manipulation sur la factorisation et le développement d'expressions, le test d'une égalité pour résoudre une équation.

Nous faisons l'hypothèse que ces cinq classes d'exercices constituent cinq types de tâches diagnostiques prédictives.

Nous avons testé cette hypothèse à partir du test diagnostic de niveau fin de 5^{ème} / début de 4^{ème} en comparant les stéréotypes obtenus en analysant les réponses des élèves :

- d'une part aux 12 tâches composant le test complet,
- et d'autre part aux 5 tâches définies comme prédictives.

Les premiers résultats obtenus (tableau 4) sont convaincants car l'analyse des réponses des élèves aux 5 tâches prédictives permet d'obtenir les mêmes stéréotypes qu'avec le test diagnostic complet pour les composantes UA, T et CA. Seuls les niveaux sur CN sont parfois légèrement différents tout en restant en cohérence.

Il restera à confirmer ces résultats par une expérimentation portant sur un nombre d'élèves et de classes beaucoup plus grand.

Pré-profil numérique	Stéréotype de l'élève Test initial complet	Stéréotype de l'élève Test réduit 5 exercices prédictifs	Code élève
CN1	CN1 UA3 T1 CA1	CN2 UA3 T1 CA1	E1
	CN1 UA4 T1 CA1	CN1 UA4 T2 CA1	E2
CN2	CN2 UA2 T2 CA2	CN3 UA2 T2 CA2	E3
	CN2 UA2 T2 CA2	CN3 UA2 T2 CA2	E4
	CN2 UA3 T2 CA3	CN3 UA3 T2 CA3	E5
	CN2 UA4 T2 CA2	CN3 UA4 T2 CA2	E6
	CN2 UA4 T3 CA2	CN3 UA4 T3 CA2	E7
	CN2 UA4 T3 CA3	CN3 UA4 T3 CA3	E8
CN3	CN3 UA3 T2 CA3	CN3 UA3 T2 CA3	E9
	CN3 UA4 T2 CA3	CN3 UA4 T2 CA3	E10
	CN3 UA4 T3 CA3	CN3 UA4 T3 CA3	E11

Tableau 4 : Géographie cognitive d'une classe de 5^{ème}

VI Conclusion et perspectives de recherche

Les travaux de recherche que nous venons d'exposer s'appuient largement, au fil du projet Lingot, sur les besoins des utilisateurs, tant du côté des enseignants (en lien avec leurs pratiques d'évaluation dans leur classe) que du côté des élèves (au travers de la description du profil). De plus, le logiciel Pépite représente un outil aidant les enseignants à faire face aux nécessités institutionnelles : gérer l'hétérogénéité des connaissances des élèves et différencier l'enseignement, en prenant en compte les pratiques de régulation pour constituer des groupes de besoin.

Nous avons conçu une modélisation didactique d'un test d'évaluation en algèbre élémentaire, exploitable à différents niveaux scolaires de l'enseignement secondaire. Cette modélisation s'appuie sur la définition de variables didactiques obtenues en croisant le modèle de la compétence défini en fin de scolarité obligatoire et l'organisation mathématique globale relative à l'algèbre élémentaire à un niveau scolaire donné.

La réflexion commune menée conjointement par les informaticiens et les didacticiens de l'équipe du projet Lingot autour de cette modélisation a servi de support pour concevoir le modèle conceptuel informatique de classes d'exercices, mis en œuvre par Prévité dans le système PépiGen (Prévité, 2008). Prévité a ainsi élaboré et implémenté le composant de calcul formel Pépinière qui génère non seulement des exercices mais aussi les réponses et les raisonnements anticipés à partir de l'analyse *a priori* d'une expression algébrique et de l'analyse automatique des réponses et raisonnements corrects ou incorrects des élèves. Ce résultat constitue une avancée importante qui va permettre d'implémenter une nouvelle version du logiciel Pépite, plus fiable au niveau du diagnostic en algèbre élémentaire.

Le travail engagé sur le diagnostic dynamique est orienté vers la prise en compte des nécessités institutionnelles des enseignants qui ont soulevé la question de l'économie du temps de passation du test.

Le travail concernant la recherche de tâches prédictives est prometteur. Pour le niveau 5^{ème} / 4^{ème}, nous avons proposé une modélisation didactique s'appuyant sur cinq tâches prédictives et l'analyse des réponses des élèves à ces cinq tâches prédictives a permis d'obtenir les mêmes stéréotypes qu'avec le test diagnostic complet sur les composantes UA, T, CA ; seuls les niveaux sur CN sont différents mais en cohérence.

Il s'agit maintenant de généraliser les expérimentations à d'autres niveaux de la scolarité pour tester la robustesse de cette modélisation.

Site de Pépite : Logiciel disponible gratuitement à l'adresse : <http://pépité.univ-lemans.fr>

Bibliographie

CHENEVOTOT-QUENTIN F., GRUGEON-ALLYS B., DELOZANNE E. (2008) (à paraître) Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité. *Actes du colloque DIDIREM 2008*, Paris, 4-6 septembre 2008.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude 1, Structures et Fonctions, En J-L. Dorier et al. (Eds). *Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, Corps, 21-30 août 2001, pp. 3-22, Grenoble : La pensée Sauvage.

DELOZANNE E., GRUGEON B. § al (2005a) Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT. *Rapport de recherche*, Programme « Ecole et Sciences Cognitives : les apprentissages et leur dysfonctionnement » du MRT.

DELOZANNE E., VINCENT C., GRUGEON B., GELIS J.M., ROGALSKI J., COULANGE L. (2005b) From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra, In G. Richards (Ed.). *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005*, Chesapeake, pp. 262-269, VA: ACE.

DOUADY R. (1985) The Interplay between Different Settings: Tool-Object Dialectic in the Extension of Mathematical Ability: Examples from Elementary School Teaching, in *Streefland ed.*

GRUGEON B., DELOZANNE E. (2003) EIAH et apprentissage de l'algèbre élémentaire : les projets Pépite et Lingot. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*.

GRUGEON B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Revue de Didactique des Mathématiques*, Vol.17/2, pp. 167-210.

GRUGEON B. (1995) Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. *Thèse de doctorat, Université Paris 7*.

JEAN S., DELOZANNE E., JACOBONI P., GRUGEON B. (1998) Cognitive profile in elementary algebra: the PEPITE test interface. *IFIP-TC-3 Official Journal "Education and Information Technology"* Vol. 3, pp. 1-15.

KIERAN C. (1992) The learning and teaching of school algebra. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grouws (ed), New York, pp. 390-419, Macmillan.

PREVIT D. (2008) Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes. *Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie*.

SFARD A (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, pp. 1-36.

SUCHAUT B., MORLAIX S. (2007) Apprentissages des élèves à l'école élémentaire : les compétences essentielles à la réussite scolaire. *Notes de l'IREDU*, n°07/01, mars 2007.

VERGNAUD G., CORTES A., FAVRE-ARTIGUE P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles, Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-288, Editions La Pensée Sauvage.