

Apprenti Géomètre, un instrument pour l'apprentissage de la géométrie et de la mesure des grandeurs

P. Lambrecht et Ph. Skilbecq, CREM¹

Cette communication s'insère dans le premier pôle de ce groupe de travail (n°6) : *la technologie et le développement de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques*.

Elle tentera de proposer des éléments de réponse aux questions :

- quels impacts de la technologie sur la pratique, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?
- comment la technologie peut-elle être exploitée comme outil de motivation et de valorisation de l'apprentissage et de la recherche en mathématique ?

Résumé

Le CREM a développé un logiciel de géométrie dynamique, *Apprenti Géomètre*, conçu pour l'apprentissage de la géométrie et de la mesure des grandeurs, comme complément original au contexte papier-crayon. Deux années d'expérimentation ont permis d'entrevoir des améliorations dans l'apprentissage. Notre communication montrera en quoi il peut être considéré comme atelier d'expérimentation particulier, comme complément aux instruments déjà présents en classe (Rabardel) et ce qu'il peut apporter au niveau des apprentissages, particulièrement à la vision géométrique (Duval).

Problématique et cadrage théorique

De nombreuses recherches ont montré la difficulté à introduire et intégrer de manière pérenne les nouveaux outils technologiques dans les pratiques de classes. Pour les développeurs, il s'agit entre autres, d'une part, d'exposer des applications possibles de ces outils et, d'autre part, de justifier leur utilisation par un gain apporté à l'enseignement ou à l'apprentissage.

Le CREM s'est donc intéressé à montrer en quoi l'utilisation d'*Apprenti Géomètre*, et plus particulièrement son intégration dans une ingénierie didactique, avait un impact favorable sur certains apprentissages, notamment sur la vision géométrique telle que la définit R. Duval (2005).

¹ Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique

Communication

Introduction

Le développement des technologies influence de plus en plus la didactique des mathématiques. De nombreuses recherches sont actuellement menées afin de déterminer les apports et les conditions optimales de l'utilisation de ces nouveaux outils dans l'éducation. Dans cette optique, le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Nivelles, Belgique) a développé un logiciel de géométrie dynamique, appelé *Apprenti Géomètre*², conçu principalement pour l'apprentissage des grandeurs, des fractions, des mesures et de la géométrie. Pour étudier ces divers champs, le logiciel propose deux environnements de travail différents, deux « espaces géométriques ». Il a également été conçu comme un complément original au contexte papier-crayon. Deux années d'expérimentation avec des enfants de 10 à 12 ans ont permis d'entrevoir des améliorations dans l'apprentissage. La première version de ce logiciel sur laquelle la recherche en question a porté est spécifique à l'enseignement primaire, la seconde version de ce dispositif technologique, actuellement disponible³, est en outre destinée à l'enseignement du début du secondaire.

Au cours de cette communication, nous tâcherons de montrer en quoi *AG* peut être considéré comme un atelier d'expérimentation original et comme un milieu didactique au sens de G. Brousseau (1998). Nous tenterons également de montrer ce en quoi *AG* est complémentaire aux instruments déjà présents en classe au sens de P. Rabardel (1995) et ce qu'il peut apporter au niveau des apprentissages, particulièrement à la vision en géométrie (R. Duval, 2005).

Un logiciel de géométrie dynamique

Jusqu'à la fin du siècle passé, dans la plupart des cas, l'enseignement et l'apprentissage des premiers concepts de géométrie étaient principalement basés sur une approche descriptive. Les objets étaient proposés à l'apprenant qui devaient en extraire des caractéristiques (mentionnons toutefois l'exception des dessins animés de J.-L. Nicolet). Nous pensons que c'est une approche restrictive, pas assez ambitieuse pour des débutants. Une autre approche, plus dynamique et plus effective dans la formation de tels processus, consiste à notre avis à manipuler des objets géométriques, à les découper, à les fusionner, à les modifier et à les conduire ainsi jusqu'à leurs limites pour découvrir leurs caractéristiques.

Cette approche semble plus accessible aujourd'hui grâce à l'apparition des nouvelles technologies. Dans ce cadre, le CREM (www.crem.be) propose *AG*, un logiciel de géométrie dynamique destiné essentiellement aux enfants âgés de 8 à 12 ans (dans sa première version). Rappelons que la deuxième version s'étend à des élèves plus âgés, jusqu'à 14-15 ans.

² Nous utiliserons l'abréviation *AG* dans la suite de ce document.

³ Les deux versions d'*Apprenti Géomètre* sont en libre téléchargement sur le site du CREM : www.crem.be

AG n'est pas un logiciel crowdérien ou skynérien. Il possède des points communs avec Cabri Géomètre (logiciel français conçu par C. et J.-M. Laborde destiné à l'enseignement secondaire et supérieur) et Logo (conçu par S. Papert) ; *AG* est un « micro monde ». Toutefois, contrairement à Logo, toutes les manipulations sont réalisées via la souris et les élèves ne doivent donc pas apprendre de langage symbolique. De même, contrairement à Cabri, les formes sont prédéfinies dans *AG* et peuvent être directement manipulées.

Une analyse épistémologique des notions de fractions, grandeurs et mesures a précédé l'élaboration d'*AG* (CREM, 2003). Ces analyses ont aboutis à la présence de fonctions originales telles que découper et fusionner des formes. Une autre particularité du logiciel est qu'il n'offre pas de mesure à partir d'unités conventionnelles.

Un atelier d'expérimentation

AG est un atelier au sens où il laisse l'entière initiative à l'utilisateur. A un premier niveau, l'apprenant rencontre un environnement plutôt intuitif pour l'appropriation de connaissances et l'acquisition de compétences mathématiques. Les figures géométriques apparaissent avec une orientation et des dimensions prédéfinies et ont entre elles des rapports simples de longueurs, d'aires et d'angles.

Par exemple, la grande majorité des figures de la « famille » du triangle équilatéral sont construites à partir de ce triangle par *division*, *découpage* ou *fusion*. Les familles du carré et du pentagone sont construites de la même manière. Ce niveau est destiné principalement à l'apprentissage des grandeurs, fractions et mesures.

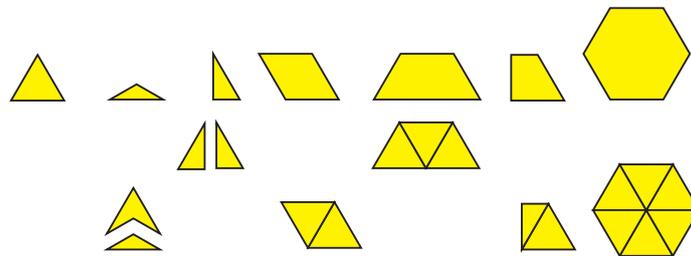


Figure 1 : Figures standards de la famille du triangle équilatéral

Au second niveau, les figures sont construites à la souris. L'utilisateur fixe lui-même l'orientation et les dimensions des figures. Contrairement au premier niveau, les figures sont ici rassemblées en fonction de leurs caractéristiques géométriques : triangles, quadrilatères, etc. Ce niveau permet aussi à l'utilisateur de modifier les figures dessinées et de leur appliquer les isométries usuelles (*translation*, *rotation*, *symétrie orthogonale*).

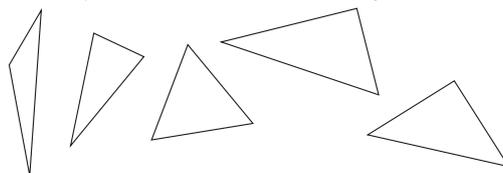


Figure 2 : Figures libres de la famille du triangle

La première version d'*AG* offre la possibilité d'appliquer plusieurs types d'opérations simples et intuitives aux objets, telles que *découper*, *ajuster* et *fusionner*, et également trois types de mouvements appelés *glisser*, *tourner* et *retourner*. Il offre aussi les trois isométries classiques : *translation*, *rotation* et *symétrie miroir* (Rouche et Skilbecq, 2006). À cela s'ajoute la possibilité d'amener à l'écran des réseaux réguliers de points, des points isolés, des segments, etc.

L'impact de ce logiciel sur l'apprentissage

Au cours de notre dernière recherche (2005-2007), le dispositif expérimental avait pour objet de déterminer quelques influences significatives du logiciel *AG* sur l'apprentissage du périmètre et de l'aire auprès d'enfants âgés de 10 à 12 ans. 255 élèves ont participé à cette étude. Des classes « témoins » ont été confrontées à des activités traditionnelles, pendant que des classes « expérimentales » ont utilisé *AG*. L'objectif d'enseignement était l'élaboration des formules de calcul de périmètre et d'aire de quelques polygones.

Dans un premier temps, nous avons déterminé quelques cadres théoriques pour construire les activités. Ils sont brièvement expliqués ci-dessous. Dans le même temps, progressivement, nous avons essayé de déterminer un champ d'application pour *AG* en tenant compte des potentialités du logiciel (*diviser*, *découper*, *fusionner*, *tourner*, *déplacer*, etc.) et de ses contraintes (aucune mesure avec des unités usuelles et aucun instrument de mesure).

Un cadre épistémologique

Plusieurs techniques mathématiques sont associées aux notions de périmètre et d'aire. Nous avons déterminé trois approches principales utilisant ces techniques. Premièrement, une perception qualitative : comparaison par superposition, par division, par décomposition, par complémentarité, par multiplication. Deuxièmement, une perception quantitative (ou quantification) par recouvrement avec une unité correspondant à une figure ou à une fraction de celle-ci (notion de commune mesure) et par encadrement. Troisièmement, la numérisation, c'est-à-dire le remplacement des grandeurs par des nombres générés par la mesure conventionnelle ou par calcul. Alors, tous les raisonnements et les manipulations sur les aires peuvent être remplacés par des raisonnements et des calculs sur les nombres. L'introduction et l'utilisation des formules sont incluses dans cette approche.

Un cadre didactique

En tant qu'outil technologique, *AG* possède un fonctionnement qui lui est propre. Son utilisation nécessite certaines connaissances instrumentales que ses concepteurs ont voulu les plus intuitives possibles. Cependant, des points de vue instrumental (*schèmes d'usage*⁴) et procédural (*schèmes d'action instrumentée*⁵), son utilisation impose des modes de

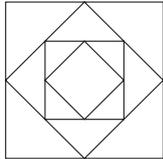
⁴ P. Rabardel (1995).

⁵ Op. Cit.

fonctionnement qui sont différents de ceux de l'utilisateur d'une part et de ceux utilisés dans un contexte de manipulations traditionnel (manipulations de figures en carton par exemple, ou tracés aux instruments) d'autre part. Ainsi, avec AG^6 , les élèves doivent nommer chaque mouvement. Ils doivent procéder pas à pas, analysant la situation avec un haut degré de conscience. Cette spécificité des modes de fonctionnement conduit à de nouveaux apprentissages chez les élèves. En ce sens, et en ajoutant le fait que AG contraint l'action mais aussi renvoie des informations quant à cette action, AG constitue un « milieu » (G. Brousseau, 1998).

Tous les outils ne sont pas équivalents en terme d'apprentissage potentiel (J. Threfall & al., 2007). Dans sa théorie instrumentale, P. Rabardel (1995) insiste sur l'importance des systèmes d'instruments. Similairement, T. Assude & J.-M. Gelis (2002) montrent la nécessaire complémentarité « ancien-nouveau » dans leur présentation du logiciel Cabri Géomètre à l'école primaire. Ainsi, tout au long des expérimentations, nous avons tenté de reconnaître la complémentarité entre « papier-crayon » ou manipulations et « technologies » avec AG . Cette complémentarité apparaît tant au niveau des connaissances conceptuelles rencontrées qu'au niveau des connaissances procédurales ou instrumentales liées à l'outil.

Nous avons fait les hypothèses, suivant les travaux de beaucoup de chercheurs, dont ceux de Th. Gamlick (2002), que le transfert de tâches d'un contexte à un autre faciliterait la réorganisation mentale des connaissances ou des procédures mathématiques.



Par exemple, dessiner une série de carrés encastrés les uns dans les autres avec des formes en papier, avec AG ou avec des instruments de dessin, ne confronte pas les élèves ni aux mêmes contraintes, ni aux mêmes techniques et notions mathématiques.

Carton	AG	Instruments de dessin
Les élèves assemblent des formes avec une vue globale de la construction. Souvent, ils mesurent pour trouver le milieu des côtés.	Les élèves dessinent des formes avec une vue globale et locale de la construction. Les élèves dessinent des carrés avec 2 points (sommets). Ils ont besoin des milieux de deux côtés consécutifs.	Les élèves dessinent des formes avec une vue locale de la construction. Ils doivent scinder la figure à l'aide de plusieurs lignes. Ils ont besoin des milieux des côtés, ou des diagonales, ou des médianes. Souvent ils mesurent, parfois ils utilisent un compas.

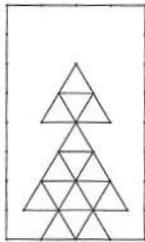
Tableau 1 : Dessiner une série de carrés avec différents outils

⁶ Comme avec d'autres logiciels de géométrie dynamique.

Avec ces carrés, des travaux sur les aires et les fractions d'aires sont réalisables avec les élèves.

Un cadre cognitif

R. Duval (2005) a montré que les activités géométriques ont besoin de quatre types de vision. Souvent, dans la classe, seulement deux d'entre elles sont utilisées : celle du « botaniste » (reconnaissance de la figure et association de son nom) et celle de « l'arpenteur » (mesure de la figure). Deux autres types de vision sont pourtant nécessaires : celle du « constructeur » (construction des figures avec des instruments de dessin) et celle de « l'inventeur/bricoleur » (construction de figures avec d'autres). *AG* permet d'entraîner ces deux types de vision grâce aux nombreuses formes disponibles et aux opérations telles que diviser, découper et fusionner.



Pour les pré-tests et post-tests, nous avons demandé à 146 élèves de 5^{ème} primaire et à 109 élèves de 6^{ème} primaire de reproduire la figure ci-contre. Après analyse, nous avons déterminé trois types de dessin, peut-être trois types de vision pour ces élèves : « une vision atomisée » (dessin ligne après ligne), « une vision globale » (on remarque une structure dans le dessin) et, entre les deux, « une vision locale » (on remarque seulement quelques structures).

	Vision atomisée		Vision globale		Vision locale	
	Pré-test	Post-test	Pré-test	Post-test	Pré-test	Post-test
5 ^è	32%		4%		55%	
6 ^è	40%	30%	15%	15%	40%	55%

Tableau 2 : Types de vision et de dessin

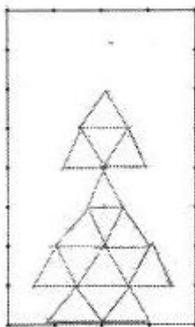


Figure 3 : Vision atomisée

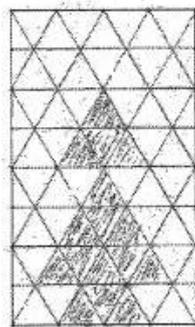


Figure 4 : Vision globale

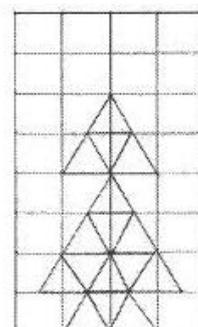


Figure 5 : Vision locale

Une zone « fonctionnelle » pour *AG*

Avec ces cadres théoriques et au cours des expérimentations, nous avons défini une zone d'application pour *AG* afin d'enseigner et d'apprendre le périmètre et l'aire. Nous essayons également de faire ceci pour d'autres outils. Notre but était de construire un système d'instruments pour rencontrer les notions de périmètre et d'aire. Pour *AG*, la zone

d'application est composée de la vision de « l'inventeur » et parfois de celle du « constructeur » et des perceptions qualitatives et quantitatives.

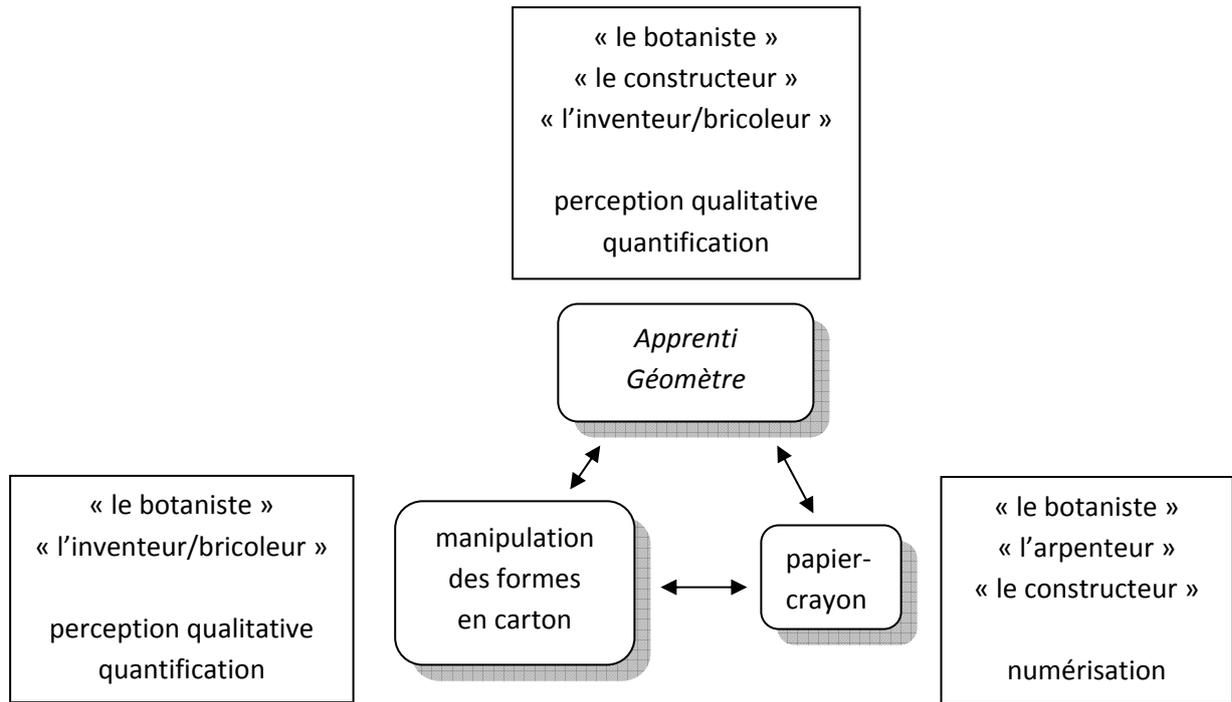
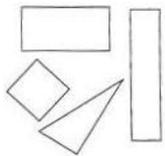


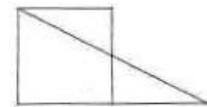
Figure 6 : Zone fonctionnelle pour les trois contextes

Quelques activités

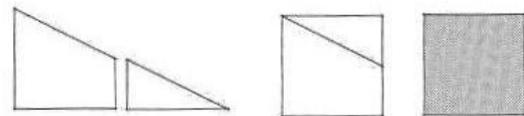


Classez ces figures de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande.

Avec *AG*, les élèves peuvent superposer les figures. Par transparence, les figures qui peuvent être découpées apparaissent. Ce n'est pas aussi simple avec du carton.



Les élèves peuvent aussi découper et fusionner les figures après les avoir tournées et ajustées.



Le plus petit carré a une aire de 2. Quelle est l'aire et quel est le périmètre du rectangle le plus grand ?

Avec le travail papier-crayon, les élèves mesurent souvent ... Avec *AG*, ils essaient de temps en temps de mesurer sur l'écran ! Mais par après, ils utilisent les petits carrés pour paver le rectangle. Et parfois, parce que la duplication et le pavage est long, ils « voient » que le grand carré peut être construit à partir de copies des plus petits carrés. Ils calculent alors la mesure

de ses côtés à partir de la mesure des côtés du plus petit carré. Ils utilisent les caractéristiques géométriques du carré. Progressivement, ils « voient » !

Impact du logiciel

Au terme de deux années de recherche et suite à l'analyse implicative des résultats aux pré-tests et post-tests, nous avons conclu prudemment que, premièrement, statistiquement les élèves ayant utilisé *AG* possèdent une meilleure « vision globale » des figures géométriques (CREM, 2007) et deuxièmement, ils maîtrisent mieux les procédures de « complétion » de certaines figures (les triangles par exemple) pour le calcul de leurs aires. Ces constats trouvent également leur interprétation à partir de la théorie de R. Duval concernant la vision géométrique (2005).

Une autre source d'apprentissage est la façon d'identifier et de rassembler les opérations et les mouvements. Dans le travail papier-crayon, cela est plus ou moins inconscient. La main agit en connexion avec l'analyse visuelle de la situation. Les mouvements (déplacer, tourner) sont utilisés sans distinction et ne laissent pas de trace. Avec *AG*, les élèves doivent choisir le mouvement approprié à appliquer via son nom. Ils utilisent seulement un mouvement à la fois, l'un après l'autre... Et avant de faire cela, ils doivent analyser la situation. Ce n'est pas une décision sur le fait, c'est une décision basée sur une analyse visuelle et conceptuelle a priori. Ce constat a été également émis par les enseignants, ils en ont dit que les élèves ayant utilisé *AG* « devaient mieux se représenter au départ ce qu'ils voulaient réaliser ». Nous retrouvons ici un indicateur du concept de « milieu » au sens où celui-ci impose un comportement à l'utilisateur. Il lui résiste et cette résistance est porteuse d'apprentissage.

Tout au long de la recherche, les enseignants ont aussi observé que les élèves utilisant *AG* anticipativement réussissaient mieux que les autres les séquences d'opérations demandées.

Conclusion

Apprenti Géomètre est un logiciel de géométrie dynamique qui permet de diviser, de découper, de fusionner, de dupliquer de nombreuses figures. Plusieurs d'entre elles sont prédéfinies, d'autres pas. L'utilisateur peut également appliquer des mouvements à ces figures et modifier les figures libres.

Ces champs permettent d'approcher la mesure, les fractions et les grandeurs sans les unités conventionnelles. De cette façon, les élèves réfléchissent en terme de mesure et pas seulement en terme de nombre avec une unité conventionnelle.

En utilisant *AG*, les élèves doivent réfléchir à ce qu'ils veulent obtenir et ils doivent transformer cela en diverses actions mathématiques qu'ils doivent nommer. Ces techniques mathématiques, ainsi que l'analyse a priori, aident les élèves à comprendre et apprendre les notions mathématiques.

Nous sommes conscients qu'il est nécessaire de manipuler. *AG* est un outil supplémentaire qui doit être utilisé avec ceux déjà présents en classe. Bien sûr, nous sommes également conscients que ce n'est pas facile pour les enseignants.

Nous aimerions terminer cette communication avec une citation (dont un très court extrait se trouve déjà ci-dessus) d'un enseignant de primaire avec qui nous avons travaillé pendant six mois :

« Ce qui est pratique avec l'informatique, c'est que les enfants devaient mieux se représenter au départ ce qu'ils voulaient réaliser parce que sinon ils étaient piégés. A la limite, quand ils peuvent disposer de matériel qu'ils peuvent manipuler, ils vont chipoter. Tandis qu'avec l'ordinateur, ils ont tout intérêt s'ils veulent être efficaces rapidement à imaginer là où ils veulent aller ! ... bien se représenter et réfléchir avant d'agir. Ils pourraient chipoter aussi avec l'informatique mais en règle générale ils ne le font pas, car ils se rendent compte qu'ils sont vite piégés ! »

Bibliographie

Assude, T. & Gelis, J.-M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*. (Vol. 50/3, pp.259-287). Dordrecht, Nederland : Springer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. (2003). *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures*. Nivelles, Belgique : CREM.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (Vol. 10, pp. 5-53). Strasbourg, France : IREM de Strasbourg.

Gamlick, Th. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. (Vol. 33(3), pp. 82-92).

Noël, G. [dir.] (2007). Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages. Nivelles, Belgique : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques ?* (pp. 203-213). Caen, France : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Rouche, N. & Skilbecq, Ph. (2006). *Apprenti Géomètre : pourquoi un nouveau logiciel ?* Nivelles, Belgique : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Threlfall, J., Pool, P. & Homer, M. (2007). Implicit aspects of paper and pencil mathematics assessment that come to light through the use of the computer. *Educational Studies in Mathematics*. (Vol. 66, p. 3). Dordrecht, Nederland : Springer.