

L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS BASE SUR LA LOI DE LA CORRESPONDANCE MORPHIQUE DE DEUX SYSTEMES STRUCTURÉS, DANS LA FORMATION DES CONNAISSANCES.

Dans l'acquisition des connaissances, l'élève doit toujours s'appuyer sur des actions directement expérimentables, (structure A), afin d'aller vers la nouvelle structure (B), à apprendre. Cette nouvelle structure (B), prendra toute sa signification, d'une part, quand l'élève anticipera un résultat long à obtenir par les anciennes méthodes, (dans la structure A) et d'autre part, quand il utilisera cette correspondance entre (A) et (B), afin de résoudre d'autres problèmes de la même structure (A). C'est-à-dire qu'un morphisme entre (A) et (B) est construit progressivement.

Un morphisme est une correspondance entre deux structures A et B, telle que toute opération réalisée entre deux éléments quelconques d'une structure correspond parfaitement à l'opération réalisée entre les éléments correspondants dans l'autre structure. On dit aussi que l'image du résultat d'une opération dans la structure A est le résultat de l'opération entre les images dans la structure correspondante B.

RUBEN RODRIGUEZ HERRERA
IUFM de Basse-Normandie
IREM de Basse-Normandie
France

1 Introduction

1.1 La loi de correspondance morphique dans la structuration d'une nouvelle connaissance.

Quand nous avons abordé au milieu des années 70, la didactique des mathématiques, nous avons établi un principe général des lois de l'apprentissage. Il s'agit d'un principe qui permet de modéliser le phénomène naturel qui se produit quand on met en correspondance deux ou plusieurs structures de connaissance.

Par exemple, quand un enfant tout petit marche vers un objet, celui-ci occupera de plus en plus le champ visuel. Simultanément, si l'objet émet un son, celui-ci deviendra de plus en plus fort. L'odeur de l'objet sera de plus en plus perceptible. S'il est chaud, l'enfant ressentira de plus en plus cette chaleur en s'approchant et bien d'autres informations évolueront au fur et à mesure que l'objet devient proche. C'est notre biologie qui organise les informations reçues par les divers canaux afin de les structurer et de permettre des anticipations. Un exemple important est la structure de transitivité de la relation d'ordre. L'enfant organise le réel avec des relations du type : plus grand, plus lourd, plus chaud, plus loin.

Si un enfant constate qu'un objet est plus long qu'un deuxième et celui-ci plus long qu'un troisième, il est capable de les ordonner et anticiper la relation entre les longueurs du premier et du troisième.

Il s'agit, dans cette activité de la coordination générale biologique de l'être humain, qui a pour but de construire une structuration de plus en plus complexe des informations. De véritables opérations se produisent, par exemple deux objets inaccessibles de même nature qui se trouvent proches dans une image visuelle, comme par exemple, deux arbres ayant la même taille dans cette perception visuelle de l'image, seront assimilés à deux objets proches et de même taille dans la réalité. La voix de la maman perçue avec une faible intensité sera interprétée comme une information indiquant un éloignement dans l'espace. On peut trouver d'innombrables exemples qui témoignent de cette organisation des informations dans des structures stables de connaissance.

Un autre aspect fondamental dans la structuration du réel est celui de la fonction de représentation. Quand l'enfant se trouve pour la première fois confronté à la résolution d'un problème, il agira pour structurer les informations afin de trouver une solution. S'il réussit à le résoudre, alors, quand il se trouvera face à un problème perçu comme étant morphique, les objets du premier problème, agiront comme signifiants porteurs d'une analogie pour guider les opérations nécessaires à la résolution du deuxième problème. C'est ainsi en résolvant des problèmes morphiques, qu'un système de représentation générale, devient nécessaire et naturel. Quand l'individu maîtrise le système représentatif des problèmes morphiques, il devient capable de travailler à l'intérieur du système, et même, le système peut devenir objet d'étude.

Dans la formation des connaissances il y a un impératif incontournable: l'individu a la nécessité d'établir des progressions dans les degrés de signification d'une notion. On ne peut pas trouver la vraie signification d'un système de représentation des problèmes morphiques, si ces problèmes n'ont pas été vécus auparavant, et si la nécessité de construire ce système ne s'est pas ressenti.

Dans l'enseignement des mathématiques il est important de tenir compte de ces principes si l'on veut que les élèves s'approprient des problèmes et qu'ils construisent leurs connaissances. Pour cela il faut veiller à proposer des activités qui partent de leurs actions directement expérimentables, (c'est à dire qu'il s'agit des actions automatisées qui ne demandent pas de réflexion nouvelle) et qui permettent une entrée rapide sur des questions qui vont susciter une structuration nouvelle. Plus tard, on proposera d'autres problèmes morphiques se prêtant moins à une modélisation immédiate mais, qui seront assimilés plus facilement si les élèves ont bien intégré l'étape précédente.

Dans le prochain paragraphe, nous allons développer une progression sur l'enseignement des fractions qui tient compte des principes énoncés et qui a fait ses preuves avec des élèves de l'école primaire ainsi que des élèves de collège.

2 Activité sur une correspondance morphique simple

Nous avons dit que dans l'apprentissage d'une notion, il faut ordonner les activités où celle-ci est présente, par un ordre qui tient compte de la difficulté à modéliser et représenter morphiquement les actions réalisées.

Pour réaliser un ordre, il faut absolument tenir compte des systèmes structurés, déjà acquis par les élèves, qui vont constituer le potentiel permettant un démarrage rapide de l'activité.

Dans les innombrables activités où les fractions constituent la structure qui modélise le problème, nous en avons trouvé une qui présente l'avantage de permettre aux élèves du cycle III de l'école primaire de réaliser facilement des actions directement expérimentables et de modéliser rapidement ces actions.

2.1 Les fractions, une structuration simple sur la comparaison des longueurs

Matériel: bandes de papier découpées le long de feuilles A4, (« papier cartonné 120gr »), de différentes couleurs, blanc, rouge, jaune, vert,... ayant une largeur de 2,5cm et comme longueur, celle de la feuille A4, (29,750 cm)

Première séance

a) première phase

On découpe avec les élèves des bandes de couleur blanche de 12cm de longueur, dans les bandes fournies par l'enseignant. Pour cela ils investissent des connaissances géométriques: par exemple mesurer les 12cm sur chaque bord en partant de la gauche, tracer un trait sur chaque bord, ensuite un segment dont on vérifie à l'équerre qu'il est perpendiculaire aux bords de la bande. Il est important que chaque élève fabrique une dizaine de bandes blanches superposables.

b) deuxième phase

On donne aux élèves des bandes de couleur bleue avec la commande de fabriquer des bandes superposables entre elles et telles que deux bandes bleues juxtaposées dans le sens de la longueur forment une surface superposable à une bande blanche.

C'est à ce moment que l'enseignant schématise au tableau, la bande blanche toujours en haut. Il est important que les figures soient très précises et sans perte de temps. C'est ainsi que l'enseignant préparera à l'avance des bandes agrandies, (par exemple les « blanches » de 5cm par 36cm) ; et il les fixera au tableau en prenant soin de bien les aligner.

Le schéma a pour l'instant une valeur géométrique, aucun symbole numérique est écrit.



Pour fabriquer les bandes bleues, deux stratégies sont étudiées. Une qui consiste ,dans un premier temps , à découper une bande bleue superposable à une bande blanche ; ensuite la plier en deux parties de même longueur ,la couper et finalement vérifier qu'elles sont superposables entre elles et que juxtaposées, elles donnent une bande ayant la même longueur qu'une bande blanche. Une autre stratégie consiste à mesurer 6cm à partir de la gauche

et faire une procédure analogue à celle de la fabrication des bandes blanches.

Les élèves construisent ainsi, une dizaine de bandes bleues.

Ensuite on fait verbaliser les élèves pour qu'ils expliquent leurs constructions. Ceci est fait pour constater que les élèves effectuent bien un morphisme, entre les actions réalisées et les expressions utilisées. Par exemple si un élève dit qu'il a coupé en deux parties, on le fera réfléchir sur le fait qu'il a coupé en deux parties de même longueur ou superposables. C'est à ce moment qu'on introduit un système symbolique qui résume les actions réalisées.

Comme, pour 1 bande blanche il faut 2 bandes bleues, on écrira sur les bandes blanches 1 et sur les bandes bleues $\frac{1}{2}$.

1

1 « blanche » pour 2 « bleues »

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
---------------	---------------

On dit aussi qu'une bande bleue a pour longueur la moitié de celle d'une bande blanche. Mais aussi que deux bandes bleues réunies ont la même longueur que celle d'une bande blanche. Quand un élève dit "deux bleues c'est pareil qu'une blanche" on le fait préciser pour qu'il explicite bien le sens de sa phrase. Le but est de le faire travailler [le morphisme entre l'opération réalisée avec les bandes et l'opération respective dans la langue française](#).

c) troisième phase

On donne des bandes de couleur rouge et on demande à une partie des élèves de construire des bandes "rouges" superposables entre elles et telles que quatre bandes rouges juxtaposées dans le sens de la longueur donnent une longueur totale égale à la longueur d'une bande blanche. On demande aux autres élèves de construire des bandes de couleur rouge superposables entre elles et telles que deux "rouges" juxtaposées aient la même longueur que celle d'une bande "bleue".

Cette activité fait réinvestir les procédures précédentes pour les élèves qui travaillent avec les "bleues" et les "rouges", (pliage en deux parties superposables). Les autres élèves procèdent soit par moitié de la moitié d'une "blanche", soit par deux pliages successifs ou encore par deux divisions successives $12:2=6$ suivie de $6:2=3$ ou d'une division $12:4=3$

On constate que les deux groupes arrivent à des bandes "rouges" superposables.

On écrit sur les "rouges" le symbole qui indique que quatre bandes "rouges" juxtaposées ont la même longueur qu'une bande "blanche".

Dans cette partie on donne d'abord la parole aux élèves, (principe fondamental dans notre proposition didactique). C'est ainsi que certains élèves proposent comme symbole $4/1$ et d'autres $1/4$. Ceci permet de travailler sur la nécessité de cohérence de tout système symbolique mathématique. On avait écrit $1/2$ et alors, pour garder la même signification on écrira $1/4$. Ceci renforce le fait que le nombre 1 en haut de la barre / veut dire une bande « blanche » et celui d'en bas le nombre de bandes de l'autre couleur.

On dira aussi que chaque "rouge" a pour longueur "un quart" de la longueur d'une "blanche".

Remarque : le fait que les élèves utilisent le symbole $1/4$ pour rendre compte de la relation entre les "blanches" et les "rouges" montre que le système symbolique commence à devenir un système de signifiants qui sert à rendre compte de la structure fractionnaire des "bandes".

1



On fait verbaliser les élèves pour obtenir des affirmations qui soient en correspondance morphique avec la structure mise en place.

"La "rouge" est de longueur moitié de la "bleue"

"La rouge est de longueur "un quart" de la longueur d'une "blanche"

"La "bleue" est de longueur "une moitié" de la longueur d'une "blanche"

Et une affirmation qui se produit au même niveau d'abstraction que le système symbolique:

"La moitié d'une moitié d'une longueur est égale au quart de cette longueur"

Cette dernière affirmation est réinvestie au niveau du système symbolique

On donne des longueurs "abstraites», par exemple 12cm; 24cm; 20cm; 8cm; 36cm et on demande de calculer directement $1/4$, de calculer $1/2$ de $1/2$ et de présenter les calculs dans un tableau.

Longueur donnée	$1/4$ de la longueur	$1/2$ de $1/2$ de la longueur
12cm $6\text{cm}:2 = 3\text{cm}$	$12\text{cm}:4 = 3\text{cm}$	$(12\text{cm}:2):2 =$
24cm $12\text{cm}:2 = 6\text{cm}$	$24\text{cm}:4 = 6\text{cm}$	$(24\text{cm}:2):2 =$
20cm $10\text{cm}:2 = 5\text{cm}$	$20\text{cm}:4 = 5\text{cm}$	$(20\text{cm}:2):2 =$
8cm $4\text{cm}:2 = 2\text{cm}$	$8\text{cm}:4 = 2\text{cm}$	$(8\text{cm}:2):2 =$
36cm $18\text{cm}:2 = 9\text{cm}$	$36\text{cm}:4 = 9\text{cm}$	$(36\text{cm}:2):2 =$

Remarque : nous avons choisi des valeurs entières et multiples de 4 afin de rester chez les nombres entiers. On ne veut pas encore, traiter des calculs qui nécessitent des décimaux non entiers. Par contre, on convie les élèves à travailler sur la généralité de cette structure, par exemple on montre une tige en bois, (non pliable!) et, on demande aux élèves d'expliquer une procédure pour fabriquer une tige mesurant en longueur $1/4$ de celle de la tige donnée.

On a placé volontairement les élèves sur le système des signifiants pour qu'ils l'utilisent comme un anticipateur des "actions directement expérimentables".

Deuxième séance

a) première phase

Avec des bandes de couleur jaune on leur propose de réaliser de bandes sur lesquelles on puisse écrire $1/3$ par rapport à la "blanche". [On est dans l'activité réciproque de celle de la première phase de la première séance.](#) C'est ainsi qu'on demande aux élèves d'expliquer la consigne afin de s'assurer que le système symbolique fonctionne bien comme un signifiant.

Les élèves expliquent qu'il s'agit d'obtenir de bandes "jaunes" ayant la même longueur entre elles et telles que trois "jaunes" juxtaposées aient la même longueur qu'une "blanche".

On analyse avec les élèves la difficulté de réaliser la tâche par pliage et on conclut que le plus convenable est de diviser 12cm par 3. C'est ainsi qu'on fabrique des bandes de longueur 4cm . Ici, ils renforcent la relation fraction et l'opération de division, car c'est la division qui permet d'anticiper et de résoudre cette question. C'est fondamental que les élèves construisent leurs bandes, car les problèmes de construction amènent nos élèves à réaliser des procédés utilisant des calculs. En plus ils sont sûrs que les trois bandes sont identiques par construction. On écrit sur chacune d'elles $\frac{1}{3}$.

1

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
---------------	---------------	---------------

Remarque : ici on a encore anticipé le résultat des actions directement expérimentables, (les pliages), par un calcul dans le système symbolique.

Il devient de plus en plus "concret", c'est à dire de plus en plus en fonctionnement autonome, comme un objet en soi.

b) deuxième phase

On se dirige vers des activités posées dans le système symbolique et résolues à travers le morphisme, dans le système des actions directement expérimentables.

On s'intéresse à des questions comme la relation d'ordre entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$.

Pour répondre on utilise le morphisme avec les bandes "bleues", "rouges", "jaunes".

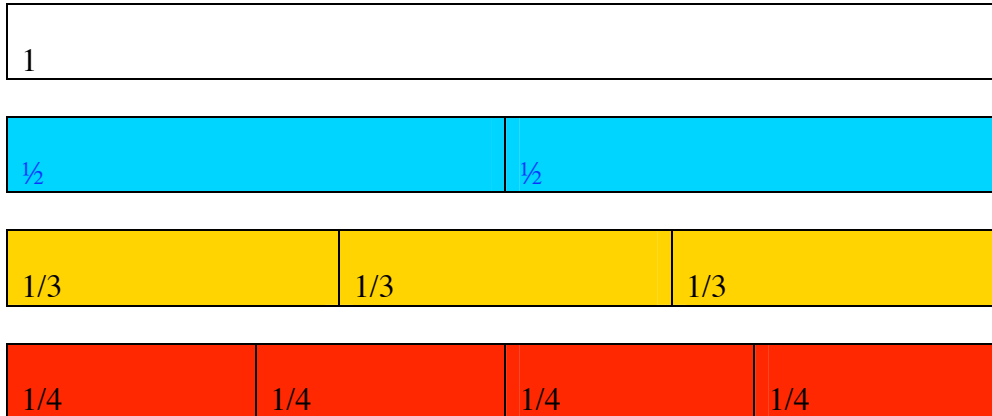
Les élèves constatent que la bande $\frac{1}{2}$ est de plus grande longueur que la bande $\frac{1}{3}$ et celle-ci de plus grande longueur que la bande $\frac{1}{4}$

On verbalise avant de passer au système symbolique sur cette relation constatée expérimentalement. Le but est de travailler sur des explications morphiques. Par exemple, si deux "bleues" ont la même longueur qu'une "blanche" et trois rouges ont la même longueur qu'une blanche alors une "bleue" est plus longue qu'une

"rouge"; ou bien si on partage une "blanche" en trois parties égales on obtient une partie de plus petite longueur que si l'on partage la « blanche » en deux parties égales.

On écrit alors que

$1/3 < 1/2$, que $1/4 < 1/3$ et que $1/4 < 1/2$



c) troisième phase

On continue de travailler sur le morphisme entre le système symbolique et celui des actions avec les bandes afin d'arriver à des égalités du type :

$$1/2 + 1/2 = 1$$

$$1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$$

$$1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1$$

Aussi :

$$1/4 + 1/4 = 1/2$$

Toutes ces égalités sont validées avec les bandes et le morphisme.

On profite à ce moment de l'apprentissage de la richesse du système symbolique, qui devient de plus en plus autonome, pour étudier $1/5$ sans construire des bandes respectives. Cette étape est importante dans la mesure où les élèves donneront des explications sans passer par des actions directes.

On pose la question : $1/5$ sera-t-elle plus petite que $1/4, 1/3, 1/2$?

Et la question : combien des bandes $1/5$ auront la même longueur qu'une bande "blanche"?

On étudie de même les questions analogues pour $1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10$

Ce travail sert à la fois de support d'évaluation afin de constater que les élèves à ce stade , expliquent de plus en plus à l'intérieur du système symbolique.

Remarque : on voit à travers cette progression de l'apprentissage des fractions, la relation dialectique entre un "système des actions directement expérimentables" et un système de représentation symbolique. Au départ le système symbolique est très proche des actions et peu à peu il devient une structure autonome. C'est ainsi qu'on propose des activités à réaliser exclusivement dans le système symbolique, par exemple :

Soient $1/10$ et $1/20$, écrire à l'aide du symbole $<$ la plus petite à gauche et la plus grande à droite. Ou bien : soit $1/10 < 1/$, écrire un nombre qui va bien dans la place vide.

Dans ce dernier exemple il est important de trouver plusieurs solutions.

On peut aussi les ordonner de la plus petite à la plus grande.

3 Activité sur une deuxième structure morphique

3.1 Une structure avec des disques

Matériel: disques en papier cartonné (120gr), de 6cm de rayon tous en couleur blanche, (une douzaine par élève); les disques sont fournis par l'enseignant.

Commentaire sur les décimaux: dans la suite des activités de notre progression, nous n'avons pas continué sur la construction de bandes pour fabriquer des bandes $1/5$ afin d'éviter de poser la division $12 : 5$ qui nous conduirait à des problèmes relatifs aux nombres décimaux ou bien à des changements d'unité, $12\text{cm} = 120\text{ mm}$ pour effectuer $120\text{mm} : 5 = 24\text{mm}$ Par contre ce calcul sera très utile comme un des moyens de valider la structure des nombres décimaux à travers des morphismes avec la structure des fractions. Une fois que les fractions et ses propriétés sont bien maîtrisées, par un autre morphisme ils trouveront, en partant des connaissances sur les fractions, que $12 \times 1/5 = 12/5$, que ceci correspond au décimal $12 : 5 = 2,4$ et d'autre part que ceci correspond avec les décimaux à $12 \times 0,2 = 2,4$. Dans au autre article nous vous présenteront notre progression sur les décimaux à partir du morphisme avec le système symbolique des fractions. Les décimaux seront ainsi vus à travers le

morphisme entre un système symbolique, (les fractions) et un autre système symbolique, (les décimaux), plus pratique pour les calculs.

Exemples de schématisation symbolique du morphisme entre les fractions et les décimaux qui est notre choix didactique pour valider avec nos élèves les nombres décimaux

$1/2$	+	$1/4$	=	$3/4$
↓ Division $1 : 2 = 0,5$ ↓		↓ Division $1 : 4 = 0,25$ ↓		↓ Division $3 : 4 = 0,75$ ↓
0,5	+	0,25	=	0,75

$1/2$	-	$1/4$	=	$1/4$
↓ Division $1 : 2 = 0,5$ ↓		↓ Division $1 : 4 = 0,25$ ↓		↓ Division $1 : 4 = 0,25$ ↓
0,5	-	0,25	=	0,25

$1/2$	x	$1/4$	=	$1/8$
↓ Division $1 : 2 = 0,5$ ↓		↓ Division $1 : 4 = 0,25$ ↓		↓ Division $1 : 8 = 0,125$ ↓
0,5	x	0,25	=	0,125

$1/2$:	$1/4$	=	2
↓ Division $1 : 2 = 0,5$ ↓		↓ Division $1 : 4 = 0,25$ ↓		↓ le décimal est 2
0,5	:	0,25	=	2

Dans cette troisième séance on utilise un autre morphisme de la même structure des fractions avec une autre structure différente de celle des bandes.

La vertu de commencer par l'activité avec des bandes réside dans la simplicité à la modéliser symboliquement. Cette simplicité ne se trouve pas immédiatement dans d'autres situations qui sont en morphisme avec la structure des fractions, comme celle des disques.

Le choix didactique est de trouver une autre situation un peu moins simple mais, qui soit rapidement assimilable, par morphisme, à la structure des fractions établie précédemment. Nous avons proposé une activité avec des disques superposables.

Première séance

a) première phase

On propose de réaliser par pliage et découpage deux parties superposables entre elles et telles que juxtaposées forment une surface superposable à un disque.

Ceci est un pliage facile à réaliser. On obtient ainsi deux demi-disques. On convient d'écrire 1 sur le disque et on demande aux élèves quelle sera la fraction à écrire sur chaque demi-disque.

On écrit alors $\frac{1}{2}$ sur chaque demi-disque avec une orientation de l'écriture vers le centre du disque et en recto verso, ceci afin d'obtenir deux demi-disques parfaitement "identiques".

Les élèves investissent la structure précédente des fractions car, ils reconnaissent bien un morphisme.

b) deuxième phase

On demande de plier le disque pour obtenir des parties sur lesquelles on puisse écrire $\frac{1}{4}$

Les élèves réalisent le pliage en deux et ensuite en deux et ils écrivent après le découpage le symbole $\frac{1}{4}$ encore bien orienté vers le centre du disque et en recto verso.

On profite pour vérifier que le quart de disque est la moitié du demi disque.

c) troisième phase

On propose de découper en trois parties superposables entre elles et telles que juxtaposées forment un disque

Ici on suppose que nos élèves ont appris qu'un angle droit mesure 90° , qu'un angle plat mesure 180° , qu'un tour complet correspondant à 4 angles droits, mesure 360° , qu'un angle d'un triangle équilatéral mesure 60° et qu'il y a deux types d'équerre, l'une « la moitié d'un carré », avec des angles aigus de 45° et un autre type, « la moitié d'un triangle équilatéral » avec des angles aigus de 60° .

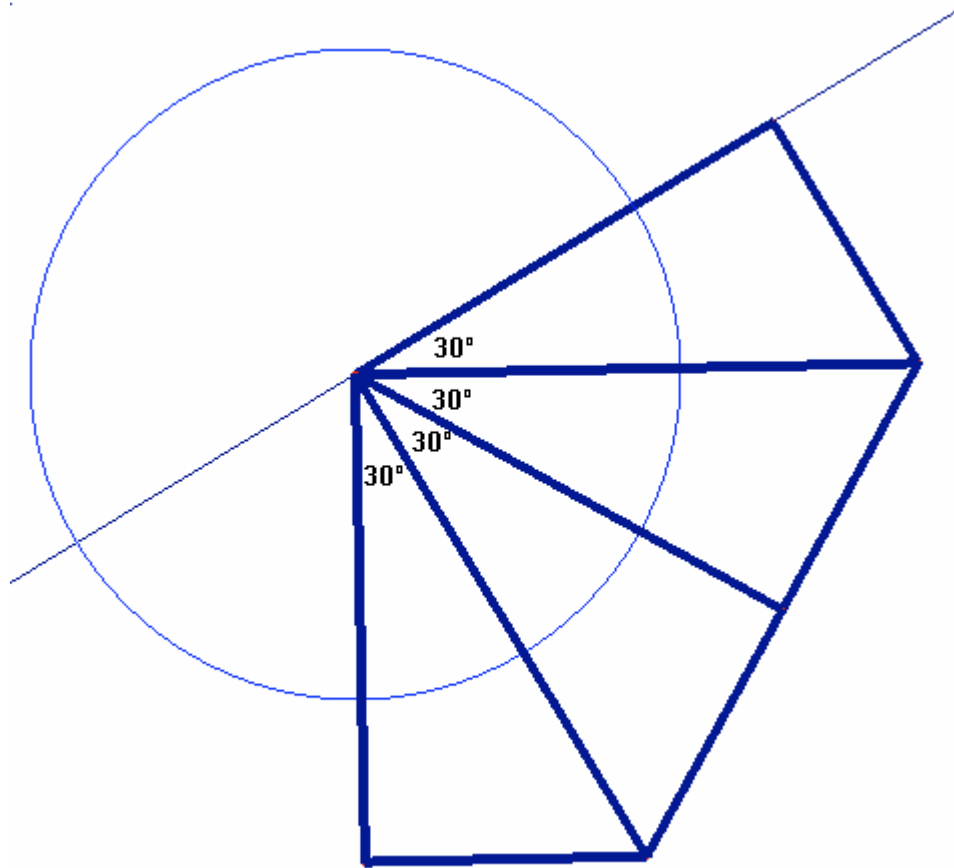
.

Trois possibilités didactiques s'offrent à l'enseignant.

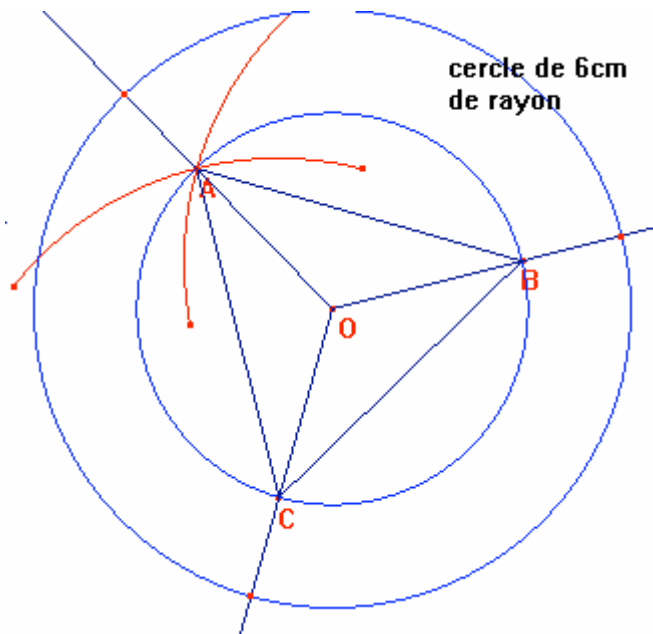
1) Utiliser les quarts de disque et aussi la connaissance des angles de l'équerre du type 90° ; 30° ; 60° Par le calcul de $360^\circ : 3 = 120^\circ$ on voit qu'il faut construire un angle de mesure 120° au centre d'un disque, (à partir de

la somme de quatre angles, par exemple $30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ$ ou bien $30^\circ + 90^\circ$ à l'aide de l'équerre). On voit qu'il est important de connaître la mesure en degrés de certains angles remarquables ,dès l'école primaire. Cette possibilité est bien active pour les élèves , de même que celles que nous vous présentons par la suite.

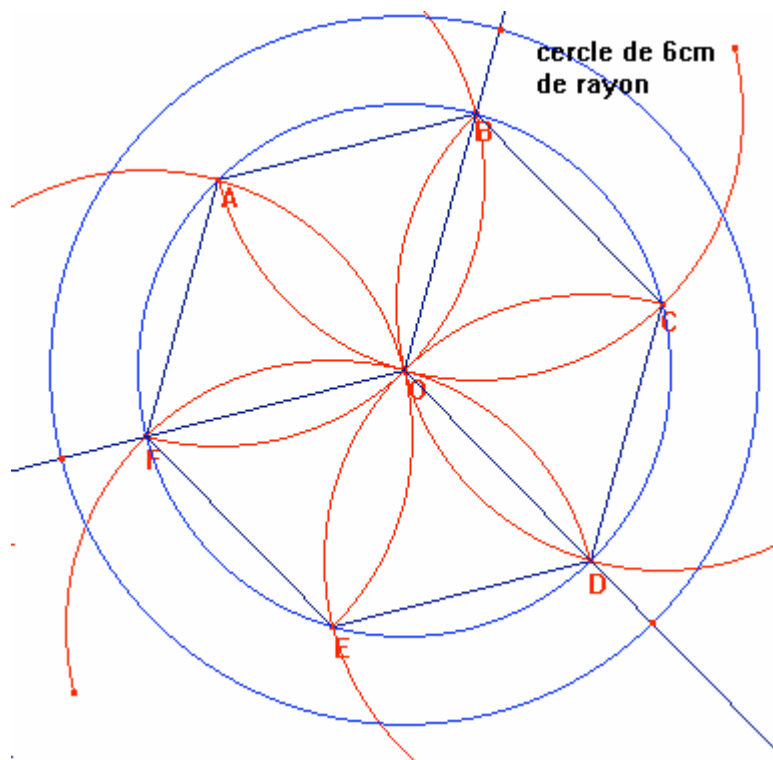
Avec l'équerre utilisée quatre fois comme gabarit d'un angle de 30° pour obtenir un angle de 120°



2) Il s'agit de construire un triangle équilatéral ABC à la règle et au compas, son cercle circonscrit et les trois rayons et par la suite tracer un cercle de même centre et de rayon 6cm. Ensuite on utilise ce disque comme gabarit pour construire les trois secteurs $1/3$ sur un autre disque superposable.



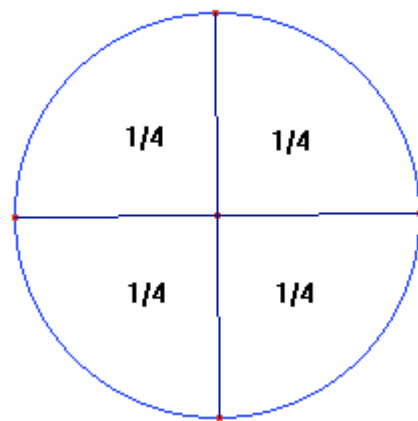
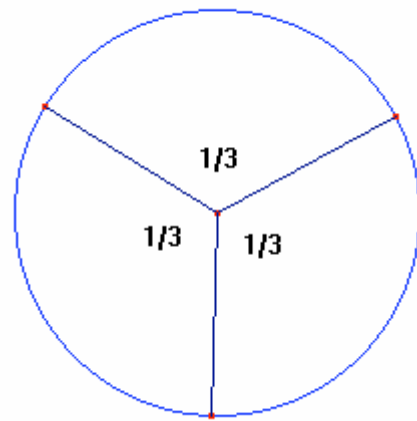
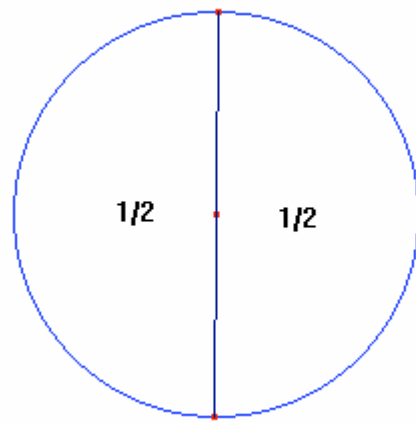
3) On utilise la rosace à six branches et l'hexagone régulier. On construit une rosace, un hexagone régulier, (pour profiter à fixer l'image mentale de la rosace et l'hexagone régulier), le cercle concentrique de 6cm de rayon et finalement les trois secteurs $1/3$



Commentaire : dans cette troisième séance on va de la signification du système symbolique vers les opérations respectives dans la structure fractionnaire des disques et secteurs.

On constate que le morphisme fonctionne bien et qu'on peut vérifier des relations "connues". Par exemple: $1/2 > 1/3$; $1/3 > 1/4$

On retrouve aussi que $1/4 + 1/2$ c'est pareil que $1/4 + 1/4 + 1/4$



4 Activité sur l'addition et vers un travail plus à l'intérieur de la structure symbolique des fractions

4.1 Vers des opérations d'addition des fractions

Première séance

a) première phase

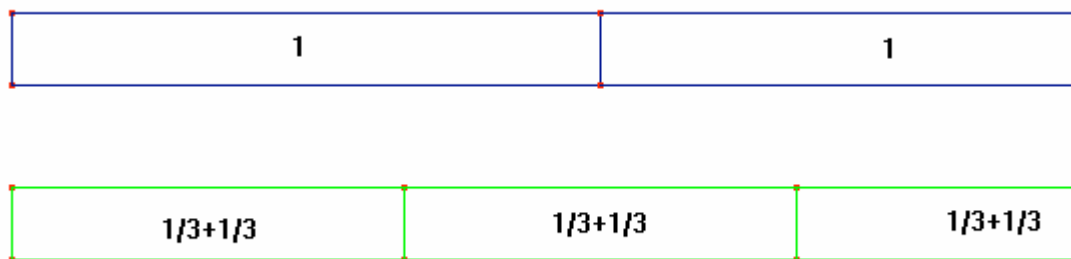
Cas d'addition $1/3 + 1/3$

Dans ce cas les élèves construisent des bandes respectives à $1/3+1/3$ par juxtaposition dans une autre couleur, par exemple vert clair.

Ensuite ils le retournent et cherchent à voir combien de ces bandes « vert clair », correspondent, (par juxtaposition et superposition), à combien des bandes blanches unités. Ils trouvent par manipulation que 2 « blanches » c'est pareil que 3 « vert claire » et alors tout naturellement les élèves écrivent $2/3$ C'est ainsi que d'un côté, ils ont trouvé et écrit $1/3+1/3$ et de l'autre $2/3$; la conclusion est que

$$1/3+1/3 = 2/3$$

Deux bandes « blanches »



Trois bandes « vert

clair »

Commentaire : ici nous avons un fait important en didactique :

Si on dit en français que « un tiers plus un tiers est égal à deux tiers », les élèves comprennent ceci au même titre qu'ils ont compris que « une pomme plus une pomme est égal à deux pommes ». On utilise ici le fait que « un objet plus un objet de la même catégorie est égal à deux objets de cette même catégorie » Mais, si l'enseignant croit qu'il peut écrire ensuite au tableau que : $1/3 + 1/3 = 2/3$ il fait inconsciemment une « rupture du

contrat didactique » dans son enseignement des fractions. En effet, si on veut donner du sens à chaque symbole fractionnaire de la forme a/b , il faut absolument que $2/3$ prenne le sens convenu au départ dans la manipulation avec les bandes C'est alors que les élèves trouvent que deux bandes « blanches » (unités), sont superposables avec trois bandes « vert clair ». Tant que les élèves n'ont pas effectué la manipulation on ne peut pas écrire au niveau des symboles que $1/3 + 1/3 = 2/3$

Quand dans l'enseignement des mathématiques, à propos du sens donné au départ à un symbole nouveau, on fait un raccourci, sans que les élèves puissent le valider on dit qu'il y a un phénomène de rupture du « contrat didactique ». Implicitement et inconsciemment l'enseignant installe un autre « contrat didactique », on « apprend » que $1/3 + 1/3$ s'écrit $2/3$ seulement par une règle apprise formellement sans que ceci corresponde aux manipulations qui donnaient du sens au symbole fractionnaire.

Il est aussi bon de réfléchir ici, (au niveau symbolique), sur le fait que $1/3+1/3$ c'est deux fois $1/3$. C'est-à-dire que $2 \times 1/3 = 2/3$. On profite aussi pour calculer la longueur de la bande $2/3$ Les élèves ont plusieurs moyens de calcul.

Soit : comme $1/3$ mesure $12\text{cm} : 3 = 4\text{cm}$, alors $2/3=1/3+1/3$ mesure $4\text{cm} + 4\text{cm} = 8\text{cm}$

Soit : comme deux bandes « blanches » mesurent $12\text{cm} + 12\text{cm} = 24\text{cm}$ et que ceci est pareil que 3 bandes $2/3$, alors la bande $2/3$ mesure $24\text{cm} : 3 = 8\text{cm}$

On fait un autre exemple de manière similaire avec $1/4+1/4+1/4 = 3/4$

On part du fait que les élèves ont bien intégré que $1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$

A l'aide des bandes on fabrique des bandes nouvelles, (dans d'autres couleurs).

$5/4$ comme $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$ ou bien comme $1 + 1/4$ en couleur orange

On passe alors à un travail exclusivement dans le système symbolique pour réaliser

$$1/5 + 1/5$$

$$1/5 + 1/5 + 1/5$$

$$1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$$

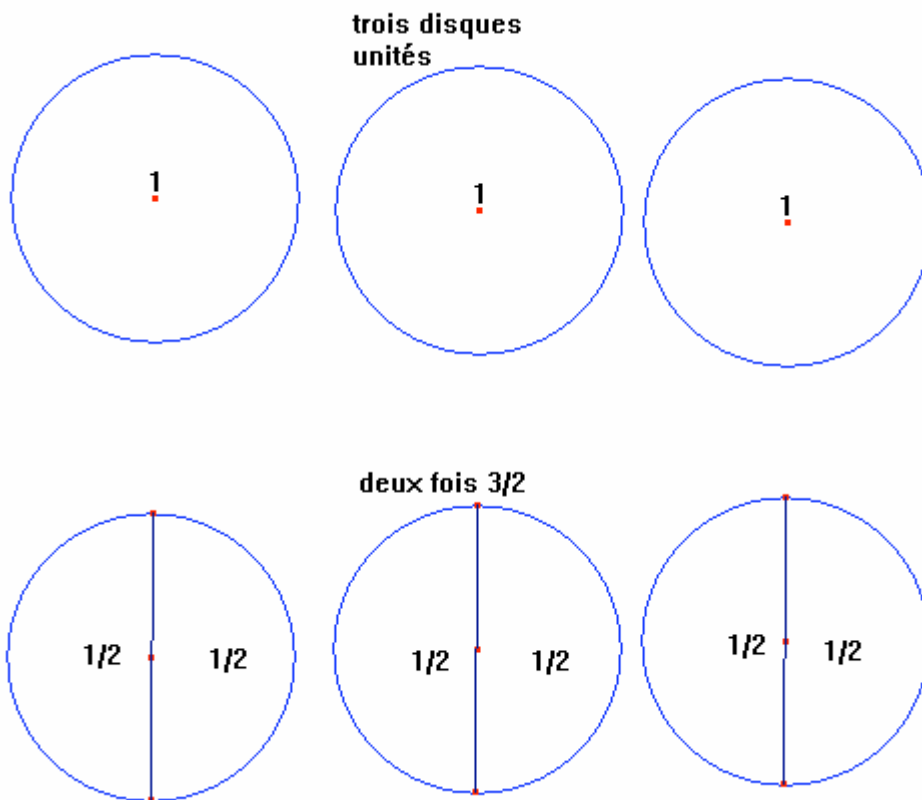
Et bien d'autres additions de termes de même dénominateur.

Remarque : bien que les élèves travaillent à l'intérieur du système symbolique ils ont suffisamment d'images mentales avec des bandes ou des disques pour valider des égalités comme par exemple : $1/2 + 1/2 = 1$; $1/3$

+ $1/3 + 1/3 = 1$; $1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1$, mais il est trop tôt pour écrire à la place de 1 la fraction $1/1$

Commentaire : nous avons réfléchi à des fractions supérieures à 1 dans la structure des bandes. Pour réfléchir à ce stade de l'apprentissage sur ce même problème dans la structure des disques, on n'a pas la même facilité. En effet avec des bandes on obtient toujours des bandes de même largeur, mais avec les disques et les secteurs on n'obtient plus des disques pour les fractions supérieures à l'unité. Une fraction comme $5/4$ ne donne plus un disque et le morphisme ne se situe plus entre les actions directement expérimentables et la structure symbolique, mais dans un niveau où le système symbolique va permettre de construire un autre système de représentation avec des disques. Ceci peut paraître artificiel, mais le fait d'avoir bien intégré que par exemple $3/2 = 3 \times 1/2 = 1/2 + 1/2 + 1/2$ aide à comprendre les figures avec les disques et les secteurs.

Arriver à comprendre que par exemple $3/2$ est représentée par l'image d'un disque et un demi disque est une activité où on se sert de la structure des fractions pour donner du sens à l'image géométrique qui sera formée par trois fois $1/2$ disque



b) deuxième phase, (vers un travail plus à l'intérieur de la structure symbolique des fractions).

On pose le problème suivant :

Combien de bandes $\frac{3}{4}$ et de bandes $\frac{1}{2}$ pour obtenir des longueurs égales ?

Les élèves constatent que $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ c'est pareil que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Et comme on sait écrire que $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ et que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ les élèves écrivent que $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Ils verbalisent en disant que 2 fois $\frac{3}{4}$ c'est égal à 3 fois $\frac{1}{2}$

On cherche par la suite d'autres égalités construites de cette façon.

Par exemple 3 fois $\frac{2}{3}$ c'est pareil que 2 fois 1 et on écrit que $\frac{6}{3} = 2$

On passe alors à un travail à l'intérieur du système symbolique pour renforcer la validité des égalités trouvées

Exemples:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

c'est pareil que $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$

et comme $1/4 + 1/4 = 1/2$

on peut faire alors

$$(1/4 + 1/4) + (1/4 + 1/4) + (1/4 + 1/4)$$

c'est à dire pareil que

$$1/2 + 1/2 + 1/2$$

qui fait $3/2$

Commentaire : cette dernière partie n'exclut pas que des élèves ayant des difficultés avec les parenthèses puissent se servir des bandes pour effectuer le morphisme qui leur permet de valider les calculs symboliques. Dans ce cas, il faut les inciter à faire manipuler les bandes de façon morphique qu'avec les symboles. Par exemple les élèves remplaceront une bande $3/4$ par 3 bandes respectives $1/4 + 1/4 + 1/4$ et deux bandes respectives $1/4 + 1/4$ par une bande $1/2$.

c) troisième phase

On traite quelques problèmes un peu plus difficiles, mais toujours avec la possibilité pour tous les élèves d'avoir recours à des bandes pour s'aider à comprendre les calculs.

On pose par exemple ; combien de fois $2/3$ et combien de fois $3/4$ pour obtenir une égalité

Avec les bandes on trouve que 9 fois $2/3$ est égale à 8 fois $3/4$

Avec le système symbolique on écrit un tableau

Nombre de fois de $2/3$

$$2/3 + 2/3 + 2/3 = 6/3 = 2$$

$$12/4 = 3$$

$$(2/3 + 2/3 + 2/3) + (2/3 + 2/3 + 2/3) =$$

$$+(3/4+3/4+3/4+3/4)=$$

$$2 \quad + \quad 2 \quad = 4$$

$$= 6$$

Alors on fait

$$(2/3+2/3+2/3)+(2/3+2/3+2/3)+(2/3+2/3+2/3)$$

Pour obtenir 6 et on compte le nombre de fois de chaque partie du tableau

On arrive ainsi à montrer que 9 fois $2/3$ c'est égal à 8 fois $3/4$

On profite pour voir qu'en tout, on a $18/3$ qui est égal à 6 et d'autre part on a $24/4$ qui est aussi égal à 6

5 Activité sur une troisième correspondance morphique avec la structure des fractions

5.1 Assimilation morphique d'une structure avec des cylindres et des volumes de liquides

Cinquième séance

a) première phase

Avec des flacons identiques petits et cylindriques, (en plastique transparent), on pose la question suivante : on prend un flacon et on fait un trait bleu à une hauteur déterminée. On se pose le problème de tracer un trait rouge dans un flacon tel que le volume du liquide jusqu'au trait rouge soit la moitié du volume du liquide jusqu'au trait bleu.

Cette situation sert à réinvestir la structure de fractions sur une autre structure assimilée de façon morphique.

Les élèves trouvent que pour réaliser le morphisme, on doit se servir du morphisme réalisé avec les mesures de hauteur des traits des flacons.

C'est ainsi qu'ils proposent de diviser par 2 la mesure de la hauteur d'un trait bleu et ainsi tracer le trait rouge.

b) deuxième phase

On réfléchit à des égalités entre les flacons

2 flacons "rouges" = 1 flacon bleu

4 flacons "rouges" = 2 flacons "bleues"

6 flacons "rouges" = 3 flacons "bleues"

On complète alors un tableau

bleues	1	2	3	4	5	6	7	8
--------	---	---	---	---	---	---	---	---

rouges	2	4	6	8	10	12	14	16
--------	---	---	---	---	----	----	----	----

Le but est d'exprimer que 1 bleu pour 2 rouges correspond bien à $1/2$ de bleu pour 1 rouge et que ce phénomène peut s'écrire comme $1/2$ ou $2/4$ ou $3/6$...

Les élèves retrouvent ici que $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10 = \dots$

Remarque : on travaille ici sur une des fonctions de la structure des fractions : celle de l'équivalence, qui conduit au nombre rationnel. Elle représente une co-variation proportionnelle, qui n'est pas autre chose qu'une correspondance linéaire ou un morphisme additif, par exemple :

1 correspond avec l'image 2

2 correspond avec l'image 4

3 correspond avec l'image 6

Et $1+2=3$ vérifie que l'image de la somme $1+2$, (c'est à dire 6 qui est l'image de 3), est la somme des images, c'est à dire $2+4$.

6 Activité sur l'utilisation des correspondances morphiques avec la structure des fractions afin d'anticiper des résultats

Première séance

a) première phase

On a suffisamment travaillé sur trois structures morphiques avec la structure symbolique des fractions pour pouvoir proposer maintenant des applications variées.

Par exemple :

Soit une tige de longueur 240cm calculer la longueur d'une tige, telle que sa longueur soit $\frac{1}{4}$ de la longueur donnée

Par la suite on veut fabriquer une tige de longueur $\frac{3}{4}$ de celle donnée

Ce problème est tel que les deux étapes fixent les bases d'une procédure : pour calculer les $\frac{3}{4}$ on commence par calculer le $\frac{1}{4}$, en divisant par quatre et ensuite, on multiplie par 3.

On propose alors des exemples variés :

$\frac{2}{3}$ de 24 litres

$\frac{2}{5}$ de 20kg

$\frac{3}{10}$ de 100km

etc.

b) deuxième phase

On propose des calculs qui utilisent deux procédures

Par exemple

Combien en cm vaut $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de 36cm ?

Le but est d'arriver à montrer que la moitié d'un tiers est pareil qu'un sixième

D'autres problèmes similaires seront aussi traités

Par exemple $1/2$ de $1/2$ de 40 litres pour trouver que c'est pareil que $1/4$ de 40 litres

De même on réfléchit au fait que $1/2$ de $1/3$ c'est pareil que $1/3$ de $1/2$

Commentaire : ces activités préparent la structure des fractions pour le travail ultérieur sur des opérations comme la multiplication.

Ceci prépare aussi aux morphismes qui seront utilisés lors des apprentissages des nombres décimaux, afin de valider les calculs avec ces derniers.

Par exemple :

$$1/2 \times 1/2 = 1/4$$

$$0.5 \times 0.5 = 0.25$$

7 Conclusions

A travers l'exemple des quelques séquences d'introduction des fractions, nous avons voulu montrer la notion de correspondance morphique entre [les actions directement expérimentables et la construction d'un univers symbolique structuré morphiquement avec ces actions.](#)

Nous avons montré que peu à peu, la structure symbolique qui trouvait au départ, sa signification seulement par la correspondance morphique avec une structure particulière des actions directement expérimentables, devient une structure en soi. C'est ainsi que par la suite, les résultats peuvent être validés à l'intérieur du système symbolique.

D'autre part, quand nous avons travaillé sur plusieurs structures morphiques, représentables donc par le même système symbolique, [nous avons vu l'importance de choisir d'abord une structure qui se prête bien à la première construction symbolique.](#)

L'affirmation de Rémy Brissiaud : « la première rencontre avec un concept arithmétique est une sorte d'événement dans la vie scolaire d'un enfant et la signification qui est privilégiée ce jour-là est bien mémorisée », est bien dans l'intention de notre travail.

[Dans l'acquisition des connaissances mathématiques et aussi dans d'autres domaines, l'utilisation des correspondances morphiques est essentielle pour structurer les données et les problèmes.](#)

Notre progression didactique pour l'enseignement des fractions utilise des bandes, comme le fait ERMEL. Une différence est que dès le départ, les élèves construisent eux mêmes les bandes.

Quand un élève construit deux bandes $1/2$ par pliage où par une division de 12cm par 2, il sait que dans la réalisation, il peut y avoir une « petite différence », mais qu'elles sont « identiques par construction ». Si on lui donne des bandes déjà fabriquées à l'avance ils peuvent seulement

percevoir qu'elles sont « à peu près pareilles ». En effet, c'est l'action directe du pliage que valide la signification, (il y a anticipation mentale sur le résultat qui ne sera jamais parfait).

Une autre différence est que l'écriture symbolique des fractions deux tiers, trois quarts se fait dans la même signification symbolique établie dès le départ.

Par rapport à la formation des enseignants, nous relevons les points suivants à signaler avec les formés :

-**Variable didactique**, par exemple le choix de 12cm, car 12 a plus de diviseurs que 10, et alors les élèves peuvent penser le « sens division » dans les fractions $1/2$; $1/4$; $1/3$; $1/6$ plus facilement.

-**Ordre dans la progression didactique de la signification de la notion de fraction** : les bandes d'abord, après les disques et secteurs angulaires

-**Rupture inconsciente de contrat didactique**, quand l'enseignant se presse d'écrire $1/3 + 1/3 = 2/3$ parce qu'il a entendu que ses élèves disent oralement : « un tiers plus un tiers ça fait deux tiers ». L'enseignant, quand il entend ceci, pense à l'égalité symbolique $1/3+1/3=2/3$, mais les élèves pensent tout simplement « un objet plus objet ça fait deux objets ». Il faut alors que l'enseignant n'oublie pas que $2/3$ à ce stade de la progression veut dire tout simplement que 2 bandes « blanches » juxtaposées sont superposables à 3 bandes « vert clair » juxtaposées.

Ruben Rodriguez Herrera
IUFM et IREM de Basse-Normandie
ruben.rodriquez@caen.iufm.fr