ENSEIGNER LE COSINUS EN 4E

(Équipe Ampères de Bordeaux)

Sommaire

Nous sommes des enseignants[1] qui travaillons au sein de l'IREM d'Aquitaine dans le groupe « Didactique des mathématiques ». Notre activité principale est l'enseignement.

Nous utilisons depuis une quinzaine d'années les recherches en didactique pour mieux comprendre les difficultés des élèves et aussi pour analyser et construire des situations d'enseignement. Nous sommes impliqués dans la recherche AMPERES mais le travail que nous allons vous présenter avait débuté avant cela avec les mêmes objectifs. Nous avons publié un article sur le sujet dans Petit X dès 2004. L'aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique était le titre même de cet article.

I- Pourquoi le cosinus est-il enseigné comme première ligne trigonométrique en 4e ?

Dans les programmes de collège actuels, le cosinus doit être enseigné en 4e tandis que la tangente et le sinus ne sont abordés qu'en 3e. Ce primat donné au cosinus est un vestige des réformes successives de programmes. L'introduction du rapport de projection orthogonale (sans prononcer le mot de cosinus) d'un axe sur un autre a été faite pour la première fois en 3ème lors de la réforme dite « des maths modernes » de 69. Il s'agissait d'admettre que le rapport de projection orthogonale d'un axe (D) sur un axe (D') est le même que le rapport de projection orthogonale de (D') sur (D)

Dans cette construction théorique de la géométrie, le théorème de Thalès admis en 4e permettait de transporter la structure affine d'un axe à l'autre par projection d'une graduation. Cet axiome en 3e permettait de transporter la structure métrique en l'utilisant pour définir la même unité sur tous les axes. Cet axiome de l'égalité du rapport de projection orthogonale servait à démontrer aux élèves le théorème de Pythagore en 3e.

Au cours des réformes successives la notion de rapport de projection, puis de projection même a disparu des programmes. Les programmes introduisent maintenant le cosinus en partant des angles aigus d'un triangle rectangle. Le cosinus et le théorème de Pythagore sont appris actuellement en 4e mais sans lien nécessaire entre eux.

Des questions se posent : puisque tout lien a été rompu entre le cosinus et l'axiomatique de la géométrie métrique, pourquoi enseigner le seul cosinus en 4e. ? Si on veut enseigner une seule ligne trigonométrique en 4e pourquoi le cosinus plutôt que la tangente ou le sinus ? En l'état actuel des programmes la tangente ne serait-elle pas plus utile pour organiser l'enseignement à partir de questions dévolues aux élèves car la tangente est liée à la pente d'une droite c'est à dire à l'alignement de points ?

Rien dans les programmes actuels ou les commentaires ne soulève une quelconque interrogation sur cette priorité donnée au cosinus. C'est un des acquis de la didactique d'avoir rendu compte de ce phénomène : les réformes successives font que certaines notions continuent à être enseignées alors que sont coupés les liens qui les rattachaient mathématiquement aux autres notions du programme. Or particulièrement en géométrie, cette structure théorique était souvent la seule source de sens de l'ensemble de l'étude.

[1] A. Berté- J. Chagneau- L.Conquer- C. Desnavres- J. Lafourcade- M.C. Mauratille- D.Roumilhac- C. Sageaux

II- Enchaîner les questions pour introduire l'étude d'une ligne trigonométrique en 4e

1- Questions concernant les triangles :

Les élèves ont vu en 5e la détermination des triangles par trois mesures : un côté compris entre deux angles, un angle compris entre deux côtés, ou trois côtés. La conviction vient du fait que ces données permettent de les construire géométriquement (voir communication de l'équipe de Clermont). Une question se pose en 4e : Combien d'éléments sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle ?
La construction géométrique prouve que deux côtés suffisent particulièrement l'hypoténuse et un côté de l'angle droit, ce qui étonne car l'angle droit donné n'est pas compris entre eux. Cela veut-il dire qu'avec la mesure de deux côtés quels qu'ils soient on pourrait-on trouver par un calcul la mesure de tous les autres éléments du triangle rectangle ? Comment ?
Plus généralement puisqu'un triangle rectangle est déterminé seulement par deux éléments (un angle aigu et un côté ou deux côtés), peut-on avec ces deux éléments trouver la mesure de tous les autres ?
Les élèves savent déjà répondre en partie :

La donnée d'un angle aigu, permet de calculer l'autre avec la somme des angles.

Il reste à répondre à trois questions :

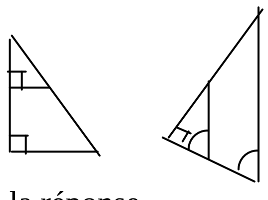
- quand on a deux côtés peut-on calculer le troisième ?
- quand on a deux côtés, peut-on calculer les angles aigus ?
- quand on a un angle aigu et un côté, peut-on calculer les autres côtés ?

Le premier problème est résolu par le théorème de Pythagore, l'étude d'une ligne trigonométrique permet de résoudre les deux autres.

La question se prolonge pour les triangles quelconques : si on connaît les mesures de trois éléments qui permettent de les construire pourra-t-on calculer les autres ? Certains élèves de collège peuvent poser la question. La réponse viendra plus tard après le collège.

2- Questions concernant la similitude :

Les élèves de 4e savent que des triangles quelconques « empilés » sur un angle commun et les deux autres côtés parallèles ont leurs côtés proportionnels et ont les mêmes angles, d'après la propriété de Thalès (voir exposé de l'équipe de Marseille) que nous plaçons avant le cosinus.
Cela est vrai également pour les triangles rectangles, les côtés sont nécessairement parallèles s'ils ont un angle aigu commun. Dans ce cas, tous ces triangles rectangles ont donc leurs côtés proportionnels.



Inversement si on constitue une famille de triangles rectangles tels que le rapport entre deux de leurs côtés soit le même, ont-ils les mêmes angles ?
Un savoir sur une quelconque des trois lignes trigonométriques donne la réponse.

Ceci amène les élèves à considérer la ligne trigonométrique comme étant caractéristique non pas d'un triangle rectangle précis mais de toute une famille de triangles rectangles ayant un même angle et donc finalement les conduit à comprendre que le rapport ainsi défini caractérise un angle aigu.

Naturellement la question va se poser pour des triangles quelconques qui auraient un angle commun compris entre deux côtés proportionnels.
La réponse viendra en 3e avec la réciproque du théorème de Thalès puis s'élargira en seconde avec les cas de similitude des triangles.

3- Questions concernant les angles :

Depuis la sixième, nous répondons avec des outils différents selon les niveaux aux questions suivantes :

- Quand dit-on que c'est le même angle ?

En 6e nous abordons cette question en utilisant une situation basée sur un puzzle, inspirée de la thèse de MH Salin et R Berthelot. Un des premiers objectifs en 6e est d'arriver à la conclusion que la « grandeur » angle ne dépend pas de la longueur des côtés adjacents. Nous amenons ainsi sans formalisation les classes d'équivalence de secteurs.
Au lycée avec les angles orientés, le « même angle » signifiera « la même rotation ».

- Ces angles sont-ils mesurables ?

Pouvoir reporter facilement une unité est nécessaire. Les élèves de 6ème sont amenés à construire un appareil de mesure se rapprochant progressivement du rapporteur usuel.

- Comment obtenir le dessin d'un même angle sans avoir de rapporteur ?

En 5e, conformément au programme, nous traitons les angles déterminés par deux parallèles et une sécante, la somme des angles d'un triangle, la détermination des triangles par la mesure des angles et des côtés. Ce dernier point conduit les élèves à trouver qu'un angle peut se reproduire par une prise d'information sur les longueurs des côtés d'un triangle arbitraire dans lequel on peut l'inclure, cela nécessite donc la donnée de trois informations si le triangle est quelconque, et deux informations s'il est isocèle .
D'autre part les théorèmes appris permettent de prouver des égalités d'angles, de façon théorique dans des figures particulières et de calculer certaines mesures d'angle à partir d'autres données sur la figure.

- - Peut –on reproduire sans rapporteur puis déterminer la mesure en degré d'un angle à partir d'un seul nombre qui serait un rapport entre deux côtés d'un triangle rectangle?

La réponse est donnée en 4e. Pour ne pas s'éloigner du programme, ce qui poserait un problème à nos élèves lors du changement de classe, nous traitons le cosinus d'un angle qui est une fonction de l'angle, bijective dans l'intervalle étudié.

En 3e, le professeur complète cette étude en introduisant sinus et tangente d'un angle aigu. Le choix des côtés dans le triangle rectangle n'a pas d'importance, notre cheminement proposé pour la quatrième avec le cosinus peut se transposer à l'identique quel que soient les deux côtés choisis dans le triangle rectangle, au cas où les programmes changeraient.

Au lycée, cette étude se poursuivra par l'étude des angles orientés et des fonctions trigonométriques comme applications de R dans R.

Le cosinus se situe donc pour les élèves de quatrième, à la croisée de ces trois types de questions.
Il reste à voir l'essentiel et le plus difficile pour l'enseignant : comment amener les élèves à se poser ces questions, dans quel ordre et à partir de quelles situations ?

III- Analyse mathématique du contenu dans le cadre des programmes

Voici ce que disent les programmes de 4^{e} :
Utiliser pour un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents (phrase 1). Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné et de l'angle aigu dont on connaît le cosinus ». (phrase 2)
Il est rajouté en commentaire : « La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueur. » (phrase 3)

1. Il y a implicitement dans cette leçon deux théorèmes.

Enoncé 1: Si des triangles rectangles ont un même angle aigu leur hypoténuse et le côté adjacent à cet angle sont proportionnels (en d'autres termes : existence d'un rapport de proportionnalité donc d'une fonction linéaire permettant de passer des hypoténuses aux côtés, et d'une $2^{ème}$ fonction qui, à un angle associe un rapport.)

Enoncé 2 : Lorsque un côté de l'angle droit et l'hypoténuse sont proportionnels dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle aigu compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même. (En d'autres termes : cette deuxième fonction est bijective pour les angles aigus, elle permet d'associer un rapport à chaque angle et réciproquement et elle n'a rien de linéaire.)

L'énoncé 2 ne figure sous aucune forme dans les leçons des manuels usuels, bien qu'il soit nécessaire de l'appliquer ensuite dans des exercices. Donc ce qui se fait d'habitude dans les classes, se réduit à amener l'énoncé 1. En effet le libellé des programmes n'incite pas le professeur à construire sa leçon autrement puisque les phrases 1 et 3 mettent plutôt en avant l'énoncé 1. C'est seulement dans la phrase 2 concernant la calculatrice qu'on utilise le fait que le cosinus caractérise l'angle aigu comme s'il s'agissait d'une application technique de ce qu'on vient d'apprendre, alors que sans l'énoncé 2 on ne peut pas comprendre comment on peut remonter du cosinus à l'angle. Doit-on laisser le soin de convaincre les élèves de l'existence d'une fonction cosinus intéressante à la présence d'une touche sur la calculatrice ? Sans mise en scène du savoir, organisée par le professeur la calculatrice ne servira qu'à résoudre des exercices d'école dénués de sens.

2. Passage des triangles aux angles

Faire travailler les élèves dans plusieurs triangles rectangles amène une double difficulté, un triangle rectangle a deux angles aigus, le cosinus de l'un étant le sinus de l'autre.

Et surtout, il faudra se dégager des triangles si on veut définir à la fin le cosinus d'un angle comme le demande le programme dès la phrase 2, et même implicitement dès la phrase 1.

Les énoncés 1 et 2 précédents doivent être formulés à nouveau sans référence aux triangles rectangles : à un angle correspond un cosinus et réciproquement. C'est très différent pour les élèves. Il faut donc rajouter une troisième étape de reformulation des résultats en termes d'angles et non de triangles.

C'est donc l'analyse mathématique qui nous a permis dans un premier temps de distinguer deux étapes dans la progression et une nécessité de reformulation.

IV- Un enchaînement de problèmes

1. Première situation en deux temps :

<u>Consigne 1 :</u> Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure la moitié de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Conjectures prévisibles et effectivement observées :

- *1- Ce sont les mêmes triangles mais à une échelle différente ou bien c'est le même triangle qu'on agrandit et qu'on rétrécit*
- *2- Un des angles mesure la moitié de l'autre*
- *3- Il y a un angle de 60° et un autre de 30°*

La mesure des angles avec le rapporteur se fait à un degré près. Peut-on être sûr ? Les élèves possèdent à ce moment – là un savoir suffisant sur le triangle équilatéral pour se convaincre de façon théorique en complétant la figure qu'il s'agit bien exactement de 30° et 60°.

<u>Consigne 2 :</u> Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure les $^3/_4$ de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Les élèves réalisent une vérification empirique de la conjecture sur les angles en découpant les trois triangles et en les « empilant » pour superposer les angles de même mesure. Contrairement au cas précédent ils ne peuvent pas la prouver théoriquement. Ceci donne l'occasion au professeur de faire la distinction entre une conjecture prouvée théoriquement pour les angles de 60° et une conjecture admise quand le rapport est $^3/_4$.

Le professeur peut demander à chaque élève d'écrire les mesures des côtés pour les trois triangles de façon à préciser un rapport de proportionnalité faisant passer d'un triangle à l'autre.

<u>Bilan des échanges sur le tableau :</u>
On passe d'un triangle à l'autre par un rapport variable.
Par contre, il y a un rapport fixe qui est $^3/_4$ entre hypoténuse et côté.

Il semble que lorsque dans des triangles rectangles ont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse dans le même rapport de proportionnalité alors ils ont les mêmes angles

<u>Remarque</u> :
Ce bilan permet d'expliciter le fait que si les rapports sont les mêmes les angles sont les mêmes et garde dans l'implicite que si les rapports sont différents ($^1/_2$ et $^3/_4$) les angles sont différents.

C'est la contraposée de la réciproque qui arrive en même temps que le théorème.

Ceci est un phénomène très général. Quand le savoir visé est un théorème et sa réciproque, l'organisation d'une situation en classe, même réduite à l'énoncé de simples conjectures comme ici, amène de façon amalgamée le théorème et sa réciproque sous forme de la contraposée de cette réciproque : si telle relation est vérifiée on obtient la propriété attendue, si elle n'est pas vérifiée, la propriété n'est pas vraie.

L'objectif de cette situation est double :
- donner un sens à l'expression « rapport entre les longueurs des côtés du triangle rectangle » en faisant construire effectivement des côtés dans un rapport particulier.
- amener les élèves, à partir de deux cas particuliers, à l'idée du rapport de proportionnalité pour résoudre le problème qui va suivre où ils devront faire fonctionner, dans l'action, la réciproque : si les angles sont les mêmes alors les rapports sont égaux. C'est difficile car il y a plusieurs rapports de proportionnalité et un seul doit être reconnu comme pertinent. Si cette étape manque ils ne peuvent démarrer seuls dans le problème de l'étape suivante.

2. Situation 2 : problème de détermination d'une longueur dans un triangle rectangle

a. Dévolution du problème :

Les élèves doivent tracer trois triangles rectangles ayant tous un angle donné de 20° par exemple, ou 35° : une rangée trace trois triangles ayant un angle de 20° et la rangée voisine trois triangles ayant un angle de 35°.
Le professeur leur demande de mesurer les hypoténuses et les côtés adjacents à l'angle de 20° ou 35°.
A ce moment le vocabulaire « côté adjacent à un angle » est introduit.

<u>Arrive alors le problème :</u>

> Le professeur annonce qu'il possède plusieurs autres triangles rectangles ayant aussi un angle de 20° mais hors d'atteinte des élèves. Un de ces triangles est tracé au tableau et son hypoténuse mesure 98 cm. Il s'agit de prévoir la mesure du côté de l'angle droit adjacent à l'angle de 20° dans ce triangle. Le professeur annonce qu'il posera ensuite le même problème pour les autres triangles qu'il détient en donnant aussi la mesure des hypoténuses.
> Les élèves ne peuvent plus rien tracer ni mesurer, mais ils ont le droit de faire tous les calculs qu'ils veulent à partir des mesures qu'ils ont déjà faites dans leurs triangles.

Les élèves n'ont aucune connaissance théorique pour résoudre le problème de façon économique en utilisant le cosinus. Pour y arriver ils vont devoir s'appuyer sur un modèle implicite que nous leur avons fait construire dans l'étape précédent dite situation 0. Les élèves disposent de deux méthodes pour résoudre ce problème dans une problématique de modélisation[2].

- soit conjecturer que le rapport de deux hypoténuses entre elles est le même que le rapport de deux côtés de l'angle droit entre eux, éventuellement le vérifier avec les trois triangles tracés et se servir des mesures sur un des triangles tracés pour résoudre le problème

- soit conjecturer que l'angle de 20° étant le même pour tous les triangles il y a un rapport constant entre côté de l'angle droit et hypoténuse, tenter de vérifier cela empiriquement sur les trois triangles tracés et ayant déterminé un rapport « constant » aux erreurs de mesures près s'en servir pour le calcul demandé

[2] Nous utilisons pour l'enseignement de la géométrie la dialectique entre « problématique de modélisation » et « problématique géométrique ou théorique » au sens de ces mots introduits par René Berthelot et MH Salin dans leur thèse. Nous avons explicité l'usage que nous en faisons avec des exemples au collège dans notre article : « Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique » petit X- n°65 -2004

b. Remarques sur les variables de la situation :

- Parmi les triangles dont il faut déterminer le côté, le professeur donne d'abord un grand triangle. En effet si la longueur de l'hypoténuse est voisine d'un mètre, l'erreur absolue sur la mesure du côté risque d'être grande par suite d'un rapport approché, ce qui amène un doute sur le modèle, d'où la nécessité de la démonstration qui suivra.

- Dans la consigne le professeur demande aux élèves de ne plus rien dessiner dès que la question est posée. Pourquoi cette contrainte ? Si les élèves pouvaient tracer un autre triangle ils pourraient avoir l'idée de tracer un triangle ayant un angle de 20° et dont l'hypoténuse mesurerait 9,8 cm par exemple (pour eux, le « même » en réduction). En multipliant la mesure du côté de l'angle droit par 10 ils auraient le côté du triangle cherché. Mais comme aucun tracé supplémentaire n'est possible, ils ne peuvent utiliser que les triangles tracés avant d'avoir cette donnée, donc utiliser un rapport entre hypoténuses qu'ils ne peuvent choisir mais qu'ils doivent calculer. De ce fait, ils vont peut-être privilégier les calculs des rapports entre côté et hypoténuse qu'ils viennent de voir dans l'étape précédente. Mais rien n'est exclu.

- Le professeur demande le même calcul pour plusieurs triangles (deux ou trois, pas plus). En effet, pour éprouver la fonctionnalité du cosinus il faut que le problème se répète plusieurs fois avec le même angle de 20°. Les élèves verront alors qu'un seul rapport donne tous les résultats, tandis qu'une proportionnalité d'un triangle à l'autre oblige à refaire les calculs à chaque fois puisque le rapport change.

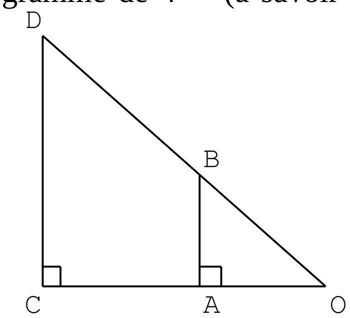
c. Passage à une problématique géométrique

Les élèves doivent d'abord conjecturer le modèle de la proportionnalité, calculer les rapports des côtés aux hypoténuses, trouver des nombres sensiblement différents et douter de la proportionnalité. Si le modèle est assez fort pour eux, ils vont passer outre, prendre un rapport moyen et faire le calcul.

La vérification avec le grand triangle va montrer une erreur absolue assez grande : une preuve théorique de cette proportionnalité sera bien venue.

Certains élèves ont l'idée de découper leurs triangles ou de les dessiner à nouveau de façon à obtenir des triangles « empilés » comme cela a été fait dans l'étape précédente à titre de vérification empirique. Ici l'égalité des angles n'est plus une conclusion mais une hypothèse.

Le théorème de Thalès réduit au triangle est au programme de 4$^{\text{ème}}$ (à savoir que le parallélisme entraîne l'égalité des rapports)



Dans la figure ci-contre, ils savent que,
Les droites(AB) et (CD) étant parallèles :
$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ mais ils ne savent pas que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$
qui est justement la conjecture à démontrer.

Il s'agit d'une simple inversion des moyens dans la proportion, mais ce théorème sur les proportions n'est plus disponible car plus enseigné. Il faut donc le retrouver dans ce cas particulier en passant par

OA x OD = OC x OB.

Pour cette raison il est probable que le professeur soit obligé d'aider les élèves.

La capacité des élèves à prendre une preuve en charge dépend entre autre de la disponibilité de théorèmes antérieurs donc de la cohérence de la progression qui n'est pas toujours bien assurée dans les programmes. Au moins fait-on sentir aux élèves la nécessité de cette preuve.

<u>La classe arrive au bilan suivant :</u>

Si des triangles rectangles ont le même angle aigu, le rapport entre côté adjacent et hypoténuse est le même.
<u>Conjecture</u> **: Pour des angles différents les rapports sont différents. (C'est la contra posée de l'énoncé déjà envisagé sous sa forme directe dans la situation 0)**

3. Situation 3 : problème de détermination d'un angle dans un triangle rectangle

Le professeur annonce qu'il possède un triangle rectangle inaccessible aux élèves dans lequel le rapport entre un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse est 3/10.
Les élèves doivent trouver la mesure des angles de ce triangle en ayant les instruments de dessin à disposition. Une erreur d'un demi - degré est permise.

Les élèves doivent utiliser la proportionnalité des côtés des triangles rectangles qui a été conjecturée dans la situation 0.

Dans la situation 1 le professeur demandait aux élèves de construire des triangles rectangles de leur choix avec un angle donné avant de poser la question relative au côté du triangle inconnu.
Ici les élèves ont à leur charge la construction d'un triangle rectangle semblable à celui du professeur, la mesure attendue étant celle de l'angle.

<u>La classe arrive au bilan suivant</u> : Quand l'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont dans le rapport 3/10, l'angle compris entre eux est le même pour tous les triangles ainsi tracés. Il mesure environ 72,5°.
On peut trouver la mesure de l'autre angle en prenant le complémentaire. Ceci ne permet pas d'être sûr du résultat, mais au moins de ne pas donner des mesures en désaccord avec le théorème sur la somme des angles du triangle connu depuis la cinquième. Il faut trouver 17,5° à un demi- degré près.

Les élèves peuvent alors vérifier que le rapport entre le côté adjacent à ce deuxième angle aigu et l'hypoténuse est lui aussi constant dans tous les triangles, en accord avec l'énoncé 1.

<u>Enoncé admis</u> : Lorsque le rapport entre un côté de l'angle droit et l'hypoténuse est le même dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même dans tous les triangles. L'autre angle aigu est aussi le même.

4. Situation 4 : définition du cosinus et exercice

Définition

Le professeur donne la définition du cosinus de l'angle aigu d'un triangle rectangle comme rapport entre côté adjacent et hypoténuse et fait reformuler l'énoncé 1 en utilisant le mot « cosinus :

Si des triangles rectangles ont un même angle aigu, le cosinus de cet angle est le même. A un angle donné est donc associé un nombre, son cosinus, qui est compris entre 0 et 1.

Ceci introduit l'expression : « cosinus d'un angle » sans référence à un triangle rectangle particulier.

Exercice

Parmi différents triangles rectangles dessinés sur une feuille, avec indications des mesures de leurs côtés, trouver ceux qui ont les mêmes angles.

5. Situation 5 : reproduction d'un angle non inclus dans un triangle rectangle

Le professeur dit qu'il détient un angle et le montre rapidement de loin (plusieurs feuilles pourront circuler dans la classe au moment de la validation). Le professeur fait remarquer que sur son dessin il n'y a pas de triangle rectangle, seulement un angle. Le professeur annonce un cosinus de 0,25 pour cet angle. Les élèves doivent dessiner l'angle du professeur et la validation se fera par superposition. Une erreur un demi - degré est permise. Ils n'ont pas de calculatrice.

<u>Remarque sur la variable</u> : Le rapport est décimal au lieu de se présenter sous forme de fraction dont le numérateur et le dénominateur permettaient de trouver les deux mesures pour construire le triangle, en les multipliant si nécessaire par un même facteur.

Si l'angle dessiné par l'élève ne coïncide pas à un demi-degré près avec celui du professeur l'élève va devoir être sûr qu'il s'agit de sa part d'une erreur de tracé sans remettre en cause son modèle, et donc trouver cette erreur de tracé.

Dès que l'existence de cette fonction cosinus bijective sera certaine, l'élève utilisera une machine qui lui donnera avec toute la précision désirée la valeur de l'angle ou la valeur du cosinus.

Une nouvelle formulation de l'énoncé 2 est institutionnalisée :

A tout nombre entre 0 et 1 est associé un seul angle si ce nombre est donné comme le cosinus de l'angle.

C'est une formulation difficile. Elle arrive à la fin de la progression.