Méthodologie de la recherche menée

par l'équipe de l'IREM de Poitiers

I. *Redonner du sens aux mathématiques enseignées : Proposition d'une démarche exemplifiée*

L'enseignement actuel des mathématiques au collège et lycée donne peu de satisfaction et ne semble plus répondre aux finalités de l'école. Une remise en cause des méthodes d'enseignement (voire des contenus[1]) semble nécessaire.
Nous proposons, dans une série d'articles, une démarche possible pour tenter d'améliorer l'enseignement des mathématiques.
Dans un premier article, nous exposons le cadre théorique. Dans les articles suivants, **nous exemplifierons dans le cadre du programme de seconde avec deux thèmes : la géométrie et les fonctions**.

La recherche que nous avons menée et **que nous poursuivons** a été possible dans le cadre de la recherche AMPERES[2] pilotée par l'INRP et la commission Inter IREM de didactique.

1- Nos motivations : *"Former des esprits libres et éclairés" Condorcet, 1792.*[3]

a- Quels sont les buts de l'école ?

Voici quelques extraits (http://www.legifrance.gouv.fr/WAspad/UnCode?code=CEDUCATL.rcv) du code de l'éducation.

« La formation scolaire favorise l'épanouissement de l'enfant, lui permet d'acquérir une culture, le prépare à la vie professionnelle et à l'exercice de ses responsabilités d'homme et de citoyen.
Ils (les établissements scolaires) assurent une formation à la connaissance et au respect des droits de la personne ainsi qu'à la compréhension des situations concrètes qui y portent atteinte. Ils dispensent une formation adaptée dans ses contenus et ses méthodes aux évolutions économiques, sociales et culturelles du pays et de son environnement européen et international.
Les enseignements scolaires et universitaires ont pour objet de dispenser les connaissances de base et les éléments d'une culture générale incluant les données scientifiques et techniques, de préparer à une qualification et de concourir à son perfectionnement et à son adaptation au cours de la vie professionnelle. »
Le lecteur curieux pourra compléter à loisir cette liste en consultant le site ci-dessus mentionné.

Depuis peu, une demande de plus en plus marquée d'éducation à la citoyenneté se fait jour et certains sociologues en souhaitent clairement une prise en compte dans les disciplines:
"L'éducation active à la citoyenneté n'est pas une affaire de recettes miracles mais de stratégies pédagogiques sous-tendues par la volonté d'une part de :

- ***donner sens aux connaissances et aux concepts enseignés***[4]
- *mettre les valeurs et les principes que l'Ecole souhaite construire au cœur de son fonctionnement comme au cœur des classes et de la construction des apprentissages".*

Eduquer à la citoyenneté , Jean-François Vincent, président de l'OCCE[5],

---

[1] Ce n'est pas notre propos.

[2] http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/partenariat-inrp-07-08/amperes

[3] Citation remise à bon escient dans notre actualité par R. Noirfalise !

[4] Soulignés par les auteurs.

[5] L'**Office Central de la Coopération à l'Ecole** (OCCE) est l'organisme national - crée en 1928 - qui fédère la vie et l'action pédagogique d'environ 50 000 coopératives scolaires et foyers coopératifs.

Cette prise en compte apparaît de manière explicite dans les instructions des programmes de mathématiques sans pour autant que soient explicités les moyens d'y accéder :
« Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie en mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen… »

Extraits des programmes de ***mathématiques***

A partir de ces textes, nous pouvons résumer ce que nous entendons par *Instruire le citoyen.* Il s'agit de participer à l'atteinte des buts suivants :

- Fournir à l'élève les moyens pour vivre en société (L'éduquer à la citoyenneté)
- Lui fournir des outils intellectuels (connaissances, compétences) pour comprendre le monde dans lequel il vit :
  - Comprendre les faits de sociétés
  - Comprendre et critiquer les informations qui lui sont données
  - Se méfier des idées toutes faites
  - Comprendre son environnement.

b- Notre point de départ

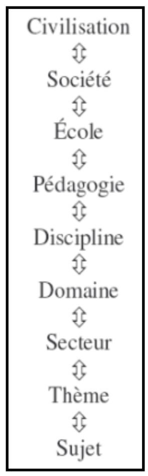
« *Ce n'est pas la société qui se sépare de l'école mais l'école qui se sépare de la société* ».Tel est le constat qu' Yves Chevallard[6] dresse de l'école actuelle..

Comme nous l'avons montré dans l'introduction, instruire le citoyen c'est l'armer d'outils…

Pour illustrer ce propos, on peut utiliser l'échelle de codétermination didactique donnée par Yves Chevallard[7] pour lequel tout sujet traité en classe devrait pouvoir s'inscrire dans cette échelle et donc être relié soit à la société soit à la civilisation. Ce qui signifie que les connaissances transmises par l'école devraient pouvoir être lisibles par l'élève et les acteurs du système éducatif, et devraient pouvoir clairement contribuer à atteindre les buts que nous nous fixons.

Exemple cité par Yves Matheron[8] :

<u>Civilisation</u> : Instruction le citoyen
<u>Société :</u> Fourniture des instruments pour comprendre des faits de société : exemple des sondages d'opinion
<u>Ecole :</u> cours disciplinaire traditionnel de 55 min
<u>Pédagogie :</u> travail en petits groupes
<u>Discipline :</u> mathématiques
<u>Domaine :</u> statistiques
<u>Secteur :</u> statistiques inférentielles
<u>Thème :</u> simulations, fluctuations
<u>Sujet :</u> détermination d'un intervalle de confiance



Echelle de co-détermination didactique

[6] Cité par Yves Chevallard lors d'un exposé à Poitiers.
[7] [2]
[8] Yves Matheron : responsable de la recherche Ampères à l'INRP.

Force est de constater qu'à cette « chaîne » manquent souvent un ou plusieurs maillons et que les sujets traités en classe sont très souvent coupés de tout enjeu d'instruction du citoyen. Les savoirs enseignés sont purement scolaires et ne servent qu'à réussir scolairement. Ainsi disparaît, un des buts de l'école qui consiste à instruire le citoyen en l'aidant à comprendre le monde dans lequel il vit.

Pourquoi enseigne-t-on les propriétés du triangle ? Pourquoi enseigne-t-on la valeur absolue ? Les réponses toutes faites que l'on donne aux élèves (« ça te servira plus tard » ou bien « c'est utile dans telle situation mais on ne l'étudie pas car c'est trop compliqué » ou bien « c'est là-dessus que tu seras interrogé au bac » ou bien « c'est au programme »…) ne peuvent que contribuer à la démotivation de nombreux élèves pour l'enseignement de la discipline. Citons une nouvelle fois Yves Chevallard [2] : « si la profession ne sait plus pourquoi on enseigne les propriétés du triangle, nous exerçons un métier de charlatan ». Autrement dit si nous, enseignants de mathématiques, ne sommes pas capables d'expliciter les raisons d'être des notions enseignées (et ainsi de justifier les raisons d'être de l'enseignement des mathématiques), nous ne devons pas nous étonner de voir les horaires d'enseignement diminuer[9] et nous pouvons même penser qu'à moyen ou long terme, l'enseignement des mathématiques pourrait disparaître comme ont disparu l'enseignement de la rhétorique au XVIIIe siècle ou plus près de nous des enseignements de langues « mortes ».

Les acteurs du système éducatif perçoivent clairement que l'école dysfonctionne en s'éloignant petit à petit de l'instruction du citoyen. Mais plutôt que de s'attaquer à réformer l'enseignement des disciplines (ce qui serait sans nul doute lourd à la fois en termes économiques et en terme de formation des enseignants), le système éducatif accumule des dispositifs dont les durées de vie sont parfois très courtes visant à rapprocher l'école de la société.

Ainsi a-t-on connu les « 10% » [10], il y a une trentaine d'années, bien vite disparus. Actuellement, les structures les plus en vogue[11] sont :

- Les voyages scolaires
- Les stages en entreprises
- Les interventions extérieures en particulier sur la citoyenneté, le sida, les conduites addictives, le développement durable…
- Les TPE, les IDD
- Les thèmes de convergence
- Les classes européennes
- …

La mise en place de ces structures se fait de manière plus ou moins explicite au détriment de l'enseignement des disciplines qui sont sacrifiées en tant qu'enjeu mineur pour le futur citoyen (car l'enjeu n'apparaît que scolaire !). Si, pour le futur citoyen, l'essentiel s'apprend en dehors la classe, alors quelles raisons, sinon injonctives, l'élève aurait-il d'assister à un cours -classique- consistant à visiter un ensemble de savoirs scolaires sans lien avec la société ?

Certes l'enseignement des mathématiques n'est pas le seul touché par ce constat mais il fait partie de ceux qui sont les plus attaqués depuis une dizaine d'années.[12]

---

[9] Il y a bien d'autres raisons qui peuvent expliquer les diminutions des horaires. Mais pour lutter contre ces diminutions, encore faut-il avoir de bons arguments !

[10] Dispositif visant à dégager 10% du temps scolaire à des projets interdisciplinaires.

[11] Difficile de ne pas penser à des effets de mode, en n'ignorant pas que dans un contexte de concurrence entre établissements certaines structures font vendre !!!

[12] On peut citer les attaques de l'ancien ministre Claude Allègre en particulier.

Peut-on sortir de l'ornière et redynamiser l'enseignement des mathématiques ? Telle est la question qui se pose de manière cruciale. Si on pense que les mathématiques sont un formidable instrument pour penser et comprendre le monde, il est alors essentiel de chercher une voie qui permette de situer les objectifs de son enseignement au sein même des objectifs de la société.

Le point de départ de notre recherche a été d'étudier, d'adapter et donc de s'approprier des pistes décrites par Yves Chevallard et son équipe à Marseille : PER, Parcours d'Etude et de Recherche et AER, Activités d'Etude et de Recherche.

Nous nous imposons en outre un double objectif :

- mettre à jour une méthode de travail accessible à tout enseignant de mathématique,
- envisager un enseignement sensé de mathématiques.

Par « enseignement sensé », nous entendons un enseignement:

- centré sur des questions visant à instruire le citoyen en l'aidant à répondre à des questions de société et à comprendre le monde dans lequel il vit,
- donnant du sens aux notions mathématiques enseignées : travailler sur des mathématiques signifiantes[13],
- structurant les savoirs et techniques rencontrées,
- apprenant à maîtriser certaines techniques.

Cet enseignement diffère de l'enseignement bien souvent pratiqué où on « visite » une notion et certaines de ses propriétés sans connaître le but de cette visite ni pourquoi on visite certaines propriétés et pas d'autres.

2- Questions préalables

La piste ouverte par Yves Chevallard - à savoir PER et AER - n'est pas complètement théorisée[14] et il importe de préciser les notions telles que nous les entendons actuellement.[15]

a. Des grandes questions aux parcours d'étude et de recherche.

Lorsqu'on se place sur l'échelle de co-détermination didactique, on se rend compte, et nous l'avons déjà précisé, que les connaissances utiles au citoyen sont peu ou pas prises en compte dans l'enseignement actuel.

Pour intégrer ces connaissances dans nos pratiques, nous avons pris le parti non pas de présenter linéairement aux élèves des listes de contenus en suivant la présentation des contenus des programmes (ce que font la plupart des manuels, mais qui n'est nullement stipulé par les programmes), mais plutôt de l'organiser autour de Parcours d'Etudes et de Recherche que nous appellerons par la suite PER.

Ces derniers constituent l'organisation par laquelle nous allons répondre à de grandes questions[16] dont nous allons préciser le statut. De fait, un parcours d'étude et de recherche est motivé par la recherche de réponses même partielles à une ou plusieurs grandes questions.

[13] Nous y reviendrons plus loin.

[14] Selon Yves Chevallard lui-même.

[15] Ces notions évolueront certainement au cours de la recherche.

[16] Théoriquement dénommées : "questions à fort pouvoir générateur"

b. Qu'est-ce qu'une grande question?

C'est une question visant à résoudre une classe générale de problèmes mathématiques qui se posent ou se sont posés aux hommes suite à des influences externes ou internes aux mathématiques. Cette question doit :

- générer de nombreuses sous questions ou de nombreuses réponses
- générer de nouveaux savoirs
- mettre en œuvre si possible de nombreuses connaissances antérieures
- amener à la construction d'un PER : ce parcours d'étude et de recherche permettra de répondre entièrement ou partiellement à la question posée.

Une grande question peut être :

- soit reliée à des faits de société tels qu'ils se posent actuellement ou tels qu'ils se sont posés dans le passé et qui aident à comprendre le monde dans lequel nous vivons. Les réponses possibles à ces questions font souvent intervenir différents domaines des mathématiques voire différentes disciplines.

- soit interne aux mathématiques: elle est alors à relier à des grandes questions qui ont fait avancer la science en général et les mathématiques en particulier à une certaine époque.

c. Exemples de grandes questions :

- **Comment construire une figure géométrique astreinte à des conditions ?**

Les constructions de figures géométriques jalonnent l'histoire des arts (architecture, peinture) et celles des ouvrages d'art comme la construction du tunnel d'Eupalinos dans l'île de Samos au Ve siècle avant J.C.

La démonstration permet dans un cadre théorique donné de justifier les constructions (et résultats) données dans ce cadre, et de savoir si elles sont exactes ou approchées.

Les constructions géométriques font partie des préoccupations humaines car liées à des besoins évidents. En témoignent les ouvrages suivants :

- Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en science de la géométrie d'Abul Wafa (Xe siècle) dans lequel les constructions portent essentiellement sur les polygones réguliers, sur des inscriptions et circonscriptions, sur des partages de figures en aires égales et en quadratures diverses.

- La géométrie (1525), écrit par Dürer, ouvrage à l'usage des artisans et des artistes n'est ni un recueil de recettes ni un traité érudit.

- Le Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, dans lequel Desargues fonde en 1639 la géométrie des transformations. Les préoccupations de Desargues ne sont pas purement spéculatives car il est aussi architecte et a des nécessités trè pratiques concernant en particulier la taille des pierres.

- La géométrie descriptive de Monge, dessinateur qui s'est fait remarquer par le tracé d'un plan de sa ville natale, Beaune. Entré comme dessinateur à l'école royale du génie de Mézières, il réalise des plans de fortifications pour lesquels il avait à résoudre des problèmes de défilement (établir le relief de différentes parties des fortifications). Pour cela il jette les bases d'une nouvelle technique : la géométrie descriptive.

- ***Comment résoudre des équations polynomiales ?***

Cette question a été abordée dans l'Antiquité par de nombreuses civilisations (mésopotamienne, égyptienne par exemple pour les équations du premier et second degré) puis arabe et enfin par les mathématiciens de la Renaissance (équation du troisième et quatrième degré) etc. La recherche de solutions exactes et approchées a pris fin simplement au XIXe siècle, preuve s'il en était de l'intérêt de cette recherche pour la communauté scientifique.

- ***Comment ramener la résolution d'un problème de géométrie à un problème de calcul ?***

Cette question a été résolue en partie par Descartes mais s'est trouvée revisitée à la fin du XVIIe par Leibniz. Le problème posé par Leibniz peut être exposé en ces termes : existe-t-il une voie entre la géométrie des Grecs (dont Descartes s'émerveillait devant les solutions mais dont il doutait qu'une heuristique permettant de trouver les solutions soit possible) et la géométrie cartésienne trop calculatoire ? On sait que la question de Leibniz posée au concours de l'Académie des sciences de Leipzig au début du XIXe siècle trouvera plusieurs réponses dont le calcul de l'extension de Grassmann, prélude à la géométrie linéaire et aux vecteurs, et le calcul barycentrique de Möbius.

- ***Comment déterminer la tangente en un point d'une courbe ?***

On sait que Descartes considérait cette question comme une des plus importantes des mathématiques. Il a apporté ses solutions de même que Fermat. Mais les solutions apportées n'étaient valables que pour une classe de fonctions. D'autres théories plus générales ont vu le jour comme le calcul infinitésimal posant d'autres questions métaphysiques qui obligeront les mathématiciens à élaborer d'autres théories.

3. Comment déterminer les grandes questions donnant naissance à un PER ?

Il n'y a pas de méthode unique pour déterminer des grandes questions telles celles que nous venons de citer. Cependant, il nous semble que le point de vue que nous allons développer (après en avoir essayé d'autres) est le plus fécond.

a. Les programmes

Le programme fait état de notions à enseigner. Pourquoi ces notions sont-elles à enseigner ? Elles ne sont pas le fruit d'un hasard mais d'une nécessité elle-même liée à certains types de tâches que les concepteurs d'une certaine époque souhaitaient que les élèvent réussissent.
La succession des programmes a fait que les types de tâches donnant sens aux notions ont quasiment disparu des programmes et il ne reste dans ceux-ci que des contenus, des techniques justifiées ou non, bien souvent vides de tout sens et ainsi perçues comme purement scolaires, faute de motivation explicite de leur fonctionnalité. On peut citer des factorisations sophistiquées ou des développements algébriques virtuoses n'aidant en rien à la résolution de problèmes donnant sens à l'algèbre.
Redonner du sens aux mathématiques enseignées nécessite une étude approfondie des programmes afin d'organiser l'enseignement des notions autrement que ce que laisse suggérer leur écriture en terme de contenus et capacités exigibles ponctuelles, et souvent immotivées. Cette écriture qui pourtant ne préjuge pas a priori de l'organisation mathématique à mettre en œuvre, a conduit les manuels à une présentation de contenus morcelés et par cela détruit toute organisation mathématique digne d'intérêt.

b.-Notre démarche :

- ***Revenir aux sources dans l'histoire et dans l'histoire des programmes ?***

Il nous semble que nous devons trouver ou retrouver les raisons d'être des notions mathématiques enseignées via des questions fondamentales avant de pouvoir justifier pourquoi il peut être utile que nous les enseignions. Ces questions concernent tous les domaines des mathématiques .

  - *Pourquoi étudie-t-on la géométrie ?*

- *Pourquoi étudie-t-on les statistiques ?*
- *Pourquoi étudie-t-on les fonctions ?*

- ***Pour chacune de ces questions, nous devons répondre de l'intérêt de la notion :***
  - *dans la vie du citoyen,*
  - *dans les mathématiques,*
  - *dans les autres disciplines.*

  Cela constitue l'écologie de la notion : où vit-elle, où la rencontre-t-on ?

- ***Mais nous devons également réfléchir à la fonctionnalité de la notion.:***

Quelles questions permet-elle de résoudre ? Pour quels types problèmes permet-elle de construire des réponses ? A cette fin, il est important de connaître à quelle époque la notion a été créée et pour résoudre quelles questions et dans quel contexte et à quelle époque les notions ont été introduites pour la première fois dans les programmes.

- ***Recherche des types de tâches***

La recherche de réponses aux questions précédentes met en avant des tâches ou bien des types de tâches. Par exemple :

A la question *Pourquoi étudier la géométrie dans l'espace ?* , une réponse peut être : *"pour représenter dans le plan un objet spatial."*, une autre peut être "*pour calculer des volumes* ".

A la question *"Pourquoi étudier la géométrie ? "* , une réponse peut être : *"pour comparer des aires"*..

Ainsi voit-on apparaître des types de tâches significatifs qui donnent sens aux notions. Si "comparer des aires" est un type de tâche retenu comme significatif, il convient alors de rechercher des techniques qui permettront de résoudre la question : "Comment comparer des aires ?".

Nous avons personnellement constaté que trouver des types de tâches n'est pas si immédiat, et qu'elles ne viennent pas toujours rapidement à l'esprit des professeurs de mathématiques (y compris nous-mêmes!)

- ***Recherche de techniques pour résoudre les types de tâches.***

Les techniques pour résoudre un type de tâches sont variées. Elles dépendent du type de réponse attendue, du contexte dans lequel la question est posée, du niveau mathématique de celui qui répond mais aussi du niveau auquel on se place dans notre enseignement**.**

Ainsi à la question Comment comparer des aires ? on peut utiliser :

- *des formules,*
- *des quadrillages,*
- *la superposition par calque,*
- *le calcul intégral,*
- *le découpage,*
- ***...***

- ***Un exemple succinct : Pourquoi étudier la géométrie ?***

On peut tout d'abord constater l'étendue de l'écologie des notions géométriques :

- *La géométrie plane et la géométrie dans l'espace sont utilisées dans notre environnement habituel :*
- *architecture (églises, jardins etc.),*

- *objets de la vie quotidienne (design)*
- *dans les sciences (optique, mécanique, astronomie, biologie).*

L'étude de la géométrie est indispensable à la compréhension des mathématiques actuelles en particulier la géométrie discrète[17]. On précise ces réponses à "pourquoi étudier la géométrie ? " en donnant maintenant des exemples de tâches ou de types de tâches :

- *Pour reproduire une figure ;*
- *Pour construire une rosace ;*
- *Pour construire une figure astreinte à respecter des conditions (inscriptions, circonscriptions, tangence, pavages) ;*
- *Pour déterminer un lieu géométrique (utile en géométrie mais aussi en mécanique, en astronomie…) ;*
- *Pour savoir si une méthode de construction est exacte ou approchée*
- *Pour évaluer une grandeur (longueur, aires, volumes, angles…) ; comparer deux grandeurs ; calculer une grandeur ; calculer une grandeur géométrique en fonction d'une autre* **;**
- ***…***

C'est de cette succession de types de tâches que peut émerger une liste de grandes questions permettant de rencontrer de nombreux savoirs d'un programme donné.

Par exemple :

- *Comment construire une figure astreinte à des conditions ?*
- *Comment comparer des aires ?*
- ***…***

Et ainsi, les contenus des programmes actuels seraient réorganisés pour intervenir au moment précis où on traite une grande question à laquelle ils apportent un élément de réponse pertinent.

Pour affiner la réorganisation des savoirs, et préparer le type de questionnement qui sera présent dans les énoncés destinés à la classe, il est souvent nécessaire de décliner la grande question en sous-questions, qui seront des questions dévolues aux élèves ; voici par exemple le cas de la grande question "Comment construire une figure astreinte à des conditions ?" :

- *Comment construire un segment de longueur donnée ?*

Autour de cette sous-question, on peut organiser en 2nde l'enseignement notamment des ensembles de nombres et les triangles semblables via des constructions à la règle et au compas

- *Comment savoir si une méthode de construction est exacte ou approchée ?*

Traiter cette sous-question, dont relèvent les énoncés d'exercices du type « voici tel ou tel programme de construction ; la figure construite est-elle un polygone régulier ? », peut être l'occasion de revenir sur les outils de collège, mais aussi l'algèbre pour démontrer, les triangles isométriques, …

La classification d'une question en « grande question « ou « sous-question » comporte inévitablement une part de subjectivité, et dépend du niveau considéré ; nous le répétons, l'objectif essentiel est de réorganiser les savoirs autour de questionnements dignes d'intérêt !

Les questions ne sont pas nécessairement entièrement résolues à un niveau donné. Ainsi à la grande question "Comment comparer des aires ? " , il pourra être apporté des réponses en 6^{e} puis d'autres en Terminale. Cependant, à un niveau donné, les réponses même partielles à une grande question doivent permettre d'introduire et de travailler des notions du programme de ce niveau.

- ***Retour sur les programmes : vers une autre organisation mathématique des programmes.***

[17] On peut remarquer que, par ces questions, nous sommes, bien souvent, plus tournés vers le passé car l'enseignement demandé (tout en ayant des applications actuelles) est fondée sur la géométrie d'Euclide. Actuellement, la géométrie discrète (celle des ordinateurs) est plus porteuse mais pour la comprendre encore faut-il savoir en quoi elle diffère de la géométrie de tous les jours qui est celle d'Euclide.

La recherche de grandes questions doit aider à structurer le programme d'une autre manière.

Un nombre limité de grandes questions doit être dégagé. Les réponses même partielles doivent permettent de traiter tous les contenus du programme d'un niveau donné.

Etre capable d'élaborer une telle liste de grandes questions (avec leurs types de tâches correspondants) nous semble être un travail concernant la profession en général (professeurs de mathématiques, inspecteurs, formateurs, didacticiens, concepteurs de programmes,…), et une condition nécessaire pour qu'elle puisse envisager de justifier avec honnêteté et crédibilité l'enseignement de notions mathématiques.

- ***Un exemple en Seconde : nous envisageons de répondre partiellement aux grandes questions suivantes***

Grandes questions	*Contenus réorganisés*
1- Comment construire une figure astreinte à respecter des conditions ?	*- géométrie du triangle,* *- triangles isométriques,* *- triangles semblables,* *- les propriétés et l'usage des transformations,* *- les ensembles de nombres,* *- la graduation de la droite,* *- le calcul algébrique et littéral,* *- expression d'une quantité en fonction d'une autre* *- les systèmes de deux équations,*
2- Comment analyser des données ?	*- résumé d'une statistique (paramètres de position et de dispersion)* *- comparaison de statistiques,* *- représentation graphique de statistiques*
3- Comment estimer une population à partir d'un échantillon (thème d'étude) ?	*- sondages : intervalle de confiance et fourchette de sondage*
4- Comment mettre en évidence et décrire la dépendance de deux quantités ?	*- vocabulaire lié aux fonctions,* *- variations, optimisation* *- représentation graphique et lecture graphique* *- calcul littéral*
5- Comment modéliser par une formule une situation fonctionnelle ?	*- fonctions de référence,* *- système d'équations*
6- Comment résoudre un problème d'alignement ou de concours par le calcul ?	*- géométrie vectorielle et analytique* *- calcul littéral.* *- équations de droites* *- systèmes d'équations*
7- Comment représenter un objet de l'espace dans le plan ?	*- géométrie dans l'espace.*
8- Comment déterminer tous les diviseurs d'un nombre entier ?	*- entiers naturels,* *- nombres premiers, décomposition en produit de nombres premiers,* *- calcul littéral*

II- PER

Il convient que nous précisions ce que nous entendons par PER.

La ou les réponses à une grande question telle que nous les avons décrites ci-dessus ne peuvent pas être le fait de l'élève ou des élèves. Nous devons organiser un parcours qui nous permettra d'apporter des réponses aux élèves.
Ce parcours est balisé par des activités d'étude et de recherche (AER) que nous nommons, avec les élèves, encore *Activités* bien qu'ayant peu de choses en commun avec les activités des manuels (voir ci-après).

Ces études permettent aux élèves la dévolution des sous questions à la grande question. Elles permettent :

- d'introduire en situation les notions nouvelles,
- de motiver des connaissances et savoir faire anciens (calculer avec des lettres par exemple),
- d'étudier des réponses diverses à une question donnée.

Chaque AER, après correction, fait l'objet d'une synthèse portant sur :

- les savoirs nouveaux et anciens à utiliser
- les savoir-faire à maîtriser pour résoudre le type de tâches proposé.

Le professeur doit choisir à la fois les connaissances qu'il faut institutionnaliser et les savoir-faire qu'il choisit de faire travailler spécifiquement par des exercices appropriés, ce qu'on nommera « travail de la technique ». Et c'est sur ces connaissances et ces savoir-faire que les élèves seront évalués.
Ainsi, en seconde, si nous choisissons la question : *Comment construire une figure astreinte à respecter des conditions ?* nous pouvons choisir de nous poser la sous question : *comment savoir si la construction réalisée est exacte ou approchée* ?
Cette sous question sera introduite par une AER qui nous amènera à outiller les élèves par exemple avec les triangles isométriques. Le travail de la technique portera sur la maîtrise des triangles isométriques pour faire des démonstrations.
Baliser le parcours par des sous questions permet de dynamiser globalement l'étude.
La richesse des AER, la confrontation des idées de résolution et les relances de l'enseignant permet de dynamiser localement le parcours.

III- AER et « activités »

Les activités d'étude et de recherche sont un des moyens d'opérationnaliser et de structurer un PER.
Encore convient-il de les définir et de les situer par rapport aux notions d' "activités" déjà existantes.

1. Activités, situations fondamentales et activités préparatoires

Nous ne reviendrons pas sur la confusion trop souvent faite entre « élève actif en mathématique» et « activités mathématiques », ou encore « activité de la classe ».

a- Les activités mathématiques :

Les « activités mathématiques » ont été décrites dans les programmes de collège de 1985 :
« *Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :*
Permettre un démarrage de tous les élèves, et donc de ne donner que des consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises par tout le monde,
Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
Rendre possible la mise la mise en jeu des outils prévus ;
Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons. »

Une pratique de 20 ans a montré les intérêts de l'enseignement par activités:

- pour les élèves eux-mêmes par la découverte d'**un résultat nécessaire[18] d'une théorie**
- pour les enseignants dans la gestion la classe en situation de recherche.

Cette pratique a aussi montré les limites de cet enseignement même quand les activités n'ont pas été dévoyées en « activités préparatoires » :

- Une activité n'est pas nécessairement très robuste : très souvent, elle peut déraper car à un moment donné, une intervention non prévue du milieu (élèves, professeur etc.) va faire que ce qui était attendu ne va pas se produire.
- Elle est ponctuelle dans le temps (et dans l'espace) et a pour objectif une connaissance ou une technique ponctuelle.
- Elles peuvent avoir lieu sur des mathématiques *non signifiantes.*
- Elles sont bâties autour d'une idéologie *constructiviste* qui a montré ses limites

Nous allons revenir sur ces deux derniers points qui nous semblent très importants.

b- Les situations fondamentales

La notion de situation fondamentale a été définie par Guy Brousseau. Une situation fondamentale est robuste : il est très difficile que ne se produisent pas les attendus comme par exemple la situation sur « les feuilles de papier » qui est utilisée pour introduire les décimaux. Mais cette situation fondamentale est très lourde à gérer et non écologiquement viable hors de son milieu (école Michelet[19]).
On connaît très peu de situations fondamentales (5 au plus si on en croit une petite enquête faite auprès des participants du colloque de la Grande Motte 2006 !!)

c- Les activités préparatoires

Les activités préparatoires semblent être des vérifications de pré-requis. On peut penser que leur justification théorique repose sur la vision selon laquelle les connaissances s'empilent les unes sur les autres et qu'il n'est pas possible d'aborder tel chapitre du manuel sans que certains acquis soient maîtrisés. Mais on peut aussi penser que le mot « activité » a été récupéré dans les manuels à des fins de marketing pour que ceux-ci semblent plus en adéquation avec les programmes.

2. Le constructivisme

Les programmes de 1985 ont mis en avant dans l'organisation de l'enseignement l'utilisation de situations-problèmes, rebaptisées "activités" dans les manuels. Ce qui est dit à leur propos et sur leur mise en oeuvre est sous tendu par une conception constructiviste des apprentissages dans laquelle l'élève découvre et construit son savoir à travers une activité de résolution de problèmes. Or le choix de "bonnes" situations-problèmes s'est avéré difficile, et leur gestion délicate :

- Comment être sûr que la situation choisie amènera nécessairement les élèves aux notions et outils visés par le professeur ?
- Si ces outils sont nouveaux, comment l'élève pourra-t-il les découvrir ?
- Comment prendre en compte les diverses pistes inabouties des élèves ?
- Comment faire converger les différentes recherches vers les notions et outils visés ?

[18] Nous développons plus loin ce qui signifie « nécessaire dans une théorie ».

[19] Qui est maintenant malheureusement fermée.

- Comment arriver à bien décontextualiser les recherches ? Ceci peut être d'autant plus difficile que les élèves se sont bien investis dans la recherche et ont trouvé des éléments de solution. La situation chargée de sens pour eux a souvent du mal à être décontextualisée.
- La phase d'intitutionnalisation peut provoquer de véritables ruptures pour les élèves.

Toutes ces difficultés ont amené à découper les notions à introduire en une suite de techniques que l'ont fait découvrir aux élèves par une suite d'"activités" dans lesquelles il n'y a plus aucun problème, mais des questions guidées qui ne sont que des ostensions déguisées. Tous les problèmes de gestion de l'activité sont alors résolus : l'élève n'a plus qu'à trouver la bonne réponse, celle qui est prévue. C'est ce que l'on trouve massivement au début de tous les chapitres des manuels sous la rubrique "Activités".
La situation-problème, qui devait faire sens pour l'élève et lui permettre de découvrir de nouvelles notions et de construire son savoir en le confrontant à son savoir ancien et à celui des autres (notion de conflit cognitif), a complètement disparu.
On est bien loin de ce que disait Brousseau dans sa théorie des situations didactiques, et qui devait servir de sang neuf pour les nouveaux programmes : *Une connaissance prend son sens pour l'élève si elle lui permet de résoudre un problème qu'il s'est approprié*.
Les AER sont peut-être le moyen de revisiter, par d'autres chemins, ce problème du sens, en évitant les écueils mentionnés ci-dessus. C'est du moins ce que nous pensons.

3. De la nécessité en mathématiques

Un type de nécessité se manifeste une fois un certain nombre de choix faits : l'axiomatique de la théorie, les concepts primordiaux. Ainsi la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat est un résultat nécessaire de la géométrie euclidienne. C'est un théorème qui résulte entre autre du postulat d'Euclide. On sait aujourd'hui (il a fallu attendre la première moitié du XIXe siècle pour que les idées soient claires sur le sujet) que si l'on ne met pas le postulat dans la théorie géométrique mais l'une de ses négations, alors la somme des angles d'un triangle est soit supérieure, soit inférieure à un angle plat. C'est un théorème de la nouvelle géométrie. Cette nécessité en mathématique ne se manifeste que par les théorèmes d'une théorie. Ainsi peut-on envisager éventuellement une « activité » qui conduise de manière nécessaire les élèves vers un résultat donné (établir par exemple les cas d'isométries des triangles) dans la mesure où les concepts primordiaux sont posés.

Certaines notions mathématiques n'ont aucune nécessité dans le sens où elles sont **des** réponses (mais pas **les** réponses) à des questions qui se posent. Ainsi en est-il des complexes, des vecteurs, des réels, du calcul littéral, du calcul des limites de Weierstrass …
Autrement dit, aucune activité ne peut conduire les élèves ***de manière nécessaire*** à la création de tels outils et il est donc vain d'en chercher. Cela ne signifie pas pour autant que ces notions n'ont pas de bonnes raisons d'être enseignées, cela signifie que dans ce cas il ne faut pas faire rechercher une activité aux élèves mais faire étudier par exemple, un couple : question, réponse(s).
Qu'en est-il de la démonstration au sens « grec » du terme ? Elle n'a aucune nécessité sauf dans le monde mathématique créé par les Grecs dont elle est l'essence même. D'autres civilisations - l'Egyptienne, la Chinoise…- ont développé des mathématiques sans recours à l'élaboration d'une théorie hypothéco-déductive dans laquelle tout résultat est démontré.
La recherche d' « activités » conduisant de manière nécessaire les élèves à produire d'emblée des démonstrations au sens où nous l'entendons dans les mathématiques actuelles est encore une recherche vaine[20]. Seule la compréhension de la notion même de démonstration (combinant des énoncés admis, en produire d'autres en utilisant des règles de logique) peut amener les élèves à produire eux-mêmes des démonstrations.

[20] Il convient de ne pas confondre preuve et démonstration ! Voir les travaux de Nicolas Balacheff.

4. Mathématiques signifiantes et non signifiantes

Notre recherche nous amène à penser que les mathématiques sont signifiantes dans la mesure où elles permettent de résoudre des grandes questions ou bien certaines de leurs sous questions.
Voilà pourquoi nous estimons que la profession devrait posséder des listes de grandes questions.
Tel n'étant pas le cas, l'un des objectifs de notre recherche est d'en établir en suivant les pistes proposées dans la partie A.
Les mathématiques sont non signifiantes quand elles répondent à des exercices purement scolaires qui ne se rencontrent qu'en milieu scolaire.

Certaines mathématiques peuvent être non signifiantes à un niveau donné mais signifiantes à un autre niveau.
En voici un exemple : les exercices didactiques portant sur les homographies complexes très présents en terminale S sont à ce niveau des mathématiques non signifiantes. Les questions des exercices sont stéréotypés et on se demande bien quelles sont les significations profondes de ces questions et de ce type d'exercices.
Les homographies complexes sont signifiantes si on se pose la question de savoir quelles peuvent être les isométries du modèle de géométrie non euclidienne de Poincaré (on peut noter que dans les années 50, l'étude des homographies complexes était au programme ainsi que le plan anallagmatique et le demi-plan de Poincaré).

On constate que des mathématiques non signifiantes se développent souvent quand :
- il y a glissement (*glissement métacognitif défini par Brousseau*) entre la mathématique qui pourrait être signifiante et les créations didactiques qui avaient pour but d'aider l'enseignement de ces notions.
- des allègements de programmes sont mal pensés. Ainsi en est-il des isométries du plan (terminale S spécialité), étudiées à une certaine époque comme mise en œuvre de la structure de groupe. La notion de groupe ayant disparu des programmes, à quoi cela sert-il de composer les isométries ?

5. AER et PER

Un PER est un parcours qui est rythmé par des AER liées ensemble par l'étude de la grande question qui est à l'origine du PER et liées entre elles, une AER pouvant ouvrir sur un questionnement résolu dans une AER ultérieure.
Autrement dit, sauf si une AER permet l'étude complète d'une grande question, cas rare (s'il en existe) compte tenu des contraintes pédagogiques, un PER va être constitué d'un parcours balisé d'Activités d'Etude et de Recherche.

Le schéma général d'un parcours pourrait être :
- AER liée à une première sous question
- Bilan de l'AER
- synthèse des savoirs et techniques mises en œuvre dans l'AER. Place dans l'étude de la grande question.
- travail des techniques
- AER liée à une seconde sous question
- ….

Ainsi on voit poindre les différences entre les « activités » et les AER, et les avantages de la démarche dans le cadre des PER.

Les AER ne sont pas des activités (situations) dans la mesure où
- ces dernières sont en général isolées les unes des autres même si le professeur peut avoir en tête une ligne directrice qui constitue un fil directeur des activités. Une activité ne peut être une AER que dans la mesure où **elle est un maillon d'un PER**. L'AER organise le savoir dans un cadre plus général.
- l'absence de grande question laisse la porte ouverte à des activités sur des maths non signifiantes (cf. la règle des signes en quatrième, ou encore le tableau de signes[21])

[21] Cf article dans le Bulletin vert n° 474 de l'APM

- délaissant le constructivisme, l'AER peut être constituée d'une question et d'une ou plusieurs réponses, à charge à l'élève d'étudier les réponses proposées qui peuvent être des réponses toutes faites à déconstruire ou bien des réponses localement vraies. C'est un point nouveau et fondamental.
- contrairement à des situations où le cours suit immédiatement l'activité dans le temps -car ce cours est indispensable à la résolution des exercices ultérieurs- le schéma des PER propose un renversement de la situation. Si le cours reste un moment privilégié de synthèse, le bilan de l'AER doit faire émerger ce qu'on a appris pour résoudre toute une classe de problèmes. Il permet de travailler immédiatement la technique lors d'exercices, sans subir la contrainte d'une institutionnalisation immédiate, pour laquelle les élèves ne sont pas nécessairement prêts.

Ainsi, à l'opposé d'une activité vite oubliée, "prétexte" à un cours, lui-même suivi d'exercices de niveau progressif, l'AER est un moment d'une importance égale aux exercices qui vont la suivre. A la complexité graduelle des exercices se substitue la diversité des situations dans lesquelles la technique va être éprouvée.

6. Programmes : contraintes ou support ?

Le traitement d'une grande question peut emmener loin : le calcul d'aire par exemple peut nous emmener jusqu'à la définition des domaines quarrables ! Il est alors bon d'avoir quelques garde fous et les programmes en sont un ! Si d'aventure, les élèves, dans leur recherche venaient à vouloir exploiter bien au-delà la question, il serait du devoir de l'enseignant, de préciser les raisons d'arrêt de cette recherche.

Ce projet a pour but de redynamiser l'enseignement des mathématiques. La voie que nous suivons est celle de replacer le savoir dans la société, dans la civilisation. Pour mener de front ces deux objectifs, nous ne pouvons pas nous permettre de laisser libre cours à nos envies. Ce ne serait pas citoyen de traiter telle partie des mathématiques parce que « elles plaisent à l'enseignant ». Certes, on peut éprouver du plaisir à enseigner mais ce ne doit pas être au détriment de l'objectif qui est d'instruire le citoyen.
A partir du moment où nous sommes fonctionnaires d'état, il est de notre devoir d'enseigner le contenu des programmes. Cependant nous ne nous interdisons pas, à la lueur du travail que nous avons entrepris, de noter des dysfonctionnements flagrants des programmes et de faire des propositions pour tenter d'y remédier.

Bibliographie :

[1] Chevallard Yves, *Actes de l'université d'été de La Rochelle*, IREM de Clermond Ferrand, 1998
[2] Chevallard, *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, Université d'été de St Flour http://www.animath.fr/UE/UE04/chevallard.pdf