Les débuts de l'Algèbre au collège ou introduction au calcul littéral

Geneviève Lé Quang et Robert Noirfalise
IREM de Clermont-Ferrand

« L'algèbre élémentaire est la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. »
Yves Chevallard

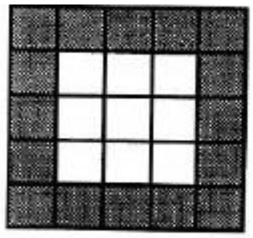
Sommaire

Nous pouvions créer des AER et des PER originaux mais nous pouvions aussi, cela fait partie du protocole de la recherche, exploiter ce qui est produit par d'autres équipes. A ce titre, il était intéressant de retravailler des situations déjà expérimentées. Nous disposions pour l'introduction au calcul littéral de la situation dite des "carrés bordés" décrites dans une brochure INRP[1] laquelle est reprise dans les documents d'accompagnement des nouveaux programmes de collège. Dans un premier temps, nous présenterons cette situation, car nous nous sommes inspirés de cette dernière pour construire l'AER décrite dans la suite du texte..

[1] Combier G., Guillaume J.C., Pressiat A. (1996) *les débuts de l'algèbre au collège* INRP

1° La situation "recherche du nombre de carreaux hachurés" du document d’accompagnement.

La situation suivante est donnée en sixième.



Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite selon le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

Phase 1 :

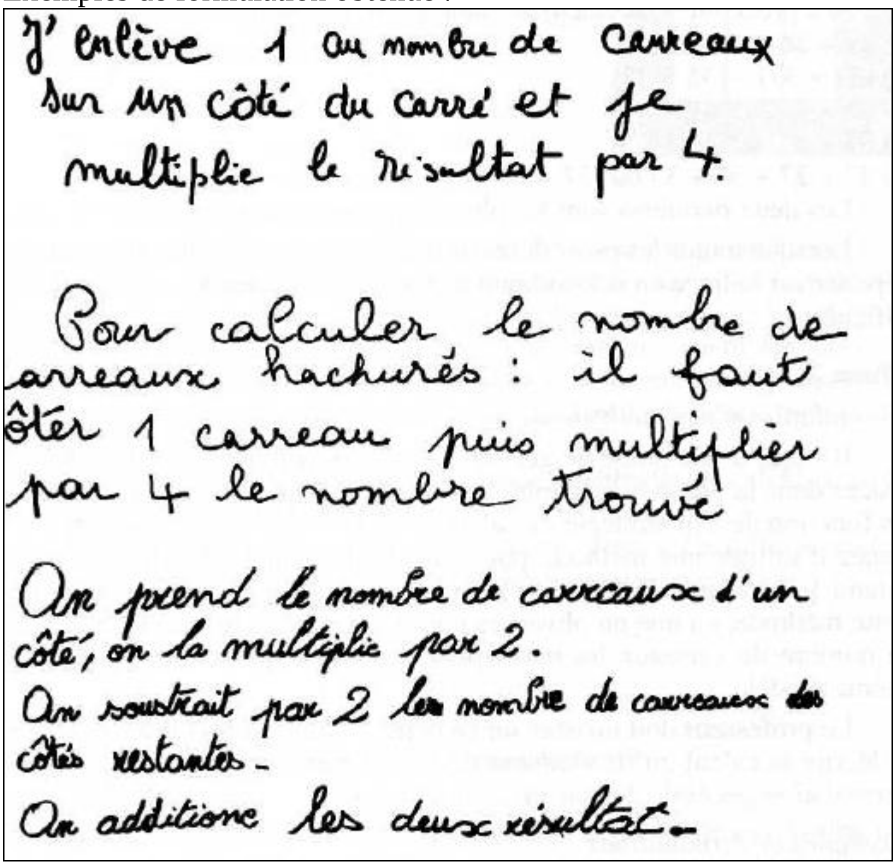
1re étape : les élèves ont à résoudre le problème avec la figure donnée (cela permet de s'assurer qu'ils comprennent bien le problème)

2e étape : On demande aux élèves de calculer le nombre de carreaux hachurés avec un carré de 37 carreaux de côté. (Une fois les calculs effectués, une figure est affichée ce qui permet aux élèves de valider leurs résultats).

Phase 2 : Formulation du calcul

Consigne : "Vous venez d'utiliser une méthode pour calculer le nombre de carreaux hachurés quand le côté du carré en compte 37. Maintenant vous allez décrire cette méthode, en une ou plusieurs phrases, pour qu'elle permette de calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré construit sur le même modèle"

Exemples de formulation obtenue :



J'enlève 1 au nombre de carreaux sur un côté du carré et je multiplie le résultat par 4.

Pour calculer le nombre de carreaux hachurés : il faut ôter 1 carreau puis multiplier par 4 le nombre trouvé

On prend le nombre de carreaux d'un côté, on la multiplie par 2.
On soustrait par 2 les nombre de carreaux des côtés restantes.
On additionne les deux résultat.

Phase 3 : débat collectif sur la validité des formulations.

Au passage disent les auteurs, lors de cette phase, c'est l'occasion de constater qu'il est possible de formuler différemment une même méthode!

Phase 4 : Passage d'une formulation à une formule (selon les mots du texte)

Le professeur propose aux groupes d'élèves : "on cherche maintenant à écrire un calcul du nombre de carreaux hachurés qui serait vrai pour tous les carrés. Quand les mathématiciens sont confrontés à ce type de problèmes, ils donnent un nom au nombre de carreaux sur le côté du carré; ils l'appellent par exemple n (n désigne un nombre). Et ils écrivent leur procédé de calculs en n'utilisant que la lettre n, des symboles (+,-,x,÷), des parenthèses et des nombres. Vous allez devoir traduire votre méthode en un calcul respectant les règles d'écriture qui sont celles des mathématiciens , sans utiliser de mots."

Ci contre des exemples de formules produites par les élèves.

2° Analyse des activités précédentes :

a. Ne pas se tromper d'enjeu

Il s'agit bien de les introduire au calcul littéral, à l'algèbre élémentaire! Or, comme le dit Yves Chevallard, l'algèbre élémentaire est la science des programmes de calcul (sur les nombres), et en particulier la science du calcul sur les programmes de calcul. L'intérêt de cette situation est de conduire à la création d'un milieu où apparaissent plusieurs programmes de calcul opérant sur un nombre variable. L'expérience montre effectivement que les élèves produisent plusieurs programmes de calcul. Mais, peut-on dire, si le décor est ainsi planté, encore faut-il relancer la dynamique d'étude de façon à ce que les programmes de calcul ainsi introduits deviennent objet de l'étude et objet de calculs. Pour que s'opère l'entrée dans l'algèbre, il convient, selon nous que les élèves aient à manipuler de tels programmes de calcul. La question de l'équivalence de deux programmes conduit bien alors à ce type de travail.

b. Des difficultés à surmonter.

Les élèves invités à décrire le programme de calcul utilisé le font en un premier temps avec la langue usuelle. Il n'y a pas nécessité à recourir à l'écriture littérale pour ce faire. Or, on veut introduire à celle-ci. Le texte de l'INRP donne une façon de faire. On peut aussi faire fond sur le fait que les élèves savent écrire des calculs numériques en ligne et qu'ils ont déjà rencontré des formules usuelles avec des lettres. Ce répertoire de connaissances disponibles le sera davantage en cinquième qu'en sixième. En effet, il faut attendre que les élèves aient pratiqué l'écriture en ligne de calculs numériques, aient étudié le parenthésage et les priorités opératoires. Ils ont aussi déjà vu l'utilisation de formules Ainsi ils savent que l'on peut exprimer l'aire d'un rectangle par la formule "A=$\ell.L$" avec A pour aire, ℓ pour largeur et L pour longueur.

Un des intérêts du problème posé est que le résultat peut se calculer avec plusieurs programmes de calcul : Si N est le nombre de carreaux hachurés et n le nombre de carreaux du côté du grand carré, on peut trouver, selon la façon des les compter:

$N= 4n-4$; $N= 4(n-2)+4$; $N= 4(n-1)$; $N=2n+2(n-2)$; $N= n.n-(n-2).(n-2)$

On peut alors se poser la question suivante :
Deux programmes de calcul étant donnés, donnent-ils toujours le même résultat ?
On veut aller vers une étude conduisant à des transformations d'expressions littérales, en usant en particulier de la distributivité. Or, dans ce type de situations lorsqu'on demande aux élèves si des programmes de calcul donnent bien toujours le même résultat, ils répondent "oui", justifiant celui-ci par la référence à la situation: "les deux formules comptent le même nombre de carreaux donc elles donnent toujours le même résultat". Il importe de faire comprendre que ce sont les programmes de calcul qui sont objet d'étude et non ce qu'ils représentent.

3° Des raisons d’être de l’algèbre

Ce qui précède tend à montrer qu'il convient de clarifier les **raisons d'être** de l'algèbre.
Une première raison d'être de l'algèbre élémentaire est de se donner un moyen de **représenter de façon concise et non ambiguë des programmes de calcul**. La représentation algébrique des programmes de calcul n'est pas la seule, ni même la plus économique, (la notation polonaise, par exemple, utilise moins de signe). Cependant, non seulement elle montre les calculs à faire mais aussi elle présente un aspect instrumental bien utile pour l'étude de questions comme celles qui apparaissent avec les autres raisons d'être de l'algèbre. C'est un langage avec ses codes spécifiques et il conviendra donc que l'élève apprenne à l'écrire et à le lire. Il faudra aussi, c'est un avantage de ce code, que l'élève apprenne également à représenter par une forme algébrique adaptée des propriétés des nombres : par exemple il n’est pas encore évident pour tout élève de troisième que deux nombres consécutifs peuvent s’écrire n et n+1, que les multiples de 7 s’écrivent 7n…

Une deuxième raison d’être de l’algèbre est de fournir un outil de calcul pour **comparer des programmes de calcul.** Ce peut-être pour savoir s’ils sont équivalents c'est-à-dire s’ils retournent la même valeur numérique quelle que soit la valeur donnée aux variables ou encore pour savoir si l'un retourne des valeurs numériques plus grandes que l'autre. Et l’un des enjeux du collège est bien de faire acquérir aux élèves les premiers éléments techniques et technologiques qui permettent de produire un programme de calcul équivalent à un programme donné.
Une troisième raison d’être de l’algèbre est évidemment sa contribution à la résolution de problèmes par leur mise en équation et la **résolution des équations** ainsi obtenues.

4°Une AER en classe de cinquième

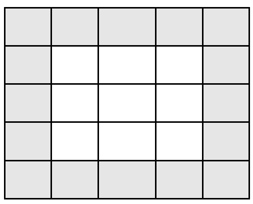
a. Quelques principes :

Ce sont surtout les **raisons d'être de l'Algèbre** qui nous ont guidé : l'enjeu est de faire comprendre aux élèves les raisons pour lesquelles on s'intéresse aux transformations d'écritures algébriques comme, par exemple, l'usage de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. On peut dire que c'est une AER qui ouvre sur un PER, celui de la science des programmes de calcul.
Le choix de la classe de **cinquième** plutôt que la sixième : les élèves en sixième ont fréquenté quelques formules littérales relatives aux périmètres et aires, et en début de cinquième, ont appris à écrire en ligne des calculs numériques. Ils ne sont cependant pas entrés dans l'Algèbre, ils sont simplement à la porte de celle-ci car ils n'ont pas eu à transformer des

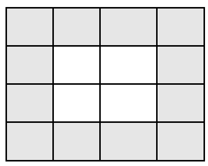
formules. L'expérience acquise par les élèves en sixième et en début de cinquième nous permettait d'espérer et cela s'est vérifié, que certains d'entre eux arrivent à des représentations de programmes de calcul pas trop éloignées de la forme algébrique. Leur répertoire formé à la fois des règles d'écritures des calculs en ligne et de l'usage de lettres pour abréger un nom devait les autoriser à produire des formes algébriques.
La situation proposée devait conduire les élèves à **comparer des programmes de calculs** en travaillant uniquement l'expression littérale de ceux-ci. Il convenait donc que les élèves ne puissent pas se référer à la situation modélisée pour faire la comparaison. C'est ce qui nous a conduit à proposer non pas un mais deux problèmes que l'on découvrira ci-dessous.
Une **équation à résoudre** : sans utiliser les règles de transposition , il s'agit cependant de faire percevoir aux élèves que certaines formes de programme de calcul sont plus opérantes que d'autres, une façon de plus de justifier l'étude des transformations algébriques.

b. Le texte du problème soumis aux élèves : deux sujets soumis à l'étude

Sujet 1



❶

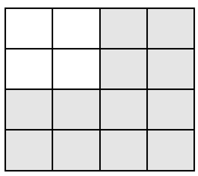


❷

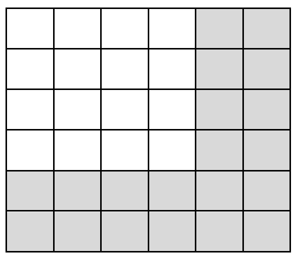
On considère un carré recouvert de carreaux blancs avec tout autour une rangée de carreaux grisés. Le nombre de carreaux blancs sur le côté du carré central est variable.

1- a) Combien y a-t-il de carreaux grisés sur la figure ❶ ci-dessus ?
b) Combien y aurait-il de carreaux grisés si le nombre de carreaux sur un côté du carré central était de 8 ?
c) de 35 ?
2 - Ecris le programme de calcul que tu as utilisé pour trouver le nombre de carreaux grisés de n'importe quelle figure semblable à celles de la première question.

Sujet 2



❶



❷

On considère un carré recouvert de carreaux blancs auquel on a ajouté deux rangées de carreaux grisés sur deux de ses côtés. Le nombre de carreaux blancs sur le côté du carré est variable.

1- a) Combien y a-t-il de carreaux grisés sur la figure ❷ ci-dessus ?
b) Combien y aurait-il de carreaux grisés si le nombre de carreaux sur un côté du carré non colorié était de 7 ?
c) de 41 ?

2 - Ecris le programme de calcul que tu as utilisé pour trouver le nombre de carreaux grisés de n'importe quelle figure semblable à celles de la première question.

L'activité proposée est analogue à l'exemple décrit dans les documents d'accompagnement des programmes.

c. Première étape : Ecriture d'un programme de calcul

L'objectif poursuivi est l'écriture d'un programme de calcul. Cette activité a été proposée dans deux classes de cinquième avec quelques modifications d'une classe à l'autre ; les élèves ont travaillé en binômes. Dans les deux classes l'activité a été réalisée après le chapitre concernant les aires.

Deux sujets différents sont proposés aux élèves d'une même classe d'une part, pour que les réponses ne diffusent pas rapidement dans la classe dans la classe et d'autre part pour donner plus de sens à la question de la comparaison des programmes de calcul qui sera travaillée dans un deuxième temps. La première question se situe dans un cadre numérique et le calcul répété du nombre de carreaux grisés doit permettre de dégager une méthode générale de calcul qui sera traduite en « programme de calcul » dans la deuxième question.

Le déroulement de la séance et les difficultés rencontrées :

Le choix de donner deux sujets oblige à circuler assez rapidement dans tous les groupes de la classe pour donner quelques explications et notamment pour expliquer que le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc varie.

Dès que la consigne est comprise, les élèves trouvent les réponses assez facilement : par un comptage direct des carreaux sur le dessin pour la valeur 3 (ou 4, sujet 2) et en général par un calcul pour la valeur 35 ou 41(deux groupes font un dessin). En général les élèves sont cohérents, ils découvrent une méthode de calcul et l'appliquent à chaque cas ; le programme de calcul le plus utilisé est $(n + 2)^2 - n^2$, n représentant le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc. (nous venions de travailler sur les aires !)

Dans la première classe, la deuxième question (Décris la méthode que tu as utilisée pour trouver le nombre de carreaux grisés en 1. Comment présenter cette méthode de façon économique) rédigée assez vaguement pour ne pas induire la réponse a été difficile à expliciter, l'expression "programme de calcul" n'a pas été prononcée tout de suite, de même que le mot formule. Le professeur a dû tenter d'expliquer qu'il fallait imaginer que les élèves de la classe voisine feraient les calculs et qu'ils fallaient donc leur transmettre le programme de calcul à effectuer et uniquement cela.

Deux programmes corrects différents sont écrits par six groupes sur douze, il s'agit de $(a + 2) \times (a + 2) - (a \times a)$ le plus souvent accompagné par une phrase et $(a\times4) + 4$ les lettres choisies étant *a, c* ou *x*.

Certains groupes d'élèves proposent des méthodes de calcul qui font appel à deux variables car ils n'ont pas vu la relation les reliant, d'autres essaient d'expliquer en langage naturel leur façon de faire, d'autres enfin n'arrivent pas à expliciter leur calcul (trois groupes de deux).

Deux exemples :

1)

a) Il y a 16 carreaux grisés. (5×2) + (3×2)

b) Il y aurait 36 carreaux grisés si le nombre sur un carré central était de 8.

Calcul Nicolas Guilhem c) Il y aurait 144 carreaux grisés si le nombre sur l carré central était de 35. (37×37) – (35×3

Calcul Morgan c) Il aurait 144 carreaux. (35×2)+(37×2)

2) Sachant que le nombre de carrés grisés est 84, Il carré par côté. (84 – 2) ÷ 4

3) La Méthode :

Il faut faire (L×2) + (l×2)

L = longueur

l = largeur

4)

Il y a 20 carreaux grisés sur la figure.

(7×2) + (9×2) = 32

Il y aurait 32 carreaux grisés sur la figure.

(43×2) + (41×2) = 168

Il faut d'abord calculer le carré Total de côté 43×43 et enlever la partie non-grisée

ur le carré initial la partie grisée est égale à $\frac{20}{36}$

nc $32 \times \frac{20}{36} = \frac{460}{9}$ soit environ 51.

l faut d'abord calculer tout le carré (partie grisée et non grisée) puis enlever a partie non grisée (côté × côté). Il restera alors la partie grisée.

ur 6 carreaux de côté

(6×6) – (4×4) = 20

ur 31 carreaux de côté

(31×31) – (29×29) = 120

Nous avons mis plusieurs exemples pour montrer qu'il y a une infinité de possibilités.

Dans la deuxième classe, l'expression programme de calcul figure dans la question mais il a encore fallu préciser oralement, voici un extrait du dialogue du professeur avec la classe :

« *Je voudrais préciser la question 2, écris le programme de calcul que tu as utilisé pour trouver le nombre de carreaux grisés pour n'importe quelle, non, pardon, pour toute figure semblable à la figure 1 ayant un nombre quelconque de carreaux sur le côté du carré blanc et je vais préciser encore oralement ce que je veux que vous m'écriviez. Un programme de calcul, qu'est-ce que c'est un programme de calcul, qui peut m'aider à préciser ça ?*

E : - une suite de calculs pour trouver ce qu'on veut

Prof : - une suite de calculs pour trouver ce que l'on cherche. Ici qu'est-ce qu'on cherche à calculer ?

E : - le nombre de carreaux grisés,

Prof : - je veux qu'on écrive un programme de calcul, attention, valable pour n'importe quelle figure semblable à l'une des deux dessinées ci-dessus, c'est-à-dire que le nombre de carrés, de carreaux pardon, que l'on peut compter sur le carré blanc peut varier, je veux qu'on ait un programme de calcul qui marche dans tous les cas, que le nombre de carreaux soit 2, soit 4, soit 41, soit 1200, soit 3 525 000, soit n'importe quel nombre. »

Certains programmes sont écrits avec des formes diverses faisant référence directement à la figure et le professeur doit expliquer qu'une personne ne connaissant pas le problème ne peut pas faire de calcul.
côté × côté – côté blanc × côté blanc
Il faut calculer l'aire totale de la figure, l'aire de la figure non grisée après on soustrait
le programme de calcul est" + 1 × 4"

Des exemples :

2) Le programme de calcul que j'ai utilisé pour trouver le nombre de carreaux grisés est
+1 ×4.
ex: (3+1) ×4 = 16
ou (4+1) ×4 = 20
ou (5+1) ×4 = 24

N + 2 = N2
N2 × N2 = N2N2
N × N = NN
N2N2 – NN = carreau grisé
N étant le côté du carré central

Des programmes attendus sont également produits :

$(c + 2)2 - c \times c$
$(a + 1) \times 4$
$c \times 4 + 4$
$c \times 2 + (c + 2) \times 2$
$(c \times 2) + (c \times 2) + 4$

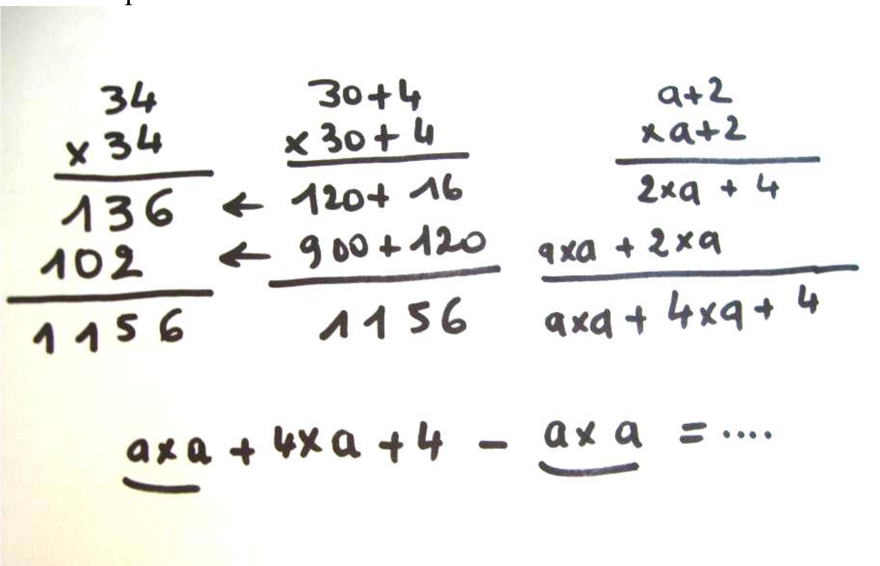
d. Deuxième étape : comparaison de programmes de calculs

Cette étape se déroule en classe entière ; elle est complètement dirigée par le professeur : il s'agit ici d'amener les élèves à se poser la question de l'équivalence des programmes de calcul sans faire référence à la situation travaillée précédemment.

Dans la première classe :

Les deux programmes de calculs $(a \times 4) + 4$ et $(a + 2) \times (a + 2) - (a \times a)$ sont écrits au tableau (l'un provient du sujet 1, l'autre du sujet 2) ; le professeur s'adresse à la classe : « les élèves de la classe voisine ont reçu les programmes de calcul et ils se sont rendus compte que pour une même valeur de *a*, ils obtenaient le même résultat avec les deux programmes de calcul. Pourquoi ? **Il faut bien penser qu'ils n'ont pas les dessins sous les yeux »**
Un élève de sa place dit : « eh bien, dans le premier il y a 4 et dans le deuxième il y a 4 parce que deux fois deux ça fait 4 et puis il y a 4 fois *a* et dans l'autre … on aura … » ; il tente alors d'expliquer que vraisemblablement en développant on aura également 4 *a*.

A ce stade, c’est le professeur qui doit essayer de montrer aux élèves par des manipulations qu’ils peuvent comprendre que les deux programmes produisent toujours le même résultat. Voici ce qu’il va écrire au tableau en commentant :



Dans la deuxième classe.

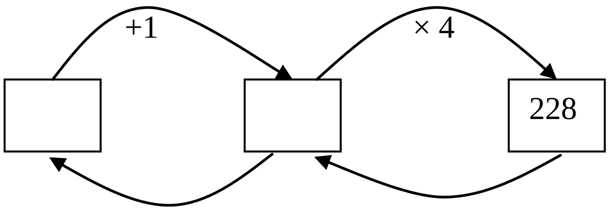
Les deux programmes écrits au tableau sont : $x \times 4 + 4$ et $(c\times2) + (c + 2) \times 2$;
le professeur utilise un tableur dans lequel les deux formules sont déjà entrées, il montre simplement ces formules aux élèves qui acceptent que ce sont les mêmes programmes de calcul que les deux écrits au tableau. Ils ont ensuite la surprise de découvrir que pour les valeurs choisies dans la colonne A, les deux formules retournent toujours la même valeur. A la question pourquoi, Agathe répond
« *d’abord, on note x à la place de c et dans le premier il y a quatre fois x et dans le deuxième il y a deux fois x et encore deux fois x (en mimant la distributivité sur la deuxième partie de l’expression) et puis il y a quatre dans le premier et il y a également quatre dans le deuxième car deux fois deux ça fait quatre.* »
A l’issue de cette activité dans les deux classes, le professeur indique alors à la classe que le travail qui va suivre va porter sur les règles à appliquer pour transformer les programmes de calcul.

e. Troisième étape : choix d’un programme de calcul pour résoudre une équation

a) En utilisant un des programmes de calcul trouvés dans la classe, retrouver le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc sachant que le nombre de carrés grisés est 228.
b) Même question si le nombre de carrés grisés est 139.
Les différents programmes trouvés en classe ont été écrits au tableau :
$(c + 2)^2 - c \times c$
$(a + 1) \times 4$
$c \times 4 + 4$
$c \times 2 + (c + 2) \times 2$
$(c \times 2) + (c \times 2) + 4$

Les élèves ne savent pas résoudre les équations mais certains programmes de calcul peuvent être facilement "inversés" tandis que d’autres non. Ce travail devait conforter les élèves dans l’idée qu’il était intéressant de transformer les programmes de calcul en programmes équivalents selon les problèmes à résoudre.

Cet exercice s'est avéré difficile à résoudre pour une grande majorité des élèves et c'est le professeur qui a dû montrer en utilisant un schéma que les programmes (a + 1) × 4 ou
(c ×4) + 4 étaient intéressants en écrivant au tableau :



Pour la question b) les élèves qui donnent un décimal comme réponse sont invités à critiquer leur réponse et à répondre à une nouvelle question :
Pouvait-on prévoir que le nombre de carreaux grisés ne peut pas être 139 ?
La réponse ici est correcte et les élèves font appel au programme de calcul qui **montre** que le nombre de carreaux grisés est un multiple de 4.

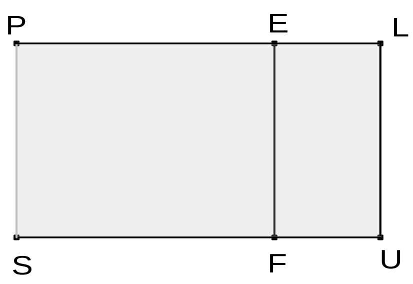
f. Quatrième étape : Institutionnalisation et travail de la technique

Les deux identités de la distributivité simple ont été manipulées sur des exemples numériques de nombreuses fois, notamment à l'école élémentaire. Il s'agit ici de résoudre quatre problèmes de deux manières différentes afin de vérifier ces deux identités.

<table>
<tr><td colspan="2">Donner la solution de chaque problème en écrivant une seule ligne de calculs. Pour chaque problème, donner deux méthodes.</td></tr>
<tr><td><u>Problème A :</u>

Calculer l'aire du rectangle PLUS sachant que LU = 1,8 cm ; PE = 2,5 cm

et EL = 1,5 cm.

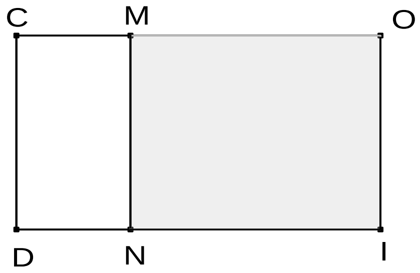

</td><td><u>Problème B :</u>

Chaque jour, Clémentine achète un pain à 1,10 €, une baguette à 0,60 € et le journal à 1,5 €.

Calculer la somme dépensée par Clémentine au mois de septembre.</td></tr>
<tr><td><u>Problème C :</u>

Calculer l'aire du rectangle MOIN sachant que CD = 1,4 cm ; CO = 4,5 cm

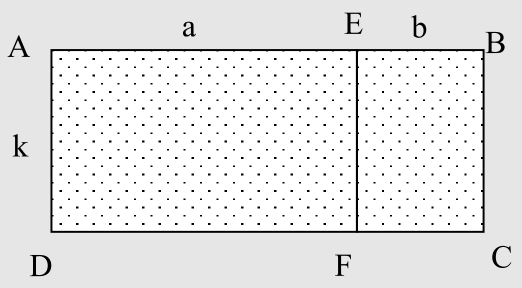
et CM = 1,5 cm.</td><td><u>Problème D :</u> Monsieur Réfot a planté 25 rangées de trente-six pins chacune. Malheureusement sept rangées complètes ont brûlé dans un incendie. Combien reste-t-il de pins à Monsieur Réfot.</td></tr>
</table>

- 	

L’institutionnalisation qui suit illustrée géométriquement comporte à la fois la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l’addition et à la soustraction et l’introduction du vocabulaire « développer et factoriser ».

I - La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction :

1)



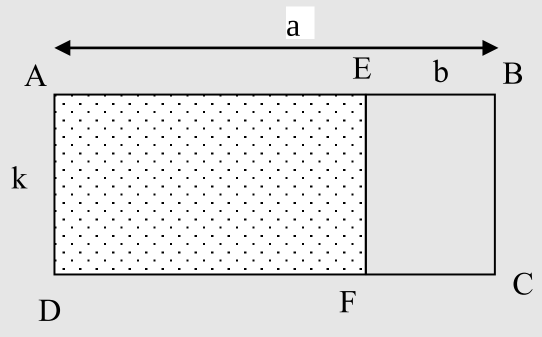
a - Comment écrire la longueur AB ? $a + b$

b - Exprimer l'aire du rectangle ABCD de deux manières :

1ère manière : en multipliant la longueur AD par la largeur AB : $k \times (a + b)$

2ème manière : en ajoutant les aires des deux rectangles AEFD et EBCF : $k \times a + k \times b$

2)



a - Comment écrire la longueur AE ? $a - b$

b - Exprimer l'aire du rectangle AEFD de deux manières :

1ère manière : en multipliant la longueur AD par la largeur AE : $k \times (a - b)$

2ème manière : en retranchant les aires des deux rectangles ABCD et EBCF : $k \times a - k \times b$

Règle : a, b, k désignent des nombres décimaux et a est supérieur à b.

On a : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition et à la soustraction.

II – Développer, factoriser :

1- développer :

Deux écritures pour un même nombre :

A = 5,7 **×** (10 + 1)	A = 5,7 × 10 **+** 5,7 × 1
A est écrit sous la forme *d'un produit d'un nombre par une somme*	A est écrit sous la forme *d'une somme de deux produits*

Développer c'est transformer un produit en somme (ou en différence) *appliquant la distributivité de la multiplication sur l'addition (ou sur la soustraction).*

Produit somme

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

On a développé

2- factoriser :

Deux écritures pour un même nombre :

B = 13 × 1,2 – 13 × 0,2

B est écrit sous la forme *d'une différence de deux produits*

B = 13 × (1,2 – 0,2)

B est écrit sous la forme *d'un produit d'un nombre par une différence.*

Factoriser c'est transformer une somme (ou une différence) en produit en appliquant la distributivité de la multiplication sur l'addition ou sur la soustraction.

somme Produit

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

On a factorisé

Le travail de la technique se fait à partir d'exercices extraits du manuel de la classe Mathématiques 5ème collection Phare pages 36 n° 28, 29, 30, 31, 32, page 40 n° 72,73,74,75,76,77 auxquels il faut ajouter des exercices portant sur des programmes de calculs équivalents :

Exemple:

Programme A *Choisir un nombre,* *Prendre son double* *Ajouter 6* *Multiplier le résultat par 5.*	*Programme B* *Choisir un nombre,* *Prendre son double* *Ajouter 3* *Multiplier le résultat par 10.*

Qu'obtient-on si on applique les programmes A et B aux nombres 3 ; 7 ?
Montrer que les deux programmes donnent toujours le même résultat.

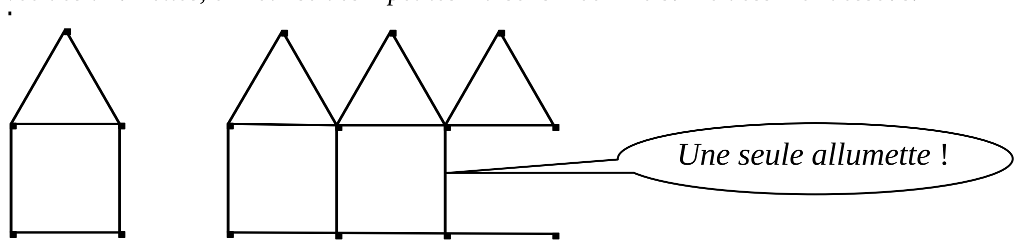
Variante :

Programme de calcul : *Choisir un nombre entier,* *Prendre son double* *Ajouter 6* *Multiplier le résultat par 5.*

a) Qu'obtient-on si on applique le programme A aux nombres 3 ; 7 ; 12 ?
b) Que remarque-t-on ?
c) Montrer que le programme de calcul donne toujours des multiples de 10

Un exercice de reprise est proposé quelques temps plus tard aux élèves (avec un succès nuancé !) :

Avec des allumettes, on réalise des « petites maisons » comme sur le dessin ci-dessous.



1 – Combien faut-il d'allumettes pour réaliser
a) 1 maison ?
b) 3 maisons ?
c) 25 maisons ?
2 – Écrire un programme de calcul qui permet de trouver le nombre d'allumettes pour réaliser n'importe quel nombre de « maisons ». Développer et simplifier le programme de calcul trouvé.
3 – En observant le résultat obtenu à la question précédente, Jacques affirme qu'avec 61 allumettes, il construira des maisons et qu'il ne restera aucune allumette. Pourquoi sa phrase est-elle vraie ?

Annexe

Nous reproduisons ci –dessous le texte d'un problème posé au brevet 2007. Celui-ci porte sur un programme de calcul, décrit par étapes successives. La dernière question demande de montrer que le résultat obtenu en initiant le calcul avec un entier est toujours un carré. Les collègues qui ont eu l'occasion de corriger cet exercice nous ont dit n'avoir trouvé que un ou deux élèves sur cinquante qui ont réussi en se servant du calcul littéral à traiter cette question. Pour le moins, on peut dire qu'en fin de collège très peu d'élèves savent associer une expression littérale à un programme de calcul!

Brevet des collèges 2007

Activités numériques 2

On donne un programme de calcul :

Choisir un nombre. Lui ajouter 4. Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi. Ajouter 4 à ce produit. Ecrire le résultat.

1) Écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre -2, on obtient 0.

2) Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.

3) a) Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).

b) En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul ? Justifier la réponse.

4) On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

Solution attendue pour 3.b)
Soit N l'entier de départ: $(N+4)xN+4=N^2+4N+4=(N+2)^2$ cqfd