Un P.E.R. sur la similitude qui débute par le théorème de Thalès en quatrième

Equipe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille

Sommaire

Cadre général et motivation des choix didactiques

Considérations générales

Dans le premier alinéa du programme de 4e de 1998, concernant la géométrie et inchangé sur ce point en 2005, on trouve, sous l'intitulé « triangles » et dans cet ordre, les paragraphes « milieux et parallèles », puis « triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes ».
C'est toujours dans cet ordre que les manuels présentent les deux leçons, et c'est un usage très fréquent chez les enseignants.
Le choix de cette progression ne trouve son origine que dans une transposition didactique s'appuyant sur l'idée qu'il est plus facile d'étudier d'abord le particulier pour arriver ensuite au général. Dans le cas du théorème de Thalès, une assez bonne familiarité des élèves avec la notion de milieu d'un segment engage à étudier d'abord le cas particulier de la droite des milieux des côtés d'un triangle. Du point de vue de l'enseignant, ce choix est renforcé par le fait que - comme le soulignent les commentaires du programme- cette propriété fournit une occasion de démonstration à la portée des élèves de quatrième, en utilisant les connaissances

enseignées en cinquième sur la symétrie centrale et le parallélogramme. Il en est de même pour la réciproque de cette propriété. C'est seulement après que ces deux propriétés ont été proprement démontrées, qu'on présente la propriété dite de Thalès comme une généralisation de la propriété dite des milieux ; on peut en démontrer quelques cas très particuliers. Enfin, on présente des applications de la propriété de Thalès sur quelques exercices de calcul de distances inaccessibles.
On voit assez bien comment les raisons qui motivent l'étude de ces propriétés ne sont pas transparentes pour l'élève puisqu'il n'a l'occasion de les rencontrer que lors des derniers exercices d'application du chapitre. Certains élèves saisiront peut-être alors l'occasion d'une première rencontre avec le problème et feront pour eux-mêmes le parcours d'étude à l'envers... Beaucoup d'autres, nous en sommes convaincus, considèreront une fois de plus que les maths, « on les fait parce qu'on nous dit de les faire », ou on y renonce...

Une brève analyse

Nous sommes tout d'abord partis à la recherche de raisons qui pourraient motiver que l'on s'intéresse, tant de l'intérieur des mathématiques que du point de vue d'élèves de 4^{e}, à l'étude du théorème de Thalès « dans les triangles ». On peut voir ce théorème comme se rapportant, dans des cas particuliers, à de problèmes « d'agrandissements et réductions » comme l'écrivent les programmes de 4^{e} et 3^{e}, quoique la rencontre avec de tels problèmes ait eu lieu bien avant ; sans doute dès l'école primaire, en tout cas dès l'étude du thème des échelles en 6^{e}. Au-delà de ce que le programme appelle « agrandissements et réductions », se trouve la notion de similitude ; à ce propos, D. Hilbert note, dans *Les fondements de la géométrie*, que le théorème de Thalès est le « théorème fondamental de la similitude ». Le problème didactique posé peut donc devenir celui de l'organisation de la rencontre des élèves avec le concept de similitude, de telle manière que l'étude du théorème de Thalès soit vécue dans le travail de la classe comme une nécessité pour répondre à une ou des questions relevant de la similitude ; notamment de celle des triangles. Partir ainsi d'une question générant davantage de mathématiques que celles issues du seul théorème induit deux conséquences didactiques.
L'ordre de la progression traditionnelle – d'abord la droite des milieux, ensuite le théorème de Thalès – est inversé. On rencontre d'abord la notion de triangles semblables, au cours de laquelle on étudie expérimentalement les relations entre longueurs des côtés. On réduit la propriété observée à l'énoncé de la propriété de Thalès en conformité avec le programme. À la suite de cette étude, la rencontre avec la propriété « parallèles et milieu » est vue comme preuve très partielle du théorème, dans le cas du rapport $\frac{1}{2}$. Ce cas établi, on peut alors le démontrer dans d'autres cas particuliers (rapports $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, etc.), et nous nous en contenterons ; c'est une manière courante en mathématiques dont une illustration tient par exemple dans l'histoire de la démonstration du théorème de Fermat. Dans une institution didactique, le professeur peut attester de la validité du savoir, garantie par une autre institution mathématique que celle de la classe ; on dira donc que l'on admet le théorème lorsque le rapport est quelconque. Enfin on énoncera et démontrera la réciproque, dont un cas particulier est appelé « propriété de la droite des milieux ».
La question étant relative à une notion mathématique de plus grande ampleur – la similitude – , elle a un fort pouvoir générateur d'étude. Elle pourra ainsi se décliner sous forme de reprises du travail de la question, dans un parcours d'étude et de recherche courant sur plusieurs années : les « agrandissements-réductions » en 4^{e} et 3^{e}, les « triangles de même forme », comme les désigne le programme de 2de, l'homothétie en 1re S et enfin les similitudes, directe et inverse, en Terminale.

Nos propositions

La question initiale, posée aux élèves, porte sur l'étude des triangles en fonction de leurs angles : que peut-on dire de deux triangles qui ont un même angle, deux angles, les trois angles ? Des triangles de ce type ayant été construits par les élèves, il s'agit ensuite de les observer et les « comparer » ; autrement dit d'évaluer leur degré de… similitude. Pour cela, et afin de les « transporter », l'utilisation du papier calque est nécessaire.

Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de l'organisation didactique que nous avons conçue et qui a servi de support aux séances passées dans plusieurs classes de 4^{e}. Cette présentation intègre les éléments d'analyse *a posteriori* qui nous ont conduits à modifier quelques-unes des parties. Si l'on demande à quoi sert le théorème de Thalès, il est fort probable que la réponse donnée par les élèves ayant vécu cette situation évoque la détermination de longueurs de segments, ceux des côtés d'un triangle, qui étaient hors de portée d'une mesure, et que cela correspond à un cas particulier de triangles semblables. Une autre des dimensions que cette proposition de début de PER tente d'atteindre est la conduite des élèves vers une rencontre avec la puissance du modèle mathématique dans sa confrontation à l'expérience : le modèle prédit les longueurs des côtés d'un « grand » triangle, c'est alors le modèle qui prédit comment doit être la réalité ! Des exercices à la maison relatifs aux distances inaccessibles trouvent alors leur sens, de même qu'a alors plus de chances d'en prendre l'enseignement des mathématiques… Comme indiqué dans les lignes qui ont précédé, l'étude se poursuivra au Collège par la rencontre avec le théorème dans d'autres configurations, sa réciproque et les agrandissements / réductions, puis au Lycée par les cas de similitude, l'homothétie et les similitudes directe et inverse en tant que transformations. On dispose ainsi d'une esquisse de PER concernant les mathématiques de programmes s'étalant sur cinq à six années, et dont l'étude peut être relancée par des questions génératrices amenées par le professeur, en liaison avec les questions précédemment étudiées.

La proposition de direction de l'AER

> *Dans la présentation qui suit, les commentaires destinés à l'enseignant sont en caractères différents -comme ceux-ci- et en retrait.*

Temps : 0

Titre du chapitre : Des triangles...

(On n'annonce évidemment pas le théorème de Thalès ou la droite des milieux afin que les élèves ne se précipitent pas sur des résultats dans les manuels, en cours particulier ou autre)

Première étape : Que dire de triangles vérifiant des conditions sur leurs angles ?

> *P devra avoir prévu une feuille de papier calque format A4 par élève, ou mieux, du transparent et des feutres effaçables. Il est important d'avoir un format au moins A4, et que P n'incite pas les élèves à économiser le papier, par exemple en plaçant les dessins dans telle partie du papier : ainsi, dans les groupes, les élèves, selon leurs habitudes, dessineront des triangles de tailles différentes, ce qui favorisera l'émergence de la notion d'agrandissement / réduction. Si le format du papier est petit, tous les triangles auront des côtés dont les longueurs auront des mesures du même ordre de grandeur et les relations de proportionnalité entre celles-ci apparaîtront plus difficilement.*

La question présentée à la classe :

Qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles ?

1. Par exemple : Quand on fixe un angle.

Sur la feuille de papier calque distribuée, chacun de vous trace un triangle dont un angle mesure 43°.

Comparez votre triangle avec ceux de vos voisins de groupe.

Que pouvez-vous dire ?

> Il faut s'attendre à des difficultés de construction des angles, en particulier l'angle de 43° pourra être confondu avec celui de 37°, ils pourront « l'arrondir » à 40°, ou le confondre avec son supplémentaire : la technique d'utilisation du rapporteur n'est pas encore acquise, les garde-fous que sont les notions d'angles aigus, obtus ne fonctionnent pas encore, ce PER fournira des occasions aux élèves de revisiter leurs connaissances antérieures dans le domaine des angles.

> *P laisse peu de temps aux groupes pour chercher, les élèves ne trouvent rien de particulier à dire, ils ont raison : les triangles qui ont un même angle ne montrent pas de particularité intéressante.*

Temps écoulé depuis le début de l'heure : entre 10 min. et 15 min.

2. Quand on fixe deux angles :

Sur la même feuille de papier calque, construisez chacun un triangle ABC tel que $\hat{A}$ = 43° et $\hat{B}$ = 115°. (Vous pouvez effacer le premier triangle que vous avez fait)

Utiliser le verbe « construire » plutôt que « tracer » favorise l'émergence d'un milieu pour des propriétés géométriques.
Les élèves demanderont qu'on leur donne une longueur, P répondra qu'ils peuvent choisir celle qu'ils veulent.
Dans cette partie de l'activité, les difficultés de construction d'angles continueront d'apparaître, en particulier ici pour l'angle de 115°.

Comparez votre triangle avec ceux de vos voisins de groupe.
Que pouvez-vous dire ?

Observations du 21/04 :

- Des élèves prennent l'initiative de retourner le calque, d'autres pas ; mais dans ce cas, leurs camarades leur disent de le retourner en allant même jusqu'à se moquer d'eux…
- L'idée de parallélisme et celle de proportionnalité des longueurs apparaît dans certains groupes, pour certains élèves ; certains d'entre eux « voient » qu'il y a un agrandissement ou une réduction (« des triangles sont plus ou moins grands par rapport à d'autres »), mais des « raisonnements additifs » subsistent bien qu'ils disent qu'ils ont « la même forme ». Dès que cela apparaît, il ne faut pas prolonger davantage le temps de recherche pour le reste de la classe car ce temps ne permet pas l'émergence de ces propriétés pour les autres élèves.
- Apparaît parfois une vision « homothétie » chez des élèves qui suggèrent pour centre le centre du cercle circonscrit. C'est sans doute en s'appuyant sur une « vision culturelle » que des élèves utilisent la métaphore (toile d'araignée, poupées russes, boîte de diverses dimensions, etc.)

Quelques remarques issues du 21/04 :

- Le sens du verbe « comparer » semble poser problème aux élèves qui, paradoxalement, utilise ce verbe « en acte » pour superposer les angles égaux, mais n'arrivent pas à en déduire quelque chose et en perde le sens ensuite. Peut-être cela tient-il au fait qu'il n'y a rien à comparer dans le cas où il n'y a qu'un angle donné car, généralement, deux triangles qui ont un angle en commun, sont « incomparables » car ils sont trop différents !… Du coup, le sens du verbe est perdu et cela empêche le déroulement prévu pour le cas des triangles semblables où, pourtant, ce verbe prend un certain sens. Il faut donc prévoir un changement dans la formulation de cette consigne
- Il ne faut pas dissocier « construire un triangle vérifiant une ou deux conditions sur les angles » avec la « comparaison » des triangles, car on perd du temps et le sens s'échappe pour certains élèves. Si on construit des triangles vérifiant des conditions, c'est pour les comparer. Du coup, il vaut mieux commencer par dire que l'on veut « comparer entre eux » des triangles qui vérifient entre eux des conditions : 1er cas : un angle égal à 43° ; 2e cas : un angle de 43° et un de 115°.
- Il faut préciser que l'on compare l'ensemble des triangles (et non deux à deux) car les « propriétés » apparaissent de manière plus visible lorsqu'on superpose 4 ou 5 calques (parallélisme et proportionnalité)
- Certains élèves dessinent des triangles qui sont « quasiment isométriques » ; cela tient sans doute à une occupation « culturellement standard » de la feuille de calque. Pour éviter cela, on peut dans ce sens distribuer des feuilles de dimensions différentes.

Temps écoulé depuis le début de l'heure : entre 15 min. et 28 min.

Dès lors que l'on demande une comparaison à l'aide du papier calque, on pratique une géométrie « du papier calque » qui est différente de celle de la feuille de papier : les retournements sont-ils acceptés, deux figures superposées sont-elles les mêmes figures ? Nous devrons développer ce thème ce thème ultérieurement. Pour l'instant, on se contente d'une vision « naturelle » : deux figures superposables sont « les mêmes », on peut retourner le papier calque (on rencontrera les effets d'un retournement du papier calque au cours de ce travail).

Quoi qu'il en soit, très vite apparaît l'idée que deux angles donnés c'est comme trois, car le troisième était fixé par la propriété de la somme des angles d'un triangle, propriété bien connue des élèves. Cela permet même à certains d'entre eux de trouver que leur angle « de 115° » est faux, puisque le troisième angle qui devrait mesurer 22° d'après le calcul est autre. Il y a là un passage de la construction (domaine expérimental) à la géométrie.

La configuration de Thalès devrait facilement apparaître dans l'expérience de comparaison des triangles par superposition des calques. Dès qu'elle apparaît dans quelques groupes, il faut interrompre le travail pour une mise en commun, et donner la parole à ceux qui l'ont trouvée (ce sont d'ailleurs eux qui veulent parler, car la découverte est saisissante) ; ceux qui ne l'avaient pas obtenue la recherchent alors, la trouvent facilement et l'explorent à partir des trois sommets (ils tentent de superposer successivement les trois angles, un à un).

Si les constructions sont mal faites, les parallèles n'apparaîtront pas dans certains groupes, ce qui n'est pas grave si un groupe au moins les aura mises en évidence : après la mise en commun, les élèves vérifient de nouveau leurs angles car ils aimeraient bien avoir les parallèles ; s'ils ne le font pas, P les y incitera.

Si la configuration n'apparaît pas, passer au « défi » (*cf.* plus loin dans le texte), sans la conjecture**, après l'institutionnalisation menée par le professeur qui sollicite les élèves afin de dégager l'essentiel des résultats obtenus, et qui prend la forme suivante notée dans le cahier

Temps écoulé depuis le début de l'heure : entre 25 min. et 40 min.

Propriété : la somme des angles d'un triangle est 180°.
Nous en déduisons la mesure du troisième angle : 180° - (43° + 115°) = 22°.
Cela nous permet par exemple de vérifier qu'on a bien construit les deux angles donnés

Propriété : Si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est déterminé.

Définition : Deux triangles qui ont les mêmes angles sont appelés triangles semblables.

*****Conjecture : Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.***

Temps écoulé depuis le début de l'heure avec la classe lente : 1 h 05 min

Cette première étape se termine par la donnée d'un travail extérieur à la classe :

Enoncé du travail à la maison :
Trace un triangle *ABC* de ton choix et construis un triangle *AEF*, semblable au triangle *ABC* et tel que les côtés [*AE*] et [*AB*] aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés [*AF*] et [*AC*].
Démontre que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles.
Temps écoulé depuis le début de l'heure : entre 35 min. et 1 h 30 min.

> *P relève les calques sur lesquels chacun aura écrit son nom et les distribuera à la prochaine séance car ils sont nécessaires pour la suite. Il corrigera les angles faux.*

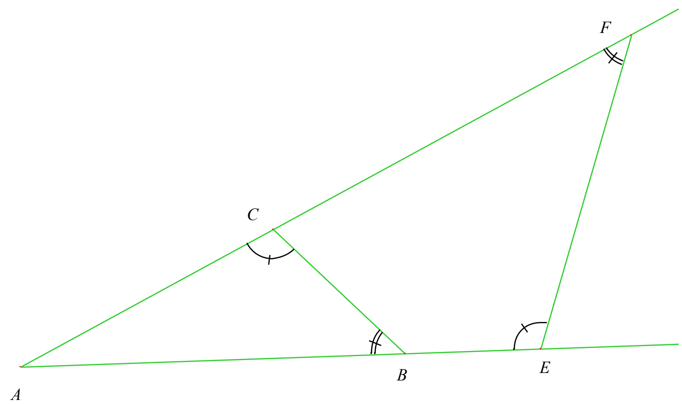
Deuxième étape : Expérience et déduction : recherche du plus grand triangle

> *P aura apporté une feuille de calque par élève, de la même dimension que la feuille précédente.*

Le travail donné à la maison est corrigé. Avoir engagé les élèves dans ce dernier travail permet de faire vivre un certain nombre de questions qui font partie d'une culture mathématique à transmettre, et qui se vit plus facilement qu'elle s'énonce. Ce « résultat » avait été établi dans le cadre d'une géométrie expérimentale : était-il prévisible, explicable, déductible du point de vue de la géométrie théorique dont on dispose ? Les droites sont-elles parallèles dans le cadre de cette géométrie ? Pour expliciter notre propos, citons Chevallard Y. et Jullien M. 1991 : *« quelque savante qu'ait été son organisation, la géométrie n'a jamais cessé de jouer le rôle de technologie de l'espace, de théorie de la maîtrise pratique de l'espace. Il s'agit-là d'une fonction sociale attestée dès la plus haute antiquité et dont même la tradition savante nous a rapporté l'existence à travers quelques épisodes mémorables - Thalès et les pyramides ou, plus près de nous, Archimède et ses « méchaniques ». (...) Toute représentation graphique est ainsi un moment, une forme déterminée (et variable), d'une modélisation de l'espace, moyen de production de connaissances que commande le savoir géométrique et qui commande l'action sur le sensible. C'est à cette notion que l'on devra tenter de rapporter ce que tout enseignement de la géométrie, quel qu'il soit, propose. »*[1]

De fait, certains élèves se sont peut-être aperçus que l'énoncé du problème méritait une légère retouche si l'on souhaite en faire un résultat valide dans le cadre de la géométrie théorique : il est nécessaire de préciser auquel des deux angles $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ est égal chacun des angles $\hat{E}$ et $\hat{F}$ car, sinon, le parallélisme de (*CB*) et (*EF*) n'est pas garanti. C'est l'expérience qui a parlé, en construisant au moins une figure qui vérifiait l'énoncé du problème, mais pas sa conclusion. De fait, on ne pouvait utiliser dans un tel cas le résultat théorique qui énonce que si les angles correspondants sont égaux alors les droites sont parallèles.

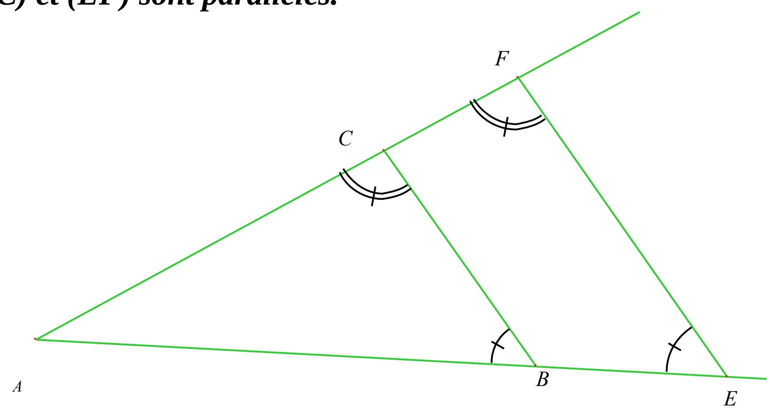
[1] Chevallard Y., Jullien M. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, Première partie, *Petit x, 27,* 41-76.



Si ce constat n'apparaît pas, du fait de la « transparence » entre similitudes directe et inverse évoquée plus haut, c'est alors au professeur de faire rencontrer aux élèves l'insuffisance des hypothèses du problème posé. Le nouveau travail qui vient d'être mené aboutit à l'institutionnalisation du résultat suivant :

Propriété :

ABC et AEF étant deux triangles semblables avec E $\in$ [AB] et $\hat{E} = \hat{B}$, F $\in$ [AC] et $\hat{F} = \hat{C}$, alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.



Une nouvelle question émerge alors, qui peut être amenée par des élèves car une certaine culture mathématique a commencé à s'installer en 4^{e}, ou qui est posée par le professeur si ce n'est le cas : celle de la réciproque de la propriété qui vient d'être énoncée. En poursuivant le même objectif d'une continuité de l'étude entre les divers lieux et temps qui la voient se dérouler, le travail de recherche de la validité de la réciproque peut être mené à la maison, et guidé par un énoncé élaboré collectivement en classe.
« Soient un triangle *EFG* et une droite parallèle à (*FG*) qui coupe [*EF*] en *P*, et [*EG*] en *R*. Peut-on affirmer que les triangles *EFG* et *EPR* sont semblables ? Prouvez votre réponse. »

Il est important d'avoir donné ce travail avant la découverte de la proportionnalité des longueurs des côtés, sinon les élèves tenteront de se servir de cette propriété puisque c'est la dernière et qu'elle est forte. Ils confondront alors propriété et réciproque et n'auront pas eu l'occasion d'aller rechercher dans leurs connaissances de cinquième sur les angles et parallèles.
Une confusion fréquente - soulignée par Y Chevallard dans son séminaire pour les PLC2 - entre la définition des angles

correspondants et les deux propriétés réciproques qui les associent au parallélisme, a toutes les chances d'apparaître ici : il faudra prendre le temps d'y travailler. Le travail à la maison qui suivra fera travailler la propriété réciproque.

P annonce : « Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au ***défi*** de construire un triangle semblable aux autres, le plus grand possible, sur un calque de la même dimension. Vous avez exactement 10 minutes. Celui qui gagne aura deux points de plus, le second un point de plus. C'est un travail individuel.
Je vous rends vos calques de la dernière fois (P aura corrigé les triangles faux) et je vous distribue un autre calque de la même dimension. Ecrivez votre nom sur ce calque et numérotez-le n° 2.

Quelques indications à partir de ce qui a pu être constaté :

- *Le démarrage peut être long pour certains, mais les regards sur le travail des autres finissent par porter en donnant des idées...*
- *Les élèves choisissent une mesure d'un côté et tentent de construire un triangle avec les angles donnés, sans se servir de la configuration. Ça « marche » ou non ; ils doivent recommencer si c'est trop grand, mais ils utilisent la configuration si c'est trop petit, puis des allers-retours entre plus grand, plus petit. Ils placent ensuite le triangle du mieux possible sur le calque afin de l'agrandir encore.*
- *Les élèves commencent à partir de leur triangle précédent, puis ils utilisent la configuration de Thalès pour agrandir leur triangle, si cela « déborde », ils rapetissent et continuent comme ci-dessus.*
- *Si le triangle n'est pas assez grand, ils l'effacent et recommencent ailleurs sur le calque.*
- *A partir d'un triangle jugé trop petit, la configuration de Thalès est utilisée en utilisant successivement les trois côtés : c'est la stratégie gagnante, associée avec un changement d'orientation éventuel pour disposer de davantage d'espace.*
- *La question « qu'est-ce que c'est qu'agrandir ? » devrait être posée par les élèves, et faire apparaître que les trois côtés grandissent ensemble. Elle ne sera peut-être pas formulée, mais elle revivra lors de la troisième séance, et devra alors prendre corps.*
- *Certains commencent par prendre la diagonale de la feuille format A4 comme côté : avec les angles choisis, on n'obtient pas directement le plus grand triangle possible. Si P distribue des calques d'une autre dimension, il devra choisir dès le début du PER des angles adaptés, de façon à ce que la méthode gagnante nécessite la configuration de Thalès.*

Au bout des 10 minutes, dans chaque groupe, les élèves sélectionnent le plus grand des trois ou quatre triangles ; en même temps ils vérifient évidemment la similitude de ces triangles. Puis collectivement nous sélectionnons le plus grand triangle parmi ceux sélectionnés.
Pour le second triangle répondant au problème, on prend parmi ceux qui ont été sélectionnés par les groupes, puis on vérifie si besoin avec les triangles restant dans les groupes.

- *La configuration devrait facilement s'imposer pour la comparaison et apparaître à ceux qui ne l'auront pas encore rencontrée.*
- *Lors de la comparaison à l'intérieur des groupes, certains triangles seront éliminés car les angles ne seront toujours pas justes : cela pourra être remarqué soit directement, lorsque les angles qui ont été superposés ne coïncident pas, soit indirectement, lorsque les angles choisis pour la superposition coïncident mais que les troisièmes côtés ne sont pas parallèles. On peut compter sur l'honnêteté et l'intransigeance des élèves lorsqu'il s'agit de trouver un vainqueur dans un défi !*
- *Toujours à l'intérieur des groupes, certains trouveront que pour un triangle donné, c'est tel côté qui est plus grand et pour un autre, c'est tel autre qui est plus grand ; étant embarrassés, ils appelleront P comme arbitre qui leur demandera de vérifier si les triangles sont vraiment semblables et les élèves trouveront des erreurs (*).*
- *Si on a utilisé du papier transparent, on utilisera un rétroprojecteur, sinon, il sera difficile de faire les comparaisons collectivement : le papier calque « ne passe pas » au rétroprojecteur, on pourra dans ce cas se placer devant une vitre. Il est en tout cas essentiel que cette comparaison collective soit effectuée par des élèves (plusieurs), et que ce ne soit pas P qui la fasse… en « sortant de sa poche » la configuration.*
- *La comparaison collective peut encore être l'occasion d'éliminations pour mauvaise construction d'angles : on s'accordera sur une erreur possible d'un degré par angle (certains élèves soulèveront le problème : s'il y a un degré de plus sur deux angles, cela fait deux degrés de moins sur le troisième...)*

P demande au vainqueur de présenter sa méthode et fait remarquer que les trois côtés « grandissent ensemble » ; lorsque cela semble ne pas être le cas, c'est que les triangles ne sont en fait pas semblables, comme dans (*).
Les élèves vérifient avec leurs triangles et tombent d'accord sur l'idée des trois côtés qui « grandissent ensemble ».

P fait le point sur la question initiale qui portait sur les angles : on y a répondu (un, deux et trois angles) et on découvre alors des propriétés relatives aux côtés (des parallèles), à leurs longueurs (on peut trouver plus grand !)
Dans les classes où la configuration ne serait pas apparue dès la première étape, on énoncera la conjecture ** et on donnera le premier travail à la maison. Il faudra le corriger et donner le deuxième travail à la maison. Il serait bon de ne pas donner les deux énoncés en même temps ; le professeur organisera le travail en fonction de l'emploi du temps de sa classe.

Troisième étape : Similitude des triangles et proportionnalité des longueurs

Correction du (deuxième) travail donné à la maison : utilisation du théorème sur les parallèles et angles correspondants : si deux droites d et d’ sont parallèles, les angles correspondants qu’elles déterminent avec une sécante commune sont égaux.

Institutionnalisation :

Propriété :
Si dans un triangle EFG, une droite parallèle à (FG) coupe les côtés [EF] et [EG] respectivement en P et R, alors les triangles EFG et EPR sont semblables.

> P devra avoir préparé sur du papier épais, ou du carton, le triangle agrandi à présenter. Il est important que les dimensions de ce triangle soient telles qu’on ne puisse pas le dessiner sur du A 4 ou même du A 3, car il s’agit maintenant d’utiliser le modèle « triangles semblables » pour prédire les résultats par le calcul.

P annonce : « J’ai fabriqué moi aussi un triangle qui suit les mêmes contraintes que vous avez eues lors de la séance précédente (question 2) : triangle *ABC* tel que $\hat{A} = 43°$ et $\hat{B} = 115°$. »
P présente le triangle découpé : « C’est bien un triangle semblable aux vôtres ? Vous pouvez vérifier si vous voulez (le triangle peut passer dans les groupes, mais P doit l’avoir récupéré lorsqu’il pose la question suivante !). J’ai choisi un côté [*AC*] de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? »

> Remarque : nous avons choisi cette longueur de 60 cm de façon que les élèves ne puissent pas dessiner le triangle en vraie grandeur, même sur une copie double (format A3), l’activité a été testée avec 63 cm et 66 cm, sans changement significatif dans le travail des élèves.
>
> En présentant un « grand » triangle, on plonge les élèves dans un milieu où la notion d’agrandissement – réduction devrait apparaître : l’espace de la feuille A 4 habituelle et celui du grand triangle n’ont pas la même échelle (il s’agit ici de passer du méso-espace au micro-espace). C’est ce changement d’échelle qui contraint à recourir à l’utilisation de la propriété.
>
> P devra s’efforcer de demander de « trouver » les longueurs, en restant neutre sur la méthode.

Réactions attendues :

- *Certains élèves pourraient demander s’ils peuvent mesurer les longueurs des côtés du grand triangle pour les trouver (mais nous n’avons pas rencontré ce cas, il semble que le changement d’échelle provoqué par la présentation de ce « grand » triangle induise de se placer dans un milieu des longueurs inaccessibles). Si toutefois la question se présente P répond qu’on ne peut pas mesurer, qu’il faut les trouver depuis sa place, mais qu’on peut toujours vérifier la validité de sa méthode avec les triangles semblables déjà obtenus sur ses calques.*
- *Certains élèves voudront vérifier la similitude des triangles, P les laisse faire.*

- *Certains se restreindront à n'utiliser que les triangles qu'ils ont déjà construits, d'autres en construiront de nouveaux dont les longueurs seront adaptées à la stratégie envisagée.*

Conjectures attendues :

- *Ajouter la même longueur à tous les côtés : à partir d'un triangle déjà construit ou pas, on calcule la différence entre AC et 60 cm, puis on l'ajoute aux deux autres côtés : cette idée apparaît, y compris en 3^e^, mais a une brève durée d'existence dans le groupe, l'idée de la proportionnalité gagnant rapidement du terrain.*
- *Ceux qui se servent des triangles déjà construits trouvent en général un coefficient rationnel. Dès lors que l'un d'entre eux a « la chance » d'avoir un coefficient décimal, ou mieux, entier, ou bien qu'un autre pense à construire un triangle ad hoc, l'idée diffuse très rapidement dans la classe (les rationnels ne sont pas encore suffisamment familiers et les élèves les évitent dès qu'ils le peuvent...) Ils passent alors de la mesure des côtés de leur triangle au calcul des côtés du grand triangle.*
- *Certains élèves peuvent être arrêtés dans leur travail lorsqu'ils ont à mesurer des longueurs sur leur feuille, pensant alors que leur méthode n'est pas valable, puisqu'elle comporte des mesures ; ce n'est pas, d'après eux, ce que peut attendre le professeur. P les rassure en les renvoyant à la consigne qui n'indique pas de méthode.*
- *Une erreur possible : les élèves se trompent de côté, confondant AB et AC par exemple. Ils s'aperçoivent de leur erreur la corrigent lors de la mise en commun des résultats.*

Pour la mise en commun des résultats, les propositions sont relevées ***dans un tableau*** où l'on inscrit les longueurs des côtés des triangles *ABC*, comme ci-dessous. Dans ce cas, c'est le professeur qui décide du ***type d'ostensifs*** à utiliser : les élèves ont déjà, en acte, utilisé la proportionnalité des longueurs, il s'agit maintenant de l'identifier en… la donnant à voir. Ce qui est évidemment l'une des fonctions d'un ostensif (Bosch & Chevallard, 1999) !
On porte sur un des côtés du tableau les coefficients de proportionnalité qui apparaissent dans un sens, et dans l'autre sur l'autre côté : par exemple multiplier par 1/10 pour passer du grand au petit, puis multiplier par 10 pour passer du petit au grand et calculer les longueurs demandées.

AC	*AB*	*BC*
60cm		
6cm		
10cm		

Lors de la mise en commun, plusieurs groupes trouvent les mêmes résultats, alors qu'ils ont pris des coefficients différents. La méthode est alors acceptée, y compris par ceux qui ont fait des erreurs de calcul ou de choix de côtés, et ces élèves corrigent.

La conjecture de proportionnalité des longueurs des côtés des triangles semblables est forte.

Institutionnalisation :

Conjecture : Si deux triangles sont semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. En particulier, pour des triangles ABC et AEF dans cette configuration (dessiner la configuration de Thalès), les longueurs, les longueurs AB, AC et BC d'une part et AE, AF et EF d'autre part, sont proportionnelles.

Une fois encore, le travail donné à la maison constitue un prolongement d'étude : à défaut de le démontrer, on peut vérifier que deux triangles semblables déjà dessinés ont leurs côtés proportionnels, les élèves disposant pour cela des divers triangles qu'ils ont dû dessiner en classe. Cela constitue le travail « à la maison » pour la prochaine séance.

Quatrième étape : Ecrire le théorème de Thalès

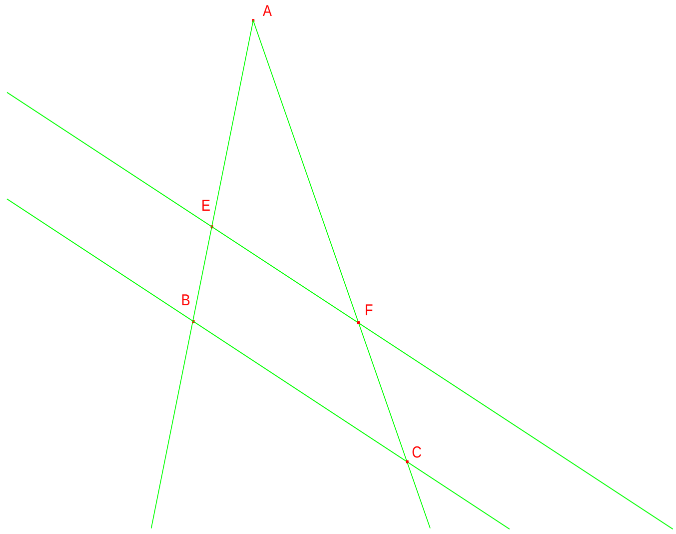
Pour commencer, on corrige l'exercice donné : il s'agissait pour chaque élève de vérifier que pour deux triangles semblables qu'ils avaient déjà dessinés, les longueurs sont proportionnelles.
Pour cette correction, nous appellerons $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ les deux triangles de chacun des élèves, on disposera les longueurs dans un tableau, on recherchera le coefficient de proportionnalité pour arriver à l'égalité des rapports ; on écrira ensuite le théorème de Thalès dans les triangles.

Nous venons de vérifier sur plusieurs cas que
Dans un triangle ABC,

- ***Si E appartient au segment [AB] et F appartient au segment [AC]***
- ***Et si les droites (EF) et (BC) sont parallèles, alors on peut écrire :***

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

C'est ce que nous appelons le « théorème de Thalès dans les triangles », théorème admis que nous démontrerons dans certains cas particuliers
Cette configuration géométrique est appelée « configuration de Thalès »



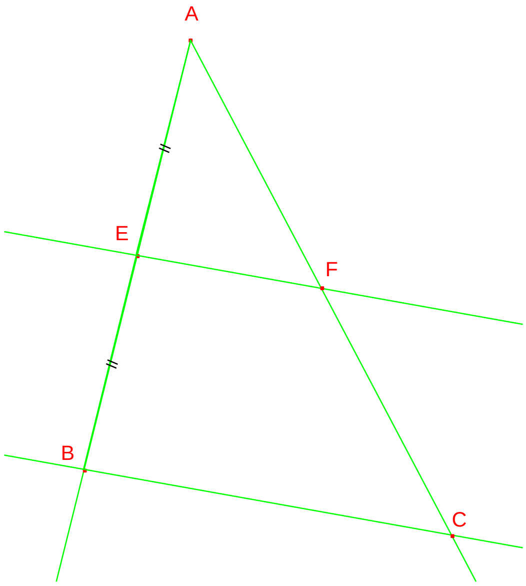
Si les élèves ne le font pas, P peut poser la question « à quoi ça sert ? ». En élargissant l'expérience vécue dans le travail précédent, on pourra évoquer le calcul des longueurs inaccessibles. Un travail à la maison sera donné portant sur cette question, dont on trouve des exemples dans les manuels. Parallèlement au travail de la technique relatif aux tâches dans lesquelles intervient le théorème de Thalès, et qui se mène à travers les exercices donnés aux élèves, on poursuit l'étude des démonstrations de certains cas particuliers du théorème de Thalès.

Exercices

Cinquième étape : Recherche d'une preuve du théorème de Thalès dans quelques cas particuliers.

P fait remarquer que nous n'avons pas démontré ce théorème, mais que nous avons vérifié sa validité ***expérimentalement*** et qu'elle semble ne faire aucun doute. Il peut indiquer que les mathématiciens choisissent parfois de démontrer un théorème dans des cas particuliers jusqu'à ce que l'un d'entre eux trouve les moyens de le prouver en général. C'est ce qu'on va tenter de faire.

P fera évoquer par les élèves les cas particuliers qu'ils envisagent pour la configuration de Thalès, et le cas du milieu devrait arriver facilement. On peut alors faire dégager les hypothèses correspondant à ce cas particulier afin de se mettre d'accord sur la recherche à mener : démontrer que si $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ et que (EF) // (BC) alors $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$, ce qui revient à dire que F est le milieu de $[AC]$ et que $EF = \frac{1}{2}BC$. Les élèves sont engagés à construire diverses figures et à vérifier expérimentalement si ces diverses constructions donnent effectivement le résultat attendu.

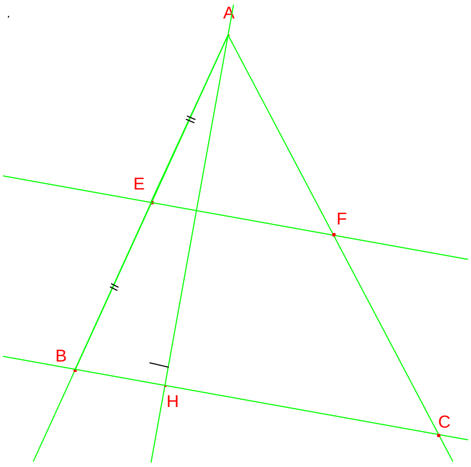


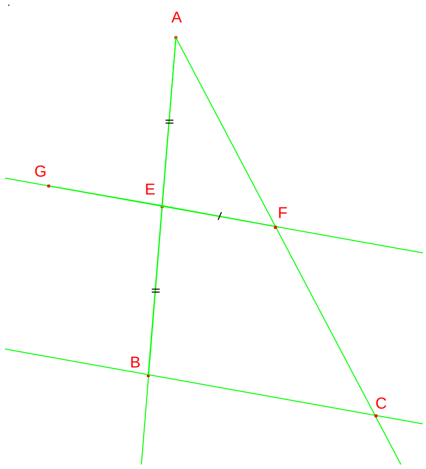
La démonstration pose des difficultés car elle suppose des élèves qu'ils prennent l'initiative de construire et d'ajouter des éléments qui ne se trouvent pas initialement donnés, puis de raisonner sur des sous-figures afin d'obtenir un résultat concernant la figure. Ce qui à la fois constitue ***une rupture du contrat didactique*** usuel, qui stipule que toutes les données dont on peut se servir se trouvent dans l'énoncé (il n'y a rien à rajouter à ce que nous donne l'énoncé), et nécessite une certaine maîtrise, chez les élèves, d'une dialectique entre sous-figures et sur-figures.

Un premier travail paraît indispensable : ***rechercher tout ce que l'on sait*** à propos du milieu, puisqu'il faudra utiliser un théorème ou une définition qui concluent qu'un point – F dans ce cas – est milieu d'un segment – $[AC]$ dans ce cas –, et en faire un recensement exhaustif. Ce travail peut être mené hors de la classe. On peut faire faire ensuite en classe un premier travail de recensement en groupe à partir des résultats individuels trouvés, ou même faire faire ce travail de groupe hors classe. Les élèves ont donc à répondre à la question : ***Quelles sont nos connaissances qui permettent de conclure qu'un point est milieu d'un segment ?*** On procèdera ensuite à une synthèse du recensement des connaissances disponibles dans le collectif-classe, recensement que l'on note au tableau. Dans la liste dressée, on trouve la définition du milieu d'un segment, la propriété des diagonales d'un parallélogramme, la médiatrice, la médiane, le centre du cercle milieu des diamètres, le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, la symétrie centrale et le centre de symétrie, peut-être la conservation du milieu par symétrie… et c'est à peu près tout !

Il est maintenant nécessaire de tester l'utilité de chacun de ces résultats relativement au problème à traiter. Ce qui conduit à s'interroger : ***Comment se servir de ces résultats pour répondre à la question ?*** En fait, pour une éventuelle utilisation, tous nécessitent (à l'exception de la définition, peu fonctionnelle pour conclure que F est milieu de $[AC]$) d'ajouter des constructions à la figure initiale : il n'y a en effet ni parallélogramme, ni médiatrice, ni médiane, ni cercle, ni triangle rectangle, ni symétrie orthogonale et les seuls points symétriques qui apparaissent sont A et B, symétriques par rapport à E. Le rajout « d'objets » à cette figure apparaît ***comme une nécessité*** pour pouvoir se servir des connaissances disponibles. Ce qui montre que, telle que donnée, la figure « n'est pas fonctionnelle » ; on ne peut « rien en tirer ». C'est un apprentissage mathématique dont on vient d'éprouver la nécessité : il est parfois indispensable de compléter judicieusement une figure pour démontrer des propriétés qu'elle possède, et cette construction nouvelle n'a qu'un strict intérêt utilitariste qui permet de… « faire parler la figure » ! On a ainsi conduit les élèves à sortir de l'enfermement dans un certain type de contrat didactique au sein duquel ils ne s'autorisaient pas à « créer » des objets nouveaux dans une figure de l'énoncé du problème donné.

Plusieurs choix s'offrent donc aux élèves et c'est au professeur de les guider, en leur indiquant que la tradition mathématique en a retenu essentiellement deux pour la démonstration : celui du triangle rectangle et celui du parallélogramme. Le premier consiste à « créer » la hauteur (*AH*) dans le triangle *ABC*, le second à « créer »le point *G* symétrique de *F* par rapport à *E*.





Ce qui donne les figures précédentes pour lesquelles la question posée aux élèves est : ***Comment démontrer que F est le milieu de [AC] ?*** La classe peut être subdivisée en deux et la recherche se faire hors temps de classe. La solution est corrigée ensuite en classe, chacun des groupes exposant sa solution.

Démonstrations

. Cas du triangle rectangle

Dans ABH rectangle en H, E est le milieu de l'hypoténuse, donc EA = EH. Comme (EF) // (BC) et (AH) ⊥ (BC), alors (AH) ⊥ (EF). Par suite, (EF) est la médiatrice de [AH]. Donc elle coupe l'hypoténuse [AC] du triangle rectangle AHC en son milieu : F est le milieu de [AC].

. Cas du parallélogramme

Les diagonales [AB] et [GF] du quadrilatère AFBG se coupant en leur milieu E, AFBG est un parallélogramme. D'où AF = BG et (GB) // ((AC). Comme le quadrilatère GFCB a ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme et BG = FC. F étant un point de (AC) tel que AF = FC, c'est le milieu de [AC].

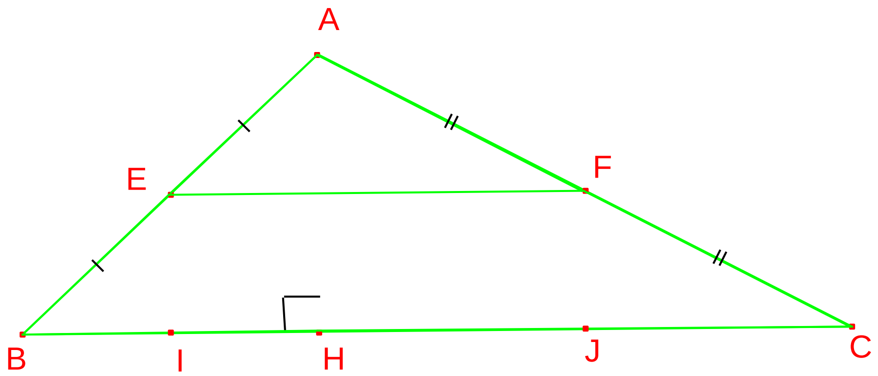
On a donc démontré le résultat suivant que l'on note dans le cours.

Théorème : Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu

Il reste à démontrer que $EF = \frac{1}{2}BC$.

Si on a utilisé la démonstration à partir du parallélogramme *GFCB*, alors $GF = BC$ et comme *E* est le milieu de [*GF*], alors $EF = \frac{1}{2}BC$. On peut donc demander aux élèves de rechercher cette démonstration à partir de la figure sur laquelle ils ont travaillé.

Dans l'autre cas, celui du recours à la hauteur, il est encore nécessaire de compléter la figure ; par exemple en plaçant les points *I* et *J*, pieds des perpendiculaires à (*BC*) issues de *E* et *F*. C'est une première difficulté. La seconde provient du fait que même si la figure montre que $EF = IJ$, elle ne montre pas « simplement » qu'alors $IJ = \frac{1}{2}BC$. La démonstration nécessite le maniement d'égalités obtenues en raisonnant sur des sous-figures, les triangles rectangles *ABH* et *HAC*, pour revenir ensuite au rectangle *EFJI* et enfin conclure sur *ABC*. Dans un tel cas, il nous semble préférable de proposer la démonstration en exercice hors classe ; c'est-à-dire en dirigeant les élèves à partir de sous-questions et en leur laissant du temps. Mais l'amorce de cet exercice peut être faite en classe.



Il est nécessaire d'avoir fait rechercher par les élèves ce que l'on est sûr de savoir à ce stade du travail, soit parce que c'était des hypothèses sous lesquelles on s'était placé soit parce qu'on l'a démontré – la droite (*EF*) est parallèle à (*BC*) et passe par les milieux *E* et *F* de côtés [*AB*] et [*AC*], (*AH*) est la hauteur issue de *A* dans *ABC* –, et ce que l'on souhaite démontrer – $EF = \frac{1}{2}BC$. Cette recension faite, il est possible d'engager en classe les élèves à l'observation de la figure. Le souvenir de la démonstration précédente peut conduire à observer les triangles *AHB* et *AHC* sur lesquels on avait travaillé. Une des toutes premières questions est donc la suivante : ***que savons-nous de ces triangles, et quelles conséquences pouvons-nous en tirer ?*** Le fait qu'ils sont rectangles conduit à énumérer de nouveau les propriétés connues sur ces triangles : angles aigus complémentaires, éventuellement théorème de Pythagore et/ou cosinus selon la progression suivie, milieu de l'hypoténuse et cercle circonscrit,… Le professeur indique que c'est effectivement à partir de cette dernière propriété que l'on va travailler. La nouvelle question est donc celle-ci : ***que savons-nous du milieu de l'hypoténuse de chacun de ces triangles rectangles relativement à leurs cercles circonscrits ?*** La réponse conduit à se souvenir que les médiatrices concourent en ce point. Le professeur indique alors qu'on s'intéressera aux médiatrices de certains des côtés de ces triangles rectangles, plus particulièrement aux côtés [*BH*] et [*HC*]. A partir de ce point l'exercice s'éclaire. Son énoncé peut être le suivant :

Exercice : Etant donné le triangle *ABC*, on appelle *E* et *F* les milieux respectifs des côtés [*AB*] et [*AC*] et *H* le pied de la hauteur issue de *A*.

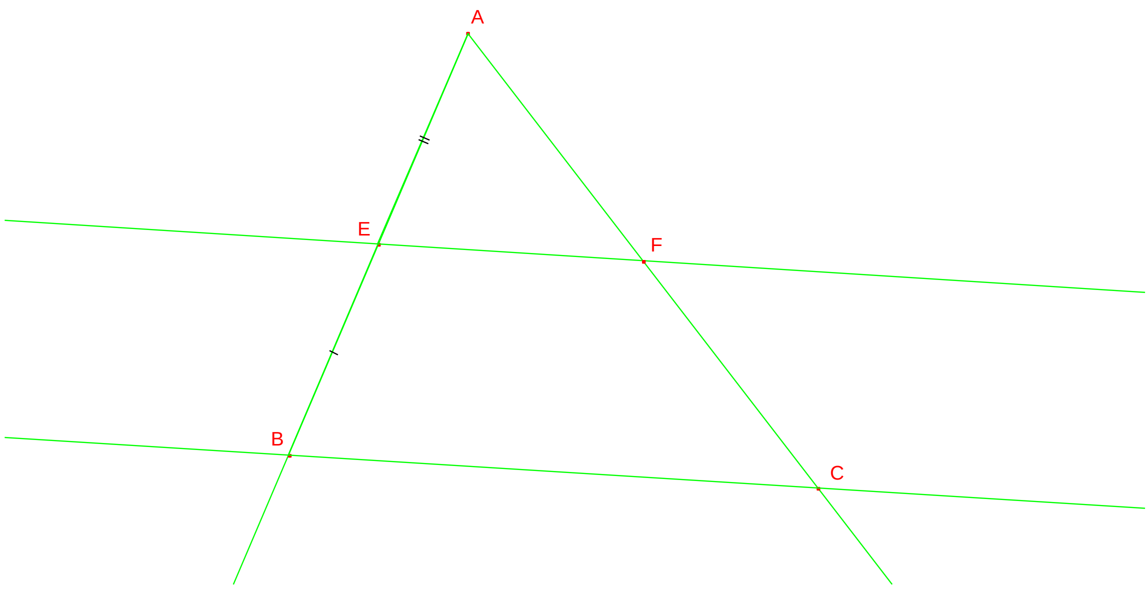
1. On appelle *I* et *J* les milieux respectifs des segments [*BH*] et [*HC*]. Démontrer que $IJ = \frac{1}{2}BC$.
2. Démontrer que $EF = IJ$.
3. En déduire une relation entre les longueurs *EF* et *BC*.

On peut alors compléter le théorème écrit précédemment :

Théorème : Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu et le segment qui joint ces milieux a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

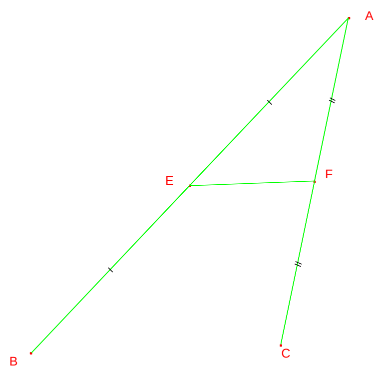
Remarques :

- ***Ce résultat est un cas particulier du théorème de Thalès. Nous avons donc démontré le théorème de Thalès dans le cas où le rapport vaut*** $\frac{1}{2}$
- ***Ce théorème porte parfois le nom de « théorème de la parallèle par un milieu dans un triangle »***

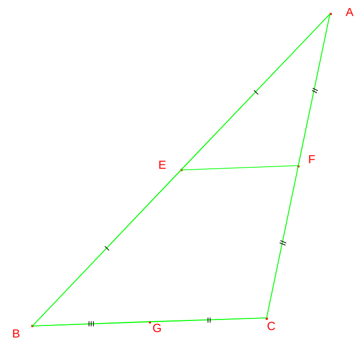


Remarque :
Une autre voie, mathématiquement correcte, et qui ne fait pas appel à des constructions supplémentaires, aurait pu être prise pour cette démonstration. Mais elle apparaît didactiquement délicate car elle conduit à démontrer que deux points, que l'on perçoit confondus sur la figure, le sont effectivement. Nous la donnons néanmoins ci-dessous.

A ce stade du travail, les élèves savent que la droite passant par le milieu E du côté [AB] et parallèle à (BC) coupe le côté [AC] en son milieu F. La figure sur laquelle on travaille est donc désormais la suivante :



Une fois de plus, on peut demander aux élèves ***Que savons-nous à propos d'un segment qui a pour longueur la moitié de celle d'un autre ?*** *On ne sait guère que des éléments relatifs au milieu d'un segment. Cette connaissance devrait amener les élèves à considérer le milieu G de [BC] ; si ce n'est pas le cas, c'est au professeur d'indiquer que l'on cherche à démontrer que EF est égale à la longueur d'un segment d'extrémités G et B ou C. On obtient alors la figure suivante dans laquelle l'égalité* $EF = \frac{1}{2}BC$ *peut être lue EF = BG ou EF = GC :*



Cette observation, guidée éventuellement par le professeur, permet de focaliser l'attention sur [EF] et [BG] ou sur [EF] et [GC]. Il est possible qu'une telle orientation du regard, qui permet de « deviner » les parallélogrammes EFGB et EFCG, engage des élèves à relier G à E ou à F. Si ce n'est pas le cas, c'est au professeur de tracer un de ces segments et de demander aux élèves de décrire ce qu'ils voient. Deux points sont « visibles » : le parallélisme de (GF) avec (AB) ou de (GE) avec (AC), les parallélogrammes EFGB et EFCG. C'est l'occasion de faire le point sur ce que l'on sait et ce que l'on voit, afin de déterminer la conjecture qu'il faudrait démontrer.
La question cruciale à laquelle on aboutit, après discussion avec les élèves dont certains tiennent pour acquis que (FG) // (AB), est la suivante : ***Sachant que F est le milieu de [AC] et que G est le milieu de [BC], comment démontrer que (FG) // (AB) ?***
On sait que le principe d'une telle démonstration n'est pas évident, et en tout cas, qu'il n'est pas connu des élèves. C'est un moment qui va voir les élèves osciller entre hypothèses (F et G milieux) et conclusion ((FG) // (AB)) ; ce qui est légitime car « on voit » que si (FG) passe par les milieux, alors elle est parallèle à (AB) et que si elle est parallèle à (AB) en passant par un milieu, elle passe nécessairement par l'autre. C'est précisément le principe de cette démonstration que le professeur peut montrer lui-même, une fois les élèves parvenus en ce point.

Démonstration

Considérons la droite (d) parallèle à (AB) et passant par F milieu de [AC]. D'après le théorème précédent, elle coupe le troisième côté [BC] en son milieu G. Donc la droite (d) est confondue avec la droite (FG) et par conséquent (FG) // (AB).

En ce point, on reprend l'étude qui a motivé que l'on s'intéresse au résultat qui vient d'être établi : démontrer que EF = $\frac{1}{2}$ BC. Cette tâche peut désormais être laissée à la charge des élèves puisque l'idée d'utiliser les parallélogrammes a déjà vécu dans la classe. On complète ainsi le théorème précédent.

Après avoir démontré et écrit le théorème de Thalès dans le cas particulier du rapport $\frac{1}{2}$, la question qui se pose est celle de savoir si on ne pourrait pas en obtenir des démonstrations pour d'autres cas particuliers. Le professeur indique que ce travail sera mené hors classe, à travers un exercice suivi d'un devoir.

Exercice : *Démonstration du théorème de Thalès dans le cas où le rapport est* $\frac{1}{4}$.

Etant donné un triangle *ABC*, *G* est un point de [*AB*] tel que $\frac{AG}{AB} = \frac{1}{4}$ et *H* le point de [*AC*] tel que (*GH*) // (*BC*). Démontrer que $\frac{AH}{AC} = \frac{1}{4}$ et que $\frac{GH}{BC} = \frac{1}{4}$.

Devoir : *Démonstration du théorème de Thalès pour d'autres valeurs fractionnaires du rapport :* $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

A.
On considère un triangle *ABC*, *I* le milieu de [*AB*], *J* le milieu de [*AI*], *K* le milieu de [*IB*]. Les parallèles à (*BC*) passant par *J*, *I* et *K* coupent le segment [*AC*] respectivement en *J'*, *I'* et *K'*.
On veut démontrer que $\frac{AK}{AB} = \frac{AK'}{AC} = \frac{KK'}{BC} = \frac{3}{4}$.

1. Démontrer que *J'* est le milieu de [*AI'*].
2. On appelle *G* le point d'intersection de la droite (*IC*) et du segment [*KK'*].
   a. Démontrer que *G* est le milieu de [*IC*] et que *K'* est le milieu de [*I'C*].
   b. Démontrer que $KG = \frac{1}{2}BC$ et que $GK' = \frac{1}{2}II'$.
3.
   a. Déduire des questions 1 et 2. a. que : $\frac{AK}{AB} = \frac{AK'}{AC} = \frac{3}{4}$.
   b. Déduire des questions 1 et 2. b. que : $\frac{KK'}{BC} = \frac{3}{4}$.
4. A partir des résultats de la question 3, déduire l'écriture du théorème de Thalès dans un triangle lorsque le rapport est $\frac{3}{4}$.

B.
On considère un triangle *ABC* et les points *I* et *J* du segment [*AB*] tels que *AI* = *IJ* = *JC*. Les parallèles à (*BC*) passant par *I* et *J* coupent le segment [*AC*] respectivement en *I'* et *J'*.

1. Démontrer que *I'* est le milieu de [*AJ'*].
2. Après avoir judicieusement choisi un triangle afin de pouvoir raisonner comme dans la question 2 du A, démontrer que *J'* est le milieu de [*I'C*].
3. Déduire des questions 1 et 2 que $\frac{AI}{AB} = \frac{AI'}{AC} = \frac{1}{3}$ et que $\frac{AJ}{AB} = \frac{AJ'}{AC} = \frac{2}{3}$.

C. Dans la partie B, on a partiellement démontré le théorème de Thalès dans les cas où le rapport vaut $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. L'ayant démontré, on peut désormais se servir du résultat partiel portant sur les côtés coupés par les parallèles (les côtés [*AB*] et [*AC*] dans les triangles étudiés).

1. Ecrire le théorème qui vient d'être démontré pour le rapport $\frac{1}{3}$ et pour le rapport $\frac{2}{3}$. On le considère comme une écriture incomplète du théorème de Thalès pour les rapports $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.
2. On va se servir de ce résultat partiel pour démontrer l'égalité relative au troisième rapport. Pour cela, on reprend la figure du B. Il reste à démontrer la partie du théorème de Thalès portant sur le rapport écrit avec la longueur *BC*. Pour cela, on considère la parallèle à (*AB*) passant par *I'* qui coupe [*BC*] en *L*.
   a. Démontrer que $\frac{CI'}{CA} = \frac{CL}{CB} = \frac{2}{3}$.
   b. En déduire que $BL = \frac{1}{3}BC$, puis que $II' = \frac{1}{3}BC$.
   c. Déduire de la question C. 2. b. et de la question B. 3. le théorème de Thalès dans le cas où le rapport est $\frac{1}{3}$.
3. La parallèle à (*AB*) passant par *J'* coupe [*BC*] en *K*.
   a. Démontrer que $\frac{CJ'}{CA} = \frac{CK}{CB} = \frac{1}{3}$.
   b. En déduire que $BK = \frac{2}{3}BC$, puis que $JJ' = \frac{2}{3}BC$.
   c. Déduire de la question C. 2. b. et de la question B. 3. le théorème de Thalès dans le cas où le rapport est $\frac{2}{3}$.

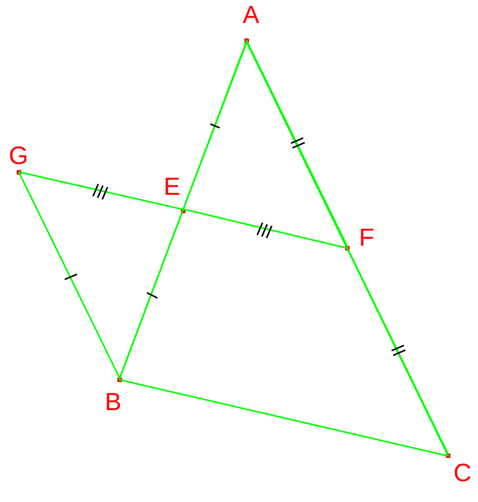
Au cours du corrigé du DM, on précise que l'on vu la démonstration partielle du théorème de Thalès pour certaines valeurs fractionnaires du rapport. On admet que le théorème est vrai dans le cas général, y compris lorsque le rapport n'est pas fractionnaire.

Sixième étape : Recherche d'une réciproque du théorème de Thalès dans le cas du rapport $\frac{1}{2}$

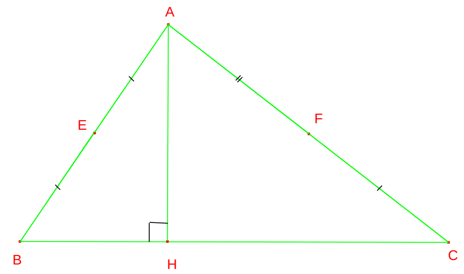
Le professeur rappelle que lorsqu'un théorème est vrai, on se pose traditionnellement la question de la vérité de sa réciproque. Dans le cas général, cette réciproque sera étudiée en 3^{e}, mais en 4e on va se poser la question de la réciproque lorsque le rapport est $\frac{1}{2}$. Le professeur demande aux élèves de proposer une formulation de la réciproque dans ce cas ; ce qui permet de fixer les hypothèses et la conclusion. On peut noter que la formulation n'est pas si commode que d'ordinaire, deux hypothèses intervenant dans les écritures des théorèmes direct et réciproque.

De nouveau, le professeur propose de recenser les connaissances qui permettent de conclure que deux droites sont parallèles. Dans la liste des propositions des élèves que le professeur dresse au tableau, on va trouver le cas où les angles formés par deux droites et une sécante sont égaux, le cas des parallélogrammes, peut-être celui de l'image d'une droite par symétrie centrale, celui des perpendiculaires à une même droite. Ce faisant, une fois de plus, on apprend en la rencontrant quelle est la fonctionnalité des théorèmes dont on dispose parmi ses connaissances. Tous ces théorèmes nécessitent, une fois encore, d'ajouter une construction à la figure initiale. On teste de nouveau la pertinence de l'usage de chacun de ces théorèmes à partir du rajout d'une construction. Assez rapidement devraient resurgir les propositions déjà rencontrées : celles relatives au symétrique de *F* par rapport à *E* et celle de la construction de la hauteur (*AH*).

> Celle relative à l'utilisation de *G* symétrique de *F* par rapport à *E* pose problème car elle repose sur un théorème que l'on ne peut guère énoncer qu'au prix d'un renoncement à la rigueur ou qu'en recourant à la convexité. Il s'agit du théorème qui énonce que si un quadrilatère *non croisé* possède deux côtés opposés parallèles et égaux, alors c'est un parallélogramme. La démonstration est la suivante. *AGBF* est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu. On en déduit que (*GB*) // (*AF*) et *GB* = *AF* . Comme *AF* = *FC*, alors *GB* = *FC* et (*GB*) // (*FC*). D'où, d'après ce théorème, *GFCB* est un parallélogramme et (*GF*), donc (*EF*), est parallèle à (*BC*).



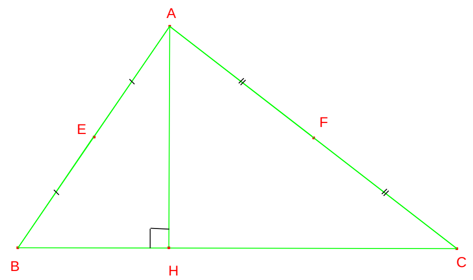
C'est donc au professeur de choisir quelle voie faire prendre aux élèves entre les deux démonstrations, selon ses options épistémologiques et selon la direction qui semblera émerger dans la classe des propositions faites par les élèves à l'issue de la phase de recension des théorèmes permettant de conclure au parallélisme. Comme toujours, si l'idée n'est pas proposée par les élèves, le professeur indique qu'on peut reprendre la figure utilisant la hauteur (*AH*).



La figure induit le théorème à utiliser… de même que le choix du théorème induit la figure ! Les élèves recherchent individuellement une démonstration qu'ils devraient trouver en se remémorant celle utilisée lorsqu'il s'agissait d'établir de manière similaire, que la parallèle à (*BC*) passant par le milieu *E* de [*AB*] coupait [*AC*] en son milieu.

> Dans *AHC* rectangle en *H*, le milieu *F* de l'hypoténuse, centre du cercle circonscrit se trouve sur la médiatrice de [*AH*]. De même pour *E* dans *ABH* rectangle en *H*. *E* et *F* étant deux points de la médiatrice de [*AH*], la droite (*EF*) est la médiatrice de [*AH*]. Donc (*EF*) ⊥ (*AH*). (*EF*) et (*BC*) étant perpendiculaires à (*AH*), elles sont parallèles.

Théorème (dit de la droite des milieux dans un triangle) : La droite qui passe par les milieux de deux des côtés d'un triangle est parallèle au troisième.



Il reste ensuite à donner aux élèves des exercices relatifs à l'utilisation de ces deux théorèmes.