Quelques éléments pour une analyse de la transposition : algèbre et modélisation fonctionnelle*

M. Schneider (Université de Liège, Belgique)

Dans cette section, j'explore quelques pistes à propos de l'étude des fonctions ayant des incidences tant sur l'enseignement de l'algèbre dans les premières années de l'enseignement secondaire que sur l'enseignement de l'analyse quelques années plus tard, ainsi que sur leur articulation.

1 Une hiérarchisation à faire dans les attentes de l'enseignement supérieur

Pour ce qui est de l'étude des fonctions, les demandes exprimées par certains professeurs d'université à l'égard de l'enseignement secondaire me semblent pour le moins sujettes à caution. Ainsi, dans le cadre d'un projet intitulé "Prérequis", peut-on lire sur le site des FUNDP (http ://www.fundp.ac.be/recherche/projets/) ce qui est attendu des élèves qui vont entamer des études universitaires :

> *"Fonctions : connaître la notion de fonction et le vocabulaire associé (variable, fonction constante, fonction positive, ...) au niveau graphique et/ou analytique, donner le domaine de définition et le graphe d'une fonction, connaître le vocabulaire élémentaire associé aux graphiques (abscisses, ordonnées, ...), interpréter le graphe d'une fonction, relier le graphique d'une fonction à une expression analytique ; connaître la notion de continuité d'une fonction et pouvoir calculer les limites de fonctions simples ; connaître la notion de dérivée*

*Extrait de Schneider M. (2008), Traité de didactique des mathématiques, les Editions de l'Université de Liège *d'une fonction, pouvoir établir la fonction résultant de la composition de deux fonctions ; connaître les notions de base relatives aux fonctions logarithmes et exponentielles (graphes, dérivées, propriétés élémentaires)".*

En bref, beaucoup de connaissances de type procédural, des généralités sur les fonctions dont on sait qu'elles alimentent un gros chapitre de $4^{\text{ème}}$ année qui "tourne à vide , des contenus (la continuité) qui relèvent d'un autre niveau praxéologique, des références à ces exercices dits de "variations de fonctions" qui semblent monopoliser toute l'énergie des élèves des deux dernières années de l'enseignement secondaire - en pure perte pour leur apprentissage ou presque, ainsi que le développe Krysinska (2007) - et le verbe "connaître" dont l'usage important et naïf masque mal une absence de signification ... Quelle est la part de "réelle compréhension" attendue ? On le cerne difficilement, à supposer que les auteurs du projet l'aient définie préalablement. Ou pire, elle est le monopole de l'enseignement universitaire si l'on en juge par ce propos tenu par un des responsables de ce projet :

> *"Je crois que tout simplement dans le secondaire j'ai vu la limite et la dérivée comme des techniques. Je savais très bien dériver, je ne me trompais pas mais la signification profonde de la dérivée, je ne l'avais pas perçue. Je pense que la maturité de l'élève est telle que c'est une notion sur laquelle il faut revenir après. Je ne vois pas de problème à dire : on a donné la définition, on a surtout insisté sur la technique de calcul parce que c'est à la portée des élèves à cet âge-là et puis en premier bac, on revient sur la notion en disant : attention, voilà ce qu'il y a en plus. Même en bio, je reviens dessus en disant : c'est un taux de variation instantané particulier. Et ça, dans le secondaire, on ne l'a pas vu mais il ne fallait peut-être pas le voir. C'est à nous à le faire" (professeur 1er BAC).*

Je ne peux m'empêcher de réagir en disant qu'une telle prise de position cache sans doute une méconnaissance du premier des deux types de rationalité mathématique que j'ai formalisés ailleurs (Schneider, 2008) par les praxéologies "modélisation" et "déduction" et qui pourraient se répartir entre enseignement secondaire et enseignement supérieur quoique d'une manière relative. D'après les travaux de Rouy (2007), cette méconnaissance pourrait en effet expliquer un repli de l'enseignement des mathématiques, au niveau secondaire, sur des acquisitions procédurales. Au total, le travail précité montre combien sont urgentes, d'une part, la nécessité d'une réflexion sur les situations fondamentales qui pourraient inspirer et structurer un enseignement des fonctions au niveau secondaire et, d'autre part, une entreprise de hiérarchisation des priorités à ce niveau ...

2 Une situation fondamentale inspirée de l'histoire

Je tente ci-dessous un essai de formalisation d'une situation fondamentale que m'inspire l'histoire des mathématiques. Et je commencerai par parler des premières procédures utilisées par Archimède pour effectuer quadratures et cubatures. Pour ce dernier, la quadrature du segment de parabole et la cubature de la pyramide sont des problèmes a priori différents bien que leurs validations respectives relèvent d'une méthode commune : celle dite d'exhaustion, caractérisée par un double raisonnement par l'absurde basé sur le principe suivant : *Deux grandeurs inégales étant posées, si on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.* L'idée est d'épuiser (d'où le mot " exhaustion") le segment de parabole, d'une part, et la pyramide, d'autre part, en lui enlevant à chaque étape plus de la moitié de ce qui reste : des triangles sont ôtés du premier et des prismes le sont de la seconde. Ainsi que l'illustrent les Fig. 1 et 2, cela conduit à des découpages qui semblent n'avoir rien à voir l'un avec l'autre et qui supposent que tout le travail est à refaire pour un des deux problèmes, une fois l'autre résolu.

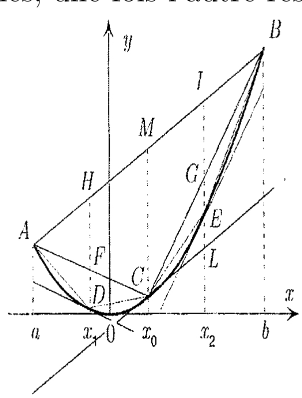

Fig. 1

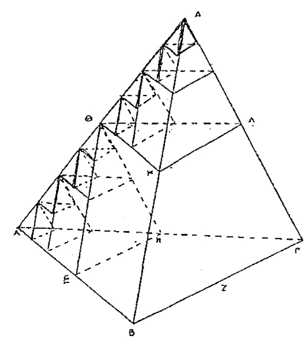

Fig. 2

Cependant, au sens moderne du calcul intégral, il s'agit du même problème se modélisant par l'intégrale définie d'une fonction du second degré et se résolvant par la primitivation d'une telle fonction ou la limite d'une "même" somme de Rieman. Mais ce regard n'est pas celui d'Archimède pour qui le concept de fonction est inconnu : il est à remarquer d'ailleurs que la Fig. 1 constitue un anachronisme par la présence du systèmes d'axes qui ne peut être le fait de cet auteur à son époque. Aux dires des Bourbakistes, cela empêche de considérer Archimède comme l'inventeur du Calcul intégral :

> *"Mais pour qu'on ait le droit de voir là un "calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de "l'intégrand" sous-jacent. Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, nous allons le voir, la recherche d'une telle classification devient peu à peu l'un des principaux soucis des géomètres".*

Cet exemple illustre l'idée d'une classification algébrique où des problèmes a priori différents sont fédérés en catégories selon le type de fonction qu'ils mobilisent. Ainsi, toujours dans le contexte du calcul intégral, le volume d'un paraboloïde de révolution se ramène à l'aire d'un triangle car il mobilise une fonction du premier degré alors que l'aire du disque et le volume du cône rejoignent la catégorie des intégrales de fonctions du second degré. Sans aller jusqu'au calcul intégral, pensons que le problème de la chute libre d'un corps dans le champ de la pesanteur et celui des aires de rectangles isopérimétriques mobilisent tous deux une fonction du second degré également. Ce classement "fonctionnel" relève du 3$^{\text{ème}}$ degré d'algébrisation tel que défini par Bolea et al. (2001) : il s'agit d'unifier et de réduire à quelques catégories les problèmes, les techniques qui permettent de les résoudre et les discours technologiques associés. Dans le cas des problèmes du calcul intégral, les techniques sont celles de primitivation, de calculs de limites ou d'intégration numérique mais, en plus, on les unifie par le biais du type de fonction mobilisée : trigonométrique, exponentielle, polynomiale de degré 2 ... Comme je le montre ailleurs (Schneider, 1988), c'est une telle unification algébrique qui permet de voir le problème de l'aire "sous une courbe" comme "standardisation" de tous les problèmes se ramenant à l'intégration d'une fonction d'une variable dont cette courbe est le graphique, qu'ils concernent le travail d'une force variable, le volume d'un solide ou le calcul de l'espace parcouru par un mobile à partir de sa vitesse ou n'importe quel autre contexte. L'évolution de la formulation de l'objet du calcul infinitésimal entre Newton et Lagrange est également symptoma-tique d'une telle algébrisation. Encore formulé chez le premier en termes de grandeurs ; "*Etant donné la relation liant les quantités fluentes* [grandeurs variables] *entre elles, déterminer la relation entre les fluxions* [vitesses de variation] ; *trouver les fluentes à partir des fluxions*", il l'est en termes d'opérateurs agissant sur les fonctions chez le second : "*Connaissant une fonction f, trouver ses dérivées et inversement*". Entre les deux, Euler a mis à l'avant-plan de cette discipline le concept de fonction défini de manière algébrique et on peut penser que c'est ce fait qui a été porteur de la réduction algébrique ultime que propose Lagrange : le calcul infinitésimal se catégorise en problème de dérivation, d'une part, et problèmes de primitivation, d'autre part, au départ de problématiques de nature géométrique, cinématique ou issues de la vie quotidienne : détermination d'aires, de volumes, de tangentes, de vitesses ou problèmes d'optimisation.

Ce parcours historique suggère une situation fondamentale pour l'étude des fonctions au niveau secondaire que je formulerai en termes de compétences à faire acquérir par les élèves : construire et identifier les principaux modèles fonctionnels paramétrés, leurs caractérisations mathématiques et raisons d'être, leurs opportunités et conditions d'emploi. D'une telle démarche dépend en effet la capacité à fédérer des problèmes par le biais de la modélisation fonctionnelle, au sens décrit plus haut. Cette catégorisation est tributaire d'une double algébrisation : d'abord la standardisation des variables indépendante et dépendante sous la forme x et y, indépendamment de la nature des grandeurs concernées, ensuite la généralisation de données numériques sous forme de paramètres laquelle permet d'adapter ultérieurement un modèle fonctionnel donné aux contraintes particulières de tout problème traité (Krysinska, 2007 ou Krysinska et Schneider, à paraître 1). Bien sûr, on semble s'éloigner là de ce qui apparaît à tort comme le but ultime de l'enseignement de l'analyse : associer un graphique à une expression analytique en respectant une programmation standard en plusieurs étapes qui vont du calcul du domaine de définition au tableau de variations. Je trouve personnellement que l'importance de ces exercices de variations de fonctions doit être relativisée : il est tout aussi essentiel de pouvoir associer une expression analytique à un graphique reliant quelques valeurs expérimentales lorsqu'on prend les mathématiques aussi comme outils au service des autres disciplines. Par ailleurs, si ces exercices de variations de fonctions ne sont pas tout à fait étrangers à la situation fondamentale épinglée ici, ils apparaissent sous un jour nouveau : même si l'étude des modèles paramétrés envisagée ici ne se réduit pas à cela, il s'agit aussi d'étudier le comportement graphique des fonctions, non pas une à une, mais classe paramétrée par classe paramétrée en examinant de près en quoi la variation des paramètres peut influencer celle du graphique.

3 Quelques mots sur le choix et l'étude des modèles fonctionnels paramétrés

Je ne m'attarderai pas ici sur le choix de modèles au sein même des sciences dites expérimentales mais on peut imaginer que s'y joue une dialectique entre expérimentation et théorie comme le montrent Gaud (2006) et Ferrier (2006) à propos du problème de la radioactivité. Souvent, c'est l'existence d'un modèle théorique - fût-il embryonnaire - qui commande ou, à tout le moins, suggère les expérimentations. Ainsi, les lois de la mécanique nous conduisent-elles à des équations différentielles que doivent satisfaire les modèles, équations elles-mêmes approchées par des équations aux différences finies qui se prêtent mieux à des observations expérimentales. Je ne m'étendrai pas non plus sur les critères et techniques d'ajustement d'un modèle à une situation particulière et me cantonnerai au choix des modèles que l'on décide de travailler au cours de mathématiques. Ce choix n'est pas difficile à faire car il peut être dicté par les applications standard des mathématiques aux autres disciplines : fonctions polynomiales comme approximations locales de bon nombre de phénomènes ; cloches de Gauss pour représenter des distributions normales de probabilités ; fonctions rationnelles et phénomènes de saturation ; fonctions rationnelles et irrationnelles pour résoudre des problèmes d'optimisation, e.a. ceux mobilisant le calcul d'une distance ; modèle de la proportionnalité comme modèle "phare" qui en inspire d'autres : proportionnalité "au carré", "au cube", fonctions définies par des conditions telles que $f' = kf$ ou $f'' = kf$, ... , d'où les fonctions sinusoïdales pour modéliser les phénomènes harmoniques en rendant incontournable le choix du radian comme unité de mesure et les sommes de telles fonctions pour composer des sons par exemple ; d'où aussi les fonctions exponentielles et logarithmiques utilisées dans les sciences de la vie et de la terre ainsi que le modèle logistique.

Comme déjà dit, il est proposé ici d'étudier graphiquement des classes paramétrées de fonctions plutôt que des fonctions isolées. Encore faut-il que cela en vaille la peine : en fait, cela dépend du nombre de graphiques nécessaires pour représenter une classe qui s'écrit sous la forme $af(bx+c)+d$. Comme illustré dans Krysinska (2007) ou Krysinska et Schneider (à paraître1), si $f(x) = \sin x$, il en faudra un ; si $f(x) = \frac{1}{x}$ ou x^2, il en faudra deux mais six graphiques seront nécessaires si la fonction est exponentielle ou cubique. Ainsi, la classe des fonctions du troisième degré possède une identité graphique beaucoup plus faible que la classe des fonctions homographiques. Il arrive que l'étude par classes doive être complétée d'informations calculées pour une fonction à la fois, comme cela arrive pour les fractions rationnelles ou irrationnelles, l'important étant de privilégier, pour chaque étude de fonction, les outils conceptuels qui vont permettre d'en déceler rapidement les traits graphiques les plus saillants : la période pour les fonctions trigonométriques, la dérivée pour les fonctions polynomiales, les asymptotes pour les fonctions rationnelles ... Bien sûr, une telle étude graphique de modèles paramétrés suppose une validation hybride : une vérité première d'ordre graphique, par exemple l'allure du graphique de la fonction $y = x^2$, vérité dont fait partie une hypothèse implicite de continuité non seulement sur le graphique mais aussi sur l'ensemble des valeurs de x, la traduction analytique de translations et affinités particulières qui nous vient de la géométrie et d'autres caractéristiques découlant du calcul de limites ou de celui de dérivées qui proviennent de l'analyse...

Mais il est une autre dimension des modèles paramétrés qui se doit, à mon avis, d'être étudiée au cours de mathématiques et qui relève de leurs conditions caractéristiques. Ainsi, le doublement d'un nombre d'individus toutes les unités de temps ne suffit pas à caractériser un modèle exponentiel. Celui-ci découle en effet de plusieurs hypothèses : des images formant des rapports constants pour des intervalles égaux de l'abscisse, une hypothèse de continuité et celle de monotonie (Krysinska, 2007 ou Krysinska et Schneider, à paraître1). Cette dimension conduit bien évidemment aux équations fonctionnelles dont certaines sont différentielles et dont on aurait tort de se priver vu le rôle de critère de reconnaissance qu'elles jouent fréquemment dans d'autres disciplines.

Cette étude des fonctions, réorientée à partir de celle de modèles fonctionnels paramétrés, peut avoir des incidences, d'une part, sur l'enseignement de l'analyse mathématique et, d'autre part, sur celui de l'algèbre. J'y viens dans les deux sections suivantes.

4 Des cas de limites hiérarchisés dans une organisation mathématique axée sur la modélisation fonctionnelle

D'une analyse empirique de pratiques enseignantes, Bosch et al. (2003) mettent en évidence l'existence de deux organisations mathématiques juxtaposées qui rendent "bicéphal" l'enseignement de l'analyse :

- L'organisation axée sur "l'algèbre des limites", les tâches étant les calculs de limites, tous cas confondus, sur base d'un point de vue axiomatique où l'on prend pour argent comptant les théorèmes relatifs aux limites de sommes, produits, etc.
- L'organisation orientée vers la "topologie des limites", les tâches consistant à prouver les propriétés de cette algèbre ou l'existence de limites.

Pour ma part, j'opterais pour une bicéphalie assumée d'un cours d'analyse constitué de deux pôles correspondant aux deux versants observés dans l'histoire de l'analyse : le calcul infinitésimal, d'une part, et l'analyse "formalisée", d'autre part. Ces deux pôles forment, le premier, une praxéologie de type "modélisation" et, le second, une praxéologie de type "déduction". Le premier pôle serait constitué lui-même de deux organisations mathématiques distinctes bien qu'enchevêtrées : l'organisation mathématique "grandeurs" et l'organisation mathématique "modélisation fonctionnelle". De la première, j'ai déjà parlé dans Schneider, 2008 : il s'agit de modéliser les tangentes, vitesses, questions d'optimisation, aires et volumes au moyen des concepts de dérivée et d'intégrale et de justifier cette modélisation sur base d'une validation relativement pragmatique. Dans cette praxéologie, le focus est mis sur certains cas de limites : les indéterminations $\frac{0}{0}$ auxquelles conduit tout taux de variation et qui "font scandale" dans le contexte des grandeurs où l'idée d'un espace nul parcouru en un temps nul fait problème au niveau du calcul, et les limites de suites de sommes d'aires de rectangles dont il faut expliquer pourquoi elles fournissent une valeur exacte plutôt qu'approximative d'une aire curviligne ! C'est que les questions des élèves sont à ce moment relatives à la pertinence du modèle : le calcul de limite donne-t-il bien ce qu'on cherche ? J'y reviendrai dans le chapitre consacré aux obstacles. Et, bien sûr, le concept de limite n'est pas encore, à ce stade, un concept unificateur ou un "proof-generated concept" au sens de Lakatos, c'est-à-dire un concept construit pour permettre le mode de validation spécifique de l'analyse mathématique en termes de quantificateurs et d'inégalités.

Passons à la praxéologie "modélisation fonctionnelle" dont la tâche générique, fondamentale, est l'étude des modèles fonctionnels paramétrés et de leur caractérisation, étude y compris graphique, dans le sens de l'algébrique au graphique aussi bien que dans le sens inverse. Cette praxéologie donne lieu également à une forme de hiérarchisation des différents cas de limites qui va à l'encontre des pratiques usuelles. Souvent, les élèves-professeurs, encouragés par le contenu de certains manuels, commencent par un cas qu'ils croient simple tel que la limite de la fonction $y = x^2$ en 1, soit une abscisse appartenant au domaine de continuité de la fonction. Se rendent-ils compte du caractère disons "surréaliste" de la situation ? Les élèves connaissent le graphique de cette fonction et son étude ne rend donc nullement nécessaire le calcul d'une telle limite. Qui plus est, ils voient un professeur s'escrimer à prendre des abscisses de plus en plus proches de 1 pour leur faire constater le comportement des ordonnées correspondantes alors que rien n'interdit de prendre directement l'image de 1. De même, les élèves comprendront difficilement à quoi rime l'étude de limites dans le cas de fonctions définies par morceaux ou celui de fonctions dont le graphique présente un trou isolé alors que le graphique des premières est quasiment fourni et que les secondes se prêtent à des simplifications algébriques qui dissipent le "mystère" que le professeur voulait y cacher.

Il est évident que, s'il l'on pense les mathématiques et leur enseignement en termes d'économie de pensée, la praxéologie "modélisation fonctionnelle" doit être conçue sur base des questions suivantes : "Quels sont les cas de limites qui apportent le plus à l'étude graphique des fonctions ?" et "Quelles sont les fonctions pour lesquelles l'étude du comportement graphique nécessite vraiment le calcul des limites ? Ou celles pour lesquelles ce calcul suffit presque ?". La réponse est à chercher du côté des fractions rationnelles et des cas de limites donnant lieu à des asymptotes. Dans ceux-ci, l'infini est mobilisé au niveau de la variable indépendante ou de l'autre et, en outre, c'est sans doute plus aisé de commencer par les asymptotes horizontales, les élèves ayant la fâcheuse habitude de faire des tableaux numériques en choisissant des valeurs entières de l'abscisse !

Les graphiques en morceaux ou à trous sont cependant dignes d'intérêt à un stade plus évolué de la théorie. Il s'agira en effet de se poser la question plus générale d'existence d'une asymptote verticale $x = a$ pour une fonction $f(x)$ donnée : suffit-il, par exemple, que la fonction f ait la forme d'un quotient dont a serait racine du dénominateur ? La réponse à cette question, que soulèvent les cas déjà étudiés, est négative et la réfutation mobilise, à titre de contre-exemples relatifs au dénominateur de f, plusieurs des cas mentionnés plus haut comme situations "pathologiques" lorsqu'elles surviennent trop vite. Ainsi, les graphiques à trous montrent que a ne peut être racine en même temps du numérateur ; les graphiques en morceaux font apparaître la nécessité d'une hypothèse de continuité en a portant sur le dénominateur de f et le tracé des graphiques de la fonction $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ sur R_0 et $g(0) = 0$ et de son inverse montre la nécessité d'avoir, de plus, un dénominateur qui garde un signe constant dans un voisinage de a ou sur un intervalle d'extrémité a. De telles conditions peuvent apparaître également d'un raisonnement dans lequel on manipule une forme embryonnaire de la définition quantifiée du concept de limite. En effet, il s'agit ici de s'assurer que la fonction f peut avoir des images plus grandes que tout réel donné pour des valeurs de x suffisamment proches de a : pour cela, il suffit bien que son dénominateur prenne des valeurs de signe constant et aussi proches de 0 que voulu aux alentours de a alors que son numérateur prend une valeur finie ... C'est là une entrée intéressante dans la praxéologie " analyse formalisée" qui peut être faite, à un moment donné, avec certains élèves preneurs d'un regard plus théorique.

Mais passons aux relations que peut avoir, avec l'enseignement de l'algèbre, l'étude de modèle fonctionnels paramétrés.

5 Une construction de modèles fonctionnels qui inspire une dialectique entre l'algébrique et le numérique

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il convient de situer les écueils majeurs de l'enseignement de l'algèbre qui créent des obstacles d'apprentissage et que plusieurs recherches ont permis de mettre à jour.

5.1 Ecueils de l'enseignement de l'algèbre

Le premier écueil est, sans nul doute, **l'absence de fonctionnalité** telle que la dénonce Chevallard (1984) en ce qui concerne l'algèbre au collège :

"A l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les "règles" de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser)".

Cette absence de fonctionnalité est associé à **un malaise à propos de la validation des règles algébriques** : perçues avant tout par les élèves comme des règles de "conformité" (N. Bellard et al., 2005), elles sont rarement validées par un discours technologique approprié (Mercier, 1996). Et, souvent, les règles formulées par le professeur rappelle le fait qu'une équation du type $x * a = b$ possède une solution dans $(E, *)$ grâce à la présence d'une structure de groupe. Ainsi il dira qu'on peut multiplier les deux membres de l'équation par l'inverse de a, ou ajouter son opposé, ce qui revient dans les deux cas à considérer l'élément symétrique de a.

Ce premier écueil se solde aussi par une standardisation des comportements de l'élève obtenus à la baisse comme des sortes de réflexes pavloviens par la répétitivité de circonstances identiques. C'est la **pseudo-algorithmicité**, ainsi nommée par Chevallard (1988) :

"D'une manière générale, l'enseignement usuel tend à diminuer l'incertitude inhérente à l'activité mathématique en fournissant à l'élève un code de conduite, nulle part explicité comme tel, mais extrêmement prégnant, qui engendre un quasi déterminisme des pratiques mathématiques scolaires, ce que nous nommerons la pseudo-algorithmicié [...] On a un carré $(1 + \cos 2x)^2$, DONC on le développe. On a 2 en facteur commun dans $2 + 2\cos 2x$, DONC on factorise : $2 + 2\cos 2x = 2(1 + cos2x)$".

Le concept de dénotation permet de situer un autre écueil possible de l'enseignement de l'algèbre. Il est emprunté à Frege par Sackur et al. (1997) qui l'adaptent dans le contexte des expressions algébriques de la façon suivante :

"Nous soutenons qu'un élève doit savoir :

1) *qu'une expression comme $y(2x + y)$ a une valeur numérique,*
2) *que cette valeur dépend des valeurs de x et y,*

> *3) que cette valeur n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques que cette expression peut subir, par exemple celle qui transforme $y(2x + y)$ en $2xy + y^2$.*
>
> *C'est cela que nous appellerons "dire qu'un élève doit savoir que les expressions dénotent" même s'il ne peut pas le verbaliser sous cette forme. [...]. La notion de dénotation est une "clé de voûte" : c'est elle qui fait la différence entre le "pur calcul symbolique" des ordinateurs et l'algèbre effectivement pratiquée".*

Et les auteurs de conclure que

> *"les "calculateurs aveugles" ignorent que les expressions dénotent. A plus forte raison, ils ne peuvent pas savoir que cette dénotation est conservée par les transformations".*

L'absence de conscience, chez plusieurs élèves, **que les expressions algébriques dénotent** est épinglée par plusieurs chercheurs dans des contextes différents. Ainsi Schneider (1988) note l'incapacité des élèves à remplacer la valeur de x dans l'expression analytique connue d'une fonction donnée pour obtenir l'ordonnée correspondante. Quant à Chevallard (1990), il relate un fait similaire à propos de la transformation de l'expression $(2x - 3)^2 - 4(x+1)(4x-6)+(4x^2-9)$, sous une forme factorisée, soit $-4(2x-3)(x+2)$. Un élève obtient le résultat correct,

> *"Mais voici qu'il attend de vous une approbation, et vous le dit : ne se serait-il pas trompé ? Vous croyez habile de lui répondre qu'il pourrait tenter de procéder par lui-même à quelques vérifications, en donnant à x des valeurs numériques simples, "par exemple -2 qui annule la seconde expression et qui devrait donc annuler la première". Votre élève d'occasion, pourtant, paraît ne rien entendre à ce discours. Son étonnement vous étonne. Vous répétez votre suggestion. "On n'a jamais fait ça...", finit-il par avouer. Vous comprenez enfin qu'il n'y a pour lui, à cet instant, aucun lien entre la transformation qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, d'une part, et le fait de substituer des valeurs numériques à ce ... petit x qu'il a si habilement manipulé, d'autre part. Aucun".*

Or, la dénotation est un moyen qui permet d'invalider des transformations incorrectes et, en l'absence de cette idée, les élèves ne peuvent qu'invoquer le caractère arbitraire des transformations algébriques que le professeur leur impose.

Enfin, Sierpinska (1992) souligne **la difficulté éprouvée** par les élèves **à passer du mode de pensée "inconnue" au mode de pensée "variable"**, attestée, pour elle, par la baisse de performance observée chez les élèves à la seconde des questions suivantes par rapport à la première :

> *Deux compagnies louent des photocopieuses. Elles prennent respectivement* 300 \$ *et* 250 \$ *de location par machine et par mois et* $0,04$ \$ *ou* $0,06$ \$ *par photocopie.*
>
> *Pour quel nombre de photocopies par mois, le prix de deux compagnies serait le même ? Si vous êtes un grand utilisateur de photocopies, laquelle des deux compagnies choisiriez-vous ?*

L'auteur parle ici d'obstacle épistémologique possédant un certain caractère incontournable. Personnellement, je pense qu'une autre façon de concevoir l'enseignement de l'algèbre pourrait aplanir cette difficulté, comme toutes les autres répertoriées d'ailleurs, en les faisant ainsi apparaître comme des obstacles didactiques, fruits du système éducatif lui-même. En particulier, une dérive importante observée en Belgique est le quasi-monopole des identités qui va jusqu'à pousser des professeurs à voir deux erreurs dans les égalités suivantes :

$$\frac{3a+6}{3} = a+2, \quad \frac{3a+6}{3} = 3a+2, \quad \frac{3a+6}{3} = a+6;$$

plutôt que de les considérer respectivement comme une identité, une équation avec solution et une équation sans et, cela, pour n'avoir pas pris en compte que l'absence de consigne ne permet pas de trancher.

Je m'explique ci-dessous sur ce que je préconise comme entrée dans l'algèbre.

Subordonner l'algèbre à l'étude des fonctions en commençant par les progressions arithmétiques et géométriques

Bolea et al. (2001) regardent l'algèbre comme une organisation mathématique au service des autres : la géométrie, par exemple, ou encore l'analyse mathématique. Ce qui ne signifie pas forcément qu'il faille voir tout le cursus d'algèbre avant le reste, comme on le pense souvent. Et Bosch, lors d'un exposé à Namur en 2007, a défendu l'idée que cette praxéologie "algèbre" propre au collège, axée sur la résolution d'équations et les programmes de calcul, se prolonge en une praxéologie "modélisation algébrique-fonctionnelle" en un sens un peu différent que celui qui est donné ici. Personnellement, j'ai toujours plaidé en faveur de la géométrie analytique qui, enfin, donne l'occasion de faire vivre ce que les élèves ont appris en algèbre tout en concurrençant très efficacement la géométrie vectorielle dont je me demande si elle n'est pas trop subtile pour les élèves du secondaire. Je n'en dirai pas beaucoup plus si ce n'est que la pratique de la géométrie analytique restaure l'initiative des élèves dans l'établissement d'un plan de démonstration calculatoire : pensons au sort différent donné aux équations respectives des médianes d'un triangle pour prouver leur concourance. Je pense aussi au calcul de grandeurs qui mobilise des formules de périmètres, d'aires ou de volumes et qui constitue ainsi un autre créneau d'apprentissage des expressions littérales. J'y reviendrai. Pour ce qui est de l'analyse, je plaiderais pour la subordination de l'algèbre à l'étude des fonctions et cela, d'entrée de jeu, m'en tenant ainsi à une seule praxéologie "modélisation fonctionnelle" au sens décrit plus haut d'étude de familles paramétrées standard de fonctions. Une telle praxéologie devrait, à mes yeux, commencer par les problèmes de dénombrement concernant des suites de nombres figurés dont l'exemple suivant est représentatif et que des élèves sont capables de traiter correctement au début de l'enseignement secondaire (voire en primaire), ainsi que l'a montré Krysinska (2007) (voir aussi Krysinska et Schneider, à paraître 1).

Voici quelques suites de maisons construites avec des allumettes. On cherche à déterminer le nombre d'allumettes à n'importe quelle étape ultérieure, aussi éloignée soit-elle, la 10$^{\text{ème}}$ étape ou la 37$^{\text{ème}}$ étape, par exemple.

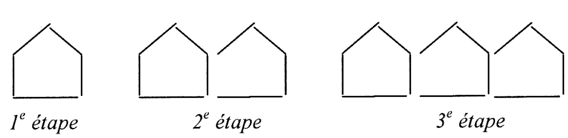

Fig. 3

À quelle étape utilisez-vous exactement 117 *allumettes ?*

Ce problème suppose la formulation d'un "programme de calcul", éventuellement sous une forme pré-algébrique. Mais, contrairement à ce qui se passe dans d'autres contextes, ce programme de calcul mobilise bien autre chose qu'une simple identité. On s'en sert d'abord comme d'une fonction car, pour répondre aux premières questions, il faut déterminer des "images" de tel ou tel numéro d'étape. On s'en sert également au sein d'une équation dont l'inconnue est un numéro d'étape pour répondre à la question inverse et on mobilise enfin des identités parce que la structuration des allumettes en maisons, objets intermédiaires aisément identifiables, peut se faire de diverses manières et que se pose alors l'équivalence des différents programmes de calcul ainsi formulés. Les équations et identités sont alors subordonnées aux fonctions dont elles constituent des modalités de traitement particulières : calcul d'un antécédent ou preuve d'une équivalence et qui, en retour, leur procurent une certaine fonctionnalité. Qui plus est, la prise de conscience de la dénotation est ici incontournable, l'élève doit gérer d'emblée l'incertitude devant opter lui-même pour un type de traitement ou un autre en fonction des questions posées et, bien évidemment, les modes de pensée "inconnue" et "variable" sont présents tous deux d'entrée de jeu.

Reste le problème de la validation. Les tableaux numériques associés aux suites de nombres figurés donnent lieu à une double lecture : une lecture itérative qui suppose de regarder comment on passe d'un terme de la suite au suivant et une lecture fonctionnelle qui suppose une loi de passage d'un numéro d'étape au nombre d'objets correspondant. Valider le passage d'une lecture à l'autre suppose le principe de récurrence (ou une astuce qui en tient lieu) sauf dans le cas des suites arithmétiques ou géométriques car, dans ces cas, l'addition répétée d'un même nombre peut s'écrire sous forme de produit ou la multiplication répétée par un même nombre sous forme de puissance. Quant à la dénotation, elle permet d'invalider des règles fausses de transformation d'un programme de calcul à un autre et peut être complétée d'arguments tirés du calcul des grandeurs. Ainsi, la simple distributivité : $a(b+c) = ab + ac$ exprime deux manières différentes de calculer l'aire de la Fig. 4.

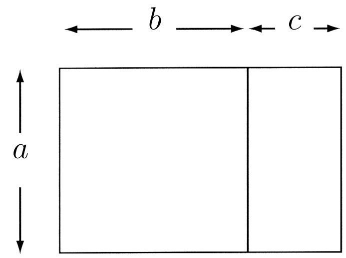

Fig. 4

S'ajoute à cela la possibilité de faire classer par les élèves les problèmes de dénombrement en trois catégories : ceux relevant d'une loi du type $an + b$, ou du type ab^n et les autres et l'on aura compris pourquoi les suites arithmétiques et géométriques constituent des modèles fonctionnels paramétrés de choix pour initier les élèves à l'algèbre et ce, d'autant qu'ils ne sont pas anecdotiques dans l'ensemble de tels modèles, conduisant, pour les uns, aux fonctions du premier degré et, pour les autres, aux fonctions exponentielles et logarithmiques, au prix d'une densification des tableaux numériques. J'y arrive.

On peut imaginer que le travail fait sur ces premiers problèmes de dénombrement inspire la suite de la praxéologie "modélisation fonctionnelle" en ce sens que l'étude des équations, inéquations et identités serait subordonnée pareillement à celle des modèles fonctionnels concernés. Ainsi, l'étude des équations, inéquations ou identités trigonométriques permettrait-elle d'obtenir des antécédents de fonctions trigonométriques (par exemple pour déterminer, dans un phénomène harmonique, les instants auxquels un mobile occupe telle position donnée) ou pour permettre d'écrire une fonction-somme sous forme de produit afin d'en avoir aisément les racines, les solutions d'équations et d'inéquations trouvant d'emblée une signification en termes de graphiques cartésiens.

5.2 Une progression concomittante dans l'étude des nombres et celle des expressions algébriques ; une validation socio-constructiviste

Mais, pour réaliser le projet mentionné ci-dessus, il faut densifier les premiers tableaux liés aux suites de nombres. Cette densification suppose une dialectique entre le registre algébrique et le registre numérique. Soit que le premier est tributaire du second, soit qu'il commande à celui-ci... Ainsi les sens multiples octroyés à l'ostensif algébrique a^x pour des valeurs de x appartenant à des ensembles de nombres de plus en plus vastes peuvent être justifiés par le souhait de compléter le tableau suivant de telle sorte qu'on conserve une régularité qui préfigure l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. Le passage aux irrationnels étant assuré par la continuité numérique :

-2		0	$\frac{1}{2}$	1	?	2	3	4	4,6
?		1	?	2	3	2^2	2^3	2^4	?

que procure l'axiome des intervalles emboîtés. De manière inverse, les régles régissant le comportement des opérations sur les entiers négatifs sont justifiées plutôt par le souci d'associer une écriture algébrique unique, soit $y = ax + b$, à une droite composée de points dont chaque coordonnée peut être aussi bien négative que positive.

L'ensemble de ce parcours repose sur une **validation socio-constructiviste**, au sens des épistémologues. Les écritures algébriques, les nombres qu'elles impliquent ne sont pas définis de manière arbitraire mais, bien au contraire, en fonction d'un projet humain précis : les nombres doivent rendre compte du comportement des grandeurs, le sens octroyé aux ostensifs algébriques doivent permettre de respecter tel type de régularité, les règles de transformation des écritures algébriques ne pas contredire la dénotation ... Rien n'est laissé au hasard ou au caprice de quelque autorité suprême ! On est loin d'un mode de validation de l'algèbre où les règles énoncées ne font que traduire le fait qu'un ensemble de solutions satisfaisait une structure d'un type particulier. Si l'on ajoute à cela le caractère hybride de la validation de l'allure graphique des divers modèles fonctionnels, on comprend tout l'intérêt d'un discours technologique qui ne soit pas importé tel quel d'une théorie canonique.

Références

[1] Bellard N. et al. (2005), *La règle dans tous ses états*, IREM de Montpellier, APMEP.

[2] Bolea P., Bosch M., Gascon J. (2001), La transposicion didactica de organizaciones matematicas en proceso de algebrizacion, El caso de la pro-

porcionalidad, *Recherches de Didactique des Mathématiques*, Vol. 21/3, pp. 247-304.

[3] Bosch M., Espinoza L., Gascon J. (2003), El professor como director de procesos de estudio : analisis de organizaciones didacticas espontaneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 23/1, pp. 79-135.

[4] Chevallard Y. (1984), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie, L'évolution de la transposition didactique, *Petit x, n° 5, Spécial calcul algébrique*, IREM de Grenoble, pp. 51-94.

[5] Chevallard Y. (1988), *Notes sur la question de l'échec scolaire*, Publication de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 13.

[6] Chevallard Y. (1990), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie, Voies d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, n° 23, IREM de Grenoble, pp. 5-38.

[7] Ferrier J.-P. (2006), La radioactivité sans exponentielles, *Repères IREM*, n° 65, Topiques éditions.

[8] Gaud D. (2006), Quelques éclairages sur la radioactivité, *Repères IREM*, n° 65, Topiques éditions.

[9] Krysinska M. (2007), *Emergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques*, thèse de l'Université de Namur.

[10] Krysinska M., Schneider M. (à paraître 1), *Etude de modèles fonctionnels*, Presses universitaires de Liège.

[11] Mercier A. (1996), L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires, *Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds), Actes de la VIIIe Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand : IREM, pp. 345-361.

[12] Rouy E. (2007), *Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis à vis de la rationalité mathématique*, Thèse défendue à l'Université de Liège.

[13] Sackur C., Drouhard J.-P., Maurel M., Pécal M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères IREM*, n° 28.

[14] Schneider M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*,Thèse défendue à l'Université catholique de Louvain.

[15] Schneider M. (2008), Traité de didactique des mathématiques, les Editions de l'Université de Liège.

[16] Sierpinska A. (1992), On understanding the notion of function in *The Concept of Function, edited by Guershon H. et Dubinsky E.*, MAA Notes, Volume 256.