Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs

Les ANGLES

Introduction

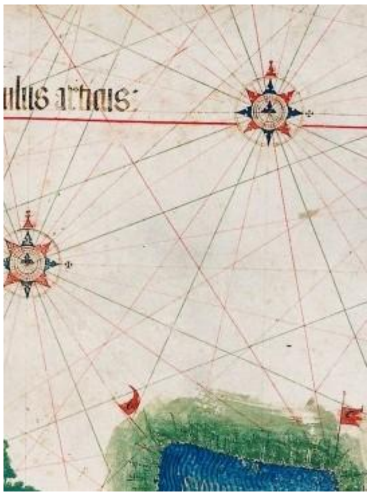
L'art de prendre la valeur des Angles est une opération d'un grand usage & d'une grande étendue dans l'Arpentage, la Navigation, la Géographie, l'Astronomie, &c. (L'*Encyclopédie*, art. *Angle,* 1751)

Pour l'enseignement des angles en Sixième quelles informations le programme fournit-il ? Des compétences à retrouver dans la partie *Géométrie* et dans la partie *Grandeurs et mesures*. À charge au professeur de les organiser de façon raisonnée et cohérente. Mais où trouver les clés de cette organisation ?
Le programme est muet sur ce point. Nulle part on n'y parle de définitions, de la façon dont vont être établies les propriétés relatives aux côtés et aux angles des figures mises au programme, des raisons d'utiliser telle ou telle méthode pour construire une bissectrice ou reproduire un angle. L'élève doit savoir utiliser un rapporteur, mais rien n'est dit sur la façon de construire la grandeur angle et sa mesure en degré.
Notre démarche a alors été de retrouver le sens de la notion et de la construction du savoir mathématique : Qu'est-ce qu'un angle ? Pourquoi étudier les angles ? Pour résoudre quels problèmes ? Pour cela nous nous sommes tournés vers l'histoire de notre discipline et les usages des angles.

Mais où chercher ? Notre démarche a été d'aller voir l'article *angle* dans des encyclopédies de référence, de consulter des traités de Géométrie, d'explorer des domaines d'utilisation, et de regarder comment la question était traitée dans d'anciens manuels de niveau comparable.
L'*Encyclopédie*, de Diderot et d'Alembert est un bon endroit pour revenir aux sources des notions car cela faisait partie du projet des auteurs, et ce Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers tisse de nombreux liens entre ces notions et leurs usages dans la vie des hommes. De plus, c'est un ouvrage facilement accessible sous des formes diverses (Encyclopédie, 1751). La lecture de l'article sur les angles (voir le texte dans la partie 6) nous met aussitôt en présence de la définition d'une grandeur, l'ouverture, et non d'un objet géométrique : la définition cinématique permet d'aborder le problème de la mesure par les arcs et donc de donner à la fois des moyens de comparer les angles et d'en trouver une mesure. L'indépendance entre égalité des angles et longueurs des côtés est justifiée. Ensuite l'article enchaîne aussitôt avec l'importance des angles dans la vie des hommes : arpentage, navigation, géographie, astronomie… et parle alors des instruments et de leur utilisation. Après le partage d'un angle en 2 et en 3 on trouve les différentes espèces d'angles en mathématiques et leurs propriétés. L'article se termine par un nombre impressionnant de dénominations d'angles qui montre l'usage de cette notion d'angle dans une pluralité de disciplines : optique, fortification, navigation, astronomie…

Dans le traité de Clairaut, *Les Éléments de Géométrie* (Clairaut, 1741), dont on a signalé tout l'intérêt dans la préface, quelle est la place des angles ? La notion d'angle apparaît pour lever un obstacle à un problème d'arpentage et est définie comme l'inclinaison d'une ligne sur une autre (article XXVII). On y voit ensuite l'utilisation d'une fausse équerre pour le report des angles et donc la reproduction de figures (article XXVIII). Il donne, à la suite, une autre façon de reproduire un angle à l'aide de cercles donc réalisable avec une corde sur le terrain, ou à la règle et au compas sur une feuille. Et ce n'est que vingt pages plus tard qu'il montre que le report direct d'un angle sur un autre peut avoir des inconvénients (article LI). Il va donc falloir créer un autre instrument auquel il assigne un cahier des charges précis : permettre de connaître la grandeur absolue des angles et leurs rapports. C'est l'analyse mathématique de la situation à partir de la notion d'ouverture et la mise en relation avec le problème analogue et déjà résolu pour les longueurs (article LII) qui va lui permettre de définir la mesure des angles (article LIII) et donc le principe des deux instruments qu'il décrira un peu plus loin : le demi-cercle sur le terrain d'arpentage pour mesurer les angles et le rapporteur pour tracer sur le papier les angles de mesures données par le demi-cercle. Le nom même de rapporteur s'éclaire. On comprend mieux alors la genèse des notions mathématiques et de leurs propriétés dans cette interaction entre problèmes de la vie à résoudre et moyens effectifs pour les résoudre.

Si sur terre les angles sont essentiels à l'arpentage, en mer, dans les airs et parfois aussi sur terre, ils sont indispensables au repérage. Prendre le cap pour se diriger, c'est trouver un angle entre deux directions. Se déplacer en mer ou dans les airs, vers les terres lointaines, impose au navigateur de tracer sa route, son rhumb sur une carte. Se pose alors le problème de l'établissement de cartes, vu la rotondité de la terre, celui du tracé de sa route sur la carte, et celui du suivi de la route dans le milieu naturel. On se retrouve, comme pour l'arpentage, à gérer deux types d'outils suivant que l'on est sur le « papier » ou sur le « terrain », en articulation avec les mathématiques (voir les textes de Manesson-Mallet dans la partie 6). La lecture de deux articles passionnants de Marie-Thérèse Gambin (1996 et 2004) nous ont fait découvrir les cartes portulans qu'ont utilisées les navigateurs couvertes de faisceaux de lignes droites qui sont en fait des roses des vents qui parsèment la carte. La rose des vents, au lieu d'être l'objet anecdotique que l'on retrouve parfois dans des manuels comme exercice de construction, prend alors un tout autre intérêt. Instrument simple à fabriquer, -il ne demande que des bissections-, il a permis et permet toujours de s'orienter facilement. On retrouve la rose des vents sur les boussoles, sur les compas de navigation, sur la barre des bateaux… Alors que la construction d'un rapporteur en degrés impose le partage d'un angle en 3 et 5 parties égales : problème difficile voire impossible à résoudre à la règle et au compas. On réalise ainsi que si l'on veut savoir comment on peut construire un rapporteur on est immédiatement confronté à un problème mathématique fondamental, celui du partage d'une grandeur, ici l'angle, en parties égales, qui va permettre à la fois de mesurer les grandeurs, de fabriquer des instruments de mesure, et de construire le domaine des nombres généralisés, comme disait Lebesgue (1935), ou réels comme nous dirions aujourd'hui.



Détail de la Carte de Cantino, v. 1502

Face au savoir émietté que proposent les manuels actuels, nous sommes allés voir comment était présenté le chapitre sur les angles dans des manuels de Sixième avant la réforme des mathématiques modernes. Voici le plan de deux d'entre eux.

- *Nathan*, (Plessier & Morlet, 1965)

Chapitre 3. Angles, cercles et arcs de cercles.

I. Plan. Demi-plan. Angles.

II. Égalité et addition des angles. Multiples et sous multiples.

III. Cercles et arcs de cercles.

Chapitre 4. Mesure des angles et des arcs. Longueur du cercle.

I. Mesure des angles et des arcs. Longueur du cercle.

II. Calculs sur le nombre mesurant angles et arcs de cercle.

III. Longueur d'un arc de cercle. Longueur du cercle.

- *Hachette*, (Cahen, 1958)

Chapitre 2. Angles.

I. Notion d'angle.

II. Opérations sur les angles.

III. Mesure des angles.

IV. Opérations sur les mesures d'angles en degrés.

Ce qui frappe à la lecture de ces deux plans, c'est une organisation mathématique similaire : le premier temps est celui de la définition de la notion d'angle à partir de laquelle on définit dans un deuxième temps des opérations sur la grandeur en tant que telle. Addition des angles, multiples et sous multiples vont permettre dans un troisième temps d'expliquer en quoi consiste la mesure des angles : c'est là qu'est introduit le rapporteur. Le dernier temps est celui du calcul avec les mesures. Nous sommes en présence d'une organisation structurée des connaissances où la phase de définition et d'arithmétisation de la grandeur angle (Barbin, 2007) est prise en compte, où la notion de mesure d'un angle peut prendre sens et où l'on comprend comment a été conçu l'instrument usuel de mesure d'un angle sur le papier qu'est le rapporteur.

Éclairé par ces recherches, notre chapitre sur les angles en Sixième s'est structuré autour de la construction de la grandeur « angle » comme outil permettant :

- de reproduire et de construire des figures polygonales,
- de trouver des distances inaccessibles,
- de tracer sa route sur mer, sur terre ou dans les airs.

Ses trois grandes parties sont :

1. Comparer des angles.
2. Partager des angles.
3. Mesurer des angles.

Cette construction, comme dans la démarche de Clairaut, est intégrative de nombreuses compétences du programme qui retrouvent ainsi une place naturelle qui leur donne du sens. Pour la mettre en œuvre dans la classe, nous avons élaboré une banque de situations (voir la brochure) pour chacune des trois grandes parties qui nous sert de ressources pour choisir nos activités d'étude, nos exercices et les sujets de nos devoirs. A partir de cette banque, chacun de nous personnalise le parcours du chapitre qu'il va proposer à ses élèves.

2. Organisation mathématique

Comme nous l’avons dit dans le document « Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs » (Domaines Collège, Niveaux scolaires Sixième), pour chaque grandeur nous avons choisi une organisation de son étude mathématique qui réponde à de grandes questions et qui corresponde à la construction mathématique d’une grandeur : comparaison absolue, comparaison relative, mesure, variation (voir annexe). En ce qui concerne les angles, l’analyse des connaissances et capacités au programme de la classe de sixième montre qu’il n’y a aucun contenu explicite correspondant au quatrième temps, celui de la variation de la grandeur ; nous l’aborderons dans les classes suivantes.
Nous structurons donc l’étude du chapitre angles en trois grandes parties :

1. Comparer des angles.
2. Multiplier et diviser des angles.
3. Mesurer des angles.

1) Comparer des angles

Les angles sont-ils égaux ? Quel est le plus grand ?…

Pour répondre à ces questions, nous avons choisi pour *définition* de l’angle celle d’ouverture, comme nous l’avons expliqué dans l’introduction. Définition qui va permettre de justifier des *méthodes* pour comparer deux angles, superposition et écart, débouchant sur des *techniques* et outils connus ou à construire : papier calque, compas, fausse équerre. Définition qui va permettre de fréquenter les notions de demi droite, de perpendiculaire, d’alignement de façon fonctionnelle, et de classer les angles (nul, aigu, droit, obtus, plat, plein).
La recherche d’angles égaux dans les figures usuelles du programme, celles qui ont un axe de symétrie et qui sont, de fait, le plus présentes dans notre environnement quotidien, permet d’introduire la symétrie axiale comme outil de validation de l’égalité de deux angles sans l’utilisation d’instruments, et de faire, ainsi, un pas vers la construction de la pensée rationnelle.
Cette recherche d’angles égaux permet la reproduction de ces figures en utilisant la construction d’un angle égal à un angle donné et la symétrie axiale : fausse équerre, règle, équerre et compas seront sollicités.
La considération d’angles adjacents permet de définir l’addition et la soustraction des angles, moyen d’obtenir des angles plus grands ou plus petits qu’un angle donné.
L’intérêt de cette partie est de construire la grandeur angle à partir des objets géométriques : on est dans la géométrie. On construit en même temps des notions géométriques fonctionnelles : superposabilité, isométrie, symétrie, distance, direction, orthogonalité, parallélisme…

2) Multiplier et diviser des angles

Combien de fois plus grand ? plus petit ?…

Les outils et techniques (fausse équerre, compas, symétrie…) vont être réinvestis pour construire des angles double, triple…. Par contre le partage d’un angle en deux angles égaux va faire rencontrer la bissectrice de l’angle et les propriétés des figures de base (cerf volant, losange, triangle isocèle), vues précédemment, vont permettre d’élaborer des techniques pour sa construction. La réitération du processus permet de partager un angle en 4, 8, 16, 32, 64… angles égaux et dans le cas de l’angle plein de construire des polygones réguliers dont le

périmètre va approcher celui du cercle, et des roses des vents de la précision désirée pour s'orienter. Fractions et fractions égales trouvent là un contexte naturel pour être étudiées. Et ces roses des vents pourraient nous servir de rapporteur, comme pour les navigateurs. Le principe de la mesure des angles est mis en place.
Nous avons été capables de partager un angle en deux angles égaux : bissectrice et axe de symétrie on trouvé leur place. Serions-nous maintenant capables de partager un angle en trois angles égaux ? Le problème vaut d'être posé, même si cela amène les élèves à diviser une corde en trois parties égales. Infirmer cette construction, c'est les apprendre à argumenter et à démontrer. On peut ainsi voir que le partage en 3, 5, … n'est pas évident à réaliser alors que l'on conçoit bien que le tiers de l'angle existe. Ce qui permettra d'apprécier les nouvelles possibilités que va apporter la mesure.
L'intérêt de cette partie est de construire des opérations sur la grandeur angle : on est dans l'algèbre des grandeurs. On travaille les notions de multiple et de fraction, on rencontre deux méthodes fondamentales des mathématiques (duplication et dichotomie), on enrichit les objets géométriques (bissectrice) et leur mode de construction (par exemple le carré)

3) Mesurer les angles

Combien mesure un angle ?

Nous avons maintenant tous les éléments pour mettre en place une mesure des angles : choix d'un angle unité, fraction d'un angle de référence (droit, plat, ou mieux plein si l'on veut expliquer l'origine du 360°), égalité de l'angle à mesurer avec un multiple de l'angle unité. L'instrument pour réaliser cette mesure, le rapporteur, apparait alors comme la réalisation concrète du partage de l'angle plein en 360 parties que l'on viendra superposer sur l'angle à mesurer, comme l'on superposait les angles dans la première partie pour les comparer : il s'agit ici toujours de comparer l'angle avec un multiple de l'angle choisi pour unité. Si la mesure ne tombe pas juste, on divise l'angle unité… La construction des nombres se fait conjointement avec le problème de la mesure, au fur et à mesure des besoins de précision.
Rapporteur et mesure vont nous procurer de nouvelles techniques pour comparer les angles et construire les figures. La construction des polygones réguliers, à partir d'un cercle et du partage de l'angle plein de sommet son centre, permet de travailler la division euclidienne, la notion de valeur exacte et approchée, d'arrêter la division en fonction de la précision désirée, pour l'heptagone, de se questionner sur la richesse en diviseurs de 360…
La mesure permet de répondre autrement aux deux grandes questions : comment comparer ? Comment partager ? Elle permet donc de résoudre autrement les anciens problèmes, d'améliorer certaines solutions (par exemple passage de la rose des vents au compas de navigation), de donner des solutions à ceux qui n'en avaient pas forcément (par exemple la trisection de l'angle, la construction des polygones réguliers), de résoudre de nouveaux problèmes (par exemple le calcul de distances inaccessibles).
L'intérêt de cette partie est de construire la numérisation de la grandeur angle (choix d'une unité, mesure avec cette unité) : on est dans le numérique. On construit en même temps les nombres et leurs différents formats.

Les techniques rencontrées

Comparer un angle à un angle donné : 1. avec le papier calque (superposition) 2. avec la fausse équerre (superposition) 3. avec la règle et le compas en mesurant la corde 4. avec la symétrie axiale 5. avec l'équerre pour la comparaison à l'angle droit. 6. avec le rapporteur	***Construire un angle égal à un angle donné :*** 1. avec du papier calque. 2. avec la fausse équerre ou sauterelle 3. avec la règle et le compas en reportant la corde. 4. avec la symétrie axiale 5. en construisant un triangle avec ses trois côtés (notion de rigidité du triangle). 6. avec le rapporteur.
Partager un angle en angles égaux : 1. en pliant le papier si c'est possible. *2.* avec la bissectrice quand le partage est multiple de deux. *(la construction de la bissectrice repose sur le triangle isocèle, le losange ou le cerf-volant)* 3. avec le rapporteur, on mesure l'angle et on effectue la division (mentalement, posée, écrite, à la machine…).	***Construire, en un point A, d'une droite D, la perpendiculaire à cette droite :*** 1. avec l'équerre. 2. avec le rapporteur. ***Mesurer un angle :*** 1. avec le rapporteur

Les tâches travaillées

- Comparer des angles
- Reproduire et construire des figures polygonales (à une échelle simple donnée)
- Trouver des longueurs et angles inconnus

Des remarques

1) Cercle et angles

Le cercle apparaît dans ce chapitre comme un paradigme des angles : il est présent dans la définition de l'angle comme ouverture, et dans la construction de sa mesure (le degré et le rapporteur).

2) Place de la validation

Dans le cours, énoncés et techniques sont justifiées, et on essaie de mettre l'accent sur leur enchainement, visant ainsi à donner l'image d'un savoir structuré.
Dans le travail de l'élève (études, exercices, devoirs) demandes de justifications et de vérifications sont omniprésentes : elles nous semblent fondamentales si l'on ne veut pas déroger à la nature du travail scientifique en général et mathématique en ce qui nous concerne. Il s'agit d'accéder petit à petit à une démarche rationnelle, et donc de prendre conscience des différents types de justification et des liens logiques qui existent entre les diverses propriétés rencontrées.
L'idée fondamentale c'est qu'en mathématiques on explique ce que l'on fait. Un résultat, une figure sans explication ça ne vaut rien. Par contre il y a plein de façons d'expliquer. Il ne faut pas trop normaliser, surtout au début. Au lieu de dire aux élèves« Écris ton programme de construction », on peut leur dire « Explique comment tu as construit ta figure ». Certains verront rapidement qu'une explication sous forme de programme ou de calcul est souvent bien plus claire, rapide et performante.

3) Constructions géométriques

La comparaison des angles, dans des situations riches, amène rapidement la nécessité de la dénomination et du codage des angles.
La reproduction de figures à l'aide de reports d'angles et de longueurs à une échelle simple (1/1, 2/1, 1/2, 1/100…) vise à faire comprendre à l'élève que les angles définissent la forme de la figure, et donc sont invariants dans tout agrandissement-réduction d'une figure, et que les longueurs définissent la taille de la figure.
L'utilisation des angles pour reproduire des figures permet une description simple de la stratégie de construction : on trace un côté, on trace un angle, on trace un côté…, qui débouche sur l'écriture simple de programmes de construction permettant d'expliquer le travail de construction. De plus l'élève se rend compte
Une chose importante à comprendre pour les élèves dans ce chapitre est que pour reproduire des figures polygonales il suffit d'utiliser ses angles et ses côtés (les angles donnent la forme de la figure et les côtés sa dimension). Si on utilise la procédure un côté, un angle, un côté..., pour terminer la construction, il faut relier 2 points et il y a donc 3 données de la figure à reproduire qui n'ont pas été utilisées : un côté et deux angles. S'assurer que ce côté et ces 2 angles sont égaux à ceux de la figure de départ (ou pour le côté au double si l'échelle est 2/1) permet de vérifier que la construction est bien faite (on pourrait ne vérifier qu'une seule des 3 données). En fait on peut vérifier aussi tous les angles et tous les côtés, ce que font certains élèves. Pourquoi pas? Cela dépend des outils utilisés. Des élèves se fabriquent parfois un calque de la figure donnée pour vérifier tous les angles (c'est ce que certains d'entre nous faisons avec nos transparents...). Donc tout est possible, mais il semble important que les élèves prennent l'habitude de vérifier ce qu'ils font, de voir qu'en mathématiques on peut savoir si ce qu'on a fait est juste (ce que font les artisans, les ingénieurs...), et qu'ils apprennent des techniques de vérification. Si on utilise un angle un côté un angle, on termine par l'intersection de 2 demi droites et les 3 données non utilisées sont un angle et 2 côtés. Pratiquer ce type de vérification (ici 3 données non utilisées) permet de réaliser petit à petit le nombre de degrés de liberté d'une figure : pour construire un triangle 3 données (sur 6) suffisent, pour un quadrilatère 5 (sur 8)... les autres données leur sont liées rationnellement (par des "lois" : ici essentiellement les formules de trigonométrie, mais pour les figures particulières par tous les théorèmes connus : Pythagore, propriétés des symétries... qui permettent de calculer les éléments non donnés ou de démontrer que la construction satisfait bien aux conditions imposées.
Construire un triangle connaissant deux angles et un côté, ou deux côtés et un angle n'est pas une compétence exigible en 6ème. Pourtant elle s'intègre tout à fait dans l'utilisation des angles pour reproduire des figures, elle en représente le cas le plus simple, donc on ne doit pas s'interdire d'y travailler.
La construction des polygones réguliers permet un réinvestissement des techniques vues dans le chapitre. Elle permet de surcroît d'appréhender le cercle comme cas limite de polygones réguliers, et donc de préparer l'étude du périmètre et de l'aire du cercle..

4) Dictées géométriques

La technique pour trouver des distances inaccessibles peut être reprise sous la forme de *dictées géométriques* : on dicte les données mesurées par un géomètre et on demande la valeur de mesures d'angles ou de longueurs non données. L'élève, pendant la dictée, réalise un schéma à main levée (comme le géomètre sur son mémorial), puis il construit une figure à l'échelle pour trouver les mesures demandées (comme le géomètre dans son cabinet). On voit la fonctionnalité de la figure à main levée, du codage, d'une figure faite aux instruments avec soin pour évaluer avec précision les mesures inconnues, et la nécessité de savoir tracer un angle de mesure donnée et de mesurer un angle sur une figure. Une tâche qui met en œuvre une pluralité de compétences du programme et qui leur donne du sens.

Mise en œuvre dans la classe

L'organisation mathématique que nous venons de décrire sert de cadre à ce qui va être fait en classe tant en ce qui concerne le déroulement en classe qu'en ce qui concerne l'institutionnalisation des savoirs ou ce que l'on appelle plus traditionnellement le cours. La forme et les supports de ce cours peuvent être très variés : énoncés avec ou sans démonstration, manuscrit ou photocopié, rédigé à partir des propositions des élèves ou du texte conçu par le professeur, complet ou à trous, support spécifique (répertoire, cahier de cours) ou non (classeur, cahier unique, manuel)…
Au niveau de l'équipe les choix sont variés, donc les exemples proposés correspondent à des choix individuels.

Un exemple de cours : Chapitre 1 ANGLES

1 Comparer des angles

1) Définition : on appelle **angle** l'ouverture formée par deux demi droites de même origine. Cette origine s'appelle le **sommet** de l'angle et les demi droites les **côtés** de l'angle. *Illustrer*
On **marque** les angles par de petits arcs de cercle qui ont pour centre le sommet de l'angle. *Compléter l'illustration*
On **désigne** un angle par le nom de trois points avec au dessus le dessin d'un angle : le sommet au milieu, et à droite et à gauche deux points par où passent les côtés. **Notation** : $\widehat{APB}$.
Remarque : s'il n'y a qu'un angle de sommet P, on peut écrire simplement le sommet : $\widehat{P}$

2) Comparaison
D'après ce que dit la définition de l'angle
Théorème 1
Deux angles sont égaux s'ils ont la même ouverture : donc on peut les superposer.
Un angle est plus petit qu'un autre si son ouverture est la plus petite :
- si on superpose son sommet et un de ses côtés sur l'autre angle, alors son deuxième côté est à l'intérieur de cet angle.
- Si on trace les écarts entre les deux côtés à la même distance du sommet, alors le plus petit est celui qui a la plus petit écart.

Outils pour reproduire un angle égal à un angle donné, et pour comparer des angles :
- papier calque : pour superposer
- fausse équerre : pour prendre l'ouverture
- règle et compas : pour prendre l'écart
- rapporteur : pour mesurer (voir plus loin)

3) Angles égaux
Théorème 2: si une figure a un axe de symétrie (c'est-à-dire qu'en la pliant autour de cet axe les 2 parties se superposent), alors les angles symétriques sont égaux puisqu'ils se superposent.
Exemples : triangle isocèle, cerf volant, trapèze isocèle, losange

Méthode pour construire une figure symétrique : à partir de la moitié de la figure et de son axe.
Avec les points et des perpendiculaires à l'axe. *Illustrer*

4) Types d'angles du plus petit au plus grand (ouverture croissante) :

angle nul, angle aigu, angle droit, angle obtus, angle plat, angle rentrant, angle plein.
Illustrer

5) Angles adjacents *Illustrer*
Définition : ce sont des angles qui ont le même sommet et un côté commun. Ils forment un angle plus grand que chacun d'eux qui est appelé leur somme (on a ajouté leurs ouvertures). Si l'on soustrait de la somme un des angles, on retrouve l'autre.

2 Multiplier et diviser un angle

1)Multiplier
Si on dessine 2 angles égaux côte à côte avec le même sommet, on obtient un angle 2 fois plus grand (ouverture 2 fois plus grande, ou double). Si on en rajoute un, on obtient un angle 3 fois plus grand (triple), et si on continue on obtient un angle 4 fois, 5 fois, 6 fois… plus grand (quadruple, quintuple, sextuple…) *Illustrer*

2) Diviser en 2
Définition : on peut partager un angle en 2 angles égaux en le repliant sur lui-même ; la droite de pliage s'appelle la **bissectrice** de l'angle. C'est son **axe de symétrie**. Chacun des deux angles égaux vaut la moitié de l'angle de départ.

Construction de la bissectrice d'un angle
- par pliage
- avec des instruments

Méthode du triangle isocèle *(illustrer)*
1) On trace un arc de cercle ayant pour centre le sommet de l'angle S, et pour rayon la longueur que l'on veut SA.
2) On trace l'écartement AB.
3) On place I au milieu du segment [AB].
4) On trace la droite passant par S et I : (SI). C'est la **bissectrice** de l'angle $\widehat{ASB}$.

Méthode du cerf volant *(illustrer)*
1) On trace un arc de cercle ayant pour centre le sommet de l'angle S, et on obtient, sur les côtés de l'angle 2 côtés du cerf volant : SA et SB.
2) On choisit un autre rayon AC, et on trace le cercle de centre A et le cercle de centre B : ils se coupent en C.
3) On trace la droite passant par S et C : (SC). C'est l'axe de symétrie du cerf volant SACB, et donc c'est la **bissectrice** de l'angle $\widehat{ASB}$.

Méthode du losange *(illustrer)*
C'est la même méthode que pour le cerf volant, mais plus rapide car on garde le même rayon pour tracer les 3 cercles.

Théorème : dans un triangle rectangle isocèle, les deux angles aigus sont égaux à la moitié d'un angle droit. *(illustrer)*

3) Autres partages
- Avec la bissectrice on peut partager n'importe quel angle en 2, 4, 8, 16… parties égales. C'est ainsi que l'on peut construire la rose des vents.
- Par contre il est plus difficile de partager un angle en 3, 5, 7, 9… parties égales. On verra plus loin comment faire.

3 Mesurer un angle

1) Unité de mesure comme pour les longueurs, pour pouvoir comparer les angles à l'aide de nombres, il faut choisir un angle pour unité. Depuis plus de 4000 ans l'unité usuelle d'angle est le **degré** : c'est l'angle correspondant à la trois cent soixantième partie du cercle.
(Illustrer avec un cercle divisé en 8, en indiquant les 8 graduations en degrés)
Mesure des angles : nul (0°), aigu (entre 0° et 90°), droit (90°), obtus (entre 90° et 180°), plat (180°), rentrant (entre 180° et 360°), plein (360°).

2) Le rapporteur : c'est un instrument pour mesurer les angles. C'est un cercle ou un demi-cercle gradué en degrés (360 pour le cercle, 180 pour le demi-cercle)

3) Mesurer un angle *(illustrer)*
1) On place le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle, et la ligne 0°-180° sur un côté de l'angle.
2) A l'endroit où le deuxième côté de l'angle coupe la graduation, on lit la mesure de l'angle (en partant de 0°)

4) Construire un angle de mesure donnée *(illustrer)*
1) On trace un côté de l'angle, et on marque son sommet : S.
2) On place le centre du rapporteur sur le sommet S, et la ligne 0°-180° sur le côté de l'angle.
3) On repère la mesure donnée sur la graduation du rapporteur (en partant de 0°), et on place un point.
4) On trace le deuxième côté de l'angle qui part du sommet S et qui passe par ce point.

5) Utilisation
a) Pour comparer des angles : on les mesure et on compare les mesures.
b) Pour partager un angle : on le mesure et on partage sa mesure.
Applications
- Pour partager un angle en 3 angles égaux
- Pour construire des polygones réguliers (et des étoiles) à partir d'un cercle : pour un polygone à n côtés, on partage l'angle plein en n angles égaux en divisant 360° par n.

c) Dans la vie :
- pour construire des figures, des objets
- pour s'orienter : sur terre, en mer, dans les airs (cartes, boussoles, compas de navigation…)
- pour trouver des distances inaccessibles (largeur d'une baie, hauteur d'une tour…)

Organisation didactique

L’organisation mathématique nous fournit les questions et la structure du parcours auquel nous allons confronter les élèves. Mais pour faire vivre ce parcours dans la classe, il va nous falloir choisir des situations à faire étudier, porteuses des grandes questions relatives aux angles pour lesquelles la recherche de réponses va permettre aux élèves de rencontrer et de faire fonctionner des savoirs et des techniques utiles faisant partie du programme de la classe de sixième.
Ces situations nous les avons voulues, autant que faire se peut, proches de la vie présente ou passée des hommes, pour montrer aux élèves qu’ils étudient une science vivante qui a aidé et aide les hommes à résoudre leurs problèmes. Pour en trouver, nous sommes allés interroger la vie quotidienne et l’histoire. Comme il s’en trouvait très peu dans les manuels, nous en avons fait une banque (voir la brochure) dans laquelle nous puisons la majeure partie de nos sujets d’étude, d’exercices et de devoirs.
A partir de cette banque, chacun de nous personnalise le parcours du chapitre qu’il va proposer à ses élèves, en en conservant l’organisation mathématique.

Introduction au chapitre

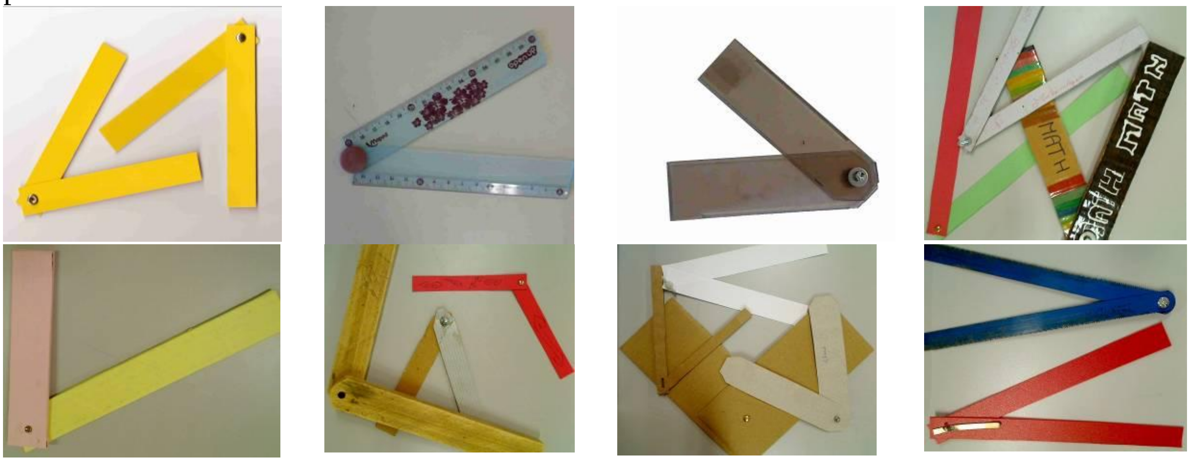
Il nous semble important de motiver l’étude du thème aux yeux des élèves, de les informer sur ce que l’on va étudier et de l’intérêt de cette étude. C’est ce que nous pourrions appeler la dévolution du parcours à la classe.
Pour cela, la plupart d’entre nous organisent un débat en classe autour de 3 questions, avec un bilan oral qui peut être noté sur leur cahier.
1) Quand parle-t-on d’angle ? (Angle mort, angle de deux rues…)
2) Quand utilise-t-on des angles ? (Pour tracer des figures, en menuiserie…)
3) Qu’a-t-on besoin de savoir faire avec les angles ? (Les comparer, les mesurer, les tracer…)
Ce qui va permettre de dire que dans ce chapitre nous allons essayer de trouver des moyens pour comparer, pour tracer et pour mesure des angles.
Ce temps de débat permet aussi de prendre la mesure de ce que représente la notion d’angle pour les élèves et d’en esquisser une définition.
Ce débat peut être accompagné d’un diaporama, et poursuivi par des recherches, par exemple : trouver des métiers où l’on utilise les angles, des outils servant à tracer ou mesurer des angles.

Étude 1 : comparer des angles

Comment comparer des angles ?

Pour aborder la première question de notre parcours sur les angles et son étude, il va falloir choisir une situation de comparaison d’angles qui soit suffisamment problématique et riche pour que les élèves affinent petit à petit leur notion d’angle et recherchent des moyens pour comparer les angles.
Certains d’entre nous ont choisi l’optimisation de l’angle de tir pour la transformation d’un essai au rugby. Elle permet de travailler la notion d’ouverture, d’élaborer des techniques de comparaison des angles et de rencontrer les problèmes de désignations.
L’étude d’autres situations de comparaison d’angles, puisées pour la plupart dans la vie pratique, et de reproduction de figures fait percevoir l’intérêt de fabriquer un outil pratique pour reporter un angle : la fausse équerre des menuisiers (que l’on trouve dans le traité de

géométrie de Clairaut), mise en œuvre matérielle de la notion d'ouverture. On peut facilement en construire avec 2 bouts de plastique et un rivet et les fournir aux élèves; mais chaque élève peut aussi construire la sienne.



Le choix des deux tiges par chaque élève, la variété des instruments produits, et l'utilisation constante de la fausse équerre montrent que l'obstacle mis en avant dans les commentaires du programme actuel sur les côtés de l'angle, n'en est pas un dans nos classes. La fausse équerre va devenir l'outil privilégié des élèves pour comparer les angles et reproduire les figures. Papier calque, règle, compas, équerre et fausse équerre seront nos seuls instruments tout au long des deux premières parties du chapitre.
La comparaison des angles dans l'étude d'objets tels que cerf volant, cric, charpente, est l'occasion de parler de symétrie axiale et d'utiliser cette symétrie à la fois pour comparer des angles et pour construire des figures symétriques : angles égaux, symétrie axiale, figures au programme, programmes de construction et codages des angles trouvent ainsi une place naturelle dans notre chapitre.

Étude 2 : multiplier et diviser des angles

Construction de spirales, d'éventails, plans de théâtres grecs ou romains peuvent permettent ensuite d'aborder le problème de la comparaison relative : multiples d'angles et addition en découlent. On est dans le cadre de l'arithmétisation de la grandeur angle (Barbin, 2007), ce qui a l'avantage, comme dans l'étude précédente, de pouvoir traiter des problèmes géométriques dans un cadre général, chose qui a pratiquement disparu des manuels actuels où les mesures sont omniprésentes.
Le partage de l'angle en deux angles égaux est le plus simple, et donc présente dans de nombreuses situations : la recherche de la construction de la bissectrice amène à réutiliser le processus pour partager un angle en 2, 4, 8, 16, 32… angles égaux et donc d'avancer dans le problème du partage des angles ; ce qui permet de construire des roses des vents et des polygones réguliers, à 4, 8, 16, 32… côtés, dans le cas général et sans aucune mesure.
La rose des vents permet aussi d'exprimer l'angle entre deux « vents » en fonction de l'angle plein, de l'angle plat ou de l'angle droit. Pour la rose à 16 vents apparaissent alors tous les multiples de $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{4}$ et des égalités de fractions de dénominateurs différents. Et nous concevons facilement que notre rose à 16 vents nous permet de mesurer n'importe quel angle au $\frac{1}{16}$ d'angle près ; et que si nous voulons augmenter la précision, il suffit de passer à une rose à 32 vents, et ainsi de suite, la précision théorique atteinte étant sans limite, alors que celle à laquelle peut prétendre le navigateur est, elle, limitée.
Nous mettons ainsi en œuvre de façon simple, avec les élèves, des méthodes fondamentales des mathématiques : la duplication et la dichotomie.

Quant au principe de la mesure des angles, il est mis en place. Pour transformer une rose à 8 vents en notre rapporteur circulaire, il suffirait de partager son angle « unité » le huitième de l'angle plein, en 3, puis encore en 3, puis en 5. Le partage d'un angle en 3 ou 5 parties égales peut être posé et discuté.

Étude 3 : mesurer les angles

C'est dans cette partie que l'usage du rapporteur va être travaillé, en se centrant sur 3 utilisations des angles qui nous paraissent essentielles, comme nous l'avons dit dans l'introduction :

- reproduire et construire des figures polygonales,
- trouver des distances inaccessibles,
- tracer sa route sur mer, sur terre ou dans les airs.

Le principe du rapporteur étant acquis, nous pouvons décrire l'outil, -partage du cercle en 360 parties égales-, et son utilisation : nous allons maintenant pouvoir partager tous les angles et les reproduire. On peut le montrer en reprenant la construction des polygones réguliers que nous ne savions pas construire : pentagone, heptagone, ennéagone, et voir une autre construction de l'hexagone (division exacte ou approchée de 360°, lien fonctionnel entre le numérique et le géométrique).

La reproduction de figures polygonales données, vue dans l'étude 1 à l'aide de la fausse équerre peut être revisitée en utilisant le rapporteur. Cette situation a l'avantage de mettre en œuvre conjointement les 2 techniques fondamentales au programme : mesure des angles de la figure à reproduire, construction d'angles ayant ces mesures.

Trouver une longueur inaccessible directement à la mesure mais dont on a besoin pour le calcul de l'aire d'un terrain était la raison de l'introduction et de l'utilisation de la notion d'angle par Clairaut. Trouver une longueur inaccessible est souvent un problème qui s'est posé et se pose aux arpenteurs, mais aussi aux navigateurs, aux cartographes, aux ingénieurs… La mesure des angles a été et est encore un moyen souvent utilisé pour résoudre ce problème. Ce thème permet de travailler la technique de construction d'un angle de mesure donnée à l'aide du rapporteur, et peut donner lieu à des dictées géométriques.

Faire un plan de vol pour un avion, ou un plan de route pour un bateau, permet de faire de nombreuses mesures d'angles.

Remarques

Exercices et travail des techniques

Nous avons voulu que les techniques à connaître ne se travaillent pas pour elles-mêmes, mais à travers des tâches qui en montrent l'utilité et l'intérêt. Par exemple c'est pour établir le plan de vol d'un pilote que l'élève va travailler la mesure d'un angle qu'il va répéter une dizaine de fois pour des angles aigus, obtus, voire rentrants, dans des positions très diverses : cela nous semble mieux que les dix exercices correspondant d'un exerciseur. C'est en cherchant une longueur inconnue que l'élève va être amené à construire des angles, c'est en reproduisant des figures polygonales qu'il va être amené à la fois à mesurer les angles utiles, puis à les tracer. Nous ne posons donc pas, comme préliminaire, des exercices de construction d'un angle de mesure donnée, ou de mesure d'un angle tracé : nous bannissons les micro tâches centrées sur une technique, ainsi que les exercices artificiels et purement didactiques.

Exercices et situations

Les exercices sont le support de l'étude de la grande question posée, par exemple pour la première partie : comment comparer des angles ? Ils permettent donc de faire travailler les notions et techniques rencontrées dans la situation de départ, mais aussi de les approfondir, de les enrichir en rencontrant la même question dans d'autres cadres. Les exercices vont donc être centrés autour du même grand type de tâche que la situation de départ : ils sont en eux-mêmes des situations complexes qui amènent l'élève à réfléchir à des stratégies, à choisir des techniques, à s'adapter. La question étant ouverte et l'accent étant mis sur l'explication de la méthode mise en œuvre les élèves peuvent explorer de nombreuses pistes et choisir des méthodes différentes.

Évaluations

En cohérence avec ce qui a été dit précédemment, nous choisissons pour nos contrôles des situations du type des exercices proposés en demandant le plus souvent à l'élève d'expliquer sa démarche, et en acceptant différents types d'explications pourvu qu'elles soient cohérentes. En devoir à la maison nous utilisons le même type de situations, en sachant qu'il peut s'agir de rédiger une recherche faite en classe, ou de reprendre une situation analogue, ou d'en découvrir une nouvelle.

Ouvertures

Notre volonté de rester en prise avec des situations de la vie, permet d'explorer de nombreuses pistes : recherches, fabrication et utilisation d'outils pour mesurer les angles, interventions de professionnels parlant de la mesure des angles dans leurs métiers…

Un exemple de déroulement sur 8 semaines (fiche professeur)

Chapitre 1 ANGLES

Introduction : les 3 questions

1) Quand parle-t-on d'angle ? 2) Quand utilise-t-on des angles ? 3) Qu'a-t-on besoin de savoir faire avec les angles ?
Bilan écrit sur le cahier.

Étude 1 : comparer des angles

Situation : Angle de tir au rugby *(définition, comparaison)*

- Cours : 1. Comparer 1) Définition 2) Comparaison

Devoir maison : fiche rugby
Exercices : Exos1.doc : 1 (quadrilatère), 2 (cerf volant), 3 (cric ou tire bouchon) 4 (charpente) : égalité d'angles et symétrie
Construction d'une fausse équerre

- *Cours* : 1.3) Angles égaux et symétrie : théorème2

Interrogation 1
Exercices : Exos2.doc : 5 (quadrilatère), 6 (cerf volant), 7 (losange, triangle isocèle, trapèze isocèle) 8 (charpente) : reproduction d'angles égaux : reproduire une figure en l'agrandissant 2 fois, coupe de chevrons en menuiserie, construction de figures symétriques
Devoir maison : mosaïque romaine

- *Cours* : 1.3) Méthode pour construire une figure symétrique.4) Types d'angles

Exercices : Exos3.doc : 9 (construire une aile delta), 10 (reproduire un cerf volant) 11 (ajouter des angles), 12 (angles du triangle rectangle), 13 (reproduire une flèche à l'échelle 2/1).

- *Cours* : 1.5) Angles adjacents

Bilan
Interrogation 2

Étude 2 : multiplier et diviser des angles

Situation 1 : l'éventail

- *Cours* : 2. Multiplier et diviser 1) Multiplier

Devoir maison : la spirale d'Archimède
Situation 2 : rose des vents (boussole, compas de navigation)
Partager en 2, 4, 8, 12... Rapporteur "binaire". Utilisation pour se déplacer, pour se déplacer en mer.

- Cours : 2. Multiplier et diviser 2) Diviser en 2

Devoir maison : rose des vents polynésienne
Partager un angle en 3 parties égales. Étude du rapporteur

- Cours : 3. Rapporteur

Reprise de l'exercice 5 à l'échelle 2/1 en utilisant le rapporteur
Partage du cercle et de 360° *(division, diviseur, quotient exact, approché) :* construction de polygones réguliers (pentagone convexe et étoilé, heptagone), exercice sur les éoliennes
Devoir maison : ennéagones régulier et étoilés

Étude 3 : mesurer des angles

1) *Situation 1* : l'aviateur : prendre le cap pour faire le tour de France *(s'orienter)*

- Cours : 3. mesurer un angle

2) *Situation 2* : largeur d'une baie *(mesurer l'inaccessible)*

- Cours : 3. reproduire un angle de mesure donnée

3) *Situation 3* : reproduire une figure (à l'échelle)
Exercices : constructions de figures, dictées géométriques

- Cours : 3. Utilisation des mesures

Contrôle sur les angles : dictée géométrique + « montagne » à reproduire.

Annexe : Les 4 temps de l'étude d'une grandeur

Une organisation de l'année de sixième autour des grandeurs. Quatre temps pour « *construire des savoirs* ».				
Le premier temps est celui de la définition.	Peut-on toujours comparer deux grandeurs de même espèce, même sur des objets différents ? Peut-on dire que des grandeurs sont égales même si les objets sont différents ? Peut-on toujours ajouter deux grandeurs de même espèce ? C'est lieu de l'égalité, de l'inégalité, de l'addition. Les définitions et les techniques se dégagent des études. Elles permettent de comparer ou d'ajouter des grandeurs de même espèce.			
Le second temps est celui du partage et de la duplication.	Peut-on toujours dire d'un objet qu'il est n fois plus grand qu'un autre, n fois moins grand relativement à la grandeur ? C'est le lieu de la comparaison relative, de la notion de quotient et de rapport, de partage et de multiple. Les définitions et les techniques se dégagent des études. Elles permettent de comparer de façon relative les grandeurs.			
Le troisième temps est celui de la mesure et de la formule.	La grandeur est maintenant construite. Existe-t-il un système qui permet de mesurer cette grandeur ? C'est le lieu de la mesure. Mesurer c'est comparer une grandeur à une unité usuelle. Les définitions et les techniques s'enrichissent pour résoudre les mêmes problématiques qu'au départ. Les formules se démarquent particulièrement comme outil de résolution.			
Le quatrième temps est celui de la tabulation, des variations.	Peut-on étudier les variations de la grandeur en fonction d'une autre ? Peut-on optimiser une mesure ? C'est le lieu des tableaux, des graphiques, des formules algébriques, du fonctionnel. C'est en se reposant sur la construction des grandeurs que se dégagent des techniques pour les études fonctionnelles.			
	Questionnement sur la comparaison.	***Questionnement sur le calcul.***	***Questionnement sur la construction.***	***Questionnement sur le dénombrement.***

Bibliographie

Sources

- CLAIRAUT Alexis. *Les Éléments de Géométrie de Clairaut* Paris : Lambert et Durand, 1741. Rééd. Paris : J. Gabay, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, Laval : éditions Siloë, 1987. Préface publiée dans *Petit x* n° 2. IREM de Grenoble 1983, p. 77-80.
- ENCYCLOPÉDIE OU DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES METIERS par une société de gens de lettres ; mis en ordre et publié par M. Diderot,... et quant à la partie mathématique, par M. d'Alembert,… Paris : Briasson, David, Le Breton. Tome 1, 1751.

  http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50533b/f520.chemindefer

  4 CD-Rom : *L'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert*. Redon éditeur, 26740 MARSANNE.
- ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE – MATHÉMATIQUES. Par MM. d'Alembert, l'Abbé Bossut, de la Lande, Le Marquis de Condorcet, &c. Tome premier, Paris : Panckoucke et Leyde : Plomteux 1784. Réédition du Bicentenaire, Paris : ACL-éditions 1987. http://gallica2.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3828j.r=.langFR
- LEBESGUE Henri. « La mesure des grandeurs ». Genève : Monographies de *L'Enseignement Mathématique* n° 1, 1935. Rééd. Paris : A. Blanchard, 1975.
- MANESSON MALLET Allain. *La Géométrie pratique, divisée en quatre livres*. Paris : Anisson, 1702. L.II, De la Trigonométrie..

Documentation

- GAMBIN Marie-Thérèse. « Des cartes portulans à la formule d'Edward Wright : l'histoire des cartes à « rhumbs ». M: A.T.H., *MNEMOSYNE* n° 11. IREM de Paris VII 1996, p. 31-62. Repris en partie dans « L'histoire des cartes à « rhumbs » », in *Sciences et Techniques aux 15ᵉ et 16ᵉ siècles*, ASSP Rouen 2005, 10 p. : http://assprouen.free.fr/publications/sciences_et_techniques.php
- GAMBIN Marie-Thérèse. « La cartographie dieppoise ». In É. Hébert (dir.), *Instruments scientifiques à travers l'Histoire*, Paris : Ellipses, 2004, p. 43-55.
- GÉOFLASH. CD-Rom, Paris : ACL-Les Éditions du Kangourou, 1998.
- CAHEN Raymond. *Cours de Mathématiques. Classe de Sixième*. R. Maillard (dir.). Paris : Classiques Hachette, 1958.
- MÉTIN Frédéric. « Quand les Jésuites enseignaient la fortification ». *Bulletin de l'APMEP* n° 439, Paris : APMEP, 2002, p. 223-234.
- MÉTIN Frédéric. « Mathématiques et Fortifications : construire la sécurité ». In *Tangente* n° 124, Paris : Éditions POLE, 2008, p. 36-38.
- PLESSIER Pierre et MORLET Maurice. *Mathématiques classe de Sixième*. M. Queysanne, A. Revuz (dir.). Paris : Nathan, 1965.
- STOLL André. « Les spirales ». In *L'Ouvert* nᵒˢ 96 et 97, IREM de Strasbourg 1999 et *Repères IREM*, n° 39, Metz : Topiques éditions, 2000, p. 73-99 :

http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/39stoll.pdf

Bibliographie générale

- BARBIN Évelyne. « Les Éléments de Géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée ». Metz : *Repères IREM*, 1991, n° 4, p. 119-133.
- BARBIN Évelyne. « L'arithmétisation des grandeurs ». Metz : *Repères IREM*, 2007, n° 68, p. 5-20.
- CHARNAY Roland. (2006) *Quelle culture mathématique partagée à la fin de la scolarité obligatoire ?* Repères IREM n° 64 (article en ligne)
- CHEVALLARD Yves. (2006) *Les mathématiques à l'école*. Bulletin APMEP n° 471, 2007
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana. (2000), *Les grandeurs en mathématiques au collège.* Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, p. 5-32.
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana. (2000), *Les grandeurs en mathématiques au collège.* Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, p. 43-76.
- CLAIRAUT Alexis. *Les Éléments de Géométrie de Clairaut* Paris : Lambert et Durand, 1741. Réédition. Paris : J. Gabay, 2006. Fac simile de l'édition de 1753, Laval : éd. Siloë, 1987.
- DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne. (1982) *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Le Seuil, Points Sciences N° 49, 1986.
- Grandeurs. N° spécial. *Repères-IREM* n° 68, juillet 2007.
- LEBESGUE Henri. (1935). « *La mesure des grandeurs* ». Monographies de *L'Enseignement Mathématique* n° 1 Genève. Réédition. A. Blanchard, Paris 1975.
- PRESSIAT André. *Grandeurs et mesures*. IUFM .Équipe DIDIREM – INRP.
- ROUCHE Nicolas. *Le sens de la mesure " Des grandeurs aux nombres rationnels ".* Collection Formation, Edition Didier Hatier, 1992.