AMPERES
Enseigner de façon dynamique le produit scalaire en première S ?

RECIT
d'une
EXPERIENCE

Année 2006-2007

IREM de Clermont-Ferrand - Lycée Montdory de Thiers

OBJECTIF DE L’AER

- Introduire le produit scalaire de façon motivée
  - Ne pas partir d'une des définitions du produit scalaire
  - Prendre en compte ses connaissances antérieures
  - Mettre l'accent sur la nécessité de se situer en repère orthonormal

Premier moment de l'étude

- En module
- Travail en groupe

Première question

On sait analytiquement démontrer que deux droites sont parallèles.

Qu'en est-il pour deux droites perpendiculaires?

Les différentes approches élaborées dans les groupes

- A1: situation connue où les droites sont perpendiculaires et sécantes à l'origine du repère (axes des abscisses, bissectrices)
- A2: à partir de la formule " aa'= -1"(bien que non au programme de seconde mais connu par certains élèves)
- A3: directement dans un cas général

Intervention dans les groupes

- Pour un rappel de la condition de parallélisme

  "xy'-x'y=0 " .

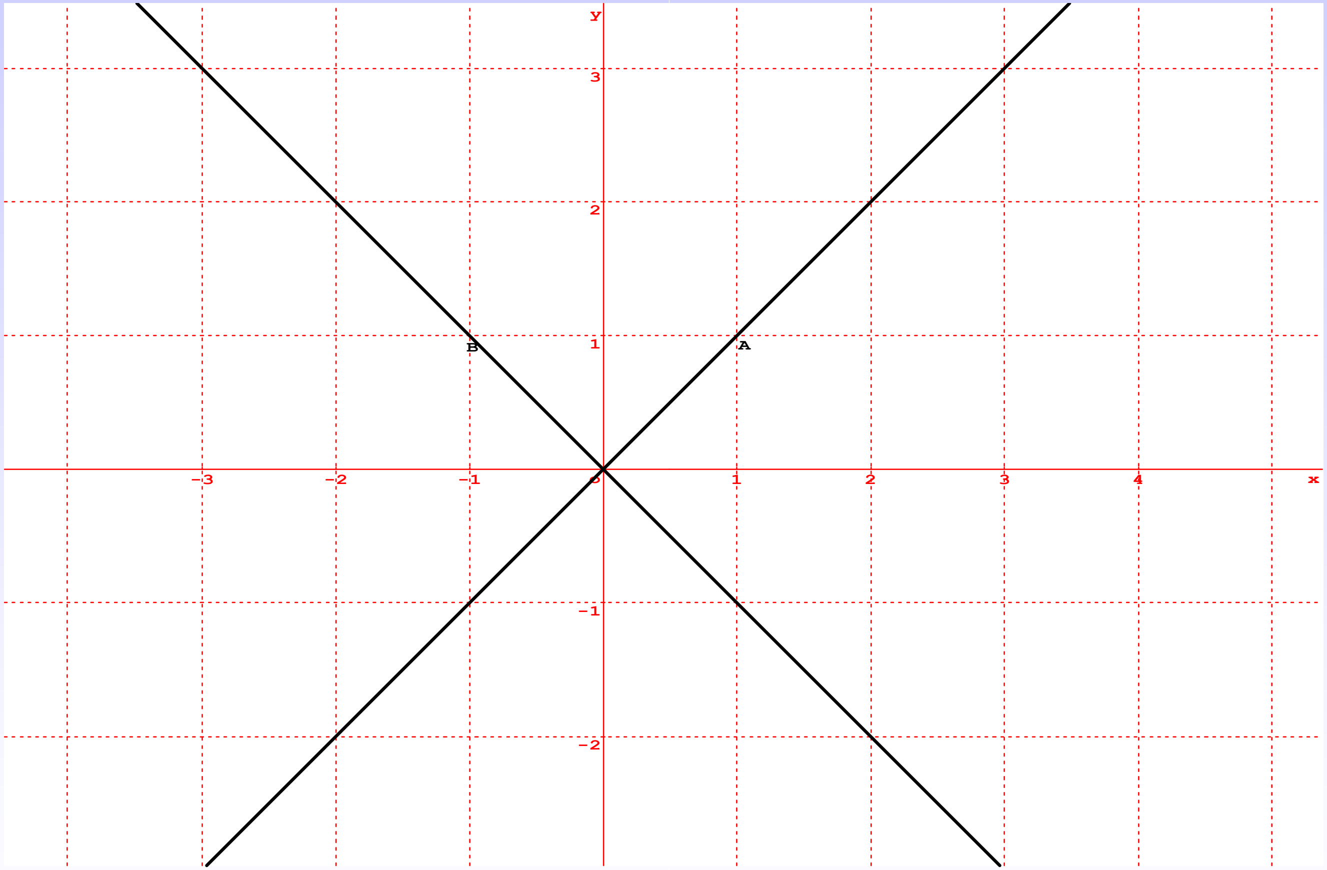
  Que représente x, x',y, y'?

  (x,y), (x',y') coordonnées de points?

  de vecteurs?

- Choix du repère

Situation A1



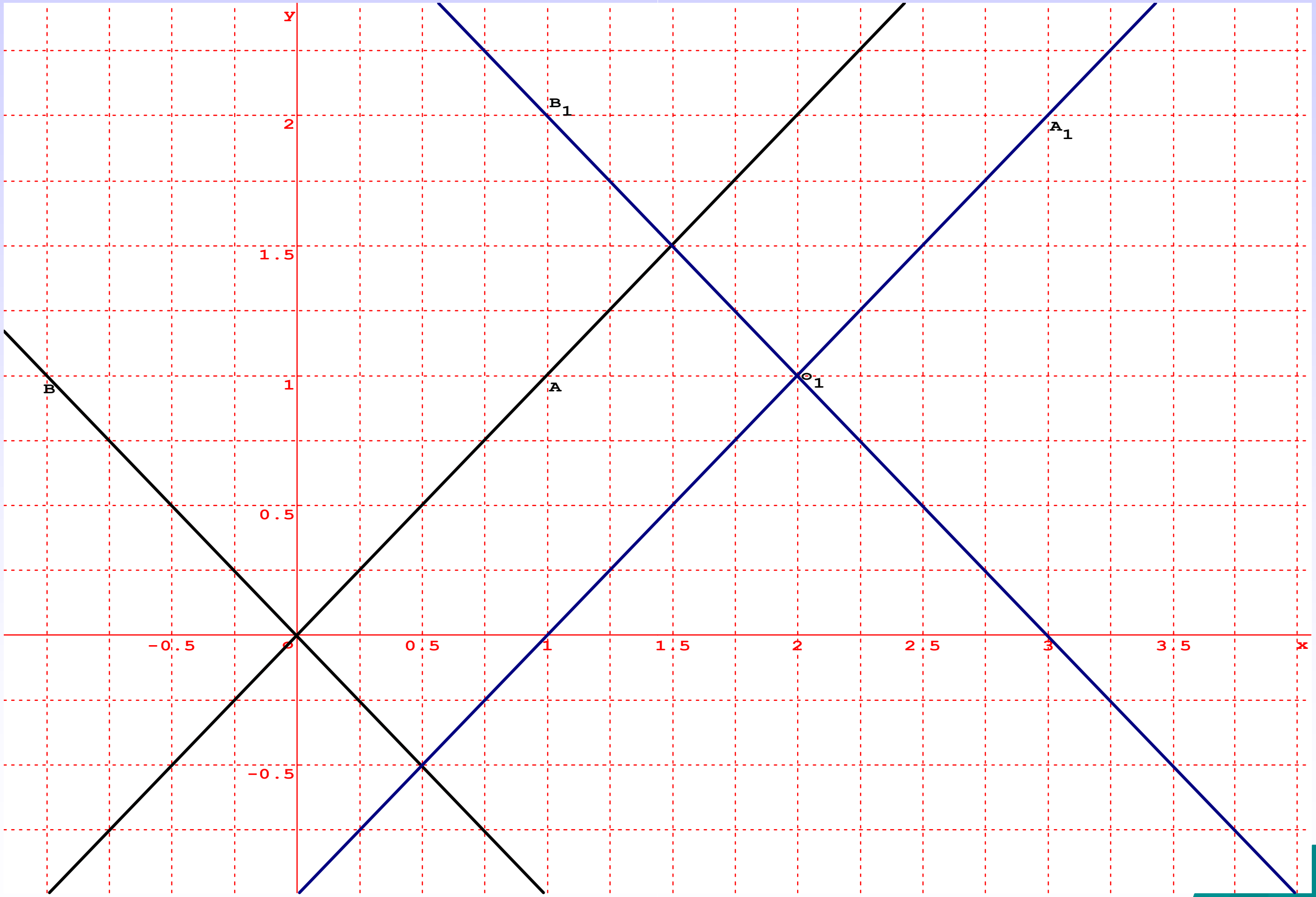
repère orthonormé

Points A(1,1) et B(-1,1) , 1 x (-1) + 1 x 1 = 0

Situation A1

- Des questions
  - "Si on translate les droites (OA) et (OB), quelle relation obtient-on ?"
    - Avec les coordonnées des points
    - Avec les coordonnées de vecteurs

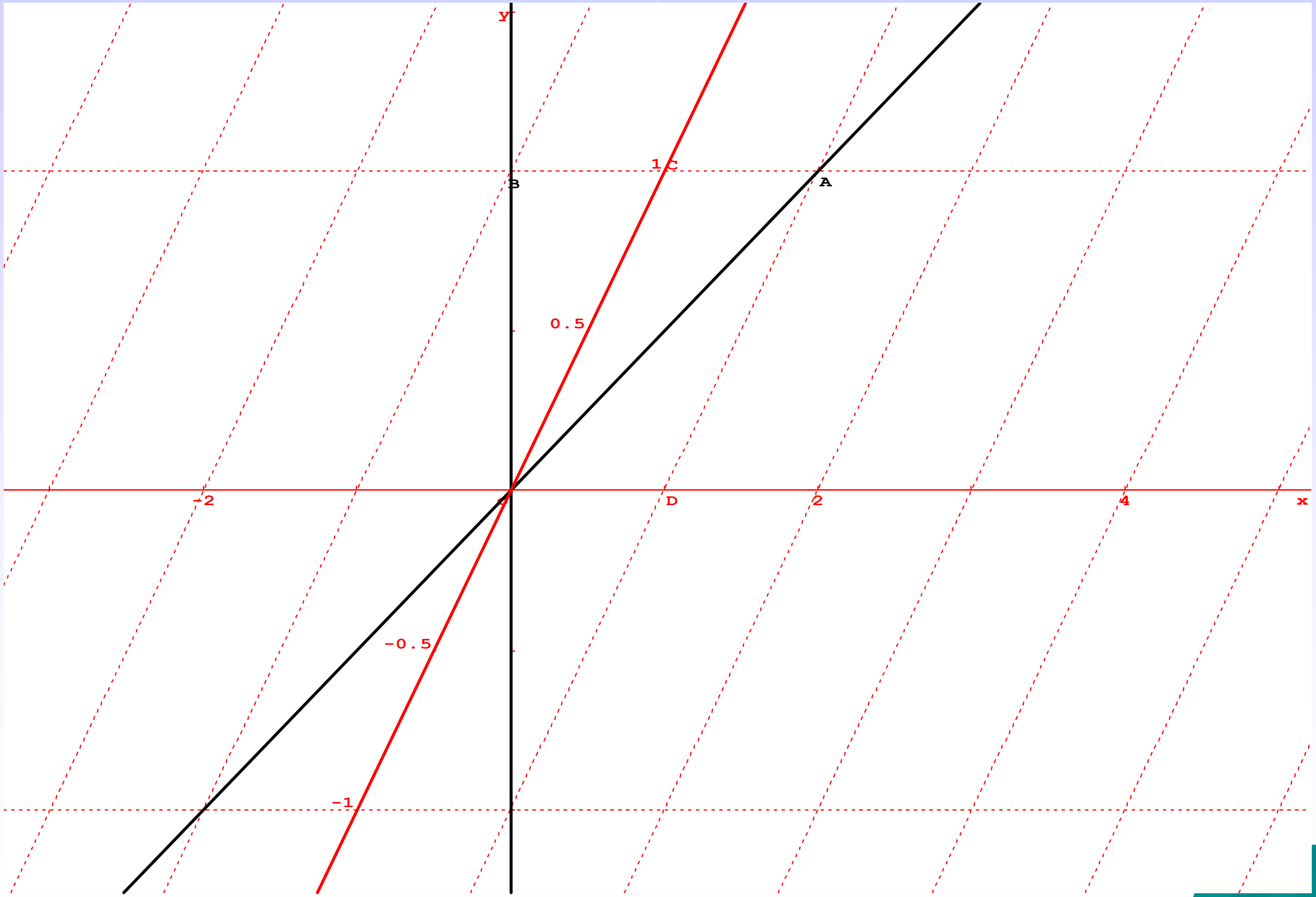
Situation A1



Situation A1

- Questions
  - "Si on translate les droites (OA) et (OB), quelle relation obtient-on ?"
    - Avec les coordonnées des points
    - Avec les coordonnées de vecteurs
  - "Pourquoi avez-vous choisi votre repère orthonormé?"

Situation A1



Situation A1

- Questions
  - "Si on translate les droites (OA) et (OB), quelle relation obtient-on ?"
    - Avec les coordonnées des points
    - Avec les coordonnées de vecteurs
  - "Pourquoi avez-vous choisi votre repère orthonormé?"
  - Quelle relation obtient-on en prenant un autre point sur chaque bissectrice?

Situation A1

- Prise de conscience d'un travail sur les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{O_1A_1}$ et $\overrightarrow{O_1B_1}$ égaux aux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ par une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

- vers une généralisation : l'utilisation du théorème de Pythagore est parue naturelle.

Situation A2

- Que représente a et a'?
- Comment le démontrer ?
- On revient au théorème de Pythagore

Premier bilan

- Nous avons:

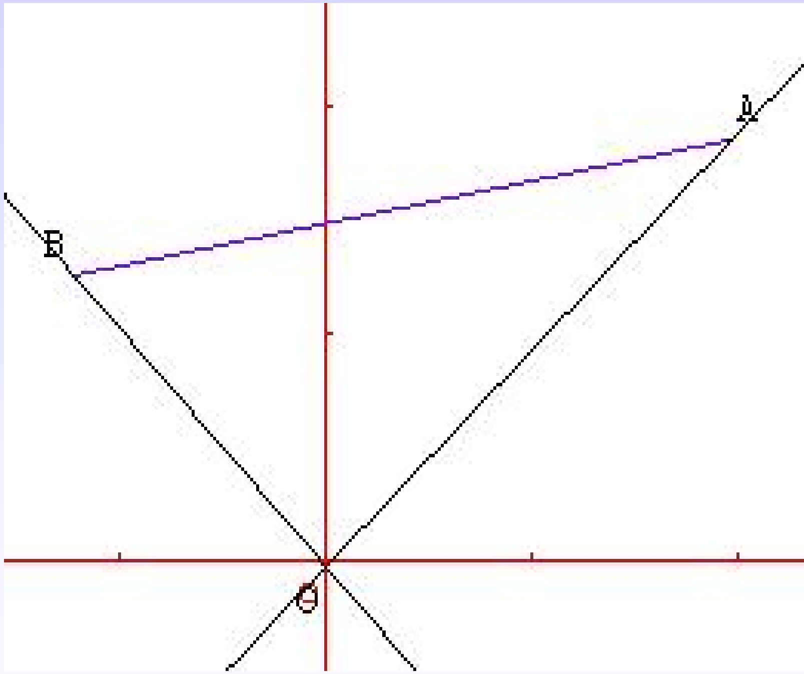
  $D \perp D'$

$\Leftrightarrow$ OAB triangle rectangle en O

$\Leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Leftrightarrow 2(x'x+y'y)=0$

$\Leftrightarrow$ **$x'x+y'y=0$**



Premier Bilan

Soit $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, $\overrightarrow{OA}$ (x,y) et $\overrightarrow{OB}$ (x',y')

$(OA) \perp (OB) \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Soit $\vec{u}$ (x,y) et $\vec{v}$ (x', y') .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

Deuxième moment de l’étude

En classe entière

Deuxième question

On a précédemment 'avec les notations introduites plus haut' prouvé que :

$$D \perp D' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$
$$\Leftrightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 .$$

Que vaut xx' + yy' quand D et D' ne sont pas perpendiculaires?

Deuxième moment de l'étude

Il est naturel de calculer:

$$AB^2 - OA^2 - OB^2 = -2\,xx' - 2\,yy'$$

d'où

$$xx' + yy' = \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 - AB^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 \right)$$

Donc xx' +yy' ne dépend pas du repère choisi

Deuxième bilan

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

de coordonnées (x,y) et (x',y') dans un repère orthonormal R

et de coordonnées (X,Y) et (X',Y') dans un repère orthonormal R'

On a xx' + yy' = XX'+ YY'.

Autrement dit, " xx' + yy'" ne dépend pas du repère choisi.

C'est un invariant appelé produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

Troisième moment de l'étude

En classe entière

Troisième Question

On a :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \iff (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\iff \cos(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = 0 .$$

Qu'en est-il quand $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \neq 0$?

Troisième moment de l’étude

Utilisation d'un repère particulier pour dégager une autre signification et une autre expression du produit scalaire

On peut choisir un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) tel que

$\overrightarrow{OA}$ et $\vec{i}$ soient colinéaires et de même sens

Avec ce repère le calcul donne:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos \theta$$

Bilan intermédiaire: Utilité du produit scalaire

- 1° pour démontrer par le calcul une orthogonalité;
- 2° Pour déterminer un angle, avec la détermination du cosinus
- Peut-il servir à autre chose?

Le produit scalaire peut-il être d'une autre utilité?

Si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ alors on a

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^2 = OA^2$,

le carré d'une longueur!!

- On peut donc se demander si le produit scalaire pourrait nous servir pour calculer des longueurs

Vers Al-Kashi

- Soit OAB un triangle et supposons que l'on connaisse OA, OB et l'angle en O.
- Peut-on calculer la longueur AB?

- On peut penser à calculer le carré de AB avec le produit $\overrightarrow{AB}^2$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

Calcul de $\overrightarrow{AB}^2$

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$$

Mais, le produit scalaire est-il distributif par rapport à la somme vectorielle?

Ce qui donne une raison d'être des propriétés ….

… Pour justifier le théorème de Pythagore généralisé (AL Kashi)

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\, OA.OB \cos(\widehat{AOB})$$