LES NOMBRES RELATIFS EN 5^{e}

Proposition de Parcours d'Etude et de Recherche

Groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille

Lieu d'Education Associé à l'Institut Français de l'Education « Collège Marseilleveyre »

Avertissement

On trouvera, dans les pages qui suivent, une proposition de début de Parcours d'Etude et de Recherche (PER) sur les nombres relatifs : définition, ordre, addition et soustraction. En tant que parcours, il englobe aussi, pour la classe de 4^{e}, la multiplication, la division et l'élévation à une puissance. Ces dernières parties ne figurent pas dans ce texte qui ne concerne que la classe de 5^{e}.

Pour pouvoir prendre en mains ce PER, il peut être utile de constituer pour soi-même des fiches sur lesquelles figureront les étapes indispensables et les points saillants à ne pas manquer lorsque cette forme d'enseignement se réalisera en classe. ***Attention ! Si l'on change les valeurs des variables didactiques, on court le risque de ne pas obtenir les effets d'enseignement et d'apprentissage escomptés, voire d'obtenir l'inverse !***

Nous indiquons, à titre indicatif, le nombre de séances de 55 min que les professeurs consacrent en moyenne à l'enseignement de chacune des quatre parties de ce PER. Cette durée moyenne a été établie à partir de son enseignement par divers professeurs, auprès d'une quinzaine de classes de divers niveaux (bonnes, moyennes, faibles), pendant cinq à six années scolaires. Il est évident que la passation de ce PER ne se fait pas de manière continue. Par exemple, les professeurs laissent un espace de temps d'environ deux mois entre le troisième et la quatrième séquence. De même, au cours de la passation de la première séquence, la première partie est constituée de calculs d'une durée très courte en début de séance ; le reste du temps de la séance doit être consacré à l'enseignement d'un autre thème du programme.

La proposition présentée est tout d'abord le fruit d'un travail de conception mené à l'origine par les personnes ayant participé aux réunions du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille dans les années 2007 à 2009 : Nadine Castellani, Guilhem Deulofeu, Karine Drousset, Yves Matheron, Alain Mercier, Karine Millon-Fauré, Christiane Mota, Serge Quilio, Marie-Christine de Redon, Anne-Marie Russac, Nicole Sorrentini.

La proposition initiale a ensuite été complétée, retouchée et améliorée à partir de l'observation et de l'analyse des effets de sa passation dans les classes du collège Marseilleveyre à partir de l'année 2008-2009 et jusqu'à ce jour ; notamment par Karine Andreani, Karine Drousset, Yves Matheron, Farida Méjani, Christiane Mota, Marie-Christine de Redon. Elle est désormais développée dans ce Lieu d'Éducation Associé (LéA) à l'Institut Français de l'Éducation ainsi que dans des collèges de la région marseillaise.

INTRODUCTION
Un choix de transposition didactique : les nombres relatifs comme programmes de calcul

Divers contextes sont usuellement utilisés pour amener les élèves vers une première rencontre avec les nombres relatifs. Dans ces lignes, nous ne reprenons pas toute l'analyse qui a pu être faite des obstacles didactiques vers lesquels aboutissent les diverses métaphores traditionnellement en usage : recettes et dépenses, températures, altitudes, avancer et reculer, etc. Nous partageons ces analyses venues de la didactique des mathématiques et reprises pour partie dans certains des documents d'accompagnement des programmes de Collège édités par la DGESCO. Nous donnons, dans cette introduction, quelques-uns des éléments qui nous font abandonner ce qui semble être devenu une tradition en usage dans les manuels du commerce. Afin de ne pas ajouter à la difficulté de l'enseignement des nombres relatifs celle de la modélisation de situations du monde social, qu'il nous faudra traiter à l'occasion, nous avons choisi de nous placer résolument dans un cadre interne aux mathématiques afin d'amener les élèves vers une première fréquentation des nombres relatifs ; en fait, essentiellement vers la nouveauté représentée par les négatifs comme type de nombres et les conséquences qui en découlent.

Se placer dans le cadre de l'algèbre comme science des calculs sur les programmes de calcul

Dans l'entrée que nous avons choisie, les relatifs sont vus comme des opérateurs additifs permettant de simplifier les calculs au sein d'un programme plus complexe. Le programme de calcul initial considéré est du type P_1 : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième ». On travaille donc sur des polynômes du type $P_1(x) = x + a–b$ où x, a et b sont des entiers naturels ou des décimaux positifs ; c'est-à-dire des nombres avec lesquels les élèves ont l'habitude de faire des calculs. Le relatif est vu comme l'agent qui permet d'obtenir le programme P_2, simplifié à partir de P_1 tout en lui étant équivalent : « à un nombre on ajoute ou soustrait un deuxième »[1] ; autrement dit le relatif apparaît dans un premier temps comme « le nombre $\pm c$ », avec c entier ou décimal positif, que l'on doit ajouter ou soustraire à x pour obtenir le même résultat qu'avec P_1. Donc $P_2(x) = x \pm c$ où $c = |a - b|$ et donc $P_2(x) = P_1(x)$ pour tous les x pour lesquels les polynômes $P_2(x)$ (et donc $P_1(x)$) sont positifs ou nuls. On omet de signaler que dans $\mathbf{N}$ et $\mathbf{D}_+$, ces programmes ne donnent pas toujours un résultat, c'est-à-dire quand $0 \leq x < c$ pour $P_2(x) = x - c$. C'est la raison pour laquelle on remplace le résultat possiblement inexistant par l'indication du programme de calcul, sans faire de démonstration d'existence. $\pm c$ devient ensuite un opérateur additif (ajouter ou soustraire c), puis un nombre.

---

[1] Nous suivons ainsi le cadre proposé par Yves Chevallard dans son séminaire 2004 – 2005 pour les PCL2 de l'IUFM d'Aix-Marseille, pages 457 et suivantes. Dans ce document, la « notion » de programme de calcul qui permet d'engendrer les débuts de l'étude de l'algèbre du Collège, importe celle d'opérateur sur laquelle nous nous appuyons. Les nombres sont *aussi* des opérateurs c'est-à-dire que les fonctions « opérateur additif » peuvent être dénotées par la notation de l'opérateur seul. Ainsi +3 dénote la fonction « ajouter 3 » que l'on nomme « programme de calcul » parce qu'on ne dispose pas de la notion d'opérateur sur un ensemble de nombres (opérateur étant défini par exemple en association à opérande dans la description d'une opération, +3 est alors *a minima* un « opérateur constant »), ou de la notion de fonction numérique, bien plus élaborée. La désignation *programme de calcul* est donc seulement une forme langagière, mais c'est surtout un élément générateur d'un jeu de langage parce qu'il désigne un objet autrement inaccessible, sinon par métaphore ou par la description de son usage « ça, c'est pour manger », « ça, c'est pour ajouter 3 ». Les explications métaphoriques ne sont pas propres à l'enseignement : elles n'aident pas à produire des jeux de langage ; et les définitions fonctionnelles ne dispensent pas d'un nom.

A l'intérieur des mathématiques, que l'on choisisse d'amener les négatifs par la nécessité de résoudre dans tous les cas l'équation $a + x = b$ (a et b entiers naturels) ou par la commodité qu'ils apportent dans les calculs[2], se pose toujours, au plan didactique, la question de l'identification à un nombre de ce qui a d'abord été fonctionnellement rencontré, soit comme une classe d'équivalence dans le cas des équations, soit comme un opérateur dans le cas des programmes de calcul et qui finalement aboutit, dans ce cas encore, à la notion de classe d'équivalence (*cf.* annexe 2). Cette notion a, en principe, été rencontrée, « en acte » bien évidemment, et sans l'organisation mathématique à laquelle elle est attachée, dans le cas des fractions comme classes d'équivalence. Une transposition de la notion n'est quasiment jamais explicitée en direction des élèves par les professeurs qui suivent les manuels actuels : elle peut donc se constituer en obstacle durable. Le lever nécessite que l'on ait les moyens de faire éprouver ce que l'on gagne à élargir la notion de nombre : deux nombres pour en représenter un seul dans le cas des rationnels positifs et, dans notre cas, une économie de calcul. Les techniques de calcul sont conservées, tandis que la notion évolue et perd des propriétés qui semblaient essentielles car définitoires. Par exemple, se perd l'identification de l'entier naturel à la mesure d'une grandeur : la grandeur « collection » dont la mesure s'appelle le cardinal, comme c'est le cas « en acte » en primaire où ce vocabulaire n'est évidemment pas utilisé, mais où la notion transposée y est rencontrée.

Quête de sens : l'impasse des métaphores s'appuyant sur les grandeurs

Avec des entiers négatifs, une possible identification au cardinal, qui confère un certain sens aux entiers, disparaît. Ce fut déjà le cas lors de l'identification des fractions à la partition ou à la commensuration au cours moyen ; néanmoins il est alors encore possible d'identifier la fraction à la mesure d'une grandeur, la longueur par exemple. Des auteurs des manuels actuels du secondaire pensent résoudre le problème qui surgit pour les relatifs en commençant à « donner du sens » aux négatifs à travers la mesure d'autres grandeurs : les températures, les profondeurs, « les étages »… Mais c'est alors repousser l'obstacle à plus tard, au moment où l'on enseignera les opérations sur les relatifs. Ces grandeurs sont en effet des grandeurs que l'on qualifie de « repérables », au contraire des grandeurs « mesurables » : la mesure de ces dernières vérifiant la propriété d'additivité : si $A \cap B = \varnothing$, alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Ce n'est pas le cas des grandeurs repérables. Une conséquence importante en découle : on ne peut pas opérer sur ces grandeurs, c'est-à-dire les ajouter, soustraire, multiplier, etc. Par exemple, considérant la grandeur « température », il est évidemment possible de comparer deux températures en comparant la hauteur d'une colonne d'alcool dans un thermomètre, et donc de dire si elles sont égales ou si l'une est inférieure à l'autre. Néanmoins, il est impossible d'ajouter les températures, de les soustraire ou les multiplier par un nombre. En effet, on sait que lorsqu'on mélange deux liquides, en tant qu'« objets » pourtant deux à deux disjoints, et même s'ils sont en quantités égales, le mélange, qui est réunion des deux liquides, n'a pas pour température la somme des températures.

Le recours à la droite graduée, le « repérage sur la droite graduée », s'appuie sur une grandeur seulement repérable et non pas mesurable, associée à des nombres que l'on nomme abscisses de points. Si l'on souhaite opérer à partir de cette grandeur, après qu'au préalable on a défini l'abscisse d'un point sur une droite, il est nécessaire d'en définir, et d'en enseigner, une autre : « le déplacement sur une droite » en tant que translation de vecteur de même direction que la droite, de même sens ou de sens contraire au sens du repère et de norme la distance des deux points ; ce qu'on ne dit pas, reste implicite, et est donc parfois mal compris. La métaphore qui

[2] Ils évitent d'avoir à distinguer des cas de figure, comme l'explique fort clairement Chasles lorsqu'il invente les « mesures algébriques » qui orientent les segments et permettent un calcul automatique de leur mesure orientée.

consiste à utiliser cette grandeur fonctionne cependant à peu près bien auprès d'un nombre significatif d'élèves pour ce qui concerne l'addition. Elle se complexifie pour la soustraction et se constitue en obstacle pour la multiplication des relatifs. En effet, la grandeur « déplacement » ainsi construite est une grandeur de dimension 1, et le produit devrait être associé à une grandeur de dimension 2. Des artifices didactiques, que l'on trouve dans certains manuels, ont été proposés pour tenir compte de la dimension 2 affectée à la grandeur-produit. Dans un repère orthonormé du plan, une fois que l'on a défini (comment ?) et que l'on a associé le produit de deux positifs à des points du premier quadrant, qu'on a fait de même pour le produit d'un négatif par un positif associé à des points du quatrième quadrant (respectivement le deuxième), on postule que par symétrie centrale (pourquoi ?) les produits doivent être négatifs dans le deuxième quadrant (respectivement le quatrième) et positifs dans le troisième ; ce dernier correspondant au produit de deux négatifs. Nous ne suivons pas cette voie, ne serait-ce qu'en raison des questions que cette métaphore géométrique soulève et auxquelles les adeptes de cette technique didactique n'apportent pas de réponse. La docilité des élèves à accepter parfois une telle « pseudo-explication » de la règle des signes ne signifie pas qu'ils ne se posent pas de questions à propos de mystères ayant conduit à de tels résultats. Certains finissent par se dire qu'en mathématiques, décidément, il suffit de faire car il n'y a rien à comprendre…

Tenir compte des obstacles de nature épistémologique en mathématiques pour minimiser ceux de nature didactique

La dynamique propre à la mathématisation est le plus souvent, et cela est particulièrement vrai pour les nombres relatifs et leurs opérations, le fruit d'une dialectique entre un système et l'un des modèles mathématiques qui le représente ; le système pouvant être lui-même mathématique comme il en va, par exemple, des systèmes de nombres. À son tour, dans une étape ultérieure, le modèle devient système et c'est un modèle d'ordre supérieur qui le représente. Au cours du processus de modélisation, le modèle importe certains des traits du système – certains sont « aplatis » et d'autres oubliés –, mais le travail qui se mène ensuite dans le modèle (en tant que simplification du système ou catégorie de systèmes que l'on décide d'apparenter) permet d'obtenir des informations sur le système modélisé. Le sens qui était attaché au système peut alors perdre certaines de ses caractéristiques et c'est une difficulté épistémologique qui se traduit par une difficulté didactique pour les élèves. Par exemple, une matrice (tableau de nombres) peut être considérée comme un vecteur, alors que le premier travail avec la notion de vecteur lui conférait le sens d'agent d'une translation affine ou encore, de façon plus fruste, de flèche à dessiner dans le plan représenté par la feuille… Le système constitué à l'origine par les flèches ou les agents de translations a été modélisé en espace vectoriel qui, à son tour permet de modéliser dans le même cadre d'autres systèmes, puis qui peut donner naissance à de nouveaux modèles, par exemple la notion d'espace vectoriel de dimension infinie.

Aussi avons-nous pris le parti de minimiser le risque de créer des obstacles didactiques, tout en sachant que certains, de nature épistémologique et donc propres aux mathématiques, sont inévitables ; c'est particulièrement le cas lorsqu'on se penche sur l'histoire des nombres relatifs (*cf.* annexe 1). C'est la raison pour laquelle notre proposition ne débute pas par une rencontre avec les relatifs qui s'appuierait pour cela sur leur usage social, et les ferait alors voir par les élèves comme mesures de certaines grandeurs. Le concept de « grandeur » est d'ailleurs très peu enseigné dans les classes qui ont précédé, et donc en grande partie ignoré des élèves autrement que par leur contact avec la réalité sensible, hors de l'école : le temps passe, le poids et la taille s'accroissent, la vitesse des véhicules varie, etc.

Des obstacles de nature épistémologique surgissent inévitablement dans l'étude des relatifs, comme il en va aussi pour d'autres domaines des mathématiques, avons-nous dit. C'est ce qui fait l'une des difficultés de l'apprentissage des mathématiques. Si certaines des organisations mathématiques et didactiques construites permettent de les minimiser, seul l'usage dans lequel sont prises les notions nouvelles permet dans bien des cas de les surmonter. Au sens ancien, que l'on avait des difficultés à saisir, se substitue l'usage qui procure un sens nouveau : lorsqu'on écrit avec une certaine familiarité que $\ln x^n = n\ln x$, on oublie temporairement que $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, voire même que la notion d'homomorphisme autorise cette écriture, et le sens provient du calcul que l'on mène à bien. S'enclenche en effet, au cours de l'activité mathématique, un processus qu'Anna Sfard a appelé de « réification » : autrement dit de transformation en un objet concret de ce qui apparaissait auparavant comme une abstraction difficile à maîtriser. Dans le cas de l'algèbre, qui est précisément le domaine auquel appartiennent les nombres relatifs, appelés autrefois « nombres algébriques », elle indique :

1. « Only when a person becomes capable of conceiving the notion as a fully-fledged object, we shall say that the concept has been reified. Reification, therefore, is defined as an ontological shift – a suddenability to see something familiar in a totally new light. » (Sfard, 1991) 2. « Seeing a mathematical entity means being capable of referring to it as if it was a real thing – a static structure, existing somewhere in space and time. It also means being able to recognize the idea "at a glance" and to manipulate it as a whole, without going into details. » (Sfard, 1991) ou encore : 3. « [...] without an ability to give some kind of explanation to the formal algebraic procedures, the students are not very likely to be able to cope either with non-standard questions or with more advanced algebraic ideas which will be introduced to at least some of them in the future. » (Sfard, 1994)[3]

La dernière citation est particulièrement éclairante lorsqu'on la rapporte aux difficultés bien connues que rencontrent les élèves pour mener à bien des opérations sur les nombres relatifs, alors qu'ils les pratiquent déjà depuis plusieurs années, arrivés en 3e, voire au-delà. Difficulté qui s'accroît et empêche de donner du sens à certaines expressions algébriques plus complexes pour lesquelles le fait même qu'on puisse s'y intéresser apparaît bien mystérieux : on pense ici à l'expression $ax^2 + bx + c$ dont l'égalité à 0 apparaît des plus curieuses à un grand nombre de nos contemporains.

Le schéma général du PER sur les nombres relatifs

Revenant au PER sur les relatifs, les opérateurs qui permettront en son début de simplifier les calculs dans les programmes de calcul, semblent se comporter à l'usage, et du point de vue des élèves, comme des nombres. On travaille alors la question : « le sont-ils vraiment ? » Ou encore : « à quoi reconnaît-on qu'une entité mathématique est un nombre ? » La réponse apportée est la suivante : si l'on peut faire, avec ces entités nouvelles, des opérations comme

---

[3] 1. C'est seulement quand une personne atteint la capacité à concevoir une notion comme un objet à part entière que nous dirons que le concept a été réifié. La réification est donc définie comme un changement ontologique– une soudaine capacité de voir quelque chose de familier sous un jour totalement nouveau. 2. Voir une entité mathématique comme un objet, c'est être capable de se référer à elle comme si elle était une chose réelle–une structure statique, existant quelque part dans l'espace et le temps. Cela signifie également être capable de reconnaître l'idée « d'un coup d'œil » et de la manipuler comme un tout, sans entrer dans les détails. 3. Sans la capacité à donner quelque explication aux procédures formelles algébriques, les élèves sont peu susceptibles d'être en mesure de faire face soit à des questions non standard, soit à des idées algébriques plus avancées qui seront introduites dans l'avenir, au moins à certains d'entre elles.

celles que l'on connaît déjà sur les nombres qui nous sont familiers, alors on pourra considérer que ce sont des nombres. Une nouvelle question surgit : « que faudrait-il, par exemple et pour commencer, pour pouvoir faire des additions avec ces entités ? » La réponse à construire, les techniques à établir (les « règles d'addition », comme on dit), doivent être compatibles avec celles que l'on connaissait sur les positifs puisqu'on a pu identifier un positif à sa valeur absolue. Ce travail de construction donne du sens et ôte le mystère, qui semble impénétrable à certains élèves, relatif aux techniques permettant d'additionner et de soustraire des relatifs. Il en sera de même pour la multiplication.

Pendant un certain temps, existe pour la multiplication la nécessité d'accepter que le produit de deux négatifs soit positif, si l'on veut que l'ensemble des calculs sur tous les nombres, positifs et négatifs, soient cohérents : c'est-à-dire si l'on veut que les négatifs soient des nombres. Quoiqu'il en soit, cette nécessité, manipulée formellement sans problème, heurte le bon sens qui cherche à maintenir les sens antérieurs attribués au nombre, et c'est pire encore quand on explicite « la règle des signes » sans avoir défini une « multiplication des signes », mais en usant de la métaphore des amis et des ennemis ou des quadrants d'un repère orthonormé du plan. La réussite du processus de réification nécessite le passage par la recherche des raisons mathématiques qui conduisent à établir ce que A. Sfard appelle « les procédures formelles algébriques » ; même si ces raisons seront temporairement oubliées au fur et à mesure de l'usage des dites « procédures ».

Les relatifs sont donc des nombres, des entités sans dimension, des scalaires, étudiés à partir d'une question interne aux mathématiques, dont la réponse est contenue dans la fonction qu'ils remplissent : simplifier des calculs dans des programmes de calcul. Ce qui ne veut pas dire qu'il en sera toujours ainsi pour l'étude d'autres notions mathématiques. Ils sont ensuite retrouvés comme objets utiles pour certains usages sociaux (mesurer la température, l'échelle des temps historiques, etc.) Nous n'ignorons pas que les élèves, en tant qu'individus plongés dans la société, ont déjà rencontré les relatifs : températures, ascenseurs par exemple. Mais le « jeu » mathématique auquel on souhaite les faire jouer – les termes, le plus souvent implicites, qui constituent le contrat didactique – obéit à des règles qui consistent à ne pas recourir à cette (re)connaissance sociale. Ce que les élèves comprennent très bien et à quoi ils se plient lorsque le professeur est amené à le leur rappeler ; chose rencontrée assez rarement dans nos multiples observations de classes enseignées de cette manière sur ce thème depuis 2008.

Dans ce parcours, avant d'arriver à l'identification des relatifs à des nombres, ces entités manipulées prennent divers statuts. Aussi, la transition entre opérateur d'un programme de calcul et nombre relatif doit être accompagnée. Nous la ménageons, au cours du parcours proposé, par l'identification, par exemple, de +5 à 5 (car 0 + 5 =5 ; le programme « ajouter 5 », noté +5, est alors identifié au nombre obtenu 5), et de 0 – 4 à -4 (car la première écriture signifie que l'on soustrait 4 à 0, donc que l'on utilise le programme « soustraire 4 », noté -4). Cette identification est facilitée par l'utilisation « en acte », c'est-à-dire sans évoquer ou avoir même conscience ou connaissance de l'existence de la notion, de la commutativité dans les programmes de calcul, en fait dans les sommes algébriques, qui « favorise » l'arrivée des additions dans des calculs où les relatifs sont écrits avec des parenthèses.

L'identification est encore facilitée pour les élèves par un travail de routinisation, qui est conduit à l'aide d'un nombre important d'exercices d'entraînement : on va donc vers une « réification ». Lorsqu'au cours de cet apprentissage, on a besoin de s'assurer de la justesse du résultat que l'on a obtenu en revenant au sens premier qui leur avait été conféré, on peut toujours vérifier la coïncidence des résultats trouvés sur des nombres avec ceux obtenus en les considérant comme opérateurs dans des programmes de calcul. Ainsi est-il toujours possible pour les élèves de revenir au sens premier lorsqu'ils en éprouvent le besoin tout au long de cet apprentissage que l'on doit considérer comme couvrant l'année de 5^{e}. Ce qui signifie que ce parcours n'est pas à passer d'un bloc, mais qu'il doit se dérouler sur l'année scolaire : l'avancée dans le nouveau s'accompagnant d'occasions de reprises qui permettent à certains des élèves d'apprendre après-coup des notions antérieurement enseignées et étudiées par la classe.

Yves Matheron

Quelques notions de théorie anthropologique du didactique

La connaissance mathématique produite par les mathématiciens n'est pas celle enseignée à l'école. Elle subit, pour l'adapter à l'enseignement, une série de transformations qu'étudie la théorie de la transposition didactique (Chevallard 1985, 1991).
Nous différencierons les savoirs savants produits par les mathématiciens des savoirs à enseigner, désignés comme tels par les représentants du système d'enseignement (mathématiciens, politiques, représentants de la société, professeurs...) qui orchestrent la sélection, la définition, l'organisation des savoirs dans la limite de contextes culturels, sociaux et historiques. La transposition didactique relative à l'organisation mathématique qui est le substrat de ce PER se trouve exposée en annexe 2, à la fin de ce texte.
Une fois les savoirs à enseigner définis, il faut encore les distinguer de ceux effectivement enseignés par le professeur et de ceux réellement appris par les élèves. Ainsi le savoir produit initialement subit une double transformation : la transposition didactique externe qui sélectionne et transcrit les savoirs à enseigner à partir du « savoir savant » et une transposition didactique interne à l'intérieur du système d'enseignement. Durant cette seconde étape, c'est le professeur qui, à partir des textes officiels que sont les programmes, va construire les savoirs qu'il est en charge d'enseigner, savoirs qui deviennent des objets d'enseignement. C'est alors à lui d'organiser les conditions de son enseignement, modulées par les contraintes et les nombreux assujettissements auquel il est soumis.
Il ne suffit pas d'imposer que tel savoir soit enseigné pour qu'il le soit effectivement. De plus les savoirs diffèrent selon l'institution dans laquelle on les étudie. C'est pourquoi il s'avère utile d'interroger l'organisation des savoirs mathématiques à enseigner.

Le savoir mathématique est lui-même subdivisé en domaines, secteurs, thèmes et sujets. Enseigner un savoir mathématique suppose la mise en place d'une organisation mathématique de ce savoir en dégageant un ensemble de types de tâches, noté *T*, associées à une ou des techniques τ pour accomplir ce type de tâches *T*, techniques τ justifiées par une technologie θ, c'est-à-dire un discours sur la technique. Cette technologie θ est elle-même justifiable par une théorie Θ. Le couple $[T/\tau]$ fait référence à un savoir-faire qui nécessite le bloc $[\theta/\Theta]$; ce dernier en constitue l'environnement technologico-théorique. Un tel modèle nous montre la dualité de l'organisation autour d'un savoir-faire et d'un savoir, savoir qui apparaît comme un discours qui produit, justifie et rend compréhensibles des techniques, qui peuvent être plurielles, pour un même type de tâches. Le choix des techniques diffère selon le système d'enseignement, mais aussi selon la personne qui les met en œuvre ou encore selon l'institution dans laquelle cette organisation mathématique existe. Une organisation mathématique la plus petite, construite autour d'un seul type de tâches *T,* et qu'on qualifie alors de ponctuelle, peut donc se noter à l'aide des deux couples $[T/\tau]$ et $[\theta/\Theta]$, ou encore plus simplement $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Les organisations mathématiques ponctuelles s'agrègent et s'amalgament pour donner des organisations mathématiques d'ordre supérieur relevant de thèmes (un chapitre autour d'un théorème, l'addition des relatifs par exemple), de secteurs (les nombres relatifs, plusieurs théorèmes par exemple), un domaine (l'algèbre en poursuivant sur cet exemple).

Ce modèle peut paraître abstrait au premier abord, mais il est fort utile car il permet d'analyser ce qui est enseigné ou ce qui doit l'être. Pour rendre compte de la manière dont les savoirs sont enseignées, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) dans lequel ce modèle prend place, développe un autre concept théorique : celui d'organisation didactique. Yves Chevallard (1998) propose une modélisation du processus didactique et distingue « six moments de l'étude » ou « moments didactiques », sans que l'expression « moment » n'impose une représentation temporelle séquentielle. Il s'agit plutôt de « passage obligé », quel que soit le déroulement de l'étude suivi.

Le premier moment est celui de la première rencontre avec l'organisation mathématique mise en place. Cette première rencontre peut suivre des formes diverses, mais elle nécessite toujours de rencontrer au moins un type de tâches *T* dont la problématicité permet la dévolution de la question étudiée aux élèves ; la responsabilité de l'identifier et de commencer à y apporter réponse leur incombe. En effet, il est indispensable que les élèves s'emparent du problème posé qui doit leur apparaître suffisamment problématique et qu'ils s'engagent alors dans la recherche de techniques pour y répondre.

Le second moment est celui de l'exploration du type de tâches *T* et de l'élaboration d'une technique τ relative à ce type de tâches. En effet, toute activité mathématique nécessite de fabriquer une technique particulière pour répondre à un problème spécifique. La technique ainsi mise en place deviendra ensuite l'outil de résolution routinier qui permettra de résoudre toute une classe de problèmes du même type.

La technique τ élaborée est alors justifiée pendant le troisième moment qui voit la constitution de l'environnement technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. C'est un moment qui peut interagir avec les autres : la première rencontre peut être l'écho d'un environnement technologico-théorique ancien que le moment d'exploration viendra conforter ou, au contraire, perturber pour le faire évoluer.

Il faut alors travailler la technique pour en tester l'efficacité et la fiabilité. C'est le moment de travail de la technique pendant lequel les élèves en acquièrent la maîtrise, ce qui nécessite une certaine quantité de spécimens du ou des types de tâches à l'étude. Ce moment permet aussi de revenir, d'améliorer et de maîtriser l'organisation mathématique qui a été construite.

Signifier explicitement le savoir mathématique qui vient d'être élaboré collectivement et l'ancrer dans un ensemble de connaissances communes est la fonction que revêt le moment de l'institutionnalisation. Il permet aussi de ne conserver en mémoire que l'indispensable de l'organisation mathématique. Certaines des tentatives, certaines des techniques peu performantes, qui avaient émergé lors de l'élaboration de l'organisation mathématique, ne sont pas retenues.

Le dernier moment est celui de l'évaluation, intrinsèquement lié au moment de l'institutionnalisation. En effet, Yves Chevallard (1998) précise qu'« en pratique, il arrive un moment où l'on se doit de “ faire le point ” : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine ce que vaut ce qui a été appris » ou, plus exactement : « Que vaut, en fait, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique on trouve alors l'interrogation sur la technique elle-même – est-elle puissante, maniable, sûre, robuste aussi ? »

Le Parcours d'Etude et de Recherche (PER) qui suit est bâti à l'aide des outils que constituent les deux notions d'organisations mathématique et didactique dont nous venons d'exposer très brièvement les grandes lignes.

Farida Méjani

LE PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE

Préalable

Avant de lancer les élèves dans ce parcours, il est nécessaire qu'ils aient tout d'abord travaillé la définition de la différence (dans **N** ou dans $\mathbf{D}_+$). La notion de différence, qui a été étudiée à l'école primaire et qui fait partie des capacités du programme de 6^e (« Connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, *terme, facteur, dividende, diviseur, quotient, reste* », est-il écrit), doit être une connaissance disponible, élément non problématique, faisant partie du « milieu » comme ensemble des connaissances stabilisées. Il est notamment nécessaire de savoir que la différence des nombres a et b est le nombre d tel que $a + d = b$ et qu'on note $d = b - a$

Première séquence
Élaboration d'un technique pour calculer mentalement $a + b - c$
Durée : l'enseignement commence par des calculs courts, de 5 à 10 min maximum en début de séance ; mis bout à bout et lorsque l'enseignement se passe ensuite en continu, il faut compter environ 5 séances de 55 min pour l'ensemble de cette séquence

Le début de l'enseignement proposé dans les pages qui suivent s'appuie sur des moments de calcul mental. L'approche choisie est progressive, afin que les élèves s'habituent à une technique de calcul qui les rend plus simples et qui va conduire tout d'abord à utiliser de nouveaux nombres, puis à les étudier. Aussi, est-il nécessaire que ***ces temps de calcul mental*** qui inaugurent cette première phase soient ***à la fois courts, de l'ordre de 10 min en début d'heure*** par exemple, et ***étalés dans le temps*** : à la suite de ce temps court de calcul mental, on passe à l'étude d'une autre partie du programme de mathématiques de 5^{e}, menée simultanément.

Etape 1 : cas *b*>*c*

Cette étape a pour fonction d'organiser une (nouvelle ?) première rencontre avec le type de tâches T : « exécuter le programme de calcul a + b – c (a, b et c entiers naturels) » afin de mettre en échec la technique consistant à réaliser les calculs de gauche à droite en posant les opérations. Il faut donc « inventer » une nouvelle technique ; c'est le moment le plus important du déroulement de cette phase. L'ayant trouvé, il reste encore à s'assurer de sa validité. Un moment technologique, garantissant partiellement la justification du recours à cette technique, conclut cette phase. On institutionnalise ensuite la technique trouvée.

On engage les élèves dans des calculs du type de ceux qu'ils ont l'habitude de faire : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième ». Mais on cherche à ce que, chez les élèves, apparaisse rapidement la nécessité d'organiser commodément les calculs afin de les rendre plus simples. Il s'agit tout d'abord, pour la consigne 1, de travailler en acte mais bien sûr sans l'expliciter, l'égalité $(a + b) - c = a + (b - c)$ avec a, b et c entiers naturels, dans le cas où $b > c$. Le professeur annonce qu'on s'intéresse au programme de calcul suivant : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième » que l'on va exécuter mentalement sur des cas particuliers. Il écrit au tableau.

Pour conserver la maîtrise du temps imparti pour chaque calcul, ceux-ci doivent être écrits au tableau au fur et à mesure, ou encore photocopiés ou projetés, les élèves recopiant sur leur feuille le calcul et inscrivant à la suite leur réponse.

Remarque issue des observations de classes : le professeur a tout intérêt à dire et à demander que l'on dise « ajouter… puis soustraire… c'est comme ajouter (ou soustraire)… », puis à faire passer de l'écriture en français à l'écriture en nombres. Apparemment, certains élèves rencontrent des difficultés ***pour rédiger des phrases***, ce travail peut donc se poursuivre en travail à la maison… La rédaction des phrases et leur verbalisation visent à faire éprouver par les élèves l'économie substantielle que réalisera l'écriture en nombres relatifs.

Le professeur fixe lui-même le temps pour la recherche du premier calcul et demande oralement le résultat avant d'engager la classe dans le calcul du second. Si la technique consistant à calculer d'abord $b - c$ n'apparaît pas dans le calcul de $17 + 21 - 1$, elle a de fortes chances de devenir nécessaire dans le calcul suivant : $148 + 199 - 99$. On l'éprouve ensuite sur les autres calculs, le professeur déterminant le temps de la recherche de chaque calcul. Ce temps doit être bref car cette brièveté force à rechercher les stratégies de calcul les plus efficaces.

L'ensemble des consignes a été regroupé dans le cadre qui suit, afin que le professeur dispose d'une vision globale. Comme indiqué page précédente, ces diverses consignes doivent être données aux élèves ***de façon étalée***, doivent occuper ***un temps court en début d'heure et pendant plusieurs séances***. On peut évidemment fabriquer d'autres types de calcul, l'essentiel étant que la philosophie propre à chaque étape soit conservée. On peut aussi, selon l'aisance plus ou moins grande des élèves, utiliser des ***décimaux non entiers*** ; ce qui permet de faire apparaître davantage l'économie de calcul procurée.

Consigne 1 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
17 + 21 – 1 ;
148 + 199 – 99 ;
17 + 35 – 15 ;
131 + 256 – 56 ;
39 + 58 – 8 ;
185 + 2017 – 17.
Consigne 2 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
14 + 17 –15 ;
114 + 17 – 15 ;
1802 + 319 – 315 ;
4374 + 62 – 61 ;
4374 + 61 – 62 ;
7081 + 61 – 62.
Consigne 3 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
458 + 45 – 46 ;
3469 + 45 – 46 ;
3469 + 124 – 125 ;
15627 + 124 – 125 ;
15627 + 313 – 314 ;
823 + 313 – 314 ; `
823 + 32 – 33 ;
4586 + 32 – 33 ;
4586 + 7538 – 7539.
Consigne 4 :
Effectue mentalement les calculs suivants, puis écris sous forme simplifiée à quoi équivaut, dans ces calculs, l'application au premier nombre de l'addition suivie de la soustraction :
15627 + 314 – 316 ;
823 + 34 – 37 ;
4586 + 34 – 38 ;
126 + 12 – 15 ;
3645 + 5241 – 5246 ;
1010 + 21 – 31 ;
236 + 22 – 29.

Feuille dont dispose le professeur

Les élèves recherchent ***individuellement*** et ***mentalement*** les calculs de la consigne 1 et notent au crayon leurs résultats en face de chacun des calculs proposés. Le calcul se faisant mentalement, les élèves ***ne sont pas autorisés*** à poser les opérations ; ils doivent seulement noter au crayon le résultat qu'ils trouvent pour chacun des calculs. Si les élèves peinent, le professeur peut indiquer qu'ils ont intérêt à rechercher « un truc » permettant de faire les calculs très facilement. En principe, au moins un élève devrait trouver « ce truc » et le communiquer rapidement à la classe, sinon le professeur attire l'attention sur les deux derniers nombres.

Consigne 1 : Effectue mentalement les calculs suivants : 17 + 21 – 1 ; 148 + 199 – 99 ; 17 + 35 – 15 ; 131 + 256 – 56 ; 39 + 58 – 8 ; 185 + 2017 – 17.

Les calculs ayant été menés à bien, le professeur ou un élève peuvent faire remarquer que l'on n'a pas suivi l'ordre qui paraît canonique d'exécution des calculs, de la gauche vers la droite. En fait, des manuels de primaire proposent des techniques de calcul en ligne avec des arbres de calcul : il est possible que cette disposition réapparaisse alors.

Le professeur demande : ***faisant de la sorte, est-on sûr d'avoir obtenu les résultats exacts ?*** On se contente de vérifier l'exactitude des résultats, par exemple avec **une calculatrice.** On est donc certain que les calculs sont justes et que la technique utilisée est pourvue d'une certaine validité.

La passation effective de ce travail a montré que ce dispositif peut être proposé, puis être abandonné très vite dans le cas où les élèves ne rencontrent aucune difficulté et sont certains que leurs calculs sont exacts.

Étant certains que la technique trouvée est valide, cette phase se termine par ***une institutionnalisation de cette nouvelle technique***. Pour cela, on peut demander aux élèves de la donner publiquement et oralement en la déclinant, pour chacun des calculs, sur le modèle suivant correspondant au premier calcul : « ajouter 21 et soustraire 1 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre », etc.

Ces résultats sont notés dans le cahier de cours.

La partie qui suit et qui porte sur l'écriture des phrases du type « ajouter… et soustraire… à un nombre revient à ajouter… à ce nombre » est longue à faire écrire par les élèves. On peut donc la raccourcir ; soit en limitant le nombre de phrases, soit en utilisant des exemples numériques écrits, soit en donnant une feuille à coller.

Dans ce dernier cas, il est indispensable de ne pas tomber dans un travail du type des « exercices du Bled ». Quel que soit le choix fait, mais en tout cas si on suit l'idée d'une photocopie, il est nécessaire de s'assurer que ***l'institutionnalisation est assumée par la classe, donc est menée de manière collective, à partir des propos des élèves sollicités pour retenir l'essentiel de l'activité et sous la direction du professeur.***

Ce qui est consigné sur le cahier des élèves peut être de la forme suivante à titre d'exemple, mais ce qui est essentiel est le fait que ***ce qui est institutionnalisé soit la trace de l'activité qui a effectivement été menée par la classe*** :

Programmes de calcul « somme et différence »

I. Rendre plus simple des calculs pour calculer mentalement

1. Consigne 1.
On fait coller la feuille « consigne 1 » sur le cahier et on fait dégager la régularité que l'on note par écrit :
Ajouter 21 et soustraire 1 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre
Ajouter 199 et soustraire 99 à un nombre revient à ajouter 100 à ce nombre
Ajouter 35 et soustraire 15 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre
Ajouter 156 et soustraire 56 à un nombre revient à ajouter 100 à ce nombre
Ajouter 58 et soustraire 8 à un nombre revient à ajouter 50 à ce nombre
Ajouter 2017 et soustraire 17 à un nombre revient à ajouter 2000 à ce nombre

On a simplifié des programmes de calculs pour calculer mentalement

On peut prévoir ensuite des exercices à la maison sur le même modèle, en demandant l'écriture de phrases en français du même type que celles écrites dans le cahier de cours, par exemple avec des exercices comme :
15 + 37 – 7 ; 121 + 229 – 29 ; 58 + 1024 – 24 ; 104 + 72 – 12.

Etape 2 : *b*>*c* ou *b* <*c*

A travers les quatre premiers calculs, il s'agit de continuer à se familiariser avec la technique qui vient d'être mise au point ; ce qui conduit à être attentif au calcul de la différence b – c. Mais l'utilisation de cette technique est bloquée lors du cinquième calcul pour lequel on n'a plus b > c ; ce qui rend la soustraction impossible à effectuer dans **N**. *Les élèves sont contraints de devoir imaginer une nouvelle technique pour ce type de tâches qui était en passe de devenir routinier, mais s'avère problématique dans certains cas. Il est donc nécessaire d'ébaucher une nouvelle technique et de trouver des moyens de la justifier et la valider.*

Les élèves recherchent ***individuellement*** et ***mentalement*** les calculs de la consigne 2 et notent au crayon leurs résultats en face de chacun des calculs proposés.

Consigne 2 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
14 + 17 – 15 ;
114 + 17 – 15 ;
1802 + 319 – 315 ;
4374 + 62 – 61 ;
4374 + 61 – 62 ;
7081 + 61 – 62.

Pour chacun des quatre premiers calculs, le professeur fixe la durée de la recherche individuelle et continue de même pour le cinquième calcul. Il est possible que, dans le 5e calcul, des élèves continuent d'ajouter 1 sans avoir remarqué la nouveauté. On peut les convaincre de la fausseté de leur démarche en comparant le 4e et le 5e calcul. Au même nombre, 4374, si on ajoute 62 puis que l'on soustrait 61, il est vraisemblable que l'on n'obtiendra pas le même résultat que si on lui avait ajouté 1 de moins et soustrait 1 de plus. Rapidement, d'autres s'aperçoivent de l'impossibilité de l'application de la technique précédente.

Néanmoins, les nombres sont les mêmes que dans le calcul précédent, même si les places des deux derniers ont été échangées. Cette remarque, vue par des élèves ou indiquée par le professeur si ce n'est pas le cas, devrait attirer l'attention sur une comparaison possible entre le quatrième et le cinquième programme de calcul.

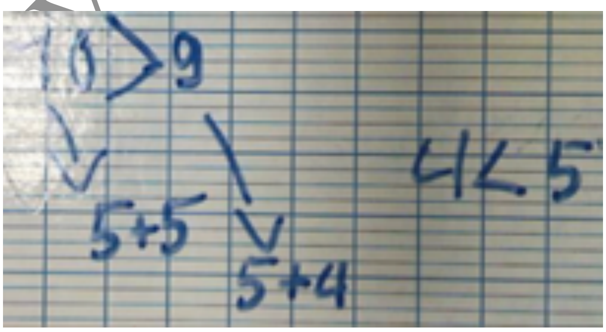
Dans le quatrième programme de calcul, « ajouter 62 puis soustraire 61 » équivaut à « ajouter 1 », la question cruciale est alors : ***à quoi équivaut le programme de calcul « ajouter 61 puis soustraire 62 » ?***

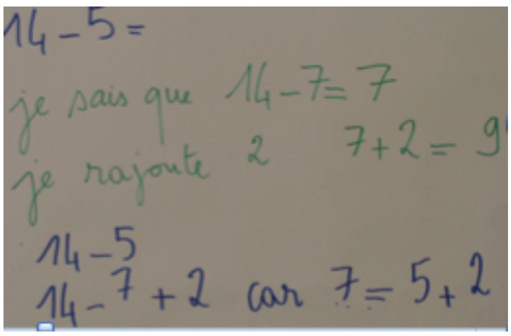
Des élèves devraient fournir la seule réponse possible ***dans le cadre « d'une logique des programmes de calcul »*** en disant : « à soustraire 1 »… Tout en le justifiant par : « car on soustrait 1 de plus que ce qu'on ajoute ! » Les élèves, éventuellement guidés par le professeur, peuvent expliquer que « enlever 62, c'est enlever 61 et enlever encore 1 » car décomposer une soustraction en une succession de petites différences est une méthode souvent utilisée en calcul mental.

Ces explications constituent des justifications (fonction technologique) qui suscitent l'approbation de la classe et doivent être reçues comme telles par le professeur. Dans le cadre d'un ***calcul mental*** et d'un ***échange oral***, il n'est en effet guère possible d'en attendre davantage. De nouveau, le recours rapide à la calculatrice permet de valider le calcul. Le dernier cas ne devrait alors pas poser de problème.

Passage important

Le professeur peut alors indiquer qu'une justification plus mathématique est possible. Les élèves recherchent et assez rapidement, même s'ils le formulent à leur manière, proposent une technique d'emprunt ou de décomposition judicieuse du premier des nombres. Ce sont des techniques numériques que les élèves ont travaillées en primaire, et qui relèvent de la décomposition additive des nombres. Ces savoir-faire sont enseignés et compris dès le CP, comme l'attestent les écrits suivants, notés par la maîtresse de CP sous la dictée des élèves, et qui leur permettent de prouver que 10 > 9 et que 14 – 5 = 9 :





Une telle technique est encore utilisée dans l'algorithme de la soustraction, lorsque le chiffre du rang à soustraire est supérieur au chiffre du même rang auquel on le soustrait. Ainsi, par exemple, dans la soustraction 52 – 38. Comme 8 > 2, on « emprunte » une dizaine venue de 5 que l'on ajoute à 2 pour obtenir 12, ce qui rend la soustraction 2 – 8 devenue 12 – 8 possible. Cette technique, parce qu'on commence par « casser » le chiffre de rang supérieur (5 dans ce cas) pour rajouter 10 au chiffre du rang immédiatement inférieur, évite le recours à la retenue dont on oublie souvent de tenir compte dans la suite du calcul. La soustraction s'écrit alors :

$$\begin{array}{r} \cancel{5}^{4}\,{}^{1}2 \\ -\,38 \\ \hline =14 \end{array}$$

Cette technique est souvent appelée « méthode anglo-saxonne » ou aussi « méthode par emprunt ». Elle repose sur la transformation suivante :

52 – 38 = 5 × 10 + 2 – (3 × 10 + 8) = 4 × 10 +10 + 2 – (3 × 10 + 8)

= 4 × 10 – 3 × 10 + 12 – 8

Tandis que la soustraction « avec retenue » repose sur :

52 – 38 = 5 × 10 + 2 – (3 × 10 + 8) =5 × 10 + 2 + 10 – (3 × 10 + 10 + 8)

= 5 × 10 – 4 × 10 + 12 – 8

Les justifications de ces deux techniques sont enseignées avec un vocabulaire adapté dès le CE1 et certains élèves s'en souviennent.

Lorsque les élèves sont confrontés à la nécessité de justifier la soustraction de 1 à 4374 dans le calcul 4374 + 61 – 62, il en est toujours quelques-uns pour se souvenir de la technique d'emprunt et l'adapter à la situation nouvelle.

Ainsi : 4374 + 61 – 62 = 4373 + 1 + 61 – 62 = 4373 + (61 + 1) – 62 = 4373 + 62 – 62 = 4373.
Et on a prouvé et trouvé la raison pour laquelle : 4374 + 61 – 62 = 4374 – 1.

La comparaison des premier et dernier termes de cette suite d'égalités, 4374 et 4373, indique clairement que l'on a soustrait 1 à 4374. Une telle justification peut servir d'aide et de vérification aux élèves débutants dans ces calculs. Par exemple, si on ne sait pas comment faire pour 8456 + 671 – 677, on dit qu'on « emprunte » à 8456 ce qu'il manque pour « transformer 671 en 677 », soit 6 ; et cela revient à lui retrancher 6. Ce qui s'écrit :

8450 + 6 + 671 – 677 = 8450 + (6 + 671) – 677 = 8450 + 677 – 677 = 8450 = 8546 – 1.

Une institutionnalisation est de nouveau à conduire, au cours de laquelle le ***professeur en interaction avec la classe***, fait dégager l'essentiel. Elle débouche de nouveau, après collage de la feuille, sur un écrit consigné dans le cahier de cours, du type :

2. Consigne 2
Ajouter 17 et soustraire 15 à un nombre revient à ajouter 2 à ce nombre
Ajouter 319 et soustraire 315 à un nombre revient à ajouter 4 à ce nombre
Ajouter 62 et soustraire 61 à un nombre revient à ajouter 1 à ce nombre

Mais attention !
Ajouter 61 et soustraire 62 à un nombre revient à soustraire 1 à ce nombre
En effet, c'est ce que montre l'exemple suivant :

4374 + 61 – 62 = 4373 + 1 + 61 – 62 = 4373 + (61 + 1) – 62 = 4373 + 62 – 62 = 4373. Donc : 4374 + 61 – 62 = 4374 – 1. ***Simplifier un programme de calcul revient parfois à soustraire***

Etape 3 : dans tous les cas *c* >*b*

Il s'agit maintenant d'éprouver la validité de la technique sur quelques tâches du même type afin de se convaincre de son efficacité, et d'institutionnaliser ce que l'on peut retirer de cette expérience.

On propose encore aux élèves de travailler ***individuellement*** et ***mentalement*** afin de donner rapidement les résultats des calculs de la consigne 3. Les élèves notent au crayon leurs résultats en face de chacun des calculs proposés.

Consigne 3 : Effectue mentalement les calculs suivants :		
458 + 45– 46 ;	3469 + 45 – 46 ;	
3469 + 124–125 ;	15627 + 124 – 125 ;	
15627 + 313–314 ;	823 + 313 – 314 ;	
823 + 32–33 ;	4586 + 32 – 33 ;	
4586 + 7538–7539.	3,5 + 32 – 31 ;	823 + 7,2 – 8,2.

Le professeur pose alors la question : ***Qu'avons-nous appris de ces calculs ?***

Les réponses vont certainement être imprécises, ou confuses, car il n'est pas facile d'exprimer sous la forme d'une seule phrase ce que l'on vient d'observer sur divers spécimens du même programme de calcul $a + b - c$, pour lesquels le choix des variables est toujours $c = b + 1$. Il faut donc s'attendre à ce que les élèves répondent par des phrases du type : « C'est toujours le nombre de départ moins 1 », « Ça revient à enlever (ou soustraire) 1 », etc.

La question qui vient alors est évidemment : ***En raison (ou à cause) de quelles opérations est-on amené à soustraire 1 (puisque ce n'était pas ce qui se produisait dans les calculs des étapes 1 et 2) ?***

Il est encore vraisemblable, pour les mêmes raisons, que les réponses soient imprécises ou maladroites, du type « parce qu'il y a un de plus (ou de moins) », etc., mais elles manifestent que l'attention des élèves est désormais attirée par ***ce qui se fait*** avec $+ b - c$.

C'est alors au professeur d'indiquer que, pour noter qu'appliquer au premier nombre le résultat de la suite du programme de calcul revient à lui soustraire 1, on va utiliser une notation particulière. C'est donc lui qui enseigne et fixe la notation. ***La place des élèves*** est réservée à la ***justification de la notation*** qui provient d'une simplification raisonnée du programme de calcul.

Ceci est noté dans le cahier de cours après avoir de nouveau collé la feuille de la consigne 3.

3. Une nouvelle notation pour simplifier l'écriture

Pour simplifier l'écriture du programme de calcul, « à un nombre, on ajoute 45 et on soustrait 46 », on aurait pu écrire : … + 45 – 46 = …–1.

On a préféré écrire :

+45 – 46 = -1

qui signifie que si à un nombre, on ajoute 45 puis on soustrait 46, alors on lui soustrait 1.

Ainsi : 458 + 45 – 46 = 458 – 1 = 457

P engage les élèves à écrire par eux-mêmes, dans la suite du cours, ce que l'on a alors observé avec les autres programmes de calcul :

+124 – 125 = -1, ainsi 15627 + 124 – 125 = 15627 – 1 = 15626

+313 – 314 = -1, ainsi 823 + 313 – 314 = 823 – 1 = 822

+32 – 33 = -1, ainsi 4586 + 32 – 33 = 4586 – 1 = 4585

+7538 – 7539 = -1, ainsi 4586 + 7538 – 7539 = 4586 – 1 = 4587

Etape 4 : travail de la technique

Exercice :

Trouver d'autres écritures qui donnent –1 ?

Lorsque cet exercice a été travaillé, les élèves utilisent assez vite des décimaux non entiers.

Deuxième séquence
Définition des nombres relatifs, le problème de leur addition
Durée : entre 3, 4 et 5 séances de 55 min selon les classes et les professeurs

Etape 1 : mise en évidence de nombres négatifs

Deux voies sont possibles pour mener à bien cette étape qui doit se conclure par la mise en évidence d'autres nombres négatifs. Rappelons qu'à la fin de la première séquence, on ne connaît d'eux que -1.

1. La première voie, sans doute ***la plus formatrice,*** consiste à demander aux élèves s'ils peuvent trouver des programmes de calculs qui reviendraient à soustraire 2, 3, 4, 5 ou 6 au premier nombre, donc des écritures qui équivalent à écrire -2, -3, -4, -5 ou -6. Les élèves comprennent qu'il suffit de choisir deux nombres dont la différence est 2, 3, 4, 5 ou 6 et d'écrire correctement qu'on ajoute le plus petit et que l'on retranche ensuite le plus grand. On sélectionne alors diverses propositions qui sont consignées dans le cours afin d'aboutir à des écritures du type :

+34 – 37 = -3
+34 – 38 = -4
+12 – 15 = -3
+5241 – 5246 = -5
+21 – 31 = -10
+22 – 29 = -7

Certains élèves ont, à ce stade, toujours besoin du point d'appui qui consiste à dire ou à écrire « ajouter 34 à un nombre puis retranche 37 revient à soustraire 3 à ce nombre », ou encore à écrire : … + 34 – 37 = … -3. On les laisse se servir de ce point d'appui que l'on continuera à solliciter ultérieurement, dès qu'on en aura besoin.

2. La seconde consiste à fournir directement aux élèves une liste de calculs ***en travail à la maison***. Cette liste est évidemment utilisée après que l'on a emprunté en classe la voie 1.

Consigne 4 :
Effectue mentalement les calculs suivants, puis écris sous forme simplifiée à quoi équivaut l'application au premier nombre de l'addition suivie de la soustraction, dans ces calculs :

15627 + 314–316 ;	823 + 31 – 34 ;
4586 + 44 – 48 ;	26 + 52 – 55 ;
364,5 + 524,1 – 524,6 ;	1010 + 0,21 – 0,31 ;
23,6 + 2,2 – 2,9.	

Exemple :
1350 + 242 – 247 = 1345 provient de la simplification du programme de calcul :
+242 – 247 = -5

Les nombres choisis poussent les élèves à utiliser la technique la plus économique, car ils sont assez grands pour rendre délicat le calcul mental de l'addition ; mais les deux derniers nombres sont suffisamment proches pour rendre la différence évidente. Arrivés à ce stade, on a déjà institutionnalisé, lors de l'étape précédente, le fait qu'un programme de calcul puisse être écrit, de manière beaucoup plus économique, par une soustraction, au premier nombre du programme, d'un nombre *c* ; soustraction que l'on a notée –*c*. Ceci justifie que l'on engage les élèves dans la deuxième partie de la question.

On aboutit encore, dans ce cas, à faire consigner par les élèves, dans le cahier de cours et à la suite de ce qui précédait, les mêmes résultats :

+34 – 37 = -3 ***+34 – 38 = -4*** ***+12 – 15 = -3*** ***+5241 – 5246 = -5*** ***+21 – 31 = -10*** ***+22 – 29 = -7***

Etape 2 : travail de la technique

Exercices (on peut en inventer d'autres du type +*a* – *b*, avec *a* et *b* entiers ou décimaux positifs)

Pour chaque programme de calcul ci-dessous, donner le programme de calcul équivalent le plus simple :

+4 – 5 ; +3,7 – 4,7 ; +6,34 – 9,34 ; +503,9 – 510,9 ; +54 – 70 ; +768,3 – 769,5 ; +72,165 – 74,166 ; +0,8 – 0,9 ; +1,7 – 1,79 ; +2,85 – 22,85.

Etape 3 : où l'on s'intéresse aux opérateurs « addition »

On vient de trouver et de travailler avec des écritures simplifiées de programmes de calcul équivalents, mais les opérateurs additifs ne sont pas encore identifiés à des nombres. Au cours de cette étape, on se dirige vers cette identification ; notamment en éprouvant la commutativité sur ces programmes de calcul (propriété spécifique de certaines opérations que les élèves connaissent), ce qui rapproche le travail mené sur les programmes de calcul de ce qui se fait avec des nombres.

Arrivé en ce point, une question devrait surgir assez naturellement, soit de la part des élèves, soit portée par le professeur mais d'une manière qui paraîtra aller de soi aux élèves car elle affleure du travail antérieurement fait. C'est la suivante : ***On a vu qu'on pouvait écrire de manière simplifiée un programme de calcul qui aboutit à soustraire, peut-on faire de même pour ajouter ?***

Les élèves répondent généralement « oui » car ils ont déjà rencontré, à défaut d'avoir écrit des positifs avec un signe +, des programmes de calcul équivalents à ajouter un nombre à un autre. Cela a été le cas, par exemple, dans des calculs des étapes 1 et 2 de la première séquence où les calculs étaient les suivants :

17 + 21–1 ; 148 + 199–99 ; 17 + 35–15 ; 131 + 256–56 ; 39 + 58 – 8 ; 185 + 2017 –17 ;

14 + 17–15 ; 114 + 17–15 ; 1802 + 319–315 ; 4374 + 62 – 61.

Que l'on reprend désormais en s'intéressant au programme + *b* – *c* ; ce que le professeur peut montrer pour le premier de la liste : + 21 – 1 = + 20 (ajouter 21 puis soustraire 1 équivaut à ajouter 21). Les élèves sont engagés à continuer. On note alors les résultats obtenus dans des programmes de calculs plus amples, pour lesquels ***on décide, par commodité, de ne pas écrire le premier nombre*** :

+ 21 – 1 = + 20
+199 – 99 = +100
+ 35 – 15 = + 20
+ 256 – 56 = + 200
+ 58 – 8 = + 50
+ 2017 – 17 = + 2000
+17 – 15 = + 2
+ 319 – 315 = + 4
+ 62 – 61 = + 1

On institutionnalise de nouveau ce qui vient d'être travaillé. Ce qui conduit à faire noter dans le cahier de cours, à la suite de ce qui a été précédemment écrit et ***avec les élèves que l'on sollicite pour cette synthèse :***

Si à un nombre on ajoute 199 puis on soustrait 99, alors on ajoute 100 à ce nombre : on le note : +199 – 99 = +100 ; Si à un nombre on ajoute 17 puis on soustrait 15, alors on ajoute 2 à ce nombre : on le note : +17 – 15 = + 2 ; Si à un nombre on ajoute 2017 puis on soustrait 17, alors on ajoute 2000 à ce nombre : on le note : + 2017 – 17 = + 2000 ; *Remarque, pour gagner du temps, l'une des ces phrases peut être remplacée par* *… + 2017 – 17 = … + 2000*

Etape 4 : travail de la technique et rencontre avec un élément technologique : la commutativité

On continue par un entraînement à ce type de calculs sur des programmes de calcul, c'est-à-dire sur des calculs menés en raisonnant de la manière suivante : « si, à un nombre, on ajoute un deuxième nombre, puis on retranche un troisième, cherchons quelle opération on applique à ce premier nombre ; autrement dit le programme de calcul équivalent le plus simple ». On change l'ordre des calculs en cours d'exercices :

+ 7 – 11 =	+ 5 – 2 =	+ 8 – 13 =
- 12 + 10 =	+ 8 – 3 =	- 7 + 4 =
- 11 + 7 =	- 2 + 5 =	- 13 + 8 =
+ 10 – 12 =	- 3 + 8 =	+ 4 – 7 =

À l'issue de cette série de calculs une remarque est, en principe, faite par les élèves : lorsqu'on change l'ordre dans un programme de calcul, on obtient un programme de calcul équivalent, propriété que l'on note. Ce qui conduit à consigner dans le cahier de cours, et toujours ***avec la collaboration des élèves*** qui sont associés à définir ce qu'il sera ***essentiel de retenir :***

II. Un nouveau type de calculs
1. Exemples
+7 – 11 = -4
- 3 + 8 = + 5

2. Propriété de ce nouveau type de calculs

Propriété
Si on change l'ordre des opérations dans un programme de calcul contenant des additions et des soustractions, on obtient un programme de calcul équivalent.

Exemples
+7 – 11 =
- 11 + 7 =
- 3 + 8 =
+ 8 – 3 = + 5

Etape 5 : travail de la technique et nouvelles rencontres

On poursuit les exercices sur les programmes de calcul :

- 8 + 5 =	- 8 – 8 =	+ 4 + 5 =	- 10 – 20 =
- 8 + 8 =	- 5 + 5 – 1=	+ 7 – 4 – 3 =	+ 4– 4 + 2 =

Au cours de ces calculs, plusieurs nouvelles rencontres sont faites : deux soustractions ou deux additions successives, des programmes comprenant trois opérations, des programmes équivalents à 0, des programmes au cours desquels une étape donne 0. L'idée commence à ***vivre*** que ce que l'on fait sur les programmes de calcul s'apparente à ce qui se fait avec des nombres.

C'est désormais ***au professeur*** de dire que les entités que l'on manipule depuis le début et qui correspondent à des opérateurs soustractifs ont reçu le nom de nombres négatifs, que ceux qui correspondent à des opérateurs additifs s'appellent nombres positifs, et que ces deux catégories de nombres sont rassemblées en une seule qui est la catégorie des nombres relatifs.

La reprise dirigée par le professeur de – 5 + 5 – 1 = -1 permet d'écrire que 0 – 1= -1.

Celle portant sur + 4 – 4 + 2 = + 2 permet d'écrire que + 2 = 2 ; soit ***l'identification d'un positif à sa valeur absolue***. Celle-ci s'opère en confondant l'opérateur « ajouter 2 » et le nombre 2, somme de 0 et de 2.

La confusion entre ces deux entités est ***portée par l'écriture***. Dans un cas, + 4 – 4 + 2 = + 2 signifie qu'ajouter 4, puis soustraire 4 et ajouter 2 à un nombre revient à ajouter 2 à ce nombre. Dans l'autre, l'écriture équivalente 0 + 2 est interprétée à partir de ce qu'elle peut aussi désigner : la somme des entiers naturels 0 et 2. On explique alors aux élèves qu'en mathématiques on a décidé d'identifier + 2 à 2.

En fait, pour symétriser **N** *afin de construire* **Z***, on n'a pas besoin d'utiliser le signe + pour désigner les naturels qui préexistent à la construction de* **Z** *: ils permettent de le construire à partir d'une relation d'équivalence sur* **N × N** *(cf. annexe 2) ! On pourrait donc se passer des signes + pour désigner les positifs ; ce qui se fait d'ordinaire en mathématiques. Comme le recours au signe +, pour noter les positifs, est en usage dans le système scolaire, nous avons* *dû en tenir compte : ce qui constitue l'une des raisons, mais non la principale, du choix fait de recourir aux programmes de calcul pour étudier les relatifs.*

On dit donc aux élèves que l'on pourra toujours revenir à l'opérateur + 2 lorsque la rencontre du nombre 2 dans un calcul le nécessitera. Cette identification est valable avec tous les autres nombres que l'on connaissait, qu'ils soient entiers ou décimaux non entiers. On consigne cela dans le cours :

III. De nouveaux nombres : les nombres relatifs

Les nombres négatifs, les nombres positifs, les nombres relatifs

Définition :

En mathématiques, on a décidé de considérer -1, -2, -3 … comme de nouveaux nombres. Ils sont affectés d'un signe « – » et on les appelle ***« nombres négatifs ».***

Remarques :

a)–5 + 5 – 1=–1
Donc : **0 – 1= -1**
b) + 4– 4 + 2 = + 2
0 + 2 = + 2
Or quand on écrit la somme 0 + 2, on sait que celle-ci est égale à 2 : 0 + 2 = 2. On décide alors que : **+2 = 2**

Définitions :

a) Les nombres entiers peuvent donc être notés avec un signe + ; on les appelle des ***nombres positifs.***

b) Nombres positifs et négatifs sont appelés ***« nombres relatifs »*** *(obligé de signaler cela car le terme de nombre relatif est explicitement utilisé dans le programme ; notamment dans les « compétences » du socle commun !)* ; ils sont écrits avec un signe + ou – et un nombre que l'on appelle la ***valeur absolue.***

Remarque :

Le nombre 0 est un nombre à la fois positif et négatif (un programme de calcul ne change pas s'il est équivalent à ajouter ou soustraire 0) : on le note donc sans signe.

Même si le terme de valeur absolue n'est pas au programme, ***nous avons décidé de l'utiliser*** *car il remplit une fonction de désignation bien commode. Bien plus commode que le terme de « distance à zéro », expression ambiguë dans la mesure où elle renvoie à plusieurs cadres mathématiques distincts : le cadre géométrique et celui des grandeurs à partir du mot « distance », le cadre arithmétique à partir du mot « zéro ». À ce moment du parcours où il n'a pas été question de droite graduée (nous en avons expliqué la raison en introduction), l'usage de cette expression nous apparaît encore plus contestable que d'ordinaire et entraine à la confusion chez les élèves : qu'est-ce qu'une distance à un nombre, alors qu'on ne connaît guère que la distance à un point ?Les réticences qui sont apparues il y a quelques années, concernant l'utilisation de la valeur absolue, sont liées non pas à sa désignation, mais à l'usage de la valeur absolue de x, x désignant un relatif quelconque (donc « doté » d'un signe que l'écriture x« cache »), puis aux calculs dans lesquels figurent des valeurs absolues notées* $|\,|$*. Ces calculs, qui ont pu un temps trouver à vivre à travers la résolution d'équations du 1^er^ degré avec valeurs absolues au niveau du Lycée, ne sont évidemment pas menés au niveau de* *la 5^e^. Ils ne risquent donc pas d'entraîner ce genre d'erreurs. On se garde toutefois de prononcer des phrases comme « la valeur absolue d'un nombre, c'est le nombre sans son signe », tout aussi fausses dans leurs transpositions recourant à l'expression « distance à zéro » !*

Etape 6 : addition des relatifs

Question cruciale : Comment savoir si ces entités que l'on appelle « nombres » relatifs sont effectivement des nombres ? Pour cela, recherchons ce que c'est qu'un nombre, à quoi ça sert, ce qui se fait avec des nombres.

Cette question est la ***question fondamentale*** *qui engage ensuite à étudier les opérations et la comparaison sur les nombres relatifs ; rappelons que c'est elle qui engage les élèves de CM à étudier les rationnels dans l'ouvrage « Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire » de Guy et Nadine Brousseau. Dans ce dernier cas, les rationnels sont vus comme mesures d'une grandeur mesurable : la longueur, qui est dans ce cas l'épaisseur d'une feuille de papier. Dans notre cas, et à cet instant du PER, il ne s'agit plus de mesurer des grandeurs avec des relatifs (une mesure est toujours positive) ; le sens peut toujours être retrouvé en revenant à la signification première d'opérateur additif dans des programmes de calcul. On se servira d'ailleurs de ce retour au sens premier dans la suite, lorsque ce sera nécessaire, pour établir certaines règles de calcul. Comme cela a été indiqué en introduction, on recherche à quelles lois doivent obéir les relatifs afin de pouvoir construire sur* **Z** *(et sur* **D** *pour lequel l'extension est implicitement faite) les deux opérations au programme de 5^e^ ainsi que l'ordre. Ce fil logique sera poursuivi en 4^e^ pour la multiplication et la division. On lance donc les élèves dans* ***la construction raisonnée*** *des règles opératoires dans* **Z** *qui doivent être compatibles avec les propriétés qu'on leur connaît dans* **N** *et dans* $\mathbf{D}_+$*. En cela nous nous démarquons fortement des propositions de la majorité des auteurs de manuels qui, soit assènent ces règles sans justification, soit les font constater en les montrant aux élèves tout en leur faisant croire que ce sont eux qui les ont trouvées ; ce qu'on nomme* ***l'ostension déguisée****. On peut dans ce cas s'interroger sur la qualité mathématique de l'activité dans laquelle on lance les élèves.*

Quel que soit la voie didactique suivie pour amener les élèves à la rencontre avec les relatifs, les élèves auront à affronter une difficulté de nature épistémologique : la notion de classe ou de catégorie, dans sa version propre aux mathématiques. Il s'agit en mathématiques des notions de classe et donc de relation d'équivalence. Dans l'introduction, nous avons montré que l'appui sur les grandeurs non mesurables (les grandeurs repérables), à la difficulté conceptuelle relative aux classes d'équivalence, en ajoute une autre.

La proposition portée par le document d'accompagnement « Les nombres au Collège », en choisissant de se placer dans le cadre numérique et non pas dans celui des grandeurs, n'est pas très éloignée de la nôtre : les relatifs sont des nombres qui rendent la soustraction toujours possible. En utilisant de manière implicite la connaissance en acte de la régularité de tout nombre pour la soustraction, ce document suggère, page 8 : « Ainsi, si on s'intéresse à 3,7 – 10,8, on peut écrire : 3,7 – 10,8 = 0 – 7,1 (on a soustrait 3,7 à chaque terme). Dans cette approche, -7,1 est introduit comme notation de 0 – 7,1 et comme égal à 3,7 – 10,8, et donc comme égal à bien d'autres différences, par exemple : 1 – 8,1 ; 13,7 – 20,8… » On voit qu'on n'échappe pas aux notions de relation et de classe d'équivalence !

Il ne faut donc pas passer rapidement sur cette question cruciale mais, au contraire, s'assurer que sa dévolution à la classe a eu lieu. C'est-à-dire que les élèves ont compris la question, s'en sont emparés, qu'ils savent qu'ils l'auront à traiter en grande partie seuls, sous la direction du professeur qui ne soufflera pas la réponse, mais qui reprendra éventuellement la *main lorsqu'on butera sur une difficulté insurmontable à ce niveau. Ceci suppose que l'on passe du temps à la travailler, avec les élèves, sans l'escamoter. La qualité de « nombre » sera donc reconnue aux relatifs par les élèves à partir de la fonctionnalité attribuée aux nombres : à ce niveau de la scolarité, calculer et comparer.*

Les élèves disent que les nombres servent à compter (dans le sens de dénombrer), ce qui est vrai pour certains d'entre eux. On évite de s'engager dans une discussion sur les décimaux, voire sur les rationnels non entiers, et on demande ce que l'on a fait au cours de ces séances avec les nombres qui permettaient de simplifier des programmes de calcul. En principe, les élèves disent qu'on calcule avec les nombres ; c'est ce qui a été observé dans les classes où les élèves proposent les quatre opérations. Certains peuvent dire aussi qu'on compare. ***Le professeur indique que l'on va donc étudier les calculs sur les nombres relatifs en commençant par l'addition et la soustraction sur des calculs simples.*** Si les élèves l'ont proposé, il indique aussi que l'on poursuivra par l'étude des autres opérations et de la comparaison. Comme les propositions des élèves fusent pour proposer des calculs avec diverses valeurs pour les nombres, le professeur fixe les valeurs absolues. Par exemple avec 7 et 2.

Par exemple ***peut-on calculer la somme et la différence de +7 et +2, de +7 et -2, de -7 et -2 ?*** *Nous avons fait consigner toutes les écritures possibles de sommes et de différences avec des relatifs de valeur absolue 7 et 2. Il y en a 8 en respectant l'ordre suivant : d'abord 7 puis 2.*

Les élèves s'engagent tout d'abord dans le calcul des sommes, parfois des différences. Un premier problème surgit : dans ces écritures, deux signes apparaissent parfois, ce qui implique que l'on écrive l'un des nombres entre parenthèses. Un deuxième problème provient de ce qu'on ne sait pas calculer certaines sommes. Le professeur indique qu'on va donc travailler sur ce dernier problème et qu'on attendra sa résolution avant de se lancer dans les calculs des différences dont certaines semblent, elles aussi, poser problème.

Pour +7 + (+2) et -7 + (+2), le problème se règle en écrivant le positif sans le signe +.

On a ainsi : +7 + (+2) = 7 + 2 = 9, ou encore +9. *On a donc identifié, pour ce cas, l'addition des positifs à l'addition dans* $\mathbb{N}$.

et -7 + (+2) = -7 + 2 qui signifie, en revenant au sens primitivement donné, celui des programmes de calcul, qu'à un nombre on soustrait 7 puis on ajoute 2, ce qui donne -5. *On s'est donc appuyé sur la notion d'opérateur dans un programme de calcul, travaillée abondamment durant les séances précédentes.*

On s'entraîne et évalue la pertinence des deux techniques que l'on vient de trouver dans des calculs du même type que l'on contraste avec des calculs où ces deux techniques ne peuvent s'appliquer :

Consigne 5
Calculer les sommes suivantes de nombres relatifs :
+4,3 + (+6,7) ; -9 + (+2) ; -4 + (+10) ; +7 + (-2) ; -7 + (-2) ; +7 – (-2) ; -7 – (-2)

Bien que les connaissances dont ils disposent ne le leur permettent pas, les élèves donnent des résultats pour les sommes +7 + (-2) ; -7 + (-2), sans pouvoir les justifier ni les valider, mais rencontrent des difficultés plus profondes pour $+7 - (-2)$ et $-7 - (-2)$. Par exemple, ils disent que $7 - (-2)$ donne 5. Le professeur fait alors remarquer qu'il serait étonnant que la somme et la différence de deux nombres, 7 et de -2 dans ce cas, soient toutes deux égales à 5 !

Dans le calcul des sommes, les élèves utilisent les techniques connues sur les programmes de calcul et trouvent le résultat exact. Par exemple, ils disent que $+7 + (-2)$ c'est le programme de calcul qui, à un nombre quelconque, revient à lui ajouter 7 et lui retrancher 2, donc à lui ajouter 5, qui peut se noter $+ 5$; et le raisonnement est analogue pour $-7 + (-2)$ où les élèves donnent le résultat -9 en disant qu'on retranche 7 puis 2. De ce fait, il est difficile de faire entendre aux élèves qu'un problème mathématique se pose en ce point ; à savoir que le raisonnement qu'ils ont utilisé, basé sur les programmes de calcul, s'applique à $7-2$ mais que son extension à $+7 + (-2)$ mérite d'être interrogée, de même que la transformation de $-7 + (-2)$ en $-7 - 2$. Deux voies se présentent alors pour la poursuite du parcours. C'est au professeur de décider laquelle conviendra le mieux à la gestion de sa classe et à la réussite de l'apprentissage pour ses élèves.

Troisième séquence
Etablir les règles de calcul de la somme de deux relatifs
Durée : entre 2 et 4 séances de 55 min

Comme on l'a dit en préambule à ce document, avant d'aborder l'entrée dans les relatifs, il est nécessaire que les élèves aient tout d'abord travaillé la définition de la différence[4] (dans **N** ou dans $\mathbf{D}_+$) qui doit être une connaissance disponible, élément non problématique, faisant partie du « milieu » des connaissances stabilisées, disponibles, non problématiques :

La différence des nombres a et b est le nombre d tel que $a + d = b$ et on note $d = b - a$.

1re possibilité : distinguer composition d'opérateurs et somme de relatifs : ou encore distinguer 7 – 2 et 7 + (-2)

Etape 1 : le professeur enseigne ce que ne peuvent trouver par eux-mêmes les élèves

Le professeur reprend la main, après qu'il a fait apparaître le problème mathématique… même s'il n'apparaît pas comme un problème pour certains élèves ! Le fait que la classe n'ait pas forcément su calculer les différences renforce la nécessité de se pencher, d'un point de vue mathématique, sur ce que pourraient être les calculs de sommes et de différences de relatifs.

Le professeur annonce que l'on est engagé dans un passage délicat et qu'il y a une méthode que l'on va étudier ensemble. Elle repose sur une idée que l'on aurait sans doute mis du temps à trouver. Il s'agit en effet d'introduire 0 dans le calcul de +7 + (-2).

On écrit ainsi que :

$+7 + (-2)$

$= 7 + (-2)$

$= 7 + 0 + (-2)$

Mais avant d'aller plus avant, il faut s'entraîner à écrire 0 à partir de deux nombres opposés ; ce sont des nombres que l'on a déjà rencontrés.

On a vu par exemple que $-8 + 8 = 0$, $-5 + 5 = 0$ et $+4 - 4 = 0$. On demande aux élèves de réécrire ces égalités avec des additions ou soustractions de relatifs ($-8 + (+8) = 0$, $-5 + (+5) = 0$, $+4 - (+4) = 0$), puis de trouver des écritures du même type avec d'autres nombres, puis de réfléchir judicieusement afin qu'elle puisse nous servir pour remplacer 0 dans le calcul de $7 + 0 + (-2)$. Deux possibilités sur le choix des nombres ont une forte probabilité d'apparition : utiliser 7 et son opposé, ou -2 et son opposé. Ce qui donne quatre écritures possibles : $-7 + 7$, $+7 - 7$, $+2 - 2$ et $-2 + 2$.

Etape 2 : recherche expérimentale d'une technique

[4] Les élèves résolvent des problèmes additifs « à trous » dès le cycle 2 de l'école primaire. Ils sont du type mis en évidence dans la classification proposée par Gérard Vergnaud (état initial, transformation, état final) et reprise page 57 du document d'accompagnement *Le nombre au cycle 2* :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf

Il faut donc tester ces possibilités, et la classe peut être divisée en quatre pour cela.

$7 + 0 + (-2) = 7–7 + 7 + (-2) = 7 + (-2)$. Le problème n'est pas résolu.

$7 + 0 + (-2) = 7 + 7–7 + (-2) = 14–7 + (-2) = 7 + (-2)$. Le problème n'est pas résolu

$7 + 0 + (-2) = 7 + 2 – 2 + (-2) = 9 – (+2) + (-2) = 9 – 2 + (-2) = 7 + (-2)$. Le problème n'est pas résolu

$7 + 0 + (-2) = 7 – 2 + 2 + (-2) = 5 + 2 + (-2) = 7 + (-2)$. Le problème n'est pas résolu, mais on retrouve 5 dans l'une de ses étapes ; ce nombre ayant été envisagé comme résultat du calcul, sans qu'on l'ait prouvé.

On dresse donc un constat d'échec temporaire. Mais le professeur fait alors remarquer que si 0 peut être remplacé par la somme de deux opposés, la somme de deux opposés peut aussi être remplacée par 0[5]. Cette technique s'appuie sur un travail en amont qui consiste à décomposer des nombres de manière additive, par exemple $5 = 3 + 2$, et à écrire le signe « = » dans les deux sens ; plus particulièrement de droite à gauche, contrairement au sens habituel de lecteur, comme dans $0 = -3 + (+3)$. Soit les élèves reviennent alors sur le dernier calcul qui donnerait effectivement 5 si l'on pouvait « se débarrasser » de $2 + (-2)$, soit il faut les engager à répondre à :

Question cruciale : Ne peut-on pas examiner de nouveau les quatre calculs précédents de manière à faire apparaître la somme de deux opposés et la remplacer par 0 ?

Le premier cas, dans lequel on rencontre $7 – 7$, ne donne rien. Il en est de même du second. Dans le troisième, il est possible que des élèves soient tentés de dire que $-2 + (-2)$ donne 0 ; ce que l'on peut facilement contester puisque ces deux nombres sont les mêmes et non pas opposés. Il ne reste plus que la dernière écriture dans laquelle, au-delà de l'écriture $– 2 + 2$ devrait apparaître aussi $2 + (-2)$ *(translation du regard, de gauche à droite).*

P pose alors la question dont la première partie devrait émerger d'elle-même dans la classe, il la complète par la seconde, sans doute négligée des élèves : ***2 + (-2) est-il ou non égal à 0 ? Qu'est-ce qui nous le prouve ?***

Apparemment, certains élèves répondent sans hésiter que $2 + (-2) = 0$. La difficulté qui surgit est de faire vivre auprès des élèves la nécessité de prouver cette affirmation perçue comme évidente, et qui si elle est vraie entraînerait peut-être aussi le fait que les sommes suivantes de relatifs opposés : $8 + (-8)$, $2 + (-2)$, $5 + (-5)$, etc. sont nulles, et si oui pourquoi. On remarque que l'on n'avait pas à se poser ce problème auparavant puisque la réponse à la question faisait intervenir le retour au sens donné aux programmes de calcul : cela était possible du fait que le premier terme de la somme était négatif $– 8 + 8$ devenait $– 8 + (+ 8)$, et $– 5 + 5$ devenait $– 5 + (+ 5)$, etc.

L'affirmation $2 + (-2) = 0$ n'est donc qu'une hypothèse que l'on va tester et tenter de valider d'un point de vue mathématique.

[5] Cette technique s'appuie sur un travail « en amont » qui consiste à décomposer des nombres de manière additive, par exemple $5 = 3 + 2$, et à écrire et lire le signe « = » dans les deux sens ; en insistant plus particulièrement sur des écritures moins habituelles, comme dans $0 = -3 + (+3)$. On a vu que la décomposition additive est, en principe, travaillée dès le CP. On peut s'assurer qu'elle est encore disponible en 5^{e}.

Etape 3 : un moment technologique, justifier et expliquer pourquoi la somme de deux opposés est égale à 0

La question cruciale devient donc : ***Peut-on démontrer que lorsque qu'on ajoute à un nombre son opposé, alors la somme est nulle ? Peut-on le démontrer pour 2 + (-2) par exemple ?***

Une difficulté didactique surgit ***qui conduit à un passage délicat.***

La question est « la somme 2 + (-2) est-elle égale à 0 ? ». Il faut transformer la question de telle manière qu'elle devienne « quel est le nombre qui ajouté à 2 donne une somme égale à 0 ? », qui conduira à répondre à la question « est-ce effectivement -2 qui, ajouté à 2, donne 0 ? ».

On transforme ainsi la question « 2 + (-2) = 0 ? » en résoudre : « l'équation $2 + x = 0$ », donc trouver x qui, ajouté à 2, donne 0.

Par définition de la différence, définition que l'on étend désormais puisque « planait l'interdit » de ne pouvoir soustraire à un nombre un nombre plus grand, l'écriture $2 + x = 0$ signifie que x est la différence de 2 et 0. Ce qu'on note : $x = 0 – 2$.

Ce passage apparaît ***épistémologiquement inévitable***, puisque c'est précisément l'une des raisons d'être des nombres négatifs : la possibilité de l'extension de la soustraction dans **N**. Il ne peut guère être didactiquement accepté que si les élèves ont au préalable abondamment pratiqué la résolution dans **N** d'équations du type : $a + x = b$, soit sous forme algébrique, soit à partir de problèmes, géométriques par exemple (*cf.* la brochure du groupe didactique de l'IREM de Bordeaux sur l'algèbre, disponible auprès de l'IREM de Bordeaux[6]), qui y aboutissent.

Arrivés à $x = 0 – 2$, la réponse $x = -2$ doit apparaître puisqu'établie dès les remarques qui succèdent à la définition des négatifs, ce qui suppose un certain entrainement des élèves (mais les élèves « savent » qu'établir que « -2 est la solution du problème » est effectivement le but visé). Rappelons que le résultat 0 – 2 = -2 a été établi à partir de la considération des relatifs comme « opérateurs », à l'issue du travail mené sur les programmes de calcul. *On a identifié l'opérateur – qui apparaît dans le programme de calcul 0 – 2 à la différence 0 – 2.*

Etape 4 : une institutionnalisation

On vient donc de démontrer que 2 + (-2) = 0. Il en est de même pour 3 + (-3), 1 + (-1), etc.

Remarquons que -2 + (+2) = -2 + 2 = 0 (puisque +2 = 2), ce qui établit la ***commutativité pour l'addition des opposés***.

C'est à partir de ce travail que l'on pourra faire noter la définition des opposés, dans la partie « leçon »

On a établi que **2 + (-2) = 0** et on a aussi **-2 + (+2)** = -2 + 2 = **0.**

On dit que **+2 et -2 sont des nombres relatifs opposés.**

[6] IREM d'Aquitaine, 40 rue Lamartine, 33400 TALENCE, Tél. 05 40 00 89 74

Il en serait de même pour -3 et +3, -7,5 et +7,5…

Etape 5 : résolution du problème +7 + (-2) = ?...

On peut alors revenir au problème du calcul de +7 + (-2) puisque :

On était arrivé à +7 + (-2) = 7 – 2 + 2 + (-2)

= 7 – 2 + 0 puisqu'on a démontré que 2 + (-2) = 0

= 7 – 2

Lors de la phase qui précède, c'est bien sûr le professeur qui a repris la main. Il est peut-être nécessaire que le professeur dispose d'un guide, lui permettant d'ajuster les places des élèves et la sienne en fonction des réponses des élèves. Quoi qu'il en soit, on se dirige vers une ostension assumée de la réponse, éventuellement à travers une forme dialoguée du cours. Par contre, il sera possible de laisser davantage de place aux élèves, parce que cette démonstration et sa technique ont déjà été montrées, lors du raisonnement similaire relatif à la différence des relatifs.

Etape 6 : résolution de – 7 + (-2) = ?

De même, ***le professeur reprend la main pour le dernier calcul car la technique faisant intervenir 0 comme addition d'opposés n'est pas réutilisée ici, bien que l'on fasse encore intervenir le rôle de 0 :***

7 + (-2)
= -7 + (0 – 2) puisqu'on a posé l'écriture 0–2 = – 2
= -7 + 0 – 2
= -7 – 2
= -9

Autre calcul possible :
-7 + (-2)
= -7 + 0 + (-2)
= -7 – 2 + 2 + (-2)
= -9 + 0
= -9

On peut désormais demander le calcul de +3 + (-5), par exemple :
+3 + (-5) = +3 + 0 + (-5) = +3 –5 + 5 + (-5) = -2 + 0 = -2.

INTERET ET LIMITE DE CETTE MANIÈRE DE FAIRE :

- *Pour ce qui est de l'intérêt : on a établi la commutativité de l'addition lorsqu'il s'agit de la somme des opposés. On a retravaillé et étendu la définition de la différence au cas où, ajoutant un nombre à un autre, on obtient un nombre plus petit que le premier (2 + x = 0)*
- *Pour ce qui est de la limite : la gestion est didactiquement délicate, risque de réduire la place des élèves, et certains risquent de ne pas comprendre pourquoi tant de « complications ». Mais faire des mathématiques, c'est parfois s'affronter à des*

« complications » que les autres nous font voir parce qu'on ne s'en est pas aperçu soi-même…

2e possibilité : une alternative, décomposer 7 dans 7 + (-2)

Etape 1 : recherche d'une technique

Une autre façon de conduire le calcul +7 + (-2) consiste à utiliser ce qu'on pourrait désigner comme relevant de « l'intuition » des élèves et qui est, en fait, une extension qu'ils s'autorisent de certains calculs portant sur des écritures ostensives : c'est-à-dire dont la perception, visuelle dans ce cas, induit une forme de travail qui peut être fausse ou bien juste, mais non justifiée du point de vue mathématique (par exemple croire et écrire que -7 est solution de l'équation $7x = 0$).

Dans le cas présent, comme 7 – 2 = 5, les élèves s'autorisent à transformer l'écriture d'une addition dans **Z** en celle d'une soustraction dans **N** et à donner son résultat ; soit 5 ou +5, qui est effectivement le résultat convenable dans ce cas. Mais une telle extension indue de la fonction des écritures ostensives pousse parfois les élèves à proposer 9 pour réponse.

Etape 2 : recherche d'une explication et d'une justification (dimension technologique)

Une discussion peut alors s'engager entre les élèves, dirigée par le professeur, afin d'échanger pour déterminer la plausibilité des résultats proposés. Au cours de la discussion, le professeur demande la justification mathématique du ou des résultats avancés et indique, si les élèves ne le proposent pas, que l'on peut faire une décomposition de 7 (sous-entendu en somme). Mais il arrive fréquemment que les élèves se souviennent et proposent cette décomposition.

Ils ont déjà décomposé de manière additive des nombres (c'était le cas pour justifier le fait qu'on soustrait 1 à 4374 dans le calcul 4374 + 61 – 62 = 4373 + 1 + 61 – 62), aussi proposent-ils diverses décompositions de 7, comme 3 + 4, à insérer dans le calcul. Mais ils s'aperçoivent vite que bon nombre d'entre elles ne sont pertinentes, et finissent par proposer 5 + 2. Le nombre 2 est appelé par le –2 de l'écriture +7 + (-2) ; c'est une écriture ostensive, qui indique un choix judicieux possible. Comme on l'a déjà signalé, ce type de décompositions est familier aux élèves car ils l'utilisent en calcul mental depuis l'école élémentaire, et elle a déjà été antérieurement utilisée comme justification.

On écrit alors : +7 + (-2) = 7 + (-2) = 5 + 2 + (-2).
On est ensuite ramené à justifier, comme dans la technique précédente, que 2 + (-2) = 0, et on s'engage donc dans le même travail en suivant les **étapes 3 et 4** de la 1re possibilité, qui conduit à **l'étape 5** où l'on écrit :+7 + (-2) = 7 + (-2) = 5 + 2 + (-2) = 5 + 0 = 5

Etape 6 : résolution de – 7 + (-2) = ?

Pour le calcul de –7 + (-2), la technique par décomposition apparaît plus difficile à utiliser. Mais si les élèves conjecturent, par extension des techniques portées par les écritures ostensives, que le résultat possible est -9, on peut recourir à la technique suivante :
-7 + (-2) = -9 + 2 + (-2), car on sait que –9 + 2 = -7.

INTERET ET LIMITE DE CETTE MANIÈRE DE FAIRE :

- Les avantages tiennent au fait qu'on laisse aux élèves une plus grande place dans le travail, et que la nécessité de travailler sur la somme 2 + (-2) apparaît de façon plus « naturelle ». Le travail se déroule plus rapidement car il permet de ne pas concentrer toutes les difficultés sur un même calcul, comme c'était le cas en introduisant 0 et en travaillant ensuite sur les opposés.

- Un inconvénient tient au fait que cette technique est plus difficile à utiliser pour des calculs dans lesquels la valeur absolue du premier nombre est inférieure à celle du second, comme dans +3 + (-5) par exemple. Dans un tel cas, si les élèves conjecturent que le résultat est -2, on peut les amener à écrire : +3 + (-5) = -2 + 5 + (-5), car on sait que –2 + 5 = +3. On obtient alors la justification du calcul : +3 + (-5) = -2. Si la conjecture n'apparaît pas, on peut laisser le calcul en suspens pour le traiter plus tard, en proposant l'introduction de 0.

Etape 7 : quelle que soit la voie précédemment choisie, travail de la technique

On s'exerce avec d'autres calculs dans lesquels on ***recourt aux deux techniques précédemment utilisées faisant intervenir 0*** :

10 + (-15) =	-3 + (-9) =	-4 + (+9) =
-9 + (-3) =	8 + (-5) =	5,3 + (-5,12) =
-5 + (+ 8) =	-15 + (+ 10) =	9 + (-4) =

Cet exercice a pour but, outre le fait de s'entraîner à la maîtrise de la technique que l'on vient de construire et de justifier, de montrer que le recours systématique aux techniques s'appuyant sur « le passage par 0 » ou sur la décomposition, est ***coûteux***. On a donc intérêt à observer des régularités qui permettent de dégager la règle de calcul qui sera beaucoup plus économique. La commutativité, que l'on soupçonne en remarquant l'égalité des résultats obtenus en commutant les termes, est admise. Mais il est possible d'en faire une démonstration orale puisque l'écriture de la technique de calcul de la somme, consignée dans le cahier de cours, la contient.

Il est temps de consigner ce que l'on vient de trouver dans le cahier de cours, après que l'on a observé les régularités permettant de dégager une règle de calcul.

Etape 8 : institutionnalisation

2. L'addition des nombres relatifs

a. Définition : Etant donnés deux nombres relatifs, on peut calculer leur ***somme*** qui est un nombre relatif. L'opération qui, à deux relatifs, associe leur somme s'appelle ***l'addition des relatifs.***

Différents cas sont possibles :
- On ajoute ***deux nombres positifs***
+7 + (+4) = 7 + 4 = 11 = +11 on obtient un nombre positif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues
- On ajoute ***deux nombres négatifs***
-7 + (-4) = -7 – 4 = -11 on obtient un nombre négatif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues
- On ajoute ***un négatif et un positif***
-7 + (+2) = -7 + 2 = -5

-7 + (+10) = -7 +10 = +3 = 3
- On ajoute ***un positif et un négatif***
+7 + (-2) = 7 – 2 = 5
+7 + (-10) = 7–10 = -3

Règle de calcul de la somme de deux relatifs
Si on ajoute deux relatifs de ***même signe***, leur somme est le relatif de même signe qui a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues
Si on ajoute deux relatifs de ***signes différents***, leur somme est le relatif de signe le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue et de valeur absolue la différence des valeurs absolues

b. Deux remarques importantes
- l'addition des relatifs est ***commutative*** : on ne change pas la valeur de la somme lorsqu'on change l'ordre des termes d'une addition
- on s'aperçoit que 10 + (-15) = 10 – 15 ; -15 + (+ 10) = -15 + 10 ; -9 + (-3) =–9 – 3 ;
-3 + (-9) =–3 – 9 ; -5 + (+ 8) =–5 + 8 ; 8 + (-5) = 8 – 5.
Dans une somme de relatifs, il est plus simple de supprimer les parenthèses et les signes + d'addition afin de pouvoir calculer comme dans les programmes de calcul

c. Définition : On sait que – 8 + (+ 8) = 0, que – 5 + (+ 5) = 0, que + 4 + (– 4) = 0. On dit que–8 **est l'opposé de** + 8 et que + 8 est l'opposé de–8, ou encore que + 8 et – 8 sont ***opposés.***
Il en est de même pour -5 et + 5 qui sont deux nombres opposés, pour + 4 et – 4 qui sont deux nombres opposés.

Etape 9 : travail de la technique

Exercices
Calculer les sommes suivantes :
-5 + (+9) ; -10,5 + (-4,9) ; 9,8 + (-9,75) ; +9,3 + (+7,7) ; -4,5 + (+4,25) ; (+4,2) + (-7) ; (-7) + (+4,2) ; (-10,3) + (+10,3) ; (+10,3) + (-10,3) ; -10,3 + (+4,2) ; -10,3 + (-4,2) ; (-7) + (-10) + (+4,2) + (+7) ; 4,9 + (-2,6) ; (-7,65) + (+7,7) ; etc.
Calculer :
-7,25 + 4,39 + (-5,75) + 2,31 ; 8,63 + (-9,23) + (-10,5) + (+10,1) ; -3 + 7 +10,2 – 5 ; +8 + 3 - 11 ; -15 -3,6 ; -2 + 3 – 5 ; -6 +4,2 + 0,8 ; etc.

On peut désormais donner aux élèves les exercices classiques d'entraînement au calcul de la somme de deux relatifs.

Quatrième séquence
Etablir les règles de comparaison et de calcul de la différence de deux relatifs
Durée : entre 6 et 7 séances de 55 min

Le professeur indique qu'après être parvenus à additionner des relatifs, on va maintenant chercher à les comparer.

Etape 1 : S'accorder sur ce qu'on entend par « comparer, comparaison »

Question : Que signifie comparer deux nombres ?
Les élèves ayant donné diverses réponses (qu'il y en a un plus grand ou plus petit que l'autre) ou des résultats qui ne correspondent pas à la question (qu'il y a des entiers, des décimaux, des relatifs, des fractions, etc.), on s'accorde sur le fait que cela consiste à déterminer le plus grand ou le plus petit de deux nombres donnés, ou encore de ranger par ordre croissant ou décroissant plusieurs nombres.

Etape 2 : rencontre avec le type de tâches dans un cas simple

Le professeur demande alors : ***Parmi les relatifs, sait-on déjà comparer entre eux des nombres d'un certain type : lesquels ?***

Les élèves se souviennent de l'identification des positifs aux nombres arithmétiques, ce qui permet d'ordonner les positifs. On demande que les élèves donnent des exemples à l'issue desquels on peut faire noter :
On range les positifs de la même manière que précédemment :
Exemple : +6,5 > +6,35 car 6,5 > 6,35.

Etape 3 : construction de la technique et de la technologie pour le cas de deux négatifs

Question cruciale : Quels sont les autres types de nombres qui restent à comparer ?

Les élèves donnent des exemples de couples de négatifs ou de couples constitués d'un positif et d'un négatif. Le professeur décide qu'on va étudier tout d'abord le cas de deux négatifs, par exemple –9 et –7. ***La question devient : quel est le plus petit (ou le plus grand) de ces deux nombres ?***

Il y a des chances qu'après quelques temps de réflexion, les élèves recourent à l'analogie à partir leurs éventuelles connaissances anciennes qu'ils transposeront : températures, dates avant J-C, ascenseurs, niveaux sous la mer, pertes… Mais certains disent que -9 est le plus grand. Il y a alors un débat vite réglé, par exemple par le recours aux températures.

La question qui arrive, et qui est portée par le professeur, est alors la suivante : Comment peut-on être mathématiquement certain de la validité de la réponse que l'on donne ? Comment prouver, avec des mathématiques, la validité de ce que l'on avance ?

Les élèves cherchent, et une grande partie ne trouvent pas. Néanmoins, très souvent, un élève propose d'ajouter le même nombre aux deux nombres à comparer afin de comparer des positifs : par exemple -9 < -7 car -9 + 10 = 1 < -7 + 10 = 3.
Il est difficile de savoir d'où vient cette connaissance en acte (l'écart ne change pas quand on ajoute le même nombre aux deux autres) de la compatibilité de la relation d'ordre avec

l'addition. On peut formuler deux hypothèses. La première est le recours à des techniques numériques que les élèves ont travaillées en primaire, et qui relèvent de la décomposition additive des nombres. Ces savoir-faire sont enseignés et appris dès le CP. Par exemple : « 19 < 22 car d'une part 19 = 7 + 10 + 2, d'autre part 22 = 7 + 10 + 5 et 2 < 5 ». La seconde est la conversion possible, vers les mathématiques, d'une réalité sociale expérimentée ou évoquée. Si un enfant A est plus petit qu'un enfant B, lorsque les deux montent sur une chaise de même hauteur, l'ordre ne change pas : l'enfant A reste plus bas que l'enfant B.

Si un élève indique l'une de ces techniques, alors évidemment, le professeur s'appuie sur cette proposition. Il s'en sert afin que cet élève l'enseigne à la classe. Ceci se produit parfois, comme on a pu l'observer. Dans le contraire, le professeur indique alors qu'une technique consiste à se ramener à quelque chose de connu sur la comparaison.

Questions : que connaît-on déjà sur la comparaison des nombres relatifs et qui pourrait nous aider ? On attend évidemment que les élèves répondent que l'on sait comparer des positifs. Ce qui induit la question : ***Comment pourrait-on se ramener à des nombres positifs à partir de –9 et –7 ?***

Les élèves recherchent, tâtonnent et peut-être essaient d'ajouter. Le professeur rassemble les propositions émises par les uns et les autres et, si cela n'est pas apparu dans les propositions des élèves, propose de trouver un nombre qui, ajouté à -7 et à -9, donne deux sommes positives afin de pouvoir les comparer. ***Lequel choisir ?***

Les élèves décident sans trop de difficultés que ce nombre doit être supérieur ou égal à 9 ; par exemple 10.
On a ainsi : -7 + 10 = 3 et -9 + 10 = 1. Comme 3 > 1, alors c'est que -7 > -9. Ce qui confirme le résultat conjecturé par certains dans la classe.

Etape 4 : maîtrise de la technique qui vient d'émerger et travail de la technique d'addition

On peut alors utiliser cette technique pour comparer -1,5 et –1,35, etc., -0,43 et -0,58.

On obtient ainsi la validation des résultats tout en faisant travailler d'une autre manière la somme des relatifs et la notion d'opposé (puisqu'il faut que le nombre ajouté soit supérieur à la valeur absolue du plus petit des négatifs).

Etape 5 : extension de la technique pour « tous » les entiers négatifs

Nouvelle question : ***Qu'en est-il pour les autres entiers négatifs : par exemple pour les entiers négatifs fabriqués avec 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ? Peut-on les ordonner, c'est-à-dire les ranger dans l'ordre croissant ?***

On applique de nouveau la technique par addition qui permet la vérification d'un ordre déjà conjecturé, et qui peut s'écrire : -10 < -9 < -8 < -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1.

Etape 6 : institutionnalisation

Etant convaincus que le plus petit de deux négatifs est celui de plus grande valeur absolue, on en conclut que l'on sait désormais comparer deux négatifs, quels qu'ils soient. Ce que le professeur peut institutionnaliser de la manière qu'il décidera de choisir, par exemple en écrivant que :

Le plus petit (respectivement le plus grand) de deux nombres négatifs est celui qui a la plus grande (respectivement la plus petite) valeur absolue ***(ou la plus grande « distance à 0 », si l'on décide d'utiliser le vocabulaire du programme, bien que ce terme renvoie à la droite graduée que l'on n'a pas encore étudiée et qui, à cet instant, n'apporte aucun sens supplémentaire, tout au contraire).***

Exemples :
-9,4 < -9,1 car 9,4 > 9,1
-8,02 > -8,2 car 8,02 < 8,2

Etape 7 : construction de la technique pour un négatif et un positif

La question qui demeure et qui vient naturellement des élèves est désormais : ***Comment faire pour comparer un positif et un négatif ?***

Des élèves peuvent vouloir mettre en œuvre la technique « d'addition du nombre adéquat » pour –9,5 et +3,01, puis –4,9 et +6,2 ; etc. D'autres peuvent émettre l'idée qu'un négatif est toujours inférieur à 0 (exemple des températures) et donc toujours inférieur à un positif, car les positifs sont tous supérieurs à 0. Deux voies s'ouvrent ainsi selon ce que propose la classe :

Voie 1 : Est de fait institutionnalisée la technique qui consiste à ajouter le même nombre, de façon à comparer deux nombres positifs. Après que les élèves ont obtenu un résultat pour –9,5 et +3,01 ; –4,9 et +6,2 par exemple, le professeur suggère : ***En se servant de cette technique, peut-on comparer tous les relatifs entre eux, c'est-à-dire les ordonner, par exemple dans l'ordre croissant ? Commençons par les entiers relatifs tels que : 0 ; +1 ; -1 ; +2 ; -2 ;… ; +10 ; -10.***
Les élèves se servent des connaissances acquises lors de la comparaison sur les exemples précédents. Il est possible qu'ils organisent leur travail en distinguant entre les positifs d'une part et les négatifs d'autre part ou qu'ils comparent les nombres deux à deux sans rangement particulier. Mais il est possible qu'ils s'aperçoivent alors qu'un négatif est toujours inférieur à un positif.

On savait déjà que 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5… La question qui se pose maintenant est donc celle du lien entre ces deux suites ordonnées de relatifs. Une fois encore, il y a des chances que les élèves sachent ou conjecturent que -1 < 0. Cette connaissance reste à démontrer d'un point de vue mathématique. On utilise de nouveau la technique, par exemple en ajoutant à -1 et 0 le nombre 2. Ceci donne : -1 + 2 = 1 et 0 + 2 = 2. Or 1 < 2, donc -1 < 0.

Voie 2 : Partant de la conjecture émise par les élèves qu'un négatif est inférieur à un positif, la question demeure celle de sa preuve. Les élèves ayant déjà ordonné les entiers négatifs compris entre -10 et -1, connaissant l'ordre sur les positifs de 1 à 10, la question devient : ***Que suffirait-il de prouver pour être certain que les négatifs sont tous inférieurs aux positifs ?***

Il y alors des chances que l'idée vienne de comparer -1 à 0. On revient alors à la technique par addition, par exemple de 2, utilisée à la fin de la voie 1 : -1 + 2 = 1 et 0 + 2 = 2. Or 1 < 2, donc -1 < 0.

Etape 8 : Institutionnalisation : « un négatif est toujours inférieur à un positif » et conséquence sur l'ordre

Remarques :

- *Tout ce qui précède repose sur l'extension postulée à* **Z** *de la compatibilité de l'ordre avec l'addition dans* **N.** *On étend ensuite à* **D.**
- *Le professeur peut ou non faire écrire, selon son gré, des règles de comparaison des relatifs*

Un nombre négatif est toujours inférieur à un nombre positif.
Exemples : -3 < 1 ; 7 > -10 ; -0,0001 < 0

Conséquence : dès lors, on peut écrire :
… < -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < …
ou encore :
… < -10 < -9 < -8 < -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < …

Etape 9 : travail de la technique et de l'organisation mathématique

À ce moment du parcours, on peut commencer à faire travailler l'organisation mathématique et notamment, la technique de comparaison que l'on vient d'établir.
On donne donc des exercices de comparaison et de rangement par ordre croissant et décroissant. Par exemple des types suivants :

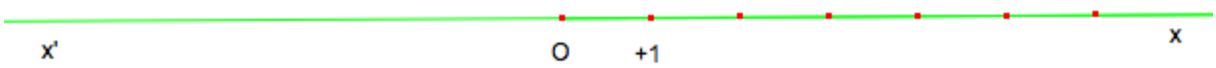
Comparer : -4,3 et -5,1 ; +6,40 et +6,5 ; -0,00007 et -0,0008 ; -4,8 et +4,08 ; etc.
Ranger dans l'ordre croissant : -6,2 ; -41 ; 6 ; +2,1 ; -5 ; +0,1.
Ranger dans l'ordre décroissant : -2,1 ; -2,11 ; 2,001 ; -2,01 ; +2,02 ; -2.

Après que les élèves sont parvenus à une certaine maîtrise des techniques de comparaison, devrait advenir une question dans la classe, en filigrane ou de manière explicite. Si ce n'est pas le cas, ou afin de la formaliser pour être comprise de tous si elle a été évoquée par un ou des élèves, le professeur pose la question :

Question cruciale : on a vu en 6e, comment repérer un point sur une demi-droite. Est-il possible de repérer un point sur une droite ?

On revient d'abord au tracé d'une demi-droite graduée sur laquelle on fait placer des points et déterminer leur abscisse et où, à partir d'une abscisse donnée, on place le point. C'est en principe une connaissance disponible :

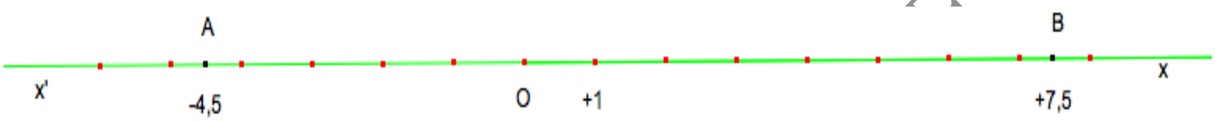
Question : comment faire pour graduer la demi-droite opposée ?



Ainsi arrive la droite graduée… que les élèves tracent de -10 à +10, par exemple, en utilisant les entiers.
Le professeur demande alors de placer des points dont l'abscisse est décimale non entière sur cette droite graduée, par exemple : 4,5 ; -3,4 ; -3,6 ; -4,5 ; +7,1 ; +7,5 ;…

Question cruciale : pourrait-on calculer la distance entre deux points sur une droite graduée connaissant leurs abscisses, par exemple entre -4,5 et +7,5 quand on n'a pas la représentation des points sur la droite graduée ?

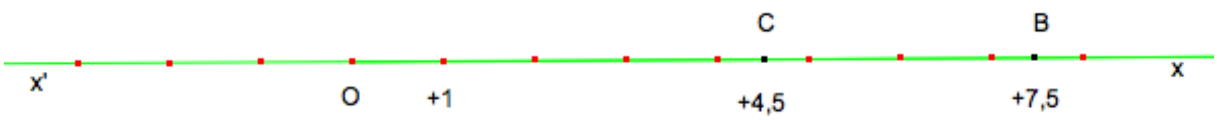
On simplifie la question en commençant à travailler sur les points d'abscisses -4,5 et +7,5 qui viennent d'être placés sur une droite graduée :



Les élèves mesurent ou calculent et trouvent 12. Ils doivent justifier leur résultat par le calcul. Ils disent que l'on a ajouté 4,5 à 7,5, c'est-à-dire les valeurs absolues des abscisses.
C'est l'occasion d'identifier la valeur absolue à la ***distance d'un point d'abscisse donnée d'une droite graduée à son origine,*** soit ce que le programme désigne sous l'appellation… « distance à zéro ».

On en déduit, à partir d'autres exemples, que dans le cas où les abscisses des points sont de signes contraires, alors on ajoute leurs valeurs absolues

Question : Peut-on faire de même pour des points ayant d'autres abscisses, par exemple d'abscisses 4,5 et 7,5 ?



Les élèves font de même : mesure ou calcul. On demande de nouveau une justification par le calcul et les élèves répondent 7,5 – 4,5 ou 7,5 – (+4,5).

On en déduit, à partir d'autres exemples, que dans le cas où les abscisses des points sont positives, alors on soustrait leurs valeurs absolues.

Question : quel est le cas qui reste à examiner ?

Les élèves proposent le cas où les deux abscisses sont négatives, par exemple, -4,5 et -3,4

Les élèves font de même : mesure ou calcul. On demande de nouveau une justification par le calcul et les élèves répondent 4,5 – 3,4.

On en reste en ce point tout en regrettant que n'existe pas une relation unique pour tous les cas, mais qu'il faille distinguer entre l'addition et la soustraction selon que les abscisses sont de signes contraires ou de mêmes signes.

Etape 10 : travail des techniques de calcul de la distance de deux points sur une droite graduée

Remarque : une fois connue la technique de soustraction, il est possible de revenir sur la question d'une technique plus générale de calcul, en enseignant par ostension que le calcul de la distance de deux points revient à calculer la différence de leurs abscisses. Soit, comme l'écrivent les manuels, « la plus grande moins la plus petite » ou soit, plus simplement, la valeur absolue de la différence des abscisses, ce qui évite d'avoir au préalable à déterminer la plus grande des deux.

Reprise de la recherche de possibilité d'opérations sur les relatifs : cas de la soustraction

Une nouvelle question est amenée par le professeur : ***Après l'addition et l'ordre, la soustraction est-elle une autre opération possible avec les relatifs ?*** Par exemple peut-on calculer la différence de +7 et +2, de +7 et -2, de -7 et -2 ? On se souvient que l'on avait buté sur les calculs +7 – (-2) et -7 – (-2).

Les élèves ont à écrire chaque différence avec le signe – de soustraction et à calculer le résultat. Le recours aux parenthèses ne doit plus poser de problèmes. On se relance dans des tentatives de calcul : +7 – (+2) ; +7 – (-2) ; -7 – (-2) ; -7 – (+ 2).

Etape 1 : technique, son explicitation et sa justification dans le cas de deux positifs et dans celui d'un positif soustrait à un négatif

Certains de ces calculs, comme les suivants, ne posent pas problème aux élèves qui s'y engagent :
+7 – (+2) = 7 – 2 = 5.
On s'appuie pour cela sur l'identification de la soustraction des positifs à la soustraction dans **N** *quand celle-ci est possible.*
Dans le cas où la valeur absolue du premier nombre est inférieure à celle du second, on recourt aux opérateurs : +2 – (+7) = +2 – 7 : à un nombre on ajoute 2 puis retranche 7, ce qui revient à lui soustraire 5, noté -5.
De même, une justification du même type permet d'écrire : -7 – (+2) = -7 – 2 = -9.

Etape 2 : recherche d'une technique et de sa justification dans le cas de deux négatifs et dans celui d'un négatif soustrait à un positif

Le problème est plus délicat pour les calculs de +7 – (-2) et -7 – (-2). On peut attendre les propositions des élèves, mais à ce stade, il paraît difficile qu'ils puissent les justifier à partir des connaissances dont ils disposent.

1re voie :
Néanmoins, nous avons pu observer un élève qui a raisonné ainsi :

« +7 – (+2) = 7 – 2 = 5, donc -7 – (-2), qui est son opposé (car il suffit de calculer la somme des deux nombres +7 – (+2) et -7 – (-2) pour s'apercevoir qu'elle est nulle), est égal à -5.
Il en est de même pour -7 – (+2) et 7–(-2) qui sont opposés. Comme on sait que -7 – (+2) = -7 – 2 = -9, il en résulte que 7 – (-2) = 9 »

2^{e} voie :
Apparaît, dans certaines classes, l'idée de revenir à des soustractions que l'on sait faire en ajoutant le même nombre aux deux termes de la différence. Cette idée émerge évidemment de la technique élaborée pour parvenir à comparer deux négatifs. C'est aussi une justification didactique de la proximité que nous avons choisie de faire entre ordre et soustraction dans ce PER[7].
Ainsi, des élèves proposent-ils, en acte, de s'appuyer sur la régularité de tout élément pour l'addition dans **Z**, en évoquant le fait que l'écart ne change pas si l'on ajoute le même nombre aux deux termes de la différence.

Par exemple : +7 – (-2) = [+7 **+5**] – [(-2) **+ 5**] = 12 – (+3) = 12 – 3 = 9
et -7 – (-2) = [-7 **+ 10**] – [(-2) **+ 10**] = 3 – (+8) = 3 – 8 = -5

Cette technique, judicieuse, est ensuite travaillée pour d'autres valeurs des nombres. On peut vérifier sa validité dans les cas où l'on savait calculer la différence : deux positifs, et un positif soustrait à un négatif.

La difficulté apparaît lorsqu'on souhaite la transformer en une technique plus simple : l'addition au premier nombre de l'opposé du second.

3^{e} voie :
Des élèves, souvent, tentent de décomposer additivement le premier nombre, comme cela avait été fait lorsqu'on cherchait des techniques de calcul des sommes. Le problème qui surgit et que l'on va retrouver dans la 4^{e} voie, tient, sur les calculs 7 – (-2) et -7 – (-2) par exemple, à ce qu'il faut apparaître le nombre -2 à partir de 7 et de -7.
Donc décomposer :
7 = 9 – 2 = 9 + (-2) et -7 = -5– 2 = -5 + (-2). La décomposition est donc effectivement « additive », mais en utilisant l'addition, non plus dans **N**, mais dans **Z**.

Il est donc nécessaire de laisser les élèves chercher pour faire diverses tentatives, puis proposer des réponses.
Une solution consiste à laisser vivre la 2^{e} voie qui permet d'obtenir le calcul de la différence, et s'appuyer sur les résultats obtenus qui donnent le nombre, 9 et -5 dans ces exemples, à utiliser pour obtenir les décompositions additives recherchées.

On a ainsi : +7 – (-2) = 9 + (-2) – (-2) = 9 + 0 = 9 et -7 – (-2) = -5 + (-2) – (-2) = -5 + 0 = -5

[7] Cette proximité n'est pas fortuite si l'on se réfère à l'organisation mathématique. En effet, on peut définir la relation d'ordre ≤ dans **Z** de la manière suivante : $n \leq m \Leftrightarrow n + \text{opp.}(m) \in \mathbf{Z}_{-}$

4^e voie :
Si on a choisi de faire intervenir 0 pour l'établissement du calcul des sommes, les élèves essaient de faire intervenir 0, comme cela a été fait avec l'addition, en introduisant des sommes du type 2 – 2 dans le calcul, mais cela n'aboutit pas.

En examinant ces deux calculs qui posent problème, le professeur peut faire mettre en évidence leur différence de nature par rapport à ceux qui précèdent ; ce qui amène à la question suivante : ***Comment faire pour calculer la différence d'un nombre relatif, qu'il soit positif ou négatif, avec un autre qui est négatif ?***

Deux possibilités peuvent advenir à partir du moment où les élèves sont conscients du problème. Soit ils se souviennent que face à une difficulté comme celle-ci, rencontrées deux fois pour l'addition, on a introduit le nombre 0 dans le calcul, mais ne parviennent pas à le mener à bien, soit ils ne l'évoquent pas et c'est le professeur qui les guide vers la technique déjà utilisée pour résoudre le problème de l'addition en la leur rappelant.

Quelle que soit l'éventualité, la question qui vient ensuite est celle de la fonctionnalité du 0 : ***à quoi cela sert-il d'introduire 0 dans le calcul, par exemple dans le calcul de 7 – (-2) ? Ou encore 0 va être sans doute remplacé par une somme, laquelle et pourquoi celle-là ?*** C'est donc vers un élargissement de la place des élèves dans la construction de la réponse que l'on se dirige désormais.

La réponse attendue des élèves est que l'on se serve de l'opposé de -2 ; par exemple, que l'on écrive 0 = -2 + (+2). Il s'agit de faire discuter les élèves sur le choix le plus judicieux pour arriver à mener à bien le calcul de +7 – (-2) par exemple. La réponse consiste à dire qu'insérer 0 va servir à calculer avec -2, donc qu'il va falloir utiliser la somme de -2 et de son opposé ; il va donc falloir discuter pour choisir entre l'écriture -2 + (+2) ou bien l'écriture 2 + (-2). Une question surgit encore. Si on écrit par exemple, +7 – (-2) = +7 – 0–(-2), écriture la plus probable en tenant compte des écritures utilisées avec les additions, ***comment faire pour remplacer 0 par la somme adéquate, sachant qu'il y a un signe «–» devant 0 et comment calculer ensuite ?*** La réponse consiste à dire que l'on n'est pas obligé de soustraire 0, puisque l'ajouter ne change rien. On préfèrera donc l'ajouter. C'est soit une réponse qui apparaît dans la classe, soit que le professeur donne. Il reste donc la question de savoir si on ajoute -2 + (+2) ou bien 2 + (-2).

Si on choisit d'écrire : +7 – (-2) = +7 -2 + (+2) – (-2), la seule possibilité de continuer la simplification est d'écrire +7 -2 + (+2) – (-2) = +7 + (+2) -2 – (-2) en commutant -2 et +2. Le professeur doit accompagner ce passage, non trivial, puis accompagner peut-être celui qui consiste à dire que, si à -2 on soustrait -2, on obtient 0.

Si on choisit d'écrire : +7 – (-2) = 7 +2 + (-2) – (-2), le seul point délicat, méritant peut-être un accompagnement par le professeur, est celui qui consiste à dire que, ***si à -2 on soustrait -2, on obtient 0***.

Une autre technique consiste à ajouter 0 en tant que dernier terme de la somme :
+7 – (-2)
= 7 – (-2) + 0
= 7 – (-2) + (-2) + (+2)
= 7 + 0 + 2 (car on soustrait -2 puis on ajoute -2)

$= 9$

C'est, ici encore, un passage délicat et il y a de fortes chances que ce soit le professeur qui l'indique : car il faut à la fois que le regard se déplace du bloc des deux derniers termes vers celui constitué du second et du troisième, et que l'on accepte que ***soustraire d'abord puis ajouter ensuite le même nombre donne 0*** (alors que traditionnellement, on ajoute d'abord, puis on soustrait). Lors de cette phase, la place des élèves risque d'être de nouveau réduite, le professeur reprenant la main. Néanmoins la place des élèves s'est élargie par rapport à ce qu'elle était au moment de l'addition. elle s'élargira encore lors du calcul suivant de $-7 – (-2)$, puisque les élèves pourront s'appuyer sur la technique d'introduction de 0 qui a été rencontrée trois fois déjà.

On a donc résolu le problème que l'on se posait dans un cas : celui du calcul de $+7 – (-2)$. C'est maintenant ***aux élèves de le résoudre par eux-mêmes***, sans l'aide du professeur, dans le deuxième cas, celui du calcul de $-7 – (-2)$; le professeur pouvant seulement indiquer que l'on utilisera la même technique.
De même :
$-7 – (-2)$
$= -7 – (-2) + 0$
$= -7 – (-2) + (-2) + (+2)$
$= -7 + 0 + 2$ (car on soustrait -2 puis on ajoute -2)
Donc :
$-7 – (-2)$
$= -7 + 2$
$= -5$

Quelle que soit la voie choisie, il est nécessaire de faire éprouver par les élèves la technique qui a été trouvée. Aussi, les élèves continuent-ils seuls à utiliser cette technique dans d'autres calculs qu'on leur demande de trouver :

$10 – (-15) =$	$-3 – (-9) =$	$-4 – (+9) =$
$-9 – (-3) =$	$8 – (-5) =$	$5,3 – (-5,12) =$
$-5 – (+ 8) =$	$-15 – (+ 10) =$	$9 – (-4) =$

La fonction de cet exercice est encore, parmi celle d'entraînement, de montrer que l'on a intérêt à trouver une technique plus économique que celle du passage par 0, de montrer aussi la non commutativité de la soustraction. C'est alors au ***professeur d'énoncer la règle qui apparaît et qui consiste à ajouter au premier nombre l'opposé de second***.

On peut évidemment la justifier en utilisant le fait que tout élément est régulier pour l'addition dans **Z** ; *encore faut-il le savoir !*
On développera ce point dans le PER sur les équations en 4^e *à partir de la définition de l'égalité :* $a = b \Leftrightarrow a – b = 0 \Leftrightarrow a + c – b – c = 0 \Leftrightarrow a + c – (b + c) = 0 \Leftrightarrow a + c = b + c$

On peut être tenté de se servir de cela en pariant sur une connaissance en acte disponible chez les élèves. Cela suppose de revenir à la définition de la différence de deux nombres, et aussi, comme la soustraction n'est pas commutative, de ne pas se tromper dans l'ordre d'écrire :$a + d = b$ *signifie que* d *est la différence* $b – a$.
Or, pour les élèves, transformer $7 – (-2)$ *en faisant apparaître une somme, risque d'être écrit, en suivant le sens de la lecture de gauche à droite :* $7 + d = -2$ *au lieu de* $-2 + d = 7$ *!*

Nous n'avons donc pas fait le choix de suivre cette voie pourtant mathématiquement correcte.

On consigne dans le cahier de cours :

3. La soustraction des nombres relatifs

Définition : Etant donnés deux nombres relatifs, on peut calculer leur ***différence*** qui est un nombre relatif. L'opération qui, à deux relatifs, associe leur différence s'appelle ***la soustraction des relatifs.***

Règle de calcul de la différence de deux relatifs
Pour calculer la différence de deux relatifs, on ajoute au premier l'opposé du second.
Ou encore, selon la formulation du programme actuel : pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.
Exemples :
10 – (-15) = 10 + 15 ; -9 – (-3) = -9 + 3 ; -3 – (-9) = -3 + 9 ; 8 – (-5) = 8 + 5.
+7 – (+2) = 7 – 2 = 7 + (-2) ; -5 – (+3) = -5 – 3 = -5 + (-3)
Deux remarques importantes
10 – (-15) = 25 et -15 – 10 = –25 ; ***la soustraction n'est pas commutative***
9 – 11 = -2 ; la soustraction est toujours possible

De la dernière des remarques naît une question : ***Pourquoi la soustraction n'était-elle pas toujours possible lorsqu'on ne connaissait pas les relatifs ? Dans quels cas cela se produisait-il ?***

La réponse attendue des élèves est que si le nombre à soustraire était plus grand que le premier nombre, la soustraction était impossible. Ce qu'on note : « Si a>b alors on ne pouvait pas calculer b – a », par exemple en l'exemplifiant dans de nombreux cas que l'on peut demander aux élèves de proposer : 9 – 11 ; 5–8 ; etc.

Question cruciale : Et maintenant, pourquoi la soustraction est-elle possible dans ces cas ?
Le test sur les exemples précédents aboutit à écrire des résultats du type :

3 < 5 alors 5 – 3 = 2 positif
4 > 2 alors 2 – 4 = -2 négatif

Les élèves peuvent se convaincre de ces résultats en complétant le tableau suivant, ce qui leur fait aussi travailler le calcul de différences :

a	***b***	***b–a***	***a* < *b* ou *a* > *b***
+0,1	**+0,15**		
+7	**+6,3**		
-5	**+3,2**		
-3	**-5,8**		
+11,45	**-10**		
-0,75	**-0,5**		

On conclut alors que :

Etant donnés deux nombres relatifs *a* et *b* :

- **Si $a < b$ alors $a - b$ est négatif**
- **Si $a > b$ alors $a - b$ est positif**

Exercices A PROPOSER

Parmi les exercices d'entraînement sur la différence, un type d'exercices est intéressant afin d'aller vers la résolution des équations qui n'est plus au programme de 5^e en tant que telle, mais que l'on rencontre néanmoins à travers la recherche de la différence de deux nombres. Ce type d'exercices facilite ensuite la mise en place de techniques permettant la résolution d'équations (la transposition).

Exercice : Par définition, la différence d de deux nombres est le nombre qu'il faut ajouter au premier pour obtenir le second. Cette définition, rencontrée pour les entiers et les décimaux positifs, reste vraie pour les relatifs.
Ainsi, la différence d de -5,4 et +2,1 est telle que : $-5{,}4 + d = +2{,}1$, donc $d = +2{,}1 - (-5{,}4)$.
Dans l'écriture $d + (-4{,}8) = -0{,}4$, d est la différence de -4,8 et -0,4, donc $d = -0{,}4 - (+4{,}8)$.

Déterminer les valeurs de d dans les différents cas suivants :
$6{,}3 + d = 2{,}9$; $d + (-1{,}7) = -2{,}4$; $-5{,}3 = d + (-2{,}8)$; $d + 3{,}26 = 2{,}14$; $0{,}0101 + d = 1{,}101$; etc.

ANNEXE 1

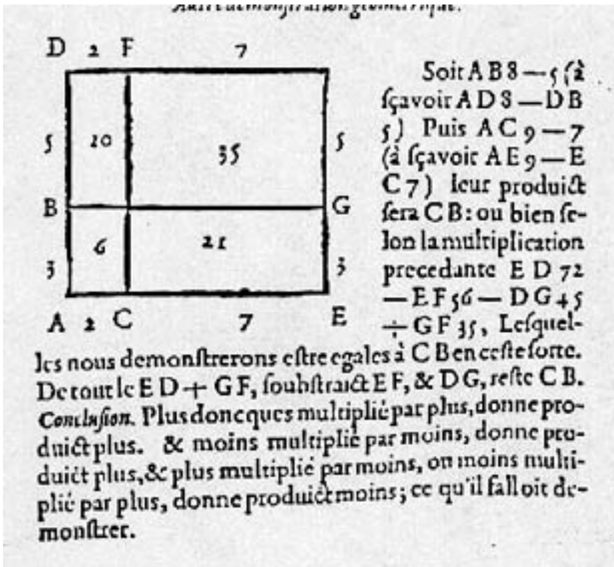
Les mathématiciens, parmi les plus grands, ont essayé de donner des justifications à la règle des signes du produit de deux nombres relatifs. Leurs explications sont variables, selon les auteurs et les publics auxquels ils s'adressent :

Celle de Stevin (1625) :

Il s'agit en fait de comparer les aires des rectangles en les prenant globalement, puis en ajoutant les différentes petites parties, et d'arriver, en développant

(a – b) (c – d) où a, b, c, d sont des réels positifs à la nécessité d'écrire que (- b) x (- d) = bd.

Le calcul sur des grandeurs quelconques se fait, à l'époque de Stevin et depuis Euclide, en les représentant par des longueurs. L'explication conduit Stevin à donner des valeurs numériques aux grandeurs, pour « faire exemple ».



Soit AB 8 — 5 (à sçavoir AD 8 — DB 5) Puis AC 9 — 7 (à sçavoir AE 9 — EC 7) leur produict sera CB : ou bien selon la multiplication precedante ED 72 — EF 56 — DG 45 + GF 35, Lesquelles nous demonstrerons estre egales à CB en ceste sorte. De tout le ED + GF, soubstraict EF, & DG, reste CB. *Conclusion.* Plus doncques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins ; ce qu'il falloit demonstrer.

Celles de Mac Laurin, (1748) :

On pourrait de là déduire la règle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que les signes semblables dans les termes du multiplicateur et du multiplicande donnent + au produit, et les signes différents donnent -. Nous avons évité cette manière de présenter la règle, pour épargner aux ***commençants l'expression révoltante – par – donne +****, qui est cependant une conséquence nécessaire de la règle. : on peut, comme nous avons fait, la déguiser , mais non la contredire ou l'anéantir ; le lecteur, sans s'en apercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédents ; familiarisé avec la chose, pourrait-il encore s'effaroucher des mots ? S'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté. + a – a = 0, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie + a – a, le produit doit être 0 : si je le multiplie par n, j'aurai pour le premier terme + na, donc j'aurai pour le second – na, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différents donnent – au produit ? Si je multiplie + a – a par – n, par le cas précédent, j'aurai – na pour le premier terme ; donc j'aurai + na pour le second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent :* ***donc – multiplié par – donne + au produit****.*

La « règle des signes » énoncée par Stevin : « moins multiplié par moins donne produit plus » est ici aussi énoncée. Elle semble être la forme mnémotechnique culturellement reconnue qui pourtant est dite « une expression révoltante » pour les commençants, parce qu'elle est « la règle des signes » venue d'une interprétation de l'écriture *–a* comme « *a* (naturellement positif) précédé d'un signe ». Mais elle n'est plus écrite en langue naturelle : elle est devenue composition des symboles.

Celle de Euler, (1770) :

Il nous reste à résoudre encore ***ce cas où – est multiplié par –*** *ou, par exemple – a par – b. Il est évident d'abord que quant aux lettres, le produit sera ab ; mais il est incertain encore si c'est le signe + ou bien le signe – qu'il faut mettre devant ce produit ; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe–; car – a par + b donne – ab et – a par – b ne peut produire le même résultat que – a par + b ; mais il doit en résulter* ***l'opposé****,* (du résultat *–ab*) *c'est à dire + ab ; par conséquent nous avons cette règle : + multiplié par + fait +, de même que – multiplié par -.*

Nous comprenons bien qu'il s'agit de la règle des signes, puisqu'il n'y a en fait que des quantités négatives, désignées par un nombre positif, et précédé du signe -. Mais si l'auteur ne nomme pas les « nombres négatifs », il nomme *l'opposé* d'un nombre et peut asseoir son raisonnement sur ce commencement de jeu de langage.

Celle de Cauchy (1821) :

D'après ces conventions, si l'on représente par A soit un nombre, soit une quantité quelconque, et que l'on fasse a = + A,   b =–A On aura : +a = + A , + b =–A, –a =–A ,–b = + A Si dans les quatre dernières équations l'on remet pour a et b leurs valeurs entre parenthèses, on obtiendra les formules : + (+ A) = + A ; + (- A) =–A ;–(+ A) =–A ;–(–A) = + A Dans chacune de ces formules le signe du second membre est ce qu'on appelle le produit des deux signes du premier. Multiplier deux signes l'un par l'autre c'est former leur produit. L'inspection seule des équations suffit pour établir la règle des signes.

Comme on le voit, l'auteur joue en algébriste sur les symboles, -*A* désignant l'opposé de *A* et étant lui même noté *a* (c'est nouveau : la lettre *a* dénote ici un opposé qui donc peut-être « un négatif » comme nous disons), alors *–a* = -(-*A*) = +*A* = *A*. Le jeu de langage se poursuit en jeu de notations, dans une dialectique connue.

Celle de Hankel (1867) :

Son explication peut se résumer par un calcul qui, fondé sur une axiomatique, démontre la propriété sans autre forme de discours : le jeu de langage est algébrisé, il obéit dorénavant à une logique calculable, mais… a disparu ce qui va poser problème au professeur !

$0 = a \times 0 = a \times (b + opp\ b) = ab + a \times (opp\ b)$

$0 = 0 \times (opp\ b) = (a + opp\ a) \times (opp\ b) = a \times (opp\ b) + (opp\ a \times opp\ b)$

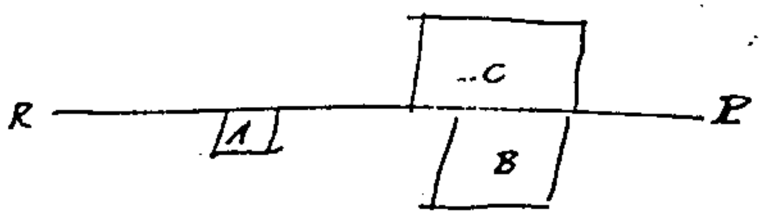
donc $(opp\ a) \times (opp\ b) = ab$.

Dans cette perspective, les négatifs ont le statut de nombre et Hankel distingue alors de façon nette le signe opératoire «–» du signe « opp » qui dénote l'opposé. La règle est devenue « règle de multiplication des opposés » et c'est dorénavant ce jeu de langage là qui, seul, rend compte du travail algébrique. La règle des signes n'a en principe plus droit de cité. En fait, le bouleversement apporté par Hankel s'inscrit dans la rupture de la pensée mathématique de la fin du XIX^{e} siècle à propos des relations entre les mathématiques et la réalité physique. Jusque là, si l'on inventait de nouveaux « nombres » qui choquaient les idées reçues, ils étaient automatiquement qualifiés de incompréhensibles, inconcevables, absurdes, sourds, irrationnels, faux, imaginaires, ou même, négatifs. Hankel accepte que $(-3)^2 > (2)^2$, car ce résultat est cohérent, et il écrit ainsi :

« *Le nombre n'est plus aujourd'hui une chose, une substance qui existerait en toute indépendance en dehors du sujet pensant ou des objets qui en sont l'occasion ; ce n'est plus un principe indépendant comme l'ont cru les pythagoriciens. La question de l'existence des nombres nous renvoie soit au sujet pensant, soit aux objets pensés dont les nombres présentent des relations. Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui implique une contradiction. Il n'est pas besoin de démontrer qu'on peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type ».* « Théorie du système des nombres complexes », H. Hankel, 1867.

Revenant à une problématique d'apprentissage, voici ce qu'écrivait par exemple l'écrivain français Stendhal, dans son roman autobiographique *La vie d'Henri Brulard*, en 1835, pour exprimer son désarroi face à une interprétation mal présentée de la règle des signes (d'après Anne Boyé, IREM, Nantes) :

Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ?

Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions de francs ?

Alain Mercier

ANNEXE 2

Un arrière-plan mathématique pour les relatifs vus comme programmes de calcul ; quelques éléments sur la transposition didactique

La construction « classique » de (Z ; +)

Sur **N**, on a défini une opération interne + qui est associative, commutative et pour laquelle tout entier naturel n est régulier, c'est-à-dire : $x + n = y + n \Leftrightarrow x = y$.

On définit ensuite une relation d'ordre sur **N** par : $\forall\, x$ et $y \in \mathbf{N} : x \leq y \Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbf{N} \,/\, y = x + d$
On démontre que cette relation est une relation d'ordre total sur **N** et qu'elle est compatible avec l'addition, c'est-à-dire que : $\forall\, x, y$ et $n \in \mathbf{N} : x + n \leq y + n \Leftrightarrow x \leq y$

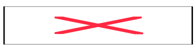
On définit la différence sur **N**, par $d = y - x \Leftrightarrow x + d = y$; d est alors défini de manière unique. En effet, si d et d' désignent la différence entre x et y avec $x \leq y$, alors on peut écrire que : $y = x + d = x + d'$. Or, tout entier x étant régulier pour l'addition, alors $d = d'$

Ce résultat nous servira dans la transposition didactique qui suit et qui est basée sur les programmes de calcul.

On considère sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ la relation $\mathscr{R}$ définie par $(x, y)\, \mathscr{R}\, (x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$. Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

- elle est réflexive puisque $x + y = x + y$ et donc, quel que soit (x, y) : on a $(x, y)\, \mathscr{R}\, (x, y)$
- elle est symétrique puisque si $x + y' = x' + y$, alors $x' + y = x + y'$, donc, quel que soit (x, y) et (x', y') : si $(x, y)\, \mathscr{R}\, (x', y')$ alors $(x', y')\, \mathscr{R}\, (x, y)$
- elle est transitive car si $x + y' = x' + y$ et si $x' + y'' = x'' + y'$ alors $(x + y') + (x' + y'') = (x' + y) + (x'' + y')$, donc d'après l'associativité et la commutativité de + dans **N** : $(x + y'') + (x' + y') = (x'' + y) + (x' + y')$, et comme tout élément de **N** est régulier pour l'addition alors, en simplifiant par $(x' + y')$, on obtient $x + y'' = x'' + y$; donc quel que soit (x, y), (x', y') et (x'', y'') : si $(x, y)\, \mathscr{R}\, (x', y')$ et si $(x', y')\, \mathscr{R}\, (x'', y'')$ alors $(x,y)\, \mathscr{R}\, (x'', y'')$.

Un nombre relatif est une classe d'équivalence de $\mathscr{R}$ dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Toute classe d'équivalence est indépendante du représentant (x, y) qui la définit.

Sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N} / \mathscr{R}$ on définit une opération interne + de la manière suivante :
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ autrement dit,  où $\overline{X}$ est la classe de (x, y) et $\overline{Y}$ celle de (x', y') ; et $\overline{X + Y}$ ne dépend pas des représentants choisis pour $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.
En effet, si on remplace (x, y) par (x_1, y_1), autre représentant de $\overline{X}$, alors la classe définie par $(x_1 + x', y_1 + y')$ est encore $\overline{X + Y}$ car comme $x_1 + y = x + y_1$, alors en ajoutant $x' + y'$ aux deux membres de cette égalité, on obtient $x_1 + x' + y + y' = x + x' + y_1 + y'$. Ce qui prouve que $(x_1 + x', y_1 + y')\, \mathscr{R}\, (x + x', y + y')$. La démonstration est analogue pour montrer que $\overline{X + Y}$ ne dépend pas du représentant (x', y') choisi pour $\overline{Y}$.

Les propriétés d'associativité et de commutativité de + dans **N** s'étendent facilement à + dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N} / \mathscr{R}$.

En effet $(\overline{X}+\overline{Y})+\overline{Z}$ est représenté par $((x + x') + x'', (y + y') + y'')$ qui est égal à $(x + (x' + x''), y + (y' + y''))$ puisque l'addition dans **N** est associative. Or ce dernier couple représente $\overline{X}+(\overline{Y}+\overline{Z})$.
De même, $\overline{X}+\overline{Y}$ est représenté par $(x + x', y + y')$, égal à $(x' + x, y' + y)$ car + est commutative dans **N**, et $(x' + x, y' + y)$ représente $\overline{Y}+\overline{X}$.

En désignant par $\overline{0}$ la classe de (a, a) on a $\overline{0}+\overline{X}$ représentée par $(a + x, a + y)$.
Or $a + x + y = x + a + y$. Donc $(a + x, a + y)\ \mathscr{R}\ (x, y)$ et $\overline{0}+\overline{X}=\overline{X}$. On a alors $\overline{X}+\overline{0}=\overline{X}$ d'après la commutativité de + dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\mathscr{R}$. $\overline{0}$ est donc élément neutre de + dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\mathscr{R}$.

Tout élément $\overline{X}$ de $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\mathscr{R}$ admet un symétrique noté $-\overline{X}$, dont un représentant est (y, x), puisque $\overline{X}+(-\overline{X})$ est alors représenté par $(x + y, y + x)$ représentant de $\overline{0}$.
Donc $\overline{X}+(-\overline{X})=\overline{0}=(-\overline{X})+\overline{X}$.

En notant $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\mathscr{R}=\mathbf{Z}$, on a donc démontré que (**Z** ; +) est un groupe commutatif.

Une construction possible de (Z ; +) par les programmes de calcul

Préalables :
Les préalables à propos de **N** sont ceux exposés dans la construction « classique » de **Z**, page précédente ; soit :

- Sur **N**, on a défini une opération interne + qui est associative, commutative et pour laquelle tout entier naturel n est régulier, c'est-à-dire : $x + n = y + n \Leftrightarrow x = y$.
- On a aussi défini la différence de deux nombres entiers naturels x et y lorsque $x \leq y$ par le nombre d entier naturel tel que $x + d = y$. Lorsque $x \leq y$, la différence de y et x se note $d = y - x$.

On a alors pour tout entier naturel x pour lequel $x + (b - a) \geq 0$:
$x + (b - a) = (x + b) - a = x + b - a$ quels que soient les entiers naturels a et b.

En effet :
- si $a \leq b$, $x + (b - a) = (x + b) - a$ puisque + est associative dans **N**et que $b - a \geq 0$
Si on note $d = b - a$ ($\Leftrightarrow d + a = b$) et $d' = (x + b) - a$ ($\Leftrightarrow d' + a = x + b$)
Comme $b = d + a$, alors $d' + a = x + d + a$.
Comme tout élément a est régulier pour l'addition dans **N**, alors :
$d' = x + d = \mathbf{x + (b - a) = (x + b) - a}$
- si $a > b$, $x + b - a = (x + b) - a$ puisque + est associative dans **N** et qu'on a (implicitement pour les élèves) choisi $x \geq |b - a|$; on reste donc dans **N**.
On a encore $d' + a = x + b$, mais cette fois :$d + b = a$.
D'où, en remplaçant a dans d' : $d' + d + b = x + b$. Comme tout élément b est régulier pour l'addition dans **N**, alors : $d' + d = x$. Soit $d' = x - d = x - (b - a)$. Ce qui prouve la possibilité du calcul dans **N** si $x \geq |b - a|$
Conséquence : dans le cas où $a > b$, le calcul de $d = b - a$ n'est pas possible dans **N**, mais le calcul de $x + d = x + b - a$ reste possible dès lors que $x \geq |b - a|$

Définitions : Etant donné les entiers naturels a et b :

- on appelle opérateur dans **N** la fonction de **N** dans **N** notée $\mathcal{O}(a, b)$ définie de la manière suivante :
  si $a \leq b$ alors $\mathcal{O}(a, b)\,(x) = x + (b - a)$, et si $a > b$ alors $\mathcal{O}(a, b)\,(x) = x - (a - b)$.
- Si $a < b$ on dit que $\mathcal{O}(a, b)$ ajoute $b - a$, et si $a > b$, on dit que $\mathcal{O}(a, b)$ soustrait $a - b$.

On a Déf. $\mathcal{O}(a, b) = \mathbf{N}$ si $a \leq b$, et Déf. $\mathcal{O}(a, b) = \{x \in \mathbf{N} \,/\, x \geq a - b\}$ si $a > b$.

Soit **O** l'ensemble des opérateurs ainsi définis.

Relation d'équivalence dans $\mathcal{O}$:
On considère sur $\mathcal{O}$ la relation $\mathcal{R}$ définie par $\mathcal{O}(a, b)\ \mathcal{R}\ \mathcal{O}(c, d) \Leftrightarrow$ quel que soit l'entier naturel x : $\mathcal{O}(a, b)\,(x) = \mathcal{O}(c, d)\,(x)$, c'est-à-dire quel que soit x entier naturel pour lequel les calculs sont possibles dans **N :** $x + b - a = x + d - c$. Cette relation est une relation d'équivalence dans $\mathcal{O}$ car la relation d'égalité est une relation d'équivalence dans **N**.

Définition : Un nombre relatif est une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{O}$. Toute classe d'équivalence est indépendante du représentant $\mathcal{O}(a, b)$ qui la définit.

Addition des relatifs :
Définition et indépendance des représentants choisis
Sur $\mathcal{O}\,/\,\mathcal{R}$ on définit une opération interne + de la manière suivante :
$\mathcal{O}\,(a, b) + \mathcal{O}\,(a', b') = \mathcal{O}\,(a + a', b + b')$ autrement dit, où $\overline{X}$ est la classe de $\mathcal{O}\,(a, b)$ et $\overline{Y}$ celle de $\mathcal{O}\,(a', b')$; et $\overline{X + Y}$ ne dépend pas des représentants choisis pour $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.
En effet, si on remplace (a, b) par (a_1, b_1), autre représentant de $\overline{X}$, alors la classe définie par $\mathcal{O}\,(a_1 + a', b_1 + b')$ est encore $\overline{X + Y}$ car, comme quel que soit x entier naturel pour lequel les calculs sont possibles dans **N** » : $x + b_1 - a_1 = x + b - a$, alors en ajoutant $x + b' - a'$ aux deux membres de cette égalité, on obtient $2x + (b_1 + b') - (a_1 + a') = 2x + (b + b') - (a + a')$. Ce qui prouve que $\mathcal{O}\,(a_1 + a', b_1 + b')\ \mathcal{R}\ \mathcal{O}\,(a + a', b + b')$. La démonstration est analogue pour montrer que $\overline{X + Y}$ ne dépend pas du représentant $\mathcal{O}\,(a', b')$ choisi pour $\overline{Y}$.

Associativité et commutativité de + dans $\mathcal{O}\,/\,\mathcal{R}$
Les propriétés d'associativité et de commutativité de + dans **N** s'étendent facilement à + dans $\mathcal{O}\,/\,\mathcal{R}$.
En effet $(\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z}$ est représenté par $\mathcal{O}\,((a + a') + a'', (b + b') + b'')$ qui est égal à $\mathcal{O}\,(a + (a' + a''), b + (b' + b''))$ puisque l'addition dans **N** est associative. Or ce dernier couple représente $\overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z})$.
De même, $\overline{X} + \overline{Y}$ est représenté par $\mathcal{O}\,(a + a', b + b')$, égal à $\mathcal{O}\,(a' + a, b' + b)$ car + est commutative dans **N**, et $\mathcal{O}\,(a' + a, b' + b)$ représente $\overline{Y} + \overline{X}$.

Elément neutre de + dans $\mathcal{O}\,/\,\mathcal{R}$
En désignant par $\overline{0}$ la classe de $\mathcal{O}\,(a, a)$ on a $\overline{0} + \overline{X}$ représentée par $\mathcal{O}\,(a + a', a + b')$. Or, quel que soit l'entier naturel x pour lequel les calculs sont possibles :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\,(a + a', a + b')\,(x) &= x + (a + b') - (a + a') \\ &= x + a + b' - a - a' \\ &= x + b' - a' \\ &= \mathcal{O}\,(a', b')\,(x).\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{O}\,(a + a',\ a + b')\ \mathcal{R}\ \mathcal{O}(a',\ b')$ et $\overline{0} + \overline{X} = \overline{X}$. On a alors $\overline{X} + \overline{0} = \overline{X}$ d'après la commutativité de + dans $\mathcal{O}\,/\mathcal{R}$. $\overline{0}$ est donc élément neutre de + dans $\mathcal{O}\,/\mathcal{R}$.

Elément symétrique de tout élément $\overline{X}$

Tout élément $\overline{X}$ de $\mathcal{O}\,/\mathcal{R}$ admet un symétrique noté $-\overline{X}$, dont un représentant est (b, a), puisque $\overline{X} + (-\overline{X})$ est alors représenté par $\mathcal{O}\,(a + b, b + a)$ représentant de $\overline{0}$.
Donc $\overline{X} + (-\overline{X}) = \overline{0} = (-\overline{X}) + \overline{X}$.

En notant $\mathcal{O}\,/\mathcal{R} =$ **Z**, on a donc démontré que (**Z** ; +) est un groupe commutatif.

Yves Matheron