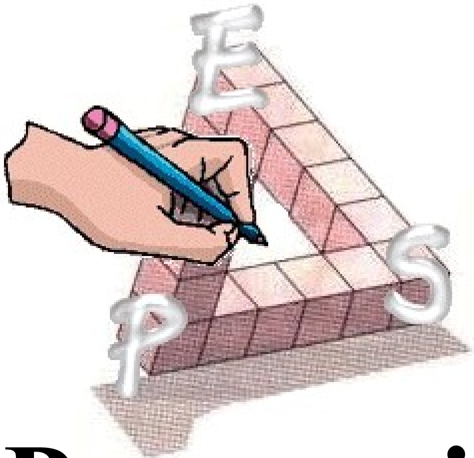


Pourquoi enseigner le triangle ?
Comment enseigner le triangle ?

Équipe de l’IREM d’Aquitaine
AMPERES

Plan de l’exposé

I) Les questions motivant l’étude du triangle en cours de mathématiques.

II) L’enchaînement des situations proposées aux élèves

Les questions motivant l’étude du triangle en cours de mathématiques.

1. Dévoluer la question de la détermination des triangles aux élèves
2. Comment organiser un parcours d’étude ?
   a) Engager les élèves dans une discussion sur cette question
   b) Motiver l’étude

L’enchaînement des situations proposées aux élèves

1. La classe de sixième
2. La classe de cinquième

   a) Unicité d’un triangle tracé à partir des longueurs de ses trois côtés.

   b) Unicité d’un triangle tracé à partir des autres cas de détermination

   c) Existence d’un triangle à partir de la donnée de trois longueurs

   d) Existence d’un triangle à partir de la donnée de trois angles

Les questions motivant l’étude du triangle en cours de mathématiques.

Le premier point de vue est celui du **mathématicien qui fait de la géométrie**, dans le cours de mathématiques, au chapitre traitant des triangles.

La question posée est celle de la détermination d’un triangle à une isométrie près, question qui se prolonge par sa détermination à une similitude près.

Comment dévoluer cette question aux élèves ?

En se plaçant, dans une problématique pratique, l’élève peut réussir à réaliser un dessin dans le micro-espace de la feuille de papier : il ne peut pas comprendre la nécessité de la géométrie théorique.

Le deuxième point de vue est celui de **l'ingénieur et de** l'**architecte**, dans le cadre réel de leurs travaux. La question posée est celle de la stabilité d'une construction.

Au niveau d'un espace plus grand (méso-espace), les constructions techniques impliquent la donnée de caractéristiques permettant de déterminer les objets choisis avant de les construire.
La détermination des triangles prend du sens car la problématique ne peut plus être pratique (par essais et erreurs).
Une modélisation est nécessaire avant l'action.

Le troisième point de vue est un point de vue **historique**. La question de modéliser l'espace qui nous entoure a motivé l'invention de la géométrie par les premiers mathématiciens.

Pour étudier certaines relations géométriques au sol, il est pratique de considérer à notre échelle que le rayon de la terre, de l'ordre du macro-espace pour nous, est infini.

La géométrie utilisée est une géométrie théorique.

Comment rendre les problèmes de la détermination des triangles accessibles aux élèves ?

La difficulté pour le professeur est d’éliminer le recours à la problématique pratique et de rendre nécessaire pour l’élève le passage par la problématique de modélisation.

Il faut le faire par une situation abordable par les élèves en classe, il faut donc transposer les problèmes de l’espace pour revenir à un travail dans la feuille de papier.

Notre réflexion précédente a suivi ce qu’on pourrait imaginer comme une sorte de chemin « ascendant » puis « descendant » .

Voici précisément la QFPG qui motive l'étude de la détermination des triangles et qui est commune aux différentes AER proposées dans ce parcours.

Quelles données est-il nécessaire et suffisant de connaître sur les 6 éléments d'un triangle (angles et côtés) pour déterminer ce triangle à une isométrie près, à une similitude près ?

Comment organiser un parcours d'étude autour de cette question ?

Cette première question amène un enchaînement de questions sur d'autres thèmes d'étude. Se construisent ainsi des liens logiques entre les enseignements qui se succèdent sur une année scolaire ou sur un cursus plus large.

Chaque réponse à une question permet d'avancer un peu plus loin dans la connaissance de l'objet « triangle » en construisant de nouveaux outils selon le niveau de classe où les élèves se trouvent.

Engager les élèves dans une discussion sur la question de la détermination des triangles.

Parmi les 6 éléments d'un triangle (angles et côtés) quels sont ceux dont il est nécessaire et suffisant de connaître la mesure pour déterminer le triangle à une isométrie près, à une similitude près ?

Les mots « connaître » et « déterminer » peuvent se préciser dans deux directions qui ne conduisent pas au même savoir lors de la recherche de la réponse.

Connaître : Quelles sont les informations minimales sur angles et côtés à relever sur un triangle existant pour le reproduire?

Il s’agit de reproduire en vraie grandeur, ou à l’échelle, un triangle existant.

Le but est de placer les élèves dans une problématique de modélisation pour anticiper quels éléments seront déterminants. Ensuite si nécessaire on pourra se convaincre par des démonstrations et se placer alors dans une problématique théorique.

Déterminer : Quelles sont les données sur angles et côtés qui permettent de construire un triangle dont on ne sait pas *a priori* s'il existe?
Selon les données, combien ce problème a-t-il de solutions ?

Ceci conduit à une construction géométrique suivie d'une discussion selon les données, qui relève d'une problématique théorique.

Deux bilans théoriques très différents pour des élèves de 5ème.

1- Quel est le nombre minimal d'égalités sur les mesures des angles et des côtés pour que deux triangles existants soient isométriques ?
2- Selon les valeurs de ces mesures, combien de triangles différents existe-t-il ?

Nous avons décidé de traiter seulement le point 1 avec l'énoncé des cas d'isométrie bien qu'ils soient hors programme, et ouvrons sur le point 2 avec deux questions du programme : inégalité triangulaire et somme des angles du triangle.

Pourquoi cette décision ?

La question du point 1 est posée par des élèves eux-mêmes **dès la 6ème** .

Les cas d’isométries sont utiles pour faire bâtir des démonstrations au collège par les élèves à partir de conjectures qu’ils font eux-mêmes et qu’ils ont à cœur de prouver.

Il nous paraît illusoire, avec des élèves de $5^{\text{ème}}$ d'arriver à conclure le point 2 par une discussion complète sur des données arbitraires.

Cependant la question de l'existence du triangle se pose au sujet de la somme des angles.

L'existence du triangle sera également discutée dans la leçon sur l'inégalité triangulaire

La résolution de la question de la détermination des triangles peut se développer jusqu'à la classe de première scientifique.

Si BC = a , AB = c et AC = x parce que C est le point cherché et qu'on peut orienter la droite (AC) de A vers C , on arrive à l'équation suivante : $x^2 - 2cx \cos \mathrm{A} + c^2 - a^2 = 0$

Motiver l'étude

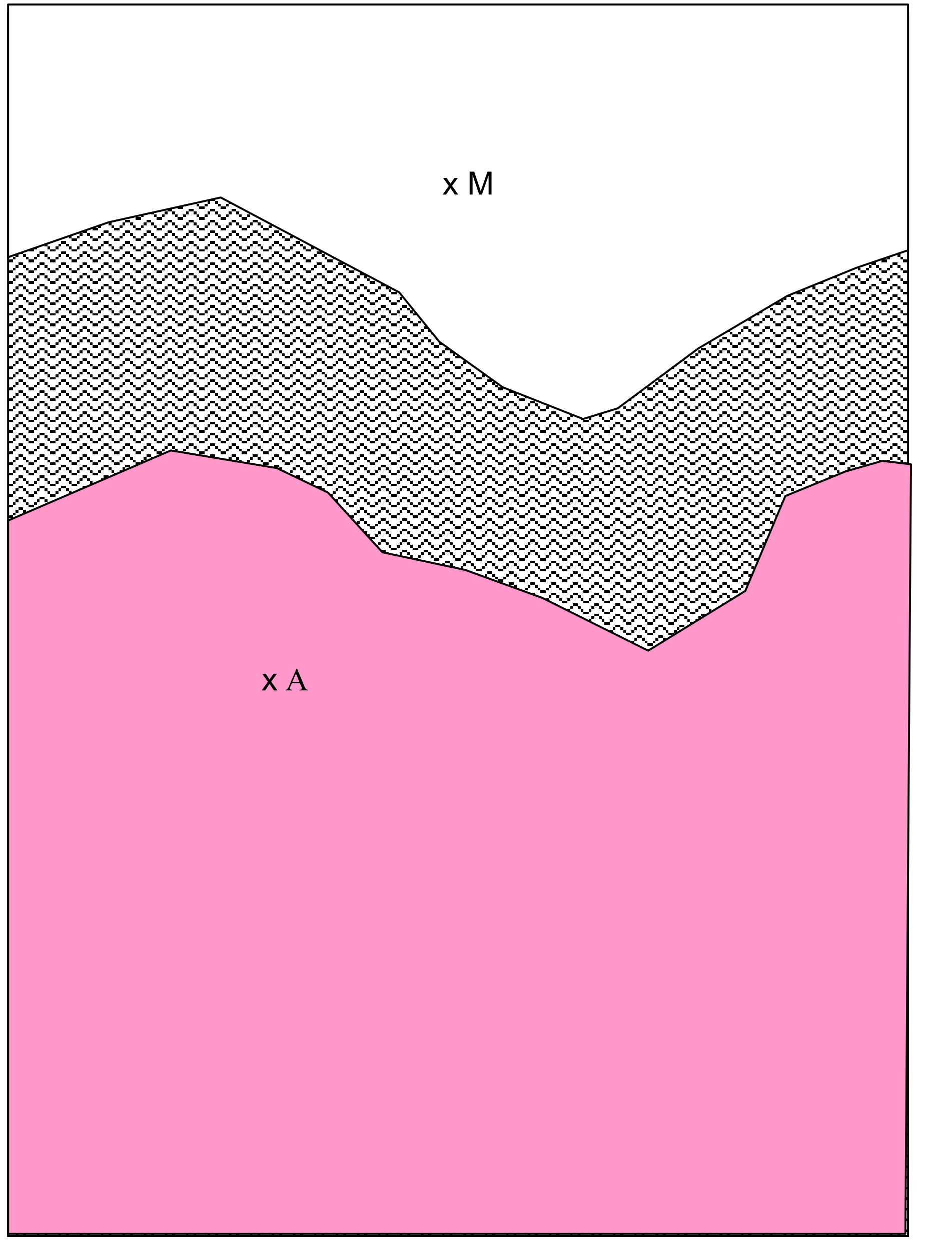
Une source de questions : Comment atteindre une mesure inaccessible ?

Les questions sont différentes dans le rapport qu'elles entretiennent avec une certaine « réalité ».

1- Celle du géomètre topographe sur le terrain.

2- Celle du cours, avec un matériel apporté en classe qui modélise le problème qui rend la mesure directe interdite.

3- Celle du cours, avec une question qui reste dans le domaine des mathématiques, déterminer le côté d'un triangle détenu par le professeur mais inaccessible.


x M
x A

Où et comment utiliser le problème « réel » de distance inaccessible?

1- En introduction

Il nous semble impossible que le discours du professeur soit compris et crédible si la résolution du problème ne va pas jusqu'à son terme, avec une réelle implication des élèves.

2. En application :

On pourrait imaginer le problème du topographe en fin de chapitre. Le texte fournirait aux élèves un triangle ABC, les deux angles A et B et la longueur AB, en leur disant de construire le triangle à une certaine échelle.

Ce pourrait être un exercice d’application pour différentes leçons.

Mais, même en situation d'application, il y a deux options :

Le professeur donne ce genre d'exercice à faire seul à la maison à partir d'un simple texte écrit.

Le professeur fait traiter l'exercice en classe en apportant le matériel (feuille pour matérialiser la partie où la mesure est interdite, visées effectivement réalisées en classe, etc.. jusqu'à trouver réellement la mesure inaccessible).

Nous faisons l’hypothèse que c’est essentiellement parce qu’aucun de ces exercices d’application n’est traité avec un matériel fabriqué par le professeur, simple parce que modélisant la « réalité », mais bien « réel » et non évoqué, que les élèves ne font pas le « parcours à l’envers », c’est à dire ne voient pas dans l’exercice d’application une « première rencontre ».

Notre méthode de travail

Nous recherchons un enchaînement de questions à proposer aux élèves de sorte que l'étude du thème se poursuive au cours du temps et dans les classes successives.
C'est ainsi que nous entendons le mot « parcours ».

A chaque étape de l'étude, nous veillons à ce que l'objet mathématique apparaisse comme réponse à un problème.

La résolution de chaque problème amène d'autres questions qui motivent l'étude proposée dans les situations suivantes.
L'enchaînement des questions a une importance fondamentale

Nous essayons d'organiser les situations de manière à favoriser l'expression des élèves, la possibilité qu'ils auront de mettre en œuvre des stratégies diverses. Ainsi, souvent les questions découlent de leurs interrogations lors du travail de recherche, ou de l'observation de leurs productions.

Les élèves répondent donc à des questions qu'ils se posent vraiment, en classe.

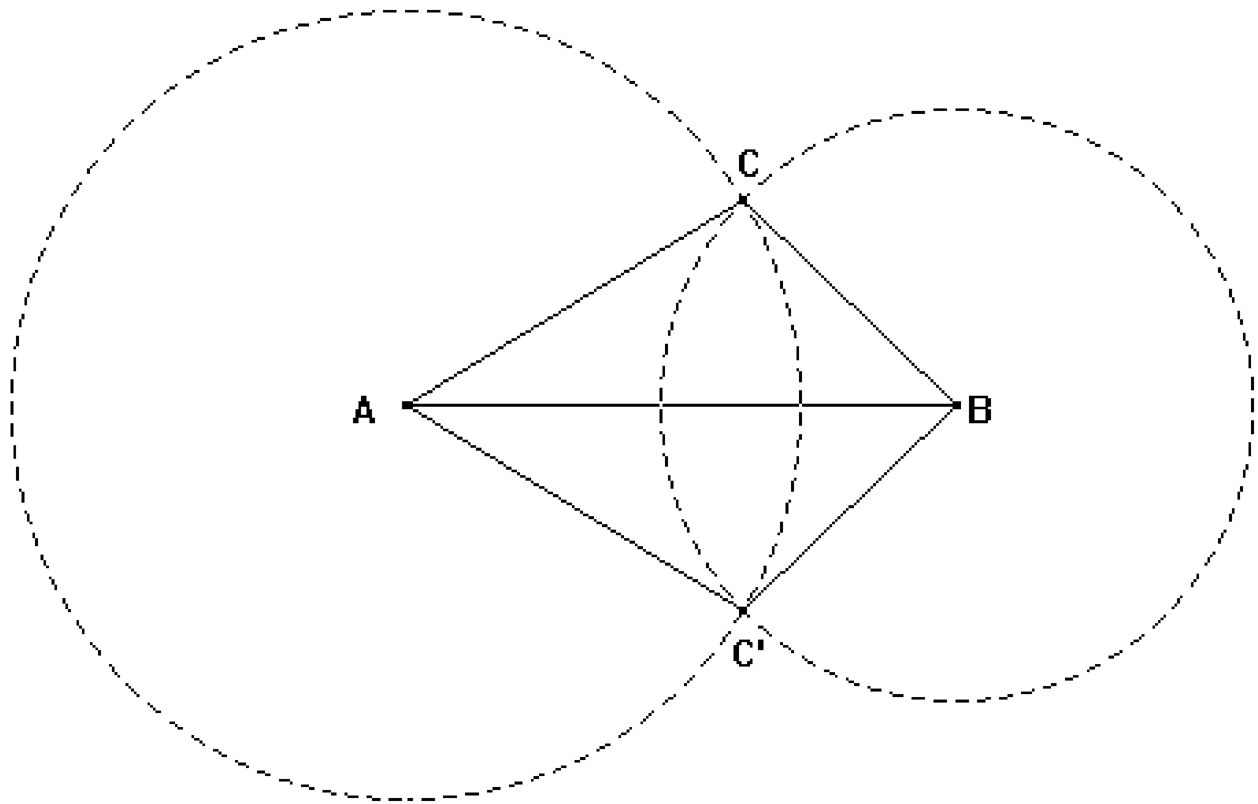
Le sens se construit ainsi pour eux à deux niveaux : localement dans chaque situation (AER) et globalement du fait de l'enchaînement des problèmes au cours du temps (PER).

L’enchaînement des situations proposées aux élèves

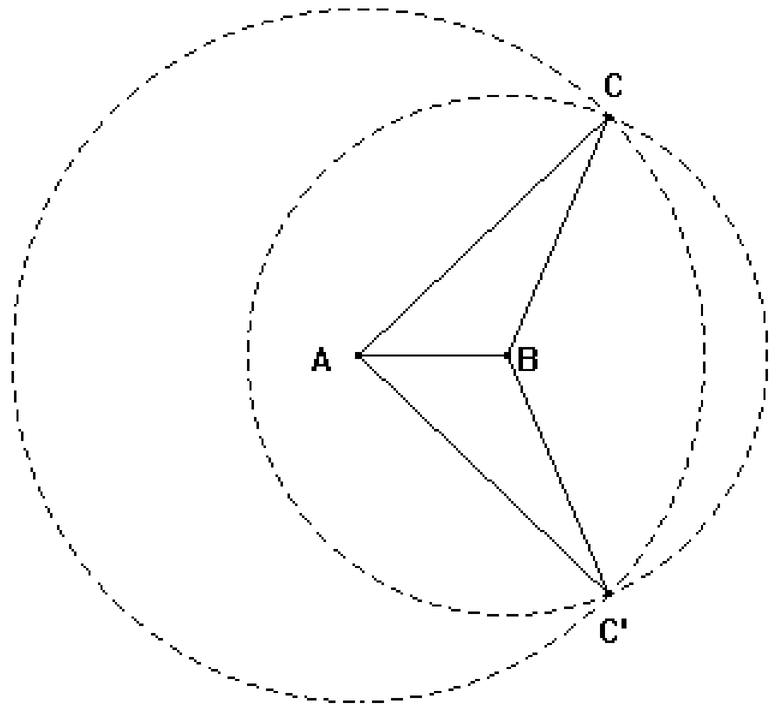
<u>A quelle occasion les élèves rencontrent-ils des triangles dans le programme de sixième ?</u>

La première rencontre avec le triangle dans le programme de sixième se fait dans la leçon sur le cercle. Le problème central de cette leçon consiste à placer des points tous situés à une même distance donnée d’un point donné.

Le triangle apparaît comme solution du problème a) suivant : Etant donné un segment [AB] de 6 cm de longueur, placer tous les points situés à 5 cm de A et à 4 cm de B.

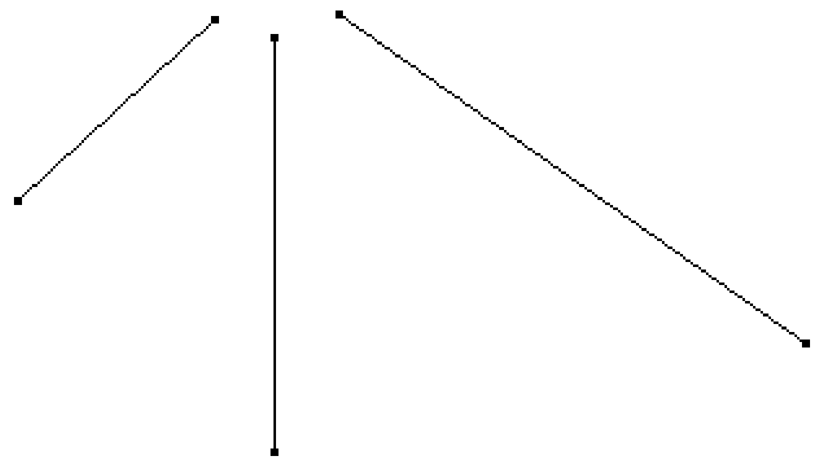

C
A
B
C'

Le professeur peut leur proposer de répondre à la même question en prenant des longueurs différentes afin qu'ils soient confrontés à d'autres types de figures.



A ce stade, il ne fait aucun doute pour les élèves que les deux triangles symétriques obtenus sont les mêmes.

Le professeur peut ensuite poser le problème :
Dessiner un triangle dont les trois côtés ont les mêmes longueurs que celles de ces trois segments.



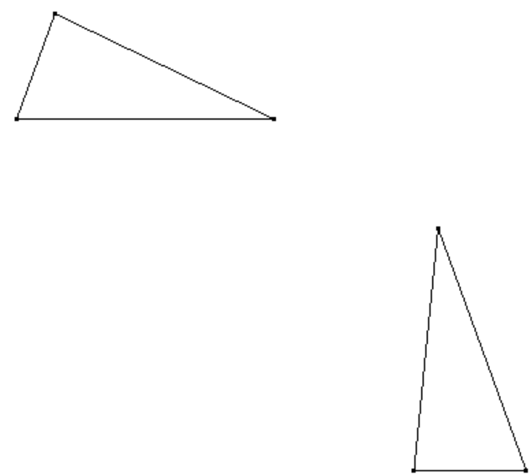
Ou bien encore :
Construire un triangle ayant ces trois mesures (données) comme longueurs de côtés.

L'objectif de ces problèmes est de persuader les élèves que pour dessiner un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés, il faut utiliser un compas et tracer des cercles ou des arcs de cercles et non tâtonner avec la règle seule comme le font encore beaucoup d'élèves.

Des questions sont posées par les élèves eux mêmes, dans les deux derniers problèmes :

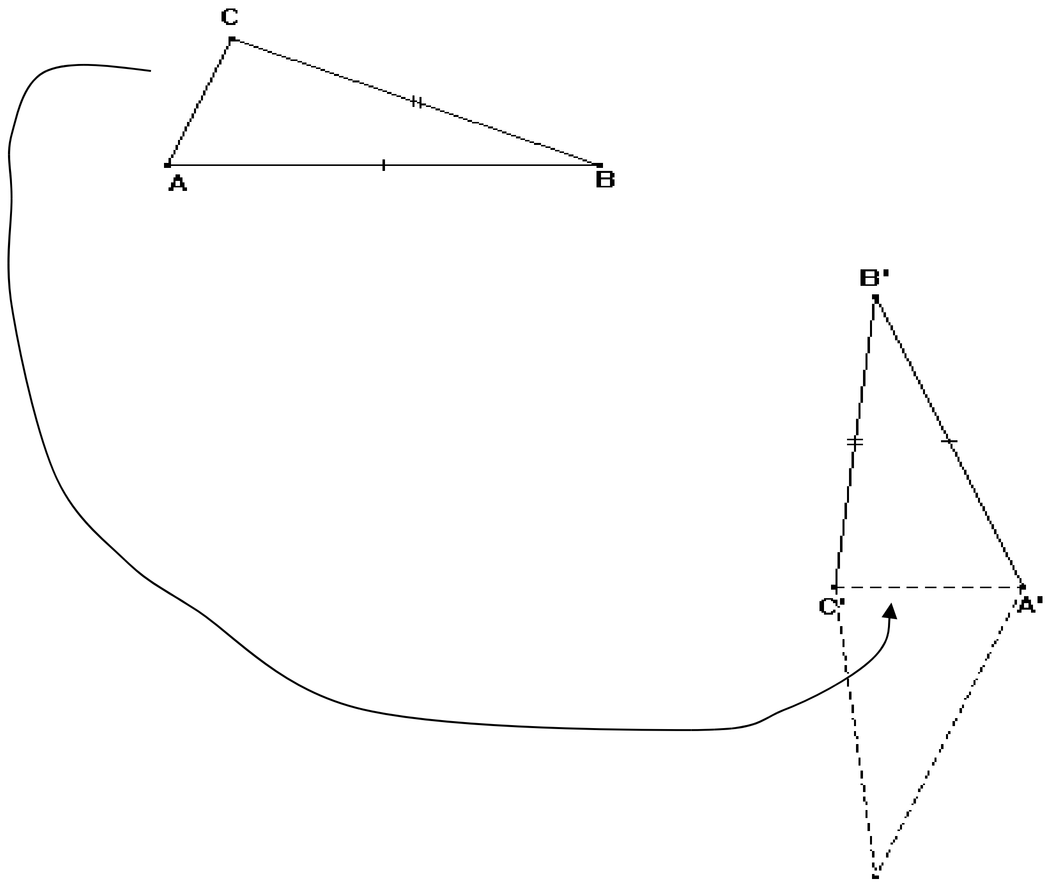
Dans une figure comme ci-dessous, les deux triangles sont-ils les mêmes ?

Les triangles tracés par tous les élèves de la classe sont ils les mêmes ?



Le professeur doit donc préciser ce que l'on entend par l'expression « les mêmes triangles », dans un premier temps, on peut dire que deux triangles sont les mêmes, s'ils sont <u>superposables</u>.

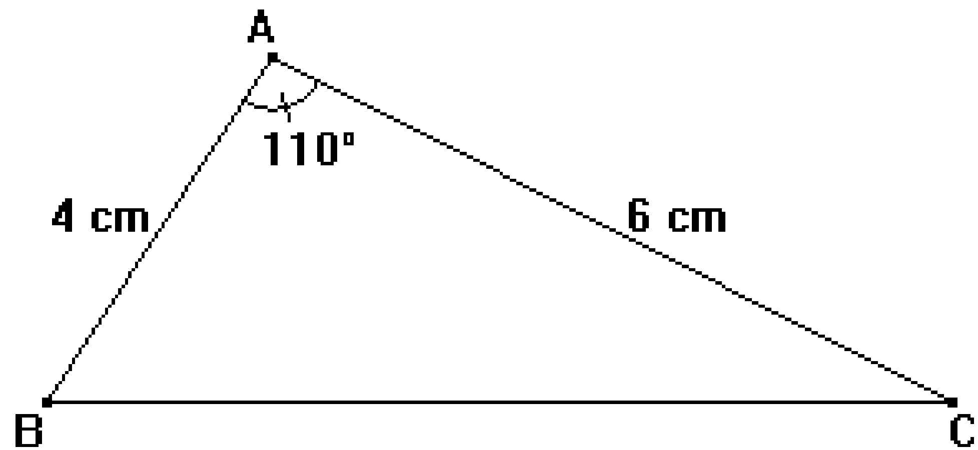
A l'aide d'un calque



Cette explication n'est pas une démonstration, La deuxième rencontre avec le triangle en sixième se fait dans la leçon sur les angles.

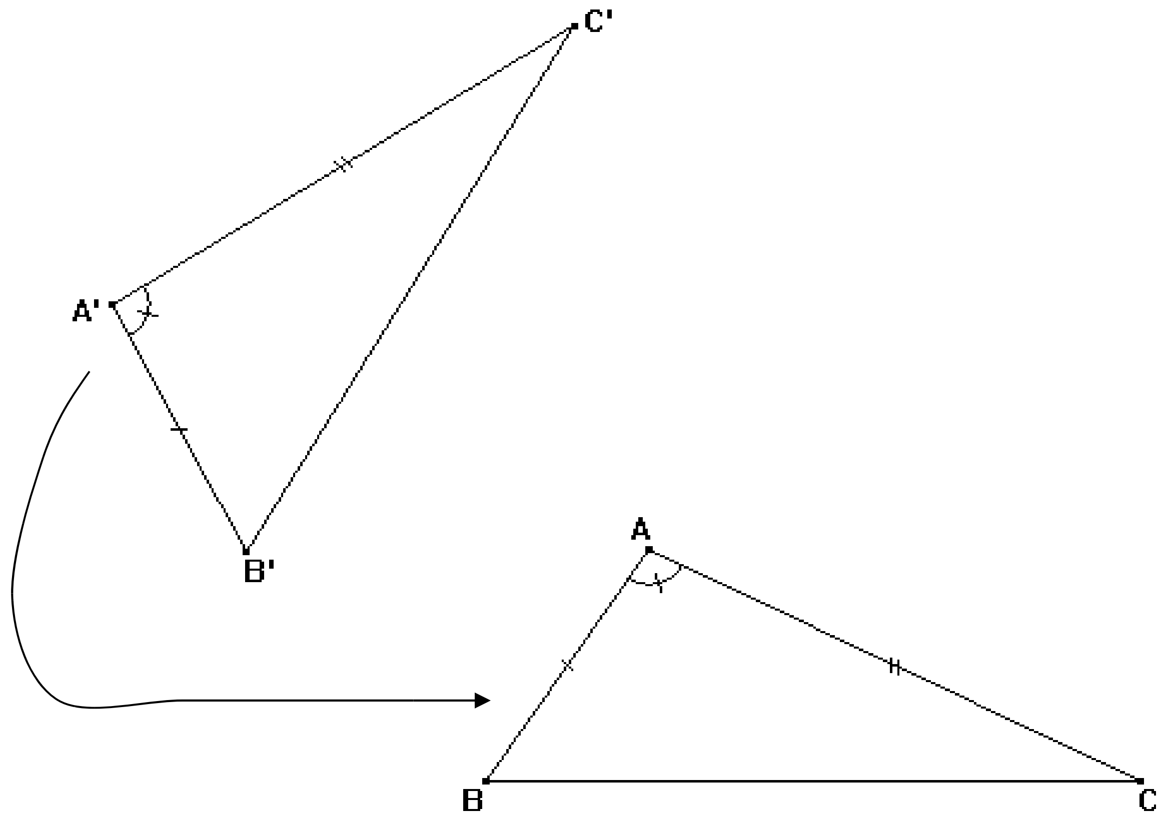
Les élèves étudient ce qu'est un angle en partant de ce qu'ils ont appris à l'école primaire. On travaille avec des gabarits

Le professeur demande aux élèves de reproduire le triangle suivant :



Ils se demandent si leur triangle est bien le même que celui qu'on leur a demandé de reproduire.

Avec le calque

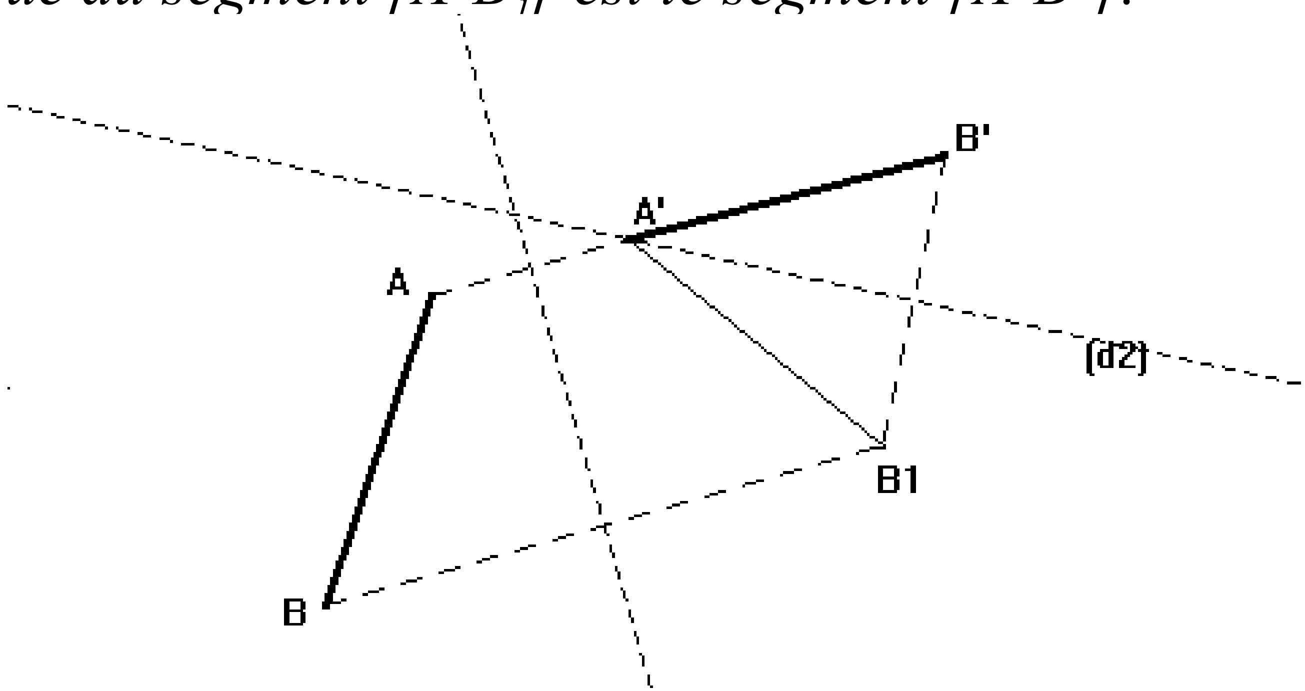


On procède de façon similaire pour un triangle déterminé par deux angles et un côté compris entre ces deux angles.

Lors de la leçon sur la symétrie, on peut proposer aux élèves de faire coïncider deux segments de même longueur

Trouver l'axe d'une symétrie qui amène A sur A', dessiner le symétrique [A'B_1] du segment [AB].

Trouver alors l'axe d'une deuxième symétrie qui amène B_1 sur B', le symétrique du segment [A'B_1] est le segment [A'B'].



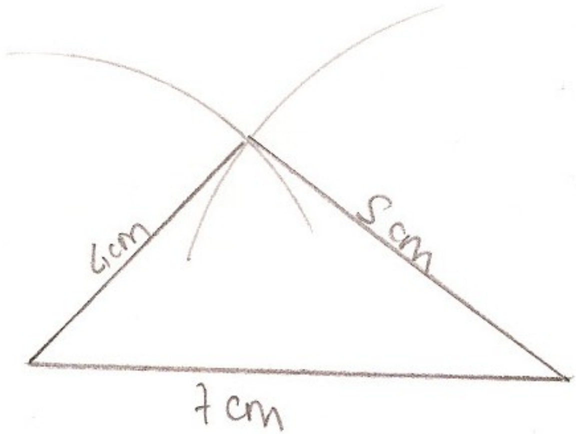
C’est en cinquième que l’on aborde la question de la détermination des triangles.

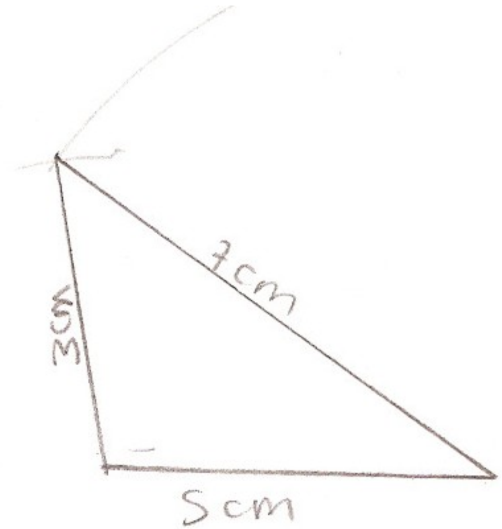
On reprend d’abord avec un triangle déterminé par les longueurs de ses trois côtés dans le cas où il existe. Le professeur choisit lui-même les trois mesures en cm.

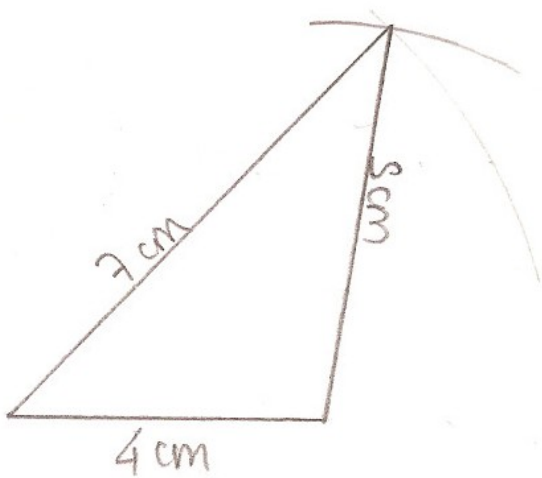
Consigne : *Combien pouvez vous tracer de triangles ayant ces trois nombres comme longueurs de côtés ?*

Les élèves proposent 2 triangles symétriques, 4 triangles (en prenant les symétriques de chaque triangle par rapport au côté et par rapport à la médiatrice du côté), 3 triangles (en commençant successivement par chacun des côtés), 6 triangles (avec en plus les symétriques des 3 triangles obtenus) ou 12 triangles en combinant toutes ces possibilités.

Que trouve-t-on comme productions ?

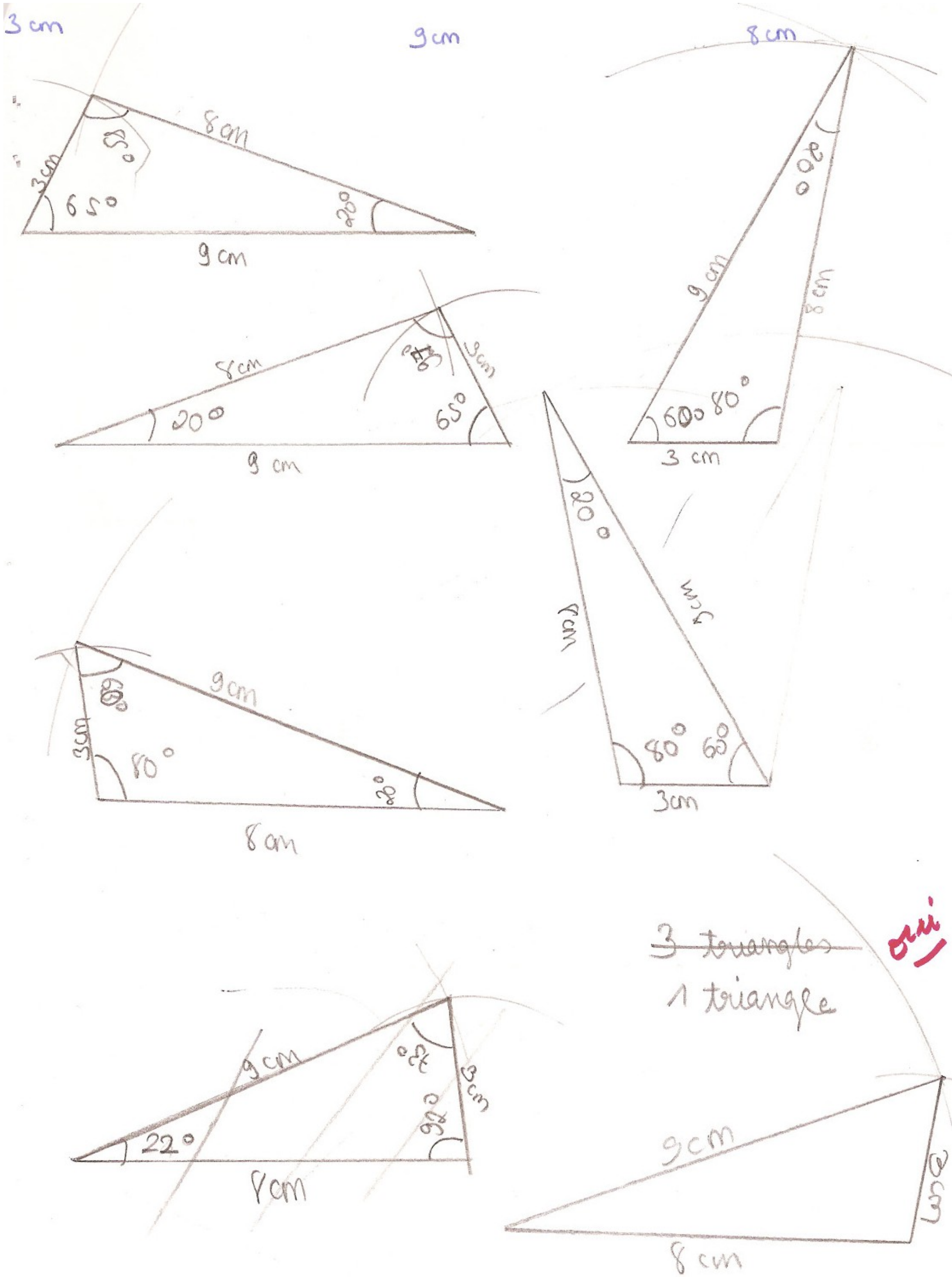






3 triangles, 2 sont diffiron

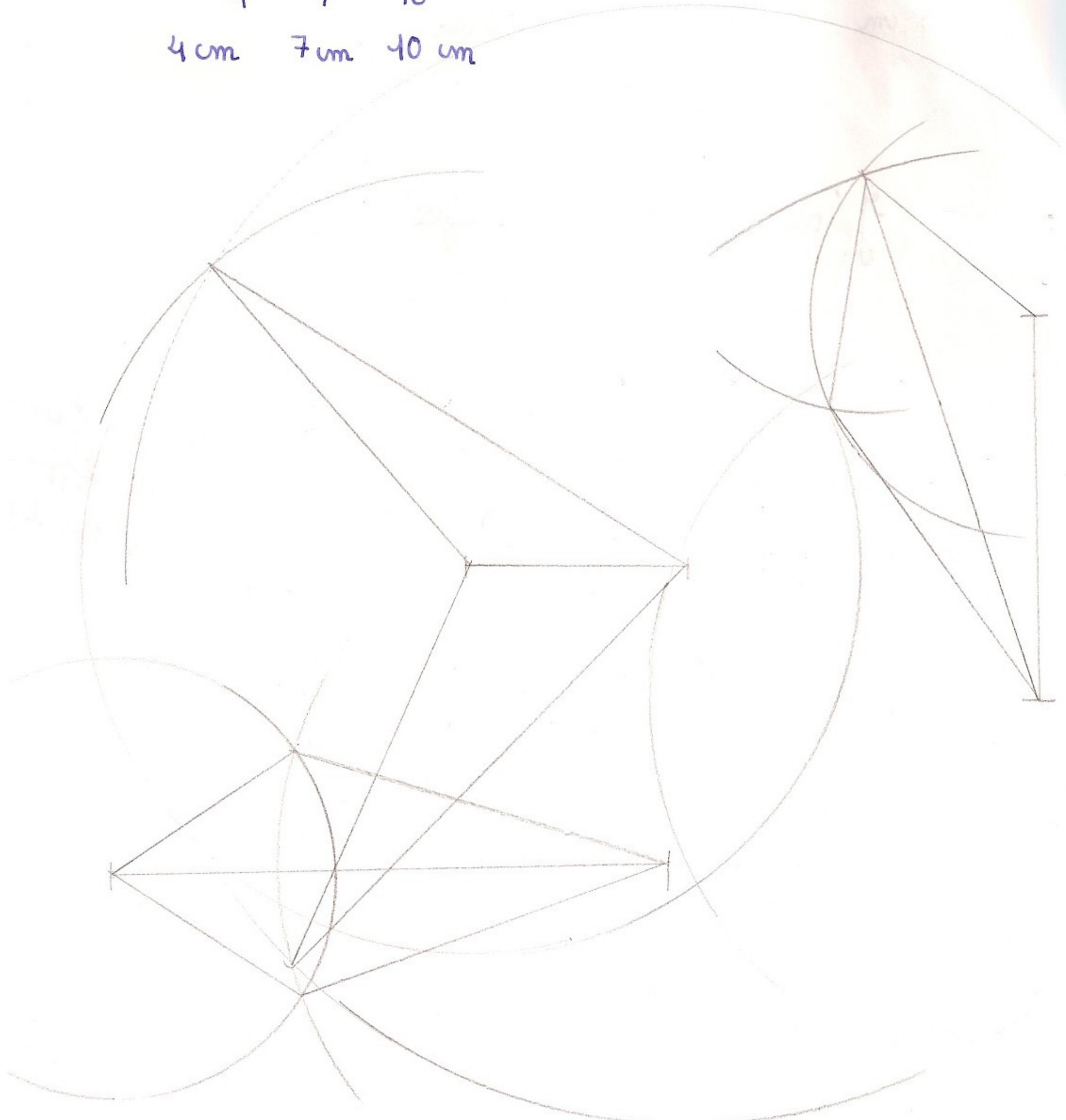
êts vous sûre?



3 cm
9 cm
8 cm
8 cm
3 cm
65°
80°
20°
9 cm
9 cm
8 cm
3 cm
60° 80°
3 cm
8 cm
3 cm
20°
65°
9 cm
20°
9 cm
3 cm
80° 60°
3 cm
9 cm
3 cm
80°
80°
8 cm
~~3 triangles~~
1 triangle
oui
9 cm
3 cm
22°
98°
8 cm
9 cm
3 cm
8 cm

4 7 10

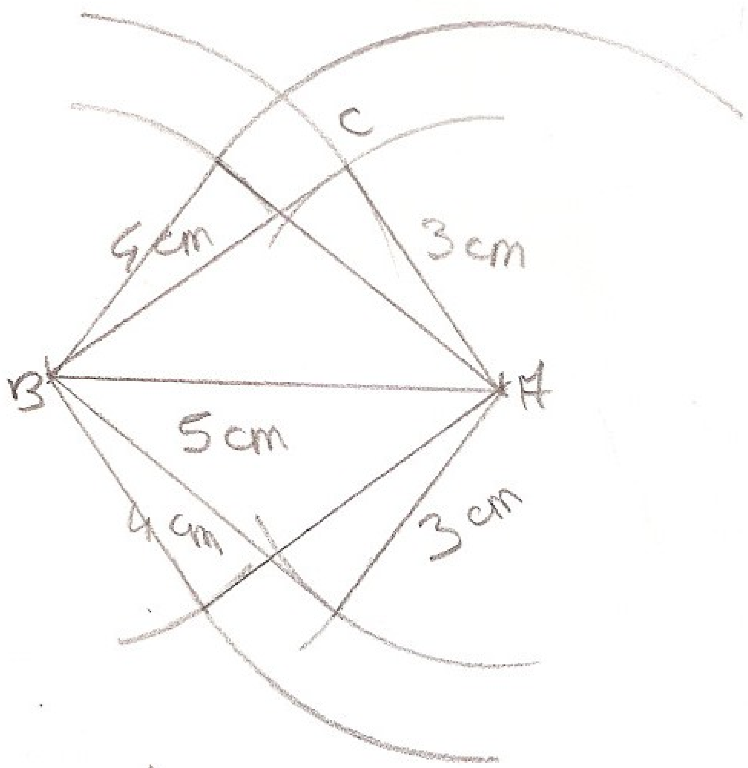
4 cm 7 cm 10 cm



J'ai obtenu 6 triangles.

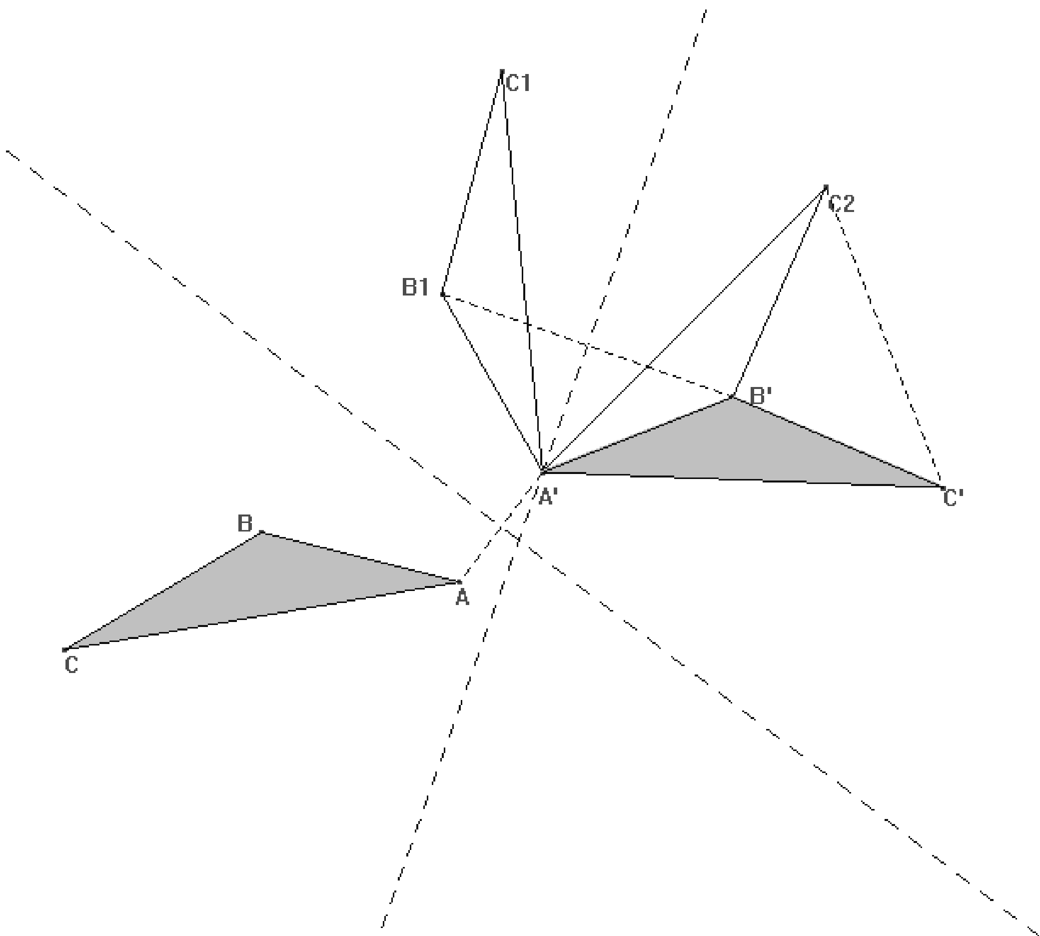
3.4.5

3 cm 4 cm 5 cm



J'obtient 4 triangles car les quatres triangles sont ~~les~~
~~même~~ isométriques

On rappelle ce que l'on nomme des <u>triangles différents</u> (non superposables) et on peut faire construire aux élèves les symétries qui font correspondre deux triangles superposables, à l'aide d'un logiciel de géométrie. On peut le faire avec 3 symétries au maximum.



<u>Bilan :</u> Deux triangles ayant les mêmes longueurs de côtés sont identiques.

On se demande quels sont les éléments qui permettent de déterminer un triangle et un seul, à part les longueurs des trois côtés.

Le professeur donne certaines mesures et le défi proposé aux élèves est de construire quand c'est possible <u>au moins deux triangles</u> non superposables répondant à la question, ou d'affirmer sans se tromper qu'un seul dessin est possible. Ils travaillent par équipe de 2.

Nous n’avons pas ressenti le besoin d’utiliser la question de la distance inaccessible au niveau de la 5ème car les élèves connaissent depuis longtemps le triangle.

Nous avons donc choisi d’en rester à des constructions où le professeur donne des éléments d’un triangle et les élèves doivent essayer de construire ce triangle et de dire s’il est unique ou non. On a plutôt centré notre travail en 5ème sur les démonstrations de l’existence, de l’unicité ou de la non unicité du triangle.

1- A = 30°, B = 45°

2- A = 60°, AB = 5 cm , AC = 8 cm

3- AB = 4 cm, BC = 6cm

4- A =30°, AB = 8 cm , BC = 5 cm

5- A = 75°, B = 30°, AB = 5 cm

6- A = 90°, AB = 5 cm , BC = 8 cm

Le souci du professeur de $5^{ème}$ lors de la séance basée sur cette situation est triple :

- gérer les erreurs de tracé,
- mettre l'accent sur la formulation (bilans intermédiaires, puis bilan final)
- introduire une preuve théorique car par suite des erreurs de tracés il y a parfois un doute certain sur le fait qu'il soit impossible d'obtenir des triangles différents.

On travaille maintenant l’inégalité triangulaire.

<u>Question générale :</u> *Étant donnés trois nombres, peut-on toujours tracer au moins un triangle ayant ces trois nombres comme longueur de côtés ?*

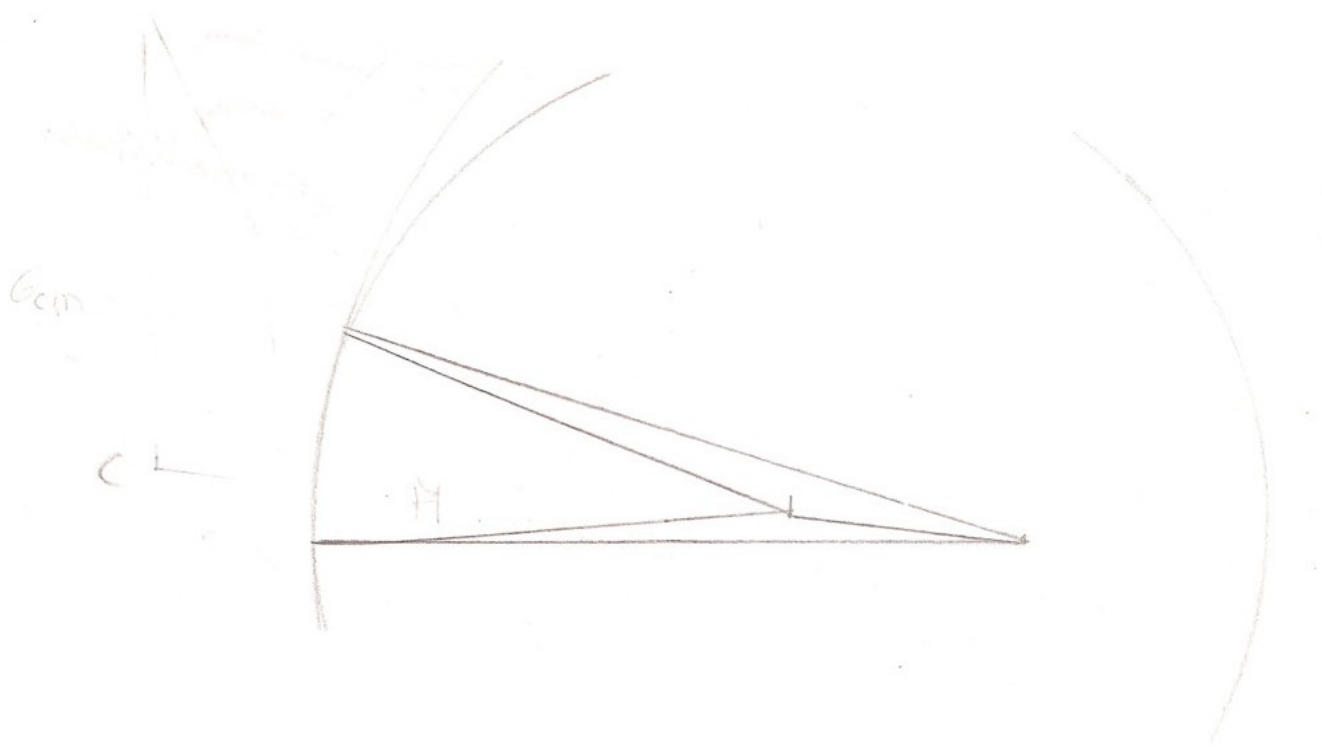
Pour le professeur, une question se pose, doit il
- imposer les trois nombres aux élèves?
- les laisser les choisir eux mêmes ?

On a constaté que même si on laisse les élèves libres de choisir leurs triplets, ils construisent bien des triangles y compris dans le cas limite, spontanément, (et d'autant plus s'ils sont stimulés par la question « combien pouvez vous construire de triangles ? »).

De nombreux élèves :

- ne modélisent pas de façon spontanée en prévoyant l'alignement des points.
- ne sont pas du tout convaincus de la non existence d'un vrai triangle même si le professeur leur montre les trois points alignés. Pour eux cet alignement n'empêche pas l'existence d'un ou plusieurs vrais triangles non plats.

L’explication de ce fait ne relève donc pas d’un phénomène de contrat.



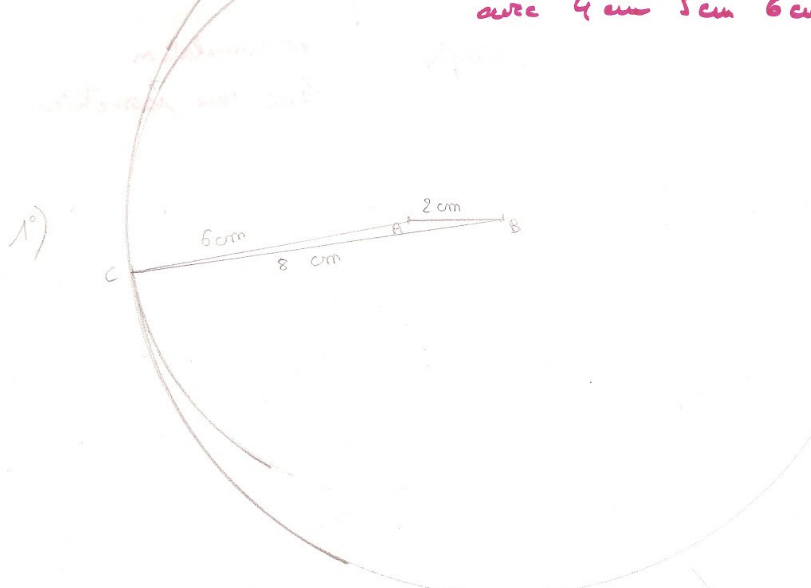
BAYSSET Eva
5e6

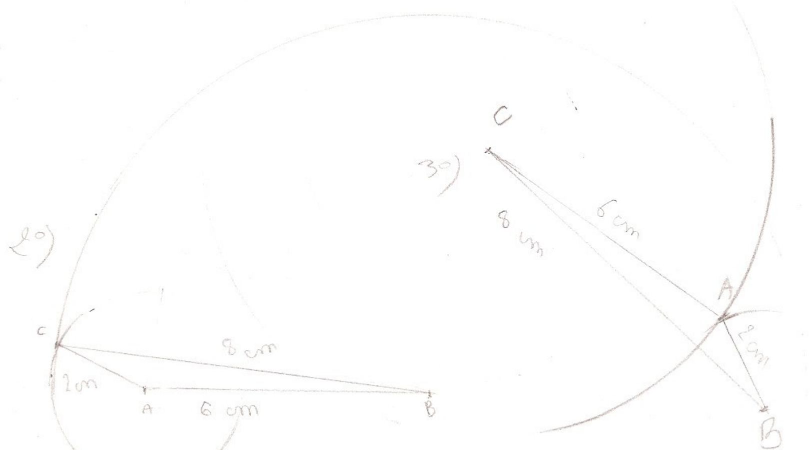
2 , 6 , 8

2 cm 6 cm 8 cm

J'ai obtenu 2 triangles

Pourquoi pas un seul comme avec 4 cm 5 cm 6 cm





Consigne donnée aux élèves

Nous avons décidé de laisser les élèves choisir chacun 3 triplets d'entiers entre 2 et 9, sans leur dire pourquoi dans un premier temps. Ils les écrivent au stylo et n'ont plus le droit d'en changer.

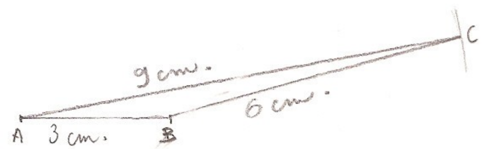
On leur dit ensuite qu'il s'agit de trois longueurs et on leur demande s'il est possible ou non de tracer les triangles

Puis le professeur demande à la classe de ranger les triplets de nombres dans un tableau, selon que le triangle existe, qu'il n'existe pas ou bien qu'il y a un doute. Dans un premier temps, il pourra y avoir des cas limites classés dans la catégorie où le triangle existe ou n'existe pas.
Le professeur relance les constructions sur les cas limites en demandant aux élèves d'essayer de commencer leur dessin dans un autre ordre.
Selon le côté par lequel ils commencent les élèves trouvent un triangle ou n'en trouvent pas.

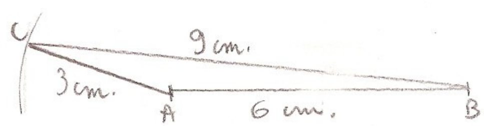
Laurent
Camille

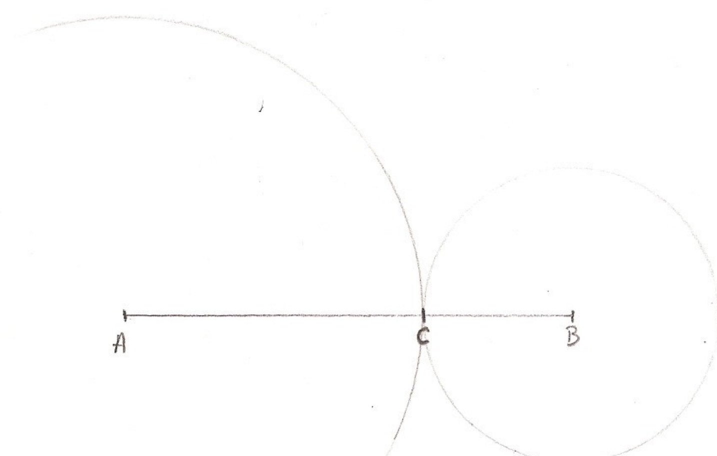
3 cm   6 cm   9 cm

Sur 3 triangles, il y en a un qui est plat !

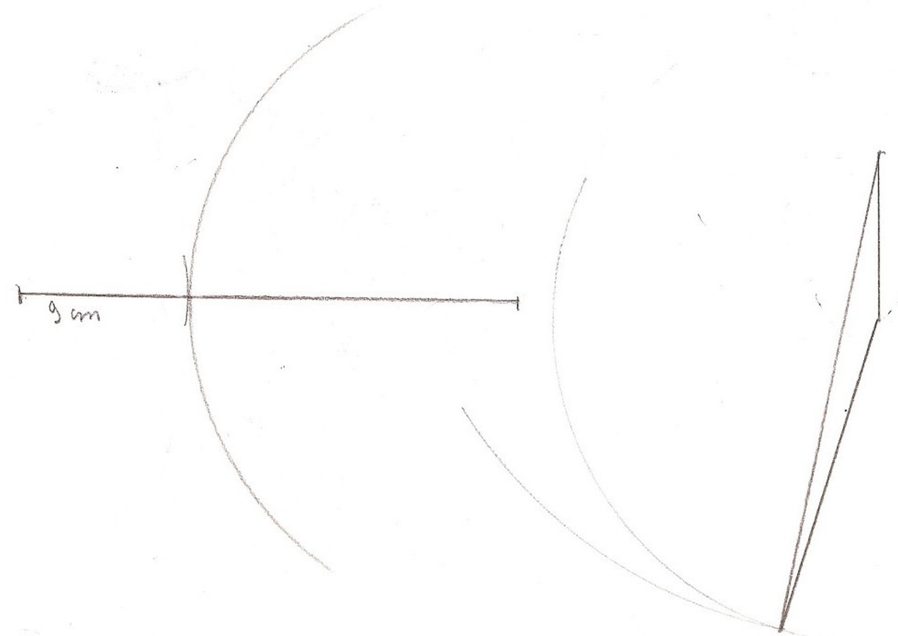


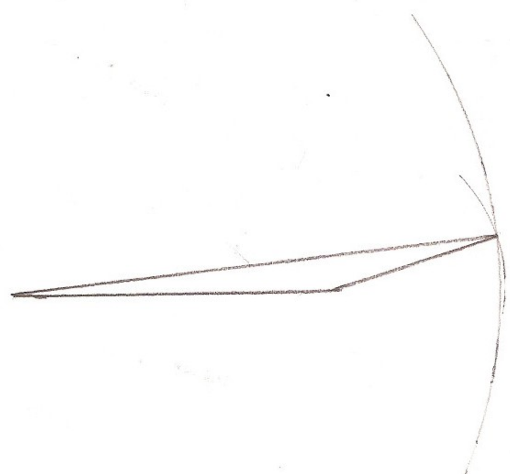
Laurent
Camille



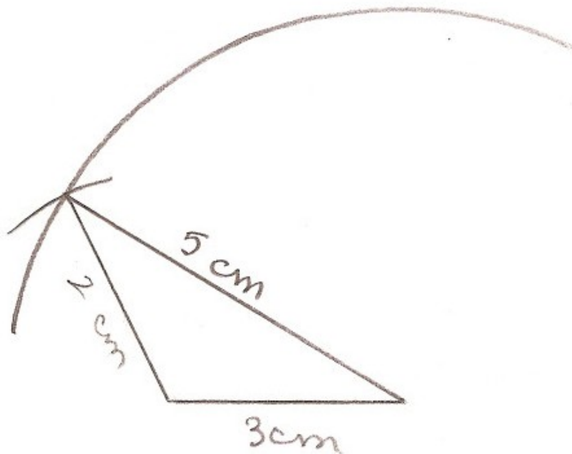


SERVANE
NONY

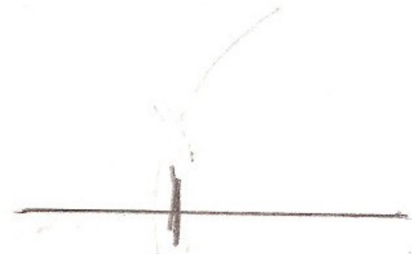




je commence par 9 cm je trouve
un angle plat alors que si je
commence par 6 et par 3
je trouve un triangle



j'ai obtenu triangle



Quand j'ai commencé par le segment de 3cm j'ai trouvé 1 triangle. Quand j'ai commencé par le segment de 5cm j'ai rien obtenu

~~48~~ ~~348~~ 359

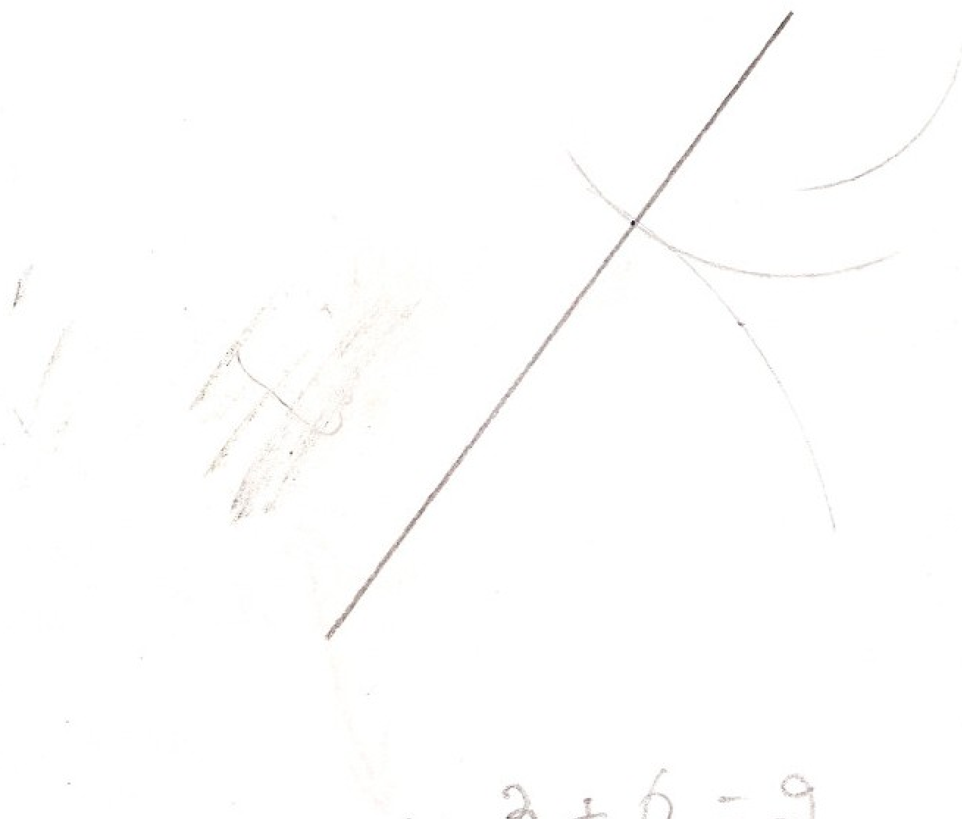
3 cm 5 cm 9 cm

$3+5=8<9$

O triangle

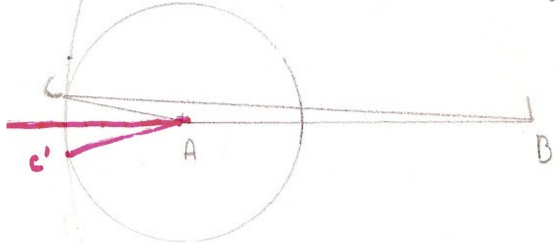
j'ai commencé par 9 car il est supérieur à 3 et 5 cm

peu~~t~~ importe le nombre de fois quand commence avec un segment d'une longueur différent entre les trois mesures de départ les triangles seront tous pareilles car ils ont les mêmes mesures.



comme 3 + 6 = 9

9 = 9 0 triangle soit possible



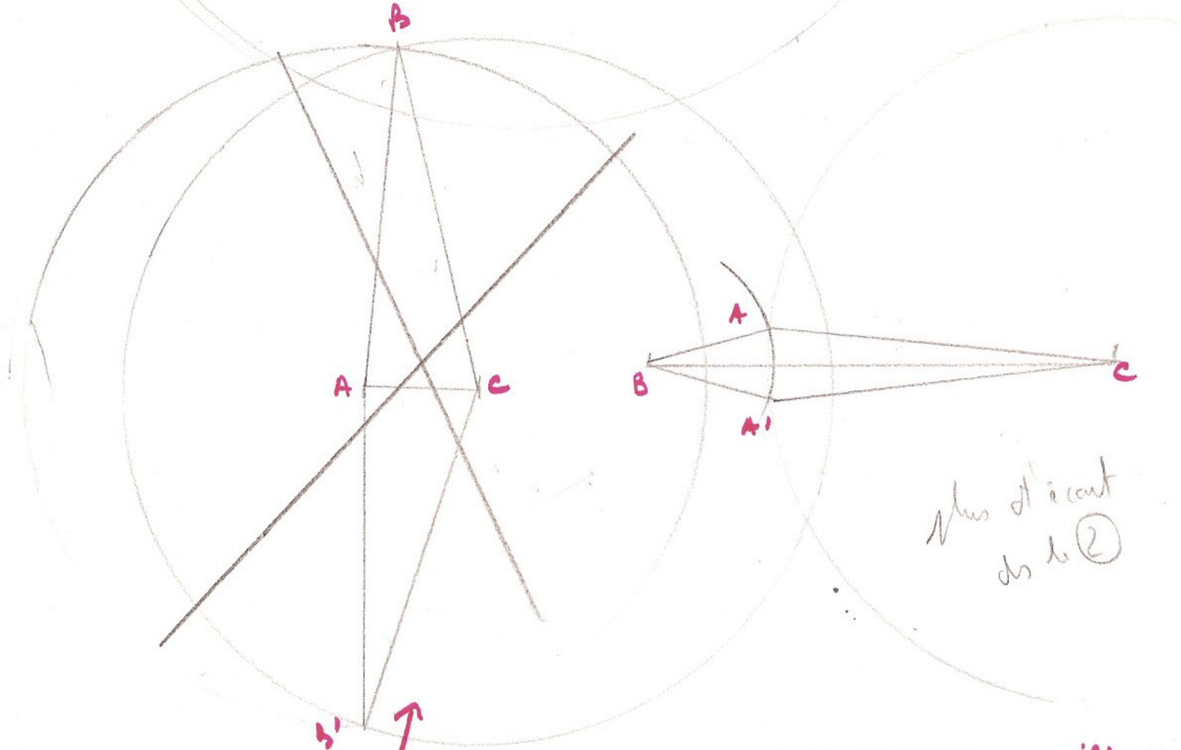
Où se trouve le symétrique de ABC par rapport à [AB]

Bonne question

sans doute en C'AB

Mais ces pts C et C' existent-ils ?

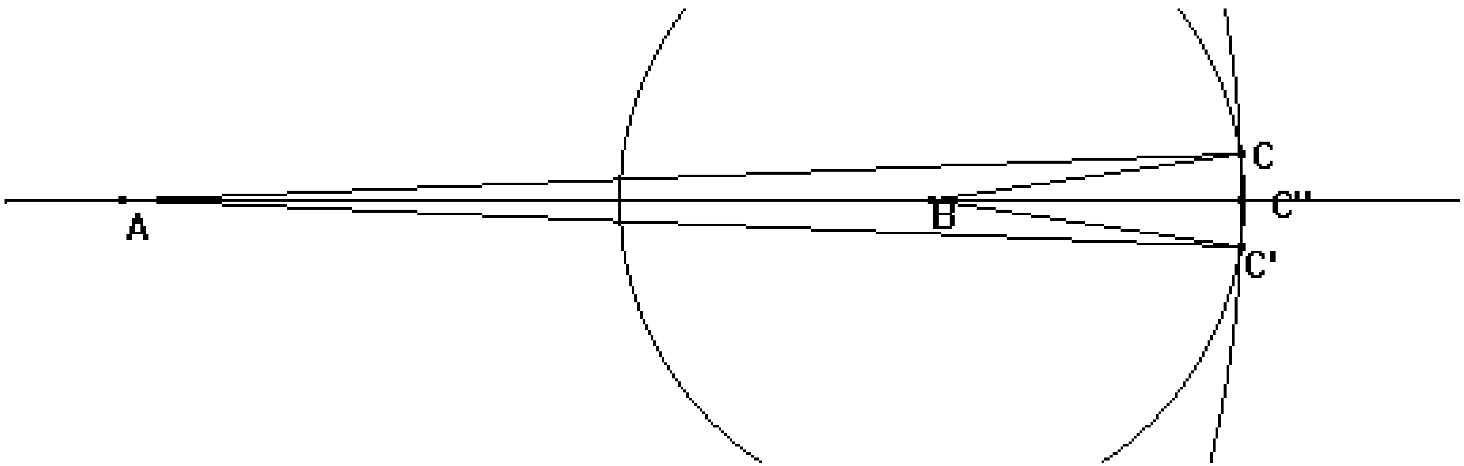
J'ai obtenu 4 triangles

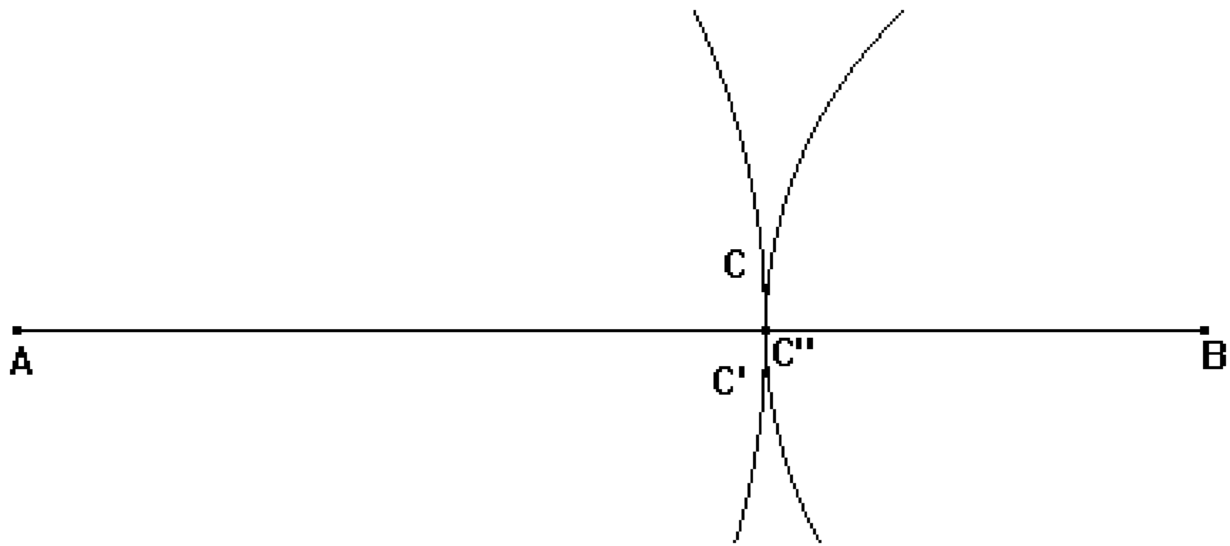


plus d'écart ds le (2)

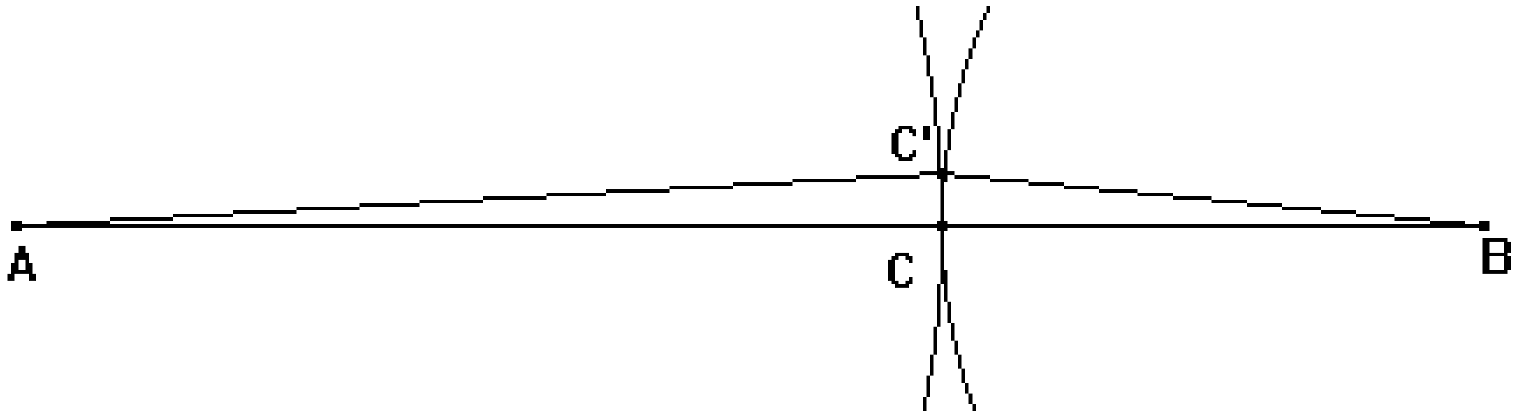
Oui vous auriez pu aussi commencer par tracer AC = 2cm. Vous auriez eu 6 triangles

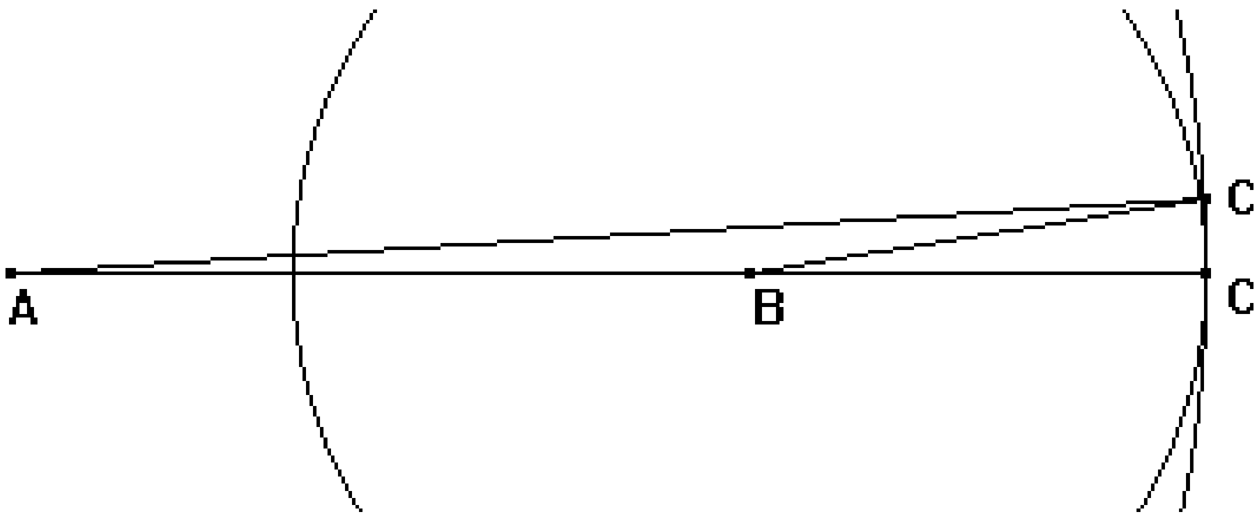
Démonstration de l'alignement





Une autre démonstration





Formulation des résultats_

Pour exprimer le bilan, le professeur demande à tous les élèves d’écrire la relation qui doit exister entre les trois mesures pour obtenir un cas ou l’autre.

Les élèves ont du mal à le dire avec des phrases.

Ceci permet au professeur de montrer l'utilité des lettres pour écrire les résultats.

Etant donné trois longueurs a, b, c en appelant a la plus grande.

1- Si $a > b+ c$ alors le triangle n'existe pas

2- Si $a = b+ c$ alors le triangle est plat

3- Si $a < b+ c$ alors le triangle existe

Réciproque : Le professeur conduit la démonstration en classe entière.
On sait maintenant que le triangle existe (on le trace).
Les mesures de ses côtés sont a, b, c, et a est la plus grande.
Si le triangle existe puis-je avoir :

$a > b + c$ ou $a = b + c$?

Non car dans ces deux cas il n'existerait pas.
Donc nécessairement dans tous les triangles :
$a < b + c$ a étant la mesure du plus grand côté.

Quand les élèves ont discuté de l'existence d'un triangle après avoir fait leur tracé ils sont bien arrivés à la conclusion suivante :

- Si a est inférieur à $b + c$ alors le triangle existe
- Si a n'est pas inférieur à $b + c$ alors le triangle n'existe pas

La deuxième proposition est la contraposée de la réciproque de la première, donc « en acte » les élèves ont bien exploré les deux théorèmes direct et réciproque. Il serait dommage qu'ils ne soient pas énoncés tous les deux clairement. C'est un phénomène courant en didactique de la géométrie : un théorème et sa réciproque apparaissent en même temps « en acte » mais ce n'est pas pour autant qu'il faut se dispenser de les énoncer clairement en les différenciant.

Le professeur peut montrer une animation avec un logiciel comme géogébra par exemple en commençant par deux cercles extérieurs. L'ordinateur indique à chaque fois les mesures des rayons b et c qui restent fixes ($b \geq c$) et celle de la distance entre les centres (qui figure le côté par lequel on commence le dessin du triangle soit a . Cette mesure est d'abord très grande puis elle diminue progressivement .

Le professeur montre les baguettes articulées. On retrouve le fait que le plus grand côté doit être inférieur à la somme des deux autres. Mais en diminuant progressivement ce côté, le professeur arrive à un autre butoir, celui de la différence.

Somme des angles d'un triangle

Un triangle est il déterminé par deux angles, par trois angles ?

Dessiner un triangle ABC tel que $\hat{A} = 35^{0}$ et $\hat{B} = 50^{0}$
Est-ce que tous les élèves ont le même triangle ?

Les élèves remarquent que tous les triangles ont la même forme mais pas la même taille.

Mettre en place les démonstrations en géométrie quand les élèves se posent vraiment des questions sur la conclusion est fondamental dans la construction du sens.

En quatrième, le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore et le cosinus.

Ce sont toujours des questions sur la détermination des triangles qui permettent de démarrer les recherches sur ces sujets.

Pour le théorème de Thalès : *Un triangle est il déterminé par deux angles ? Quelles sont les autres propriétés communes aux triangles ayant les mêmes angles ?*

Pour le théorème de Pythagore *: Combien de côtés sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle ? Quel est le moyen de calculer le troisième côté puisqu'il est déterminé par les deux autres ?*

Pour le cosinus : *Combien d'éléments sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle (angles et côtés) ? Connaissant deux côtés ou bien un angle aigu et un côté, comment peut-on calculer les autres éléments ?*

Conclusion

Nous espérons que ces quelques réflexions pourront aider le professeur qui veut utiliser les AER présentées par AMPERES.