

La problématique des Parcours d'Étude et de Recherche (PER): panoramique d'une expérimentation en cours

Marianna Bosch
FUNDEMI – Facultat d'Economia IQS
Universitat Ramon Llull (Barcelona)

Sommaire

1. L'expérimentation: « Ateliers de Maths avec Wiris » au Secondaire
2. Trois ateliers:
 - Introduction à l'algèbre: Programmes de calcul et « Jeux mathématiques »
 - Algèbre et fonctions: « Économiser pour le voyage de fin d'études »
 - L'entrée dans la modélisation fonctionnelle: « Achat et vente de T-shirts »
3. Partis-pris épistémologiques et didactiques
4. La problématique des PER



1. L'expérimentation: « Ateliers de Maths avec Wiris » au Secondaire

L'équipe

- 5 chercheurs de Barcelone
 - Marianna Bosch (Université Ramon Llull)
 - Josep Gascón (Université Autonome de B)
 - Noemí Ruiz, Berta Barquero, Lúdia Serrano (en thèse)
- 8 professeurs de 5 collèges-lycées (Secondaire)
 - Bernat Ancochea (en thèse depuis mai 2008)
- Responsables de la calculatrice symbolique Wiris

Le projet

- **AU DÉPART:** Mettre en place, analyser, évaluer et diffuser des organisations didactiques intégrant la **CSW** et centrées sur l'enseignement de la **modélisation algébrique et fonctionnelle** au Secondaire
 - Appel d'offres du gouvernement catalan (2005 & 2007)
 - Professeurs engagés dans l'usage de la CSW, avec des années de terrain et sans formation didactique spécifique
 - Établissements très différents, dans différents quartiers ou villes de la banlieue de Barcelone
 - Organisation différente des classes et différentes conditions d'accès aux ordinateurs

Le projet

- Étudier la viabilité, les conditions et les contraintes pour la mise en place de « **Parcours d'Étude et de Recherche** » (PER) dans l'enseignement **secondaire** (et supérieur) catalan
 - Recherche initiée en 2003/04 avec des PER conduits par des enseignants-chercheurs en didactique sous des conditions institutionnelles très particulières
 - Francisco Javier García (2005): Constitution d'un plan d'épargne en 4^{ème} (suites et fonctions, la proportionnalité parmi d'autres modèles fonctionnels)
 - Esther Rodríguez (2006): Comparaison de tarifs téléphoniques en 1^{ère} (modélisation fonctionnelle algébrique et graphique, validation numérique et statistique)

5

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

Le projet

- Initier un travail coopératif entre **chercheurs, professeurs et ingénieurs** informaticiens (Wiris)
 - Préparation conjointe des ateliers avec les professeurs
 - Suivi des expérimentations par des observations de séances et des analyses a posteriori
 - Effet de la recherche pour l'apprêt de la CSW
 - Élaboration de logiciels spécifiques (Wiris-player) pour certains moments du processus d'étude (travail de la technique)

6

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

Conditions des ateliers expérimentés



« Achat et vente de T-shirts »

Prof.	Année	Classes	Conditions
P, J	04/05	2 classes 2 ^{nde}	Groupes entiers (25 élèves)
C		1 classe 1 ^{ère}	Groupe entier (15 élèves)
C,P,J	05/06	3 classes 1 ^{ère} ES	3 heures, groupes entiers (10-30)
Ca*		1 Terminale ES	2 heures, groupe entier (12)
A		1 Terminale ES	4 heures, groupe entier (12)
B*		1 Terminale S et ES	1 heure, groupe « option » (15)
A	06/07	1 Terminale ES	4 heures, groupe entier (14)
S**		1 classe 1 ^{ère} ES	2 heures, groupe entier (28)
B*		1 Terminale S et ES	1 heure, groupe « option » (18)

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

Conditions des ateliers expérimentés



« Jeux mathémagiques »

Prof.	Année	Classes	Conditions
M**	06/07	1 classe 4 ^{ème}	3 h, groupe « option » (25)
J**		1 classe 3 ^{ème}	3 h, groupe « option » (25)
B*		1 classe 4 ^{ème}	3 heures, groupe entier (30)
M**	07/08	1 classe 4 ^{ème}	3 h, groupe « option » (25)
J**		1 classe 3 ^{ème}	3 h, groupe « option » (7)
B*		1 classe 3 ^{ème}	3 heures, groupe entier (24)
A		2 classes 3 ^{ème}	4 heures, groupes entiers (23-25)
Ag		3 classes 4 ^{ème}	4 heures, groupes entiers (25-30)

8

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

Conditions des ateliers expérimentés

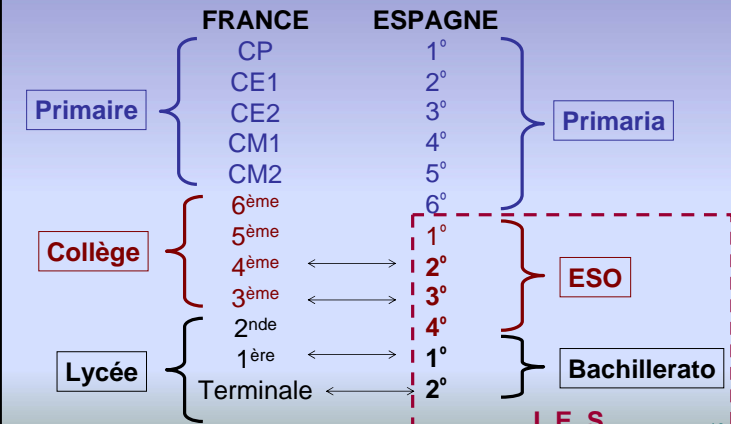
- **Économiser pour le voyage de fin d'études**



Tous précédés par « Jeux mathémagiques »

Prof.	Année	Classes	Conditions
B*	07/08	1 classe 4 ^{ème}	3 heures, groupe entier (25)
A		2 classes 4 ^{ème}	3 heures, groupes entiers (23-25)
J**		1 classe 4 ^{ème}	3 heures, groupe « option » (7)

Parenthèse: le système éducatif espagnol



Organisation des ateliers

NOUVEAU CONTRAT:

- La classe se constitue en un « **atelier de consultation mathématique** »; les élèves reçoivent une commande et y consacrent quelques jours de classe (8-10 séances).
- Les élèves travaillent **en groupe** et doivent produire une **réponse écrite** à la fin de l'atelier (« rapport final »), parfois aussi des réponses ou questions intermédiaires et un « dossier » final à guise de bilan.
- On alterne travail en **groupe** / mises en **commun**, travail en **classe** / travail en salle **d'informatique**.
- L'organisation est parfois subordonnée à la disponibilité de la salle d'informatique. Dans certains cas, les élèves disposent toujours d'un ordinateur ou sont toujours en salle d'informatique.

Organisation des ateliers

TRAVAIL DANS L'ÉQUIPE:

- L'équipe de **chercheurs** prépare l'atelier, le présente et discute avec les **professeurs** puis on décide ensemble les matériels à distribuer et les détails de l'organisation.
- La plupart des séances sont assistées par un **observateur** qui enregistre ou prend des notes et apporte du soutien au professeur dans les phases de travail en groupe.
- En fin de séance, **professeur et observateur** discutent sur la suite de l'atelier et les changements à faire.
- Des **rapports d'observation** (« journal des séances ») sont diffusés dans l'équipe au fur et à mesure qu'ils sont rédigés.
- En fin d'atelier on réunit **professeurs, chercheurs et ingénieurs** pour faire un **bilan**. → **DIFFICULTES**

Sommaire

1. L'expérimentation: « Ateliers de Maths avec Wiris » au Secondaire
2. Trois ateliers:
 - Introduction à l'algèbre: Programmes de Calcul et Jeux « mathématiques »
 - Algèbre et fonctions: « Économiser pour le voyage de fin d'études »
 - L'entrée dans la modélisation fonctionnelle: « Achat et vente de T-shirts »
3. Partis-pris épistémologiques et didactiques
4. La problématique des PER



Jeux mathématiques (4^{ème} – 3^{ème})



QUESTION: Expliquer et inventer des jeux mathématiques où on demande de penser un nombre, de faire des opérations et on devine, soit le résultat, soit le nombre pensé à partir du résultat.

Les jeux sont des Programmes de Calcul (PC):

On devine le résultat

$$PC(n) \equiv b, PC(n) \equiv n, \\ PC(n) \equiv an, PC(n) \equiv n + 1$$

On devine le nombre pensé

$$PC(n) \equiv an + b = R$$

On compare deux jeux

$$\text{Peut-on avoir } PC(n) = PC'(n)?$$

La CSW permet d'effectuer les PC « pas à pas » et « en une seule ligne », montre la forme canonique du PC, résout $PC(n) = R$.

LE MATHÉ-MAGICIEN

Le Mathé-Magicien vous fait des jeux de magie. Pouvez-vous expliquer comment il fait? Inventer de nouveaux jeux?

- ❖ Pense un nombre, ajoute son double, divise le résultat par 3, ajoute 75 et soustrait le nombre pensé. **Tu obtiens 75!**
- ❖ Pense un nombre, ajoute 2000, divise le résultat par 10, soustrait 200 et multiplie le résultat par 20. **Tu obtiens le nombre pensé!**
- ❖ [...]
- ❖ Pense un nombre entre 1 et 9. Multiplie-le par 2, ajoute 2 au résultat, multiplie le nouveau résultat par 5, ajoute 12, multiplie le nouveau résultat par 10, soustrais 220. **Le nombre que tu obtiens commence avec le nombre que tu avais pensé!**

LE MATHÉ-MAGICIEN

Un jeune Mathé-Magicien vous fait des jeux de magie, mais il rate parfois ses coups. Pouvez-vous l'aider?

Afin d'obtenir de nouveaux jeux, un Mathé-Magicien change l'ordre des opérations. Combien de jeux obtiendra-t-il?

A partir du résultat du jeu (ou d'une propriété de ce résultat), pouvez-vous deviner le nombre pensé?

- Le résultat est 18
- Le résultat est pair (entier, etc.)
- Le résultat est le même que si on fait ...

Économiser pour le voyage de fin d'études (3^{ème} – 2^{nde})



QUESTION: Choisir un plan d'épargne en 3 ans parmi 4 proposés et déterminer le montant initial à déposer pour obtenir une somme donnée (prix approximatif du voyage).

Négocier si nécessaire avec la banque de nouvelles conditions.

Annuel $C_0 \cdot (1+i)^3 - d \cdot C_0$

Trimestriel $C_0 \cdot (1+i)^{12} - d \cdot C_0$

Mensuel $C_0 \cdot (1+i)^{36} - d \cdot C_0$

Les formules ne sont pas données, il faut les construire.
La CSW permet de résoudre des équations et de représenter des fonctions à une variable (pour résoudre des inéquations)

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

17

PRÉPARATION DU VOYAGE EN 2^{nde}

Les 30 élèves de 6^{ème} veulent faire des économies pour leur voyage de fin d'études. Il veulent partir un semaine en 2011 à Paris et ont besoin de [...] **600 €/personne** environ. Ils ont besoin de l'argent en janvier 2011 et peuvent initier l'épargne en janvier 2008. Ils envisagent de faire un premier paiement maintenant (200 €/personne, par exemple) et l'investir à 3 ans. Une caisse d'épargne leur offre:

PLA D'EPARGNE A On nous donne un 10% du capital annuellement et nous enlève un 1.5% du montant initial (commissions).	PLAN D'EPARGNE B On nous donne un 3% du capital trimestriellement et nous enlève un 3% du montant initial (commissions).
PLAN D'EPARGNE C On nous donne un 1,8% du capital trimestriellement et nous enlève un 1% du montant initial (commissions).	PLAN D'EPARGNE D On nous donne un 0,7% du capital mensuellement et nous enlève un 1% du montant initial (commissions).

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

18

PRÉPARATION DU VOYAGE EN 2^{nde}

(1) Les élèves de 6^{ème} vous demandent d'étudier la situation et de leur écrire une recommandation sur la stratégie à suivre pour épargner l'argent dont ils ont besoin.

Il faut tenir compte que les parents ne sont pas disposés à payer un somme trop haute. Il se peut aussi que le voyage ne coûte pas exactement 600 €, mais un 10% ou un 20% de plus.

(2) Les parents disent aux élèves de négocier avec la caisse d'épargne des conditions meilleures.

S'il peuvent négocier avec la banque, que leur recommandez-vous: d'essayer d'augmenter l'intérêt ou de diminuer la commission? Comment devraient-ils poser la négociation? Quel intérêt ou dépense devraient-ils obtenir s'ils veulent maintenir un paiement initial d'environ 200 ou 300 €?

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

19

Achat et vente de T-shirts (2^{nde} – 1^{ère} – Tale)



QUESTION: Étude des bénéfices obtenus par la vente de x exemplaires d'un produit étant donné la recette I et les coûts C .

On considère trois cas:

ASSOCIATION (coûts linéaires) $I(x) = px$ $C(x) = cx + L$

USINE (coûts quadratiques) $I(x) = px$ $C(x) = (\alpha x + c)x + L$

USINE (fonction demande) $p = p(x)$, $I(x) = p(x) \cdot x$, $C(x) = p(x) \cdot x + L$

Les fonctions ne sont pas données, il faut les construire.
La CSW permet de résoudre des équations et de représenter des fonctions à une variable (pour résoudre des inéquations)

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

20

CAS 1: ASSOCIATION DE JEUNES

Depuis quelques années, une association de jeunes du quartier imprime et vend des T-shirts pour financer une partie de ses activités. Pour éviter des problèmes de stock, ils ne font des T-shirts que sur demande. Ils disposent des données suivantes:

Mois	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
T-shirts vendus	513	100	260	329	498
Coûts Totaux (€)	1582,5	550	950	1122,5	1545
Recette Totale (€)	2667,6	520	1352	1710,8	2589,6

Ils achètent à 2,5€ l'unité, vendent à 5,20€ et paient 300€ de loyer du stand. Que peuvent-ils faire pour arriver à 3000€ de bénéfices mensuels?

CAS 2: UNE USINE DE T-SHIRTS

Nous recevons une deuxième commande par une usine de matériel de sport. Ils nous demandent quelles mesures prendre pour augmenter leur rentabilité.

Ils aimeraient avoir un bénéfice mensuel de 7000 €.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril
T-shirts vendus	3886	5900	6093	5450
Coûts Totaux (€)	13425	20431	21145	18795
Recette Totale (€)	15544	23600	24372	21800

Le coût unitaire n'est pas constant : $p = 10^{-5}x + c$

CAS 3: FONCTION DEMANDE

Une étude de marché montre qu'il existe une relation entre la quantité d'articles vendus et le prix de l'article. Dans le cas des T-shirts, cette étude montre trois fonctions différentes selon le marché auquel est destiné l'article:

- (1) $p(x) = K - a \cdot x$ VILLE A
- (2) $p(x) = \frac{K}{x + b} - M$ VILLE B
- (3) $p(x) = K \cdot e^{-b \cdot x} - M$ VILLE C

La prise en compte de la demande produit-elle des différences dans les résultats à présenter à l'association de jeunes? A l'usine?

Sommaire

1. L'expérimentation: « Ateliers de Maths avec Wiris » au Secondaire
2. Trois ateliers:
 - Introduction à l'algèbre: Programmes de calcul et « Jeux mathématiques »
 - Algèbre et fonctions: « Économiser pour le voyage de fin d'études »
 - L'entrée dans la modélisation fonctionnelle: « Achat et vente de T-shirts »
3. Partis-pris épistémologiques et didactiques
4. La problématique des PER

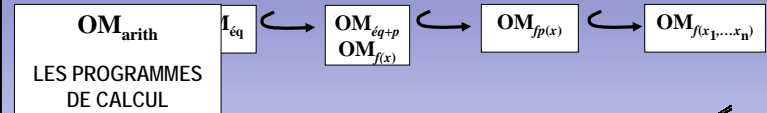


3. Partis-pris épistémologiques et didactiques

Choix épistémologique: la modélisation algébrico-fonctionnelle

- L'algèbre comme **processus de modélisation** d'organisations mathématiques
- On peut parler du **degré d'algébrisation** d'une organisation mathématique et d'organisations mathématiques **plus ou moins algébrisées**
- L'objectif est d'avancer dans les **étapes d'algébrisation**

PROCESSUS D'ALGÉBRISATION D'OM



$$140 \rightarrow 140 + 280 = 420 \rightarrow 420/3 = 140$$

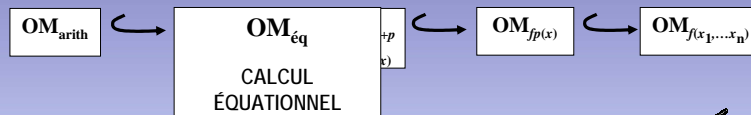
$$\rightarrow 140 + 75 = 215 \rightarrow 215 - 140 = 75$$

PLAN D'ÉPARGNE A: 6000 € montant initial
 Année 1: $\rightarrow 0,10 \cdot 6000 = 600 \rightarrow 6000 + 600 = 6600$
 Année 2: $\rightarrow 0,10 \cdot 6600 = 660 \rightarrow 6600 + 660 = 7260$
 Année 3: $\rightarrow 0,10 \cdot 7260 = 726 \rightarrow 7260 + 726 = 7986$
 $\rightarrow 0,015 \cdot 6000 = 90 \rightarrow 7986 - 90 = 7896$

On achète à 2,50 €/unité, on vend à 5,20 €, 300 € loyer
 Bénéfice par unité: $5,20 - 2,50 = 2,70$
 Recette "brute": $3000 + 300 = 3300$
 Il faut vendre: $3300/2,70 = 1222,22 \approx 123$ T-shirts



PROCESSUS D'ALGÉBRISATION D'OM



$$n \rightarrow (n + 280)/3 + 75 - n = \dots = 75$$

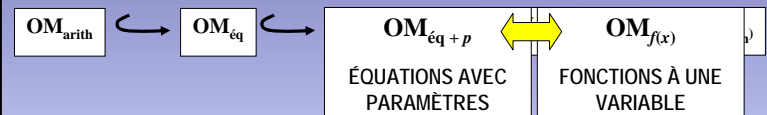
$$n \rightarrow PC(n) = 120 \rightarrow \text{Que vaut } n?$$

PLAN D'ÉPARGNE A: Soit x le montant initial
 On veut 600 € pour le voyage:
 $1,10^3 \cdot x - 0,015 \cdot x = 600 \rightarrow x = 600/1,316 = 455,93$

Soit x le nombre de T-shirts à vendre:
 $5,20 \cdot x - 2,50 \cdot x - 300 = 3000 \rightarrow x = \dots \approx 123$ T-shirts



PROCESSUS D'ALGÉBRISATION D'OM



JEU
 $n \rightarrow PC(n) = 120 \rightarrow \text{Que vaut } n?$ (par essais)
 $PC1(n)$ et $PC2(n) \rightarrow \text{Lequel est plus grand?}$

Jeux 'génériques' $PC(n) \equiv k; PC(n) \equiv kn; \text{ etc.}$

PLAN D'ÉPARGNE:
 Comparer les 4 plans pour C_0 quelconque
 Considérer un prix final quelconque
 Si on veut $C_0 = 300$ €, on négocie i ou d ?

T-SHIRTS
 Vaut-il mieux augmenter p ou diminuer c ou L ? $x = \frac{3000 + L}{p - c}$
 De combien?



PROCESSUS D'ALGÈBRISATION D'OM

OM_{arith}

↔

OM_{éq}

↔

OM_{éq+p}
OM_{f(x)}

↔

OM_{fp(x)} ↔ OM_{f(x₁...x_n)}

FORMULES ET ÉTUDE DE LA COVARIATION DE 2 VARIABLES

PLAN D'ÉPARGNE: Négociation de i et d

$$C_{\text{final}} = C_0 \cdot (1 + i)^3 - d \cdot C_0$$

$$d = (1 + i)^{12} - C_{\text{final}} / C_0$$

$$C_{\text{final}} / C_0 = (1 + i)^{12} - d$$

T-SHIRTS: Étude de p pour différentes valeurs de x ou de B

$$p = 2.5 + \frac{B + 300}{x}$$

29

$B = -\alpha x^2 + (p - c) \cdot x - L$

On varie α

On varie L

On varie p

On varie c

30

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

3. Partis-pris épistémologiques et didactiques

La calculatrice symbolique comme outil pour faciliter le travail expérimental (milieu numérique, puis graphique)

- Facilite le travail avec des Programmes de Calcul (à tous niveaux d'algébrisation), en particulier le jeu formules/valeur numérique
- Rend explicite la relation entre les graphes de fonctions et les expressions algébriques correspondantes
- Permet la non-différentiation entre paramètres et variables (ou inconnues).

31

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

➔ Non différenciation entre inconnues, paramètres et variables:

WIRIS Desktop 2 - Nouveau fichier1

Fichier Éditer Outils Aide

WIRIS CAS

Édition Opérations Symboles Analyse Matrices Unités Combinatoire Géométrie Grec P

tracer représenter Résoudre équ tracer3d Résoudre sys

```

p=7 → 7
c=3 → 3
L=350 → 350
B=(p-c)·x-L → 4·x-350
représenter(B) → traceur1

x=500 → 500
c=3 → 3
L=350 → 350
B=(p-c)·x-L → 500·p-1850
représenter(B) → traceur1

```

WIRIS

Wiris facilite le passage de OM_{f(x)} à OM_{fp(x)} car elle traite les expressions algébriques comme des fonctions sans qu'on ait besoin de spécifier la variable indépendante.

32

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

3. Partis-pris épistémologiques et didactiques

Choix didactiques: nouveau contrat

- L'avancée du travail est guidée par une **question** que l'on fait évoluer. On ne sait pas où l'on va arriver: la **question** et les **réponses** sont premières, les **OM** sont secondaires
- **Responsabilités** partagées professeur – élèves:
 - **TOPOGÉNÈSE**: il faut se répartir les tâches
 - **CHRONOGÉNÈSE**: il faut décider de l'avancée du temps
 - **MESOGÉNÈSE**: il faut se procurer des milieux adéquats
 - + **OUTILLAGE** (informatique)
 - **MOMENTS DIDACTIQUES**: institutionnalisation et validation

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

33

3. Partis-pris épistémologiques et didactiques

Choix mathématico-didactiques:

HYPOTHÈSE: Les limitations du travail dans une OM sont le moteur du processus d'algébrisation et provoquent le besoin d'OM de plus en plus algébrisées

- ↪ **Limitations de l'OM, pas des élèves: comment les prendre en compte, les institutionnaliser?**
- ↪ **Comment convertir les limitations en de nouvelles questions qui relancent l'étude? Questions qui surgissent de l'OM, pas des élèves...**

→ **MATHÉMATISATION, DÉDACTIFICATION**

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

34

4. La problématique des PER

Un grand nombre de contraintes:

NIVEAUX DE LA CIVILISATION & SOCIÉTÉ

- « Désacralisation » des savoirs VS Monumentalisme (prioriser les questions face aux réponses)
- Différentes transpositions/apprêts/élémentarisations
- Différentes cartes et mixités disciplinaires

NIVEAUX DE L'ÉCOLE & PÉDAGOGIE

- Invisibilité des mathématiques comme outil de réponse
- Enfermement disciplinaire (et thématique!)
- Usage « pédagogique » des TIC: **voir, expérimenter, faire**
- Organisation de l'étude en séances courtes
- Le travail individuel s'impose au travail en groupe
- ...

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

35

4. La problématique des PER

Un grand nombre de contraintes:

NIVEAUX « DIDACTIQUES »

- Absence de travail du questionnement (reformulation, évolution des questions, classification)
- Absence du travail d'écriture/rédaction en mathématiques
- Travail en groupe (planifier, structurer, revoir, valider)
- Travail de synthèse, structuration des OM (technologico-théorique, institutionnalisation)
Ex: les formules ou fonctions utilisées
- La mise en valeur des réponses (et de leurs limitations!)
- ...
- **BEAUCOUP DE GESTES « MATHÉMATIQUES » RESTENT ENFERMÉS DANS LE TOPOS DU PROFESSEUR voire des mathématiciens! (externes au travail de l'élève)**

Colloque AMPERES (INRP Lyon) – Juin 2008

36

4. La problématique des PER

L'intégration des PER peut être locale?

QU'EST-CE QU'IL FAUT? [CONDITIONS]

→ Répertoire de **questions génératrices**

→ Répertoire de **possibles parcours** et du lien avec les programmes (« élémentarisation standard »)

+ **DIFFUSION** pour influencer sur la **culture épistémologique de l'école et de la société** (ou de la société et de l'école?)
RÔLE DE LA NOOSFÈRE?

4. La problématique des PER

L'intégration des PER peut être locale?

QU'EST-CE QU'IL FAUT? [CONDITIONS]

→ De nouvelles **praxéologies didactiques** (« gestes de l'étude » + dispositifs + discours technologico-théories)

- POUR LE PROFESSEUR
- POUR L'ÉLÈVE
- POUR LES CITOYENS (!)

+ du **TEMPS**, de la **RÉGULARITÉ** ...
... et beaucoup de **RECHERCHE!**

« *Sin prisa pero sin pausa* »

MERCI BEAUCOUP

Colloque AMPERES
INRP de Lyon, 13 juin 2008

**La problématique des Parcours
d'Étude et de Recherche (PER):**
panoramique d'une expérimentation
en cours

Marianna Bosch

FUNDEMI – Facultat d'Economia IQS
Universitat Ramon Llull (Barcelona)