UNE AUTRE FAÇON D’INTRODUIRE LE PRODUIT SCALAIRE

Anne Crouzier

IREM de Clermont-Ferrand

Sommaire

1° Une question : Pourrait-on définir le produit de deux vecteurs ?

On sait faire la somme de deux vecteurs, on sait les multiplier par un réel, mais on n'a pas défini le produit de deux vecteurs. A quoi cela pourrait-il ressembler ?

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE :
On connaît la notion de repère orthonormé. Soit $\mathcal{R}$ un tel repère.
On sait calculer la distance de deux points A et B dans ce repère, et donner une signification à la longueur d'un vecteur, ce qui permet de définir la norme d'un vecteur $\vec{u}$: (x, y) par
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
La notation "norme" est une variante de la notation valeur absolue, qui représente en quelque sorte la « longueur d'un nombre » puisque c'est sa distance à 0.
Pour obtenir |a| avec une calculatrice, on peut utiliser la touche "carré" suivie de la touche "racine carré", ce qui correspond à $|a| = \sqrt{a^2}$ et donc que $a \times a = |a|^2$

Par analogie, on peut donc penser à écrire que $\vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2 = x^2 + y^2$

Si l'on veut définir le produit de 2 vecteurs, il serait bien que ce produit ait quelques-unes des propriétés de la multiplication des réels, et en particulier la commutativité et la distributivité par rapport à l'addition parce que ce sont ces propriétés qui sont utiles pour le calcul.
On veut donc avoir :
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v}$

En traduisant cela sur les coordonnées, et en posant (x, y) les coordonnées de $\vec{u}$ et (x', y') celle de $\vec{v}$, comme on sait calculer la norme d'un vecteur, on obtient :
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}((x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2))$
Soit après simplification :
$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

2. Un air connu ? Par interrogation, on invite les élèves à répondre aux questions suivantes :

Quels sont les moyens que vous avez pour reconnaitre le parallélisme ?
- Avec un quadrillage
- Egalite des coefficients directeurs de droites
- $xy'-x'y= 0$ pour des vecteurs

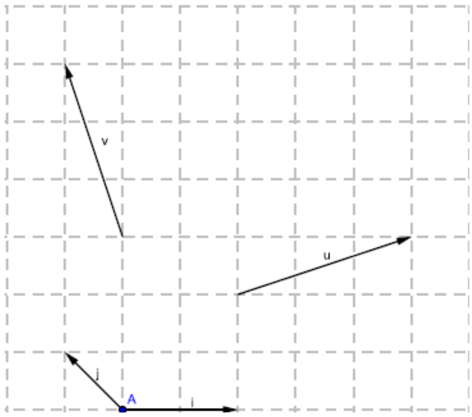
Remarque, dès qu'on parle d'équation, de coordonnées et même de quadrillage, on a défini un repère. Ce repère doit-il avoir des propriétés particulières ?

3. Travail à la maison : En vous inspirant éventuellement des méthodes précédentes, quels sont les moyens que vous avez pour reconnaître l'orthogonalité ?

La nature du repère doit-elle être particulière dans ce cas ?

4. Mise au point en classe

L'orthogonalité se traite avec le théorème de Pythagore, et en particulier avec la notion de longueur d'un segment qui ne pourra se calculer avec des coordonnées que si le repère est orthonormé.



- Avec un quadrillage :

On trouve que $y' = kx$ et $x' = -ky$, ce qui donne que $xx' = -yy'$

- Avec une équation :

On compare les coefficients directeurs a et a' et on trouve que $a = -\dfrac{1}{a'}$

Avec Pythagore :

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ avec les coordonnées (x, y) et (x', y'). Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x' - x; y' - y)$ et la relation de Pythagore donne :

$x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

5. A quoi correspond donc le produit scalaire ? Un bilan

- Il est défini, a priori, dans un repère orthonormé, dans lequel on peut calculer des longueurs

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

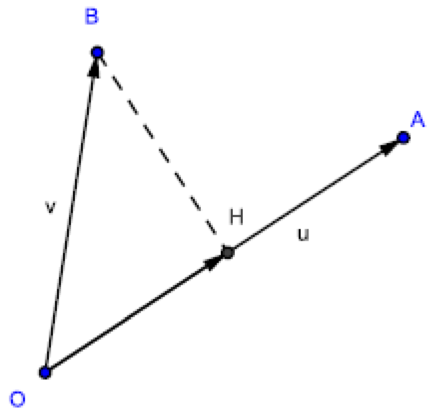
Mais il ne dépend donc pas du repère orthonormé choisi (à condition que l'unité soit la même).

- Il permet de caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs :

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

- Mais si les vecteurs ne sont pas orthogonaux, quelle peut-être la signification du produit scalaire ?

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés par $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Comme le produit scalaire ne dépend pas du repère choisi, on peut choisir le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OA} = r\vec{i}$ avec $r > 0$.
Dans ce repère, A a comme coordonnées $(r, 0)$. Notons $(x'; y')$ les coordonnées de B et (r', θ) ses coordonnées polaires. r et r' sont respectivement les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on a $x' = r'\cos\theta$
D'après la formule établie ci-dessus, on obtient $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = rr'\cos\theta$ donc :
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$



D'autre part, si on appelle *H* le projeté orthogonal de *B* sur (*OA*), on trouve que
$\overrightarrow{OH} = r' cos\theta\vec{\imath}$
et par conséquent :
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
Comme *cos* 0 = 1 et *cos* π = -1 cela permet de définir simplement le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires : si les deux vecteurs sont colinéaires de même sens, alors c'est le produit des normes, s'ils sont de sens opposés, c'est l'opposé du produit des normes.