Un thème pour refonder l'enseignement mathématique au collège ?[1]

La détermination de distances entre points inaccessibles.

Robert Noirfalise

I Introduction :

En 2003/2004 nous avons proposé à l'IREM de Clermont-Ferrand, la création d'un groupe d'étude intitulé « *Quelles notions enseignées au collège ? Pourquoi ? Pour qui ?* ». Marc Legrand, alors président de l'ADIREM, lors du séminaire qui s'est tenu à Nice en Mars 2003 et qui réunissaient les directeurs d'IREM et les responsables de CII avait lancé un projet intitulé « Le nouvel élan ». Nous avons interprété celui-ci comme une demande d'étude curriculaire. Comment refonder l'enseignement des mathématiques en réfléchissant à ce que pourrait être un programme d'enseignement des mathématiques au collège pour un citoyen du XXI[e] siècle ? Formuler ainsi cette question implique que nous nous intéressions à un enseignement pour tous, ce qui nous a semblé légitime, dès lors que nous nous préoccupions de ce qui peut se faire au collège. Il ne s'agissait pas de se substituer en quoi que ce soit à un groupe d'experts chargé d'élaborer des programmes mais d'entreprendre une étude qui, avec d'autres, menées dans les IREM, pourrait servir à un tel groupe d'experts ou plus généralement contribuer, très modestement, à une réflexion sur l'avenir de l'enseignement de notre discipline.
Nous nous attendions à ce que cette proposition rencontre plutôt l'accord des vieux routiers de l'IREM, mais cela n'a pas été vraiment le cas, ceux-ci ayant matière à travailler avec des sujets plus directement utilisables dans le quotidien de leurs classes et pour l'animation de stages. Un groupe s'est cependant formé avec trois animateurs chevronnés de l'IREM (dont deux retraitées) et quatre « nouveaux ». La contribution de notre groupe a été nécessairement modeste étant donné l'ampleur du sujet et le peu de temps que nous avons pu lui consacrer : cinq réunions de trois heures réparties dans l'année ont ponctué le travail fait par des enseignants travaillant à temps plein dans leurs établissements et ne bénéficiant d'aucunes rétributions pour cela.
Peu nombreux, nous avons cependant abordé plusieurs domaines :

- **Déterminations de distances et de longueurs inaccessibles** : c'est ce point que nous développerons dans ce qui suit.
- **Mathématiques et sécurité routière** : il s'agit de faire qu'un élève à la sortie du collège puisse comprendre, en raison, les messages délivrés par les médias concernant la sécurité routière. Par exemple, quelles sont les données et les raisons expliquant le danger de l'alcool au volant ou encore pour quelles raisons sur autoroute conseille-t-on de respecter une distance de sécurité déterminée par deux bandes blanches ?
- **Mathématiques financières** : Intérêts simples, composés, annuités, T.E.G. (taux effectif global) sont quelques-uns des termes que l'on rencontre sur la route des mathématiques financières. Il nous a semblé que dans une formation pour tous, comme celle délivrée au collège, il serait bien que le futur citoyen, plus que cela n'est fait aujourd'hui, soit formé à de telles mathématiques. Sans parler des pourcentages qui opèrent dans les réductions et augmentations, dans le calcul des taxes, on peut

[1] Une contribution de l'équipe de l'IREM de Clermont aux journées de la CII Didactique de la grande Motte en mai 2006

penser que tout citoyen de demain aura dans sa vie soit à emprunter soit à placer de l'argent : qu'il soit formé aux règles élémentaires du fonctionnement des opérations financières peut donc sembler utile. Outre les calculs de pourcentages, cela pourrait impliquer une introduction, motivée par l'étude des intérêts composés, des suites géométriques, de la somme de n termes consécutifs d'une telle suite pour la détermination de ce que l'on appelle les annuités. Ce serait aussi un bon motif pour user d'un tableur, lequel permettrait de faire des études expérimentales du comportement de suites arithmétiques et géométriques.

Nous nous plaçons dans la perspective ou l'enseignement d'un tel domaine serait dévolu aux professeurs de mathématiques, ce qui ne va pas nécessairement de soi : on peut imaginer, par exemple, qu'un tel enseignement soit confié, aujourd'hui, aux professeurs de sciences économiques et sociales.

Notons que l'on peut prévoir une difficulté, une résistance à l'introduction d'un tel domaine dans l'enseignement de notre discipline: les « mathématiques financières » sont elles vraiment mathématiques ? Ne sommes nous pas sur un territoire qui n'est pas celui du mathématicien ? Certes, nous y rencontrons des mathématiques, mais il suffit d'ouvrir un manuel consacré à ce sujet, pour y rencontrer nombre de termes peu familiers et qui proviennent du monde de la finance. Territoire hybride, fait certes de mathématiques mais aussi d'autres références, celles de la finance. On peut comprendre le terme de « mathématiques mixtes » utilisé autrefois pour désigner ce type de domaine d'étude. Des mathématiciens, auteurs de manuels ont fait le choix d'annexer ce territoire : c'est ainsi que F. Peyrard, traducteur d'Euclide, d'Appolonius et d'Archimède publie en 1830 avec Bezout un manuel[2] d' « Arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie », laquelle arithmétique est suivie des principes fondamentaux de l'arithmétique, de toutes les règles nécessaires au commerce et à la banque, et d'un traité succinct des nouveaux poids et mesures.

II Un parcours d'étude et de recherche : Déterminations de distances et longueurs inaccessibles.

1. Le retour des grandeurs au collège .

Le toilettage des programmes de collège qui est en cours, s'accompagne de quelques nouveautés. Ainsi, il est maintenant légitime et même recommandé d'utiliser les unités de mesures dans les formules. Cette utilisation devrait techniquement faciliter les changements d'unités dans la manipulation de grandeurs produits ou quotients. C'est aussi rappelé, comme le disait déjà Henri Lebesgue en 1935, l'importance de l'étude des grandeurs dans la construction des mathématiques. Dans cette optique, « mesurer une grandeur » est un genre de tâches qui va se décliner en de multiples types de tâches selon les grandeurs considérées. Mesurer une longueur ou la distance entre deux points, peut à ce titre constituer un parcours d'étude et de recherche, que l'on peut ouvrir dès la sixième et même en primaire et clore (provisoirement) à la fin de la classe de troisième. Une même question peut constituer le point de départ de ce parcours : « Comment mesurer une longueur ou la distance entre deux points ? ». Dans ce parcours on pourrait rencontrer des mesures effectives avec un double décimètre mais aussi comme cela se faisait

[2] Bezout et Peyrard,, 1830, douzième édition, Arithmétique de Bezout à l'usage de la marine et de l'artillerie, Dufour et C[ie] Paris.

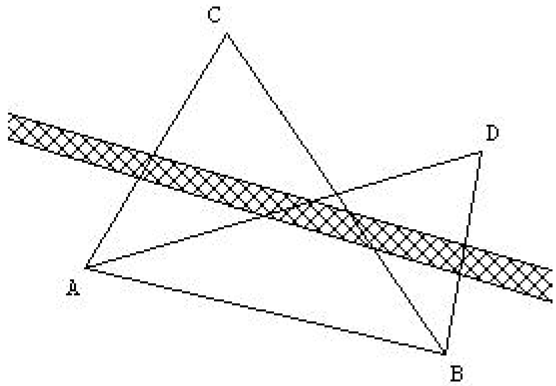
autrefois avant la réforme des mathématiques modernes avec un pied à coulisse[3] pour avoir une précision au dixième de millimètre. Dans ce qui suit nous examinerons le parcours en un point où la pratique de mesures effectives ayant été entraînée, on se demande comment déterminer la distance entre deux points lorsqu'on ne peut plus procéder à une mesure directe ou lorsque celle–ci devient laborieuse et difficile.

2. Un certain étonnement :

L'étonnement est le suivant . Pourquoi attendre la classe de 1re S pour poser le problème suivant ?

Problème n°1. On se propose de déterminer la distance entre deux points « inaccessibles » (tels que l'on ne peut opérer une mesure directe). C'es par exemple le cas si l'opérateur est séparé de ces deux points par une rivière qu'il ne peut franchir.

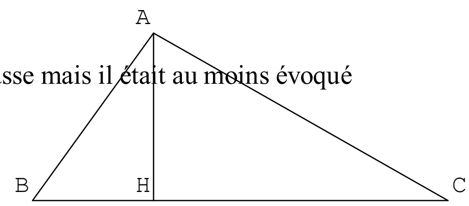
La situation est schématisée par la figure ci-dessous. La distance à mesurer est CD.
Le géomètre, sur le terrain qui lui et accessible, mesure la distance entre deux points A et B.
Par visée, il mesure les angles $\widehat{CAD}, \widehat{DAB}, \widehat{CBA}$ et $\widehat{DBC}$.
Montrer que l'on peut déterminer CD à l'aide de ces données
Application numérique :
AB=172m. $\widehat{CAD} = 36°, \widehat{DAB} = 43°, \widehat{CBA} = 48°$et $\widehat{DBC} = 35°$.



Une réponse aisée, à notre étonnement, est bien sûr la suivante : pour résoudre ce problème, on a besoin de la formule d'Al-Kashi et celle-ci s'établissant avec le produit scalaire qui ne s'introduit qu'en classe de 1re, force est d'attendre ce niveau de classe. Notons que l'on introduit aussi dans un même chapitre « la loi des sinus » relative à un triangle qui, elle, peut se démontrer sans le recours au produit scalaire (Il convient d'avoir cependant le sinus d'un angle géométrique obtus). Notons aussi, au passage, que le produit scalaire est une notion difficile à introduire sous une forme motivée.
Ne nous préoccupons plus du produit scalaire mais de la question suivante :

Question : Soit ABC un triangle. On connaît les longueurs AB et BC et l'angle $\hat{B}$. La longueur AC est alors entièrement déterminée. Peut-on la calculer, c'est à dire trouver une formule qui en permette le calcul en fonction des paramètres AB, BC et $\hat{B}$?

La formule est celle d'Al-Kashi et on peut la démontrer banalement avec le produit scalaire : une autre façon de faire suppose que Pythagore a été démontré auparavant.
Supposons que l'on connaisse l'angle en B, AB et BC.



[3] Le pied à coulisse comme outil de mesure n'était peut-être pas présent en classe mais il était au moins évoqué et son mode de fonctionnement expliqué

Si H le pied de la hauteur issue de A est sur [BC], on a :
$AC^2 = AH^2+HC^2$ et $AB^2 = AH^2+HB^2$
$AC^2=AB^2+HC^2-HB^2= AB^2+(BC-HB)^2-HB^2=AB^2+BC^2-2.BC\times BH$

On remarque que $BH = AB.\cos \hat{B}$ et cela achève la démonstration dans ce cas particulier. On peut aussi sans difficulté montrer que cette formule reste valide dans le cas où H est en dehors de [BC] sur la droite (BC) du côté de C, ceci dans le cas où l'angle en C est obtus. Si l'angle en B est obtus, la formule se généralise également à la condition d'avoir défini le cosinus d'un angle obtus.

Questions :
Ne pourrait-on pas se servir du problème posé pour introduire de façon motivée le cosinus d'un angle géométrique ? (comme rapport de projection entre BH et AB : le problème étant de déterminer BH connaissant l'angle en B et BA)
De même ne pourrait-on pas se servir de la question de la détermination de l'aire d'un triangle quand on en connaît un angle et les longueurs des deux côtés adjacents à l'angle connu pour introduire le sinus d'un angle géométrique? On sait que c'est cette détermination qui conduit alors à la loi des sinus

3. Fin de parcours.

En fin de parcours au collège, on peut donc souhaiter que puisse se poser le problème n°1. Cela conduit à envisager d'introduire la formule d'Al-Kashi (on pourra lui préférer l'appellation « formule de Pythagore généralisé ») ainsi que la loi des sinus. Ces deux formules permettent ce que l'on appelle la « résolution des triangles ». Connaissant, soit les longueurs des trois côtés, soit les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, soit enfin la longueur d'un côté et les deux angles adjacents, on peut par le calcul, en déduire côtés et angles inconnus. On reconnaît dans l'énoncé des différents cas d'isométrie étudiés aujourd'hui en seconde.
Fançois Dubet et Marie Duru-Bellat[4] expriment une difficulté du collège en disant que : « *la difficulté à se motiver est accrue par la logique même du collège : tous les programmes sont définis par ce qui vient après, en l'occurrence par les exigences du lycée d'enseignement général* ». C'est cette raison, clore un parcours portant sur une question, dès la fin du collège, sans attendre le lycée, qui motive ainsi ce qui serait une proposition de modification de programme.
Il est vrai, cependant qu'avec les programmes actuels on peut proposer maints exercices de déterminations de longueurs et distances. Ceux-ci apparaissent comme des applications de Pythagore, de Thalès, de la trigonométrie ou encore des propriétés des configurations usuelles sans oublier des usages du calcul numérique et du calcul littéral
Nous sommes ainsi en aval du parcours d'étude et de recherche. Remontons en le cours, dans un premier temps pour pointer quelques sujets qui pourraient s'ajouter à ce qui se fait aujourd'hui, usuellement, dans les classes de mathématiques de collège.

4. Quelques sujets pouvant jalonner le parcours.

4.1 Astronomie.

- Mesures du rayon de la Terre, de la Lune, du Soleil
- Mesures des « distances » séparant la terre de la Lune, du Soleil, des autres planètes.

Ce sujet, traité avec une dimension historique, peut être tout à fait intéressant pour marquer le statut, dans notre discipline, des hypothèses. En effet, l'histoire nous montre à l'œuvre diverses conceptions de l'univers qui se sont affrontées : terre plate

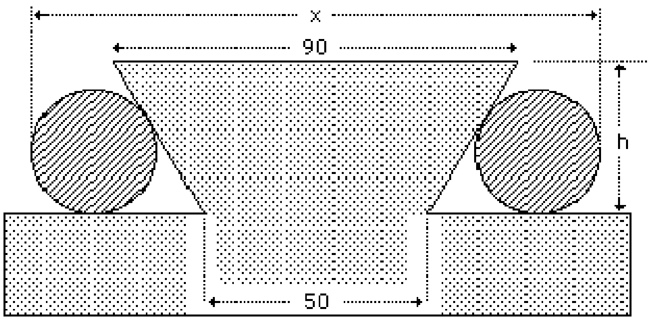
[4] Dubet. F., Duru-Bellat M ; 2000, L'hypocrisie scolaire : pour un collège enfin démocratique Ed Seuil, collection L'épreuve des faits. Citation page 25

vs terre sphérique, ou encore système héliocentrique s'opposant à une conception voulant que la terre soit le centre de l'univers. Dans les documents d'accompagnement[5] de Terminale S et ES (page 26), on en trouve un exemple : Erathostène, supposant la terre sphérique, estime en 200 av.JC. le rayon de la terre à 6500km. Anaxagore, 200ans auparavant, estime quant à lui que 6500km est la distance de la Terre au Soleil. On peut formuler des hypothèses différentes, ce qui n'empêche pas, dès lors qu'on suppose celle-ci vraies de faire des déductions. Il y a matière à débattre sur la vérité des hypothèses, surtout lorsque celles-ci résultent d'un choix alternatif.

4.2 Les piges.

Ce sont des cylindres aux diamètres étalonnés qui étaient utilisés en mécanique, tôlerie, et qui servaient à opérer des mesures ou des contrôles de mesures. Dans ce sujet on fait un fort usage de la trigonométrie. Ci-dessous un problème typique emprunté à Serge Melh sur un site internet.[6]

Le schéma ci-dessous représente une glissière mâle : deux entailles de 60° ont été usinées. On a introduit deux piges de 24 mm de diamètre. La cote inférieure devrait être 50 comme indiquée.



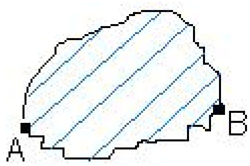
Quelle doit être la cote x de vérification ? (au 1/10e de mm). Calculer la cote h.

5. Comment débuter un tel parcours ?

Le travail esquissé ci-dessous est à faire : nous n'avons pas eu l'occasion de l'expérimenter.

5.1 Dès la sixième peut-on imaginer, pour illustrer la question centrale de ce parcours, poser un problème comme le suivant :

Un lac et deux points opposés sur les rives de ce lac. Comment mesurer la distance entre ces deux points ?



On peut représenter la situation au tableau. Faire un dessin représentant le lac, placer deux points A et B. Peut-on avec une règle graduée, une équerre, (un rapporteur ?) déterminer la distance séparant A et B sachant que l'on ne peut effectuer une mesure directe sur le tableau.

Le problème du lac est évoqué et on l'importe en classe avec ce dessin au tableau.

---

[5] Mathématiques, document d'accompagnement des classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale. CNDP 2002

[6] http://serge.mehl.free.fr/exos/piges.html

5.2 ***Re-dimensionner l’étude ?***

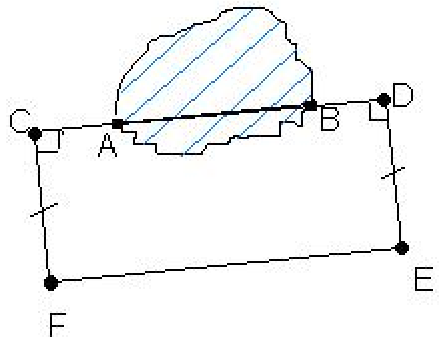
En didactique, on s’est surtout préoccupé de l’entrée dans l’étude d’une question, en recherchant de « bons problèmes » que l’on peut poser aux élèves : ils en comprennent le sens et l’activité d’étude et de recherche impulsée par ceux-ci doit permettre l’élaboration à la fois de la technique de résolution et de la technologie la justifiant. Le professeur peut guider les élèves, par un jeu de questions cruciales, vers l’organisation mathématique qui est l’enjeu de l’étude. Un idéal, nous semble-t-il, a pu être que les élèves arrivent d’eux-mêmes à cette O.M. sans l’intervention du professeur, du moins dans le moment d’activité d’étude et de recherche, le rôle du professeur étant alors, en synthèse des travaux des élèves, d’institutionnaliser ce qui doit l’être.

Ici, si nous posons le problème ainsi aux élèves, et en particulier si nous supposons une fréquentation très réduite avec la géométrie, il se peut qu’ils ne puissent démarrer.

Or l’étude d’une question, hors situation scolaire, nous donne à voir de la part de celui qui s’y livre, bien souvent, et dans un premier temps, la recherche d’éventuelles réponses $R^{\diamond}$ existant dans des œuvres déjà élaborées par d’autres.

L’idée que nous soumettons, comme une piste de travail à explorer, serait de proposer aux élèves des études avec à la fois des questions mais aussi des réponses.

Nous en proposons deux (il y en a d’autres)



R1 : On place C et D de telle sorte qu’ils soient alignés avec A et B. C’est possible car sur le terrain, on peut supposer qu’à la vue on puisse procéder à un tel alignement. Sur le tableau on peut utiliser la règle, on supposera que le dessin autorise un tel tracé.

(CF) et (DE) sont perpendiculaires à (CD) ce qui s’obtient avec l’équerre[7] et à la règle on place E et F de telle sorte que CF=FE et de façon à ce qu’on puisse tracer [FE]. On peut alors mesurer EF, AC et BD et en déduire AB dès lors que l’on suppose que CD=EF.

Une technique est ainsi donnée. Reste à en élaborer une technologie, travail d’élaboration qui pourra différer selon ce que les élèves savent des rectangles.

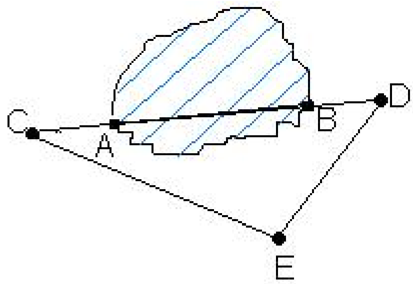
On peut cependant imaginer, le professeur peut guider les élèves vers cela par des questions, que ceux-ci procèdent à des vérifications expérimentales sur papier.

Quelques questions cruciales.

Peut-on vérifier par des expériences que la technique répond bien à la question posée ?

Est-il indispensable que les angles en C et D soient droits ? que FC=DE ?

.Ces questions peuvent (peut-être) conduire à l’élaboration de propriétés caractéristiques du rectangle. Elle peut aussi conduire à l’élaboration d’une autre technique avec des parallélogrammes.



R2 : On peut proposer une réponse inachevé, la suivante :

On place Cet D de telle sorte que A,B,C et D soient alignés. On trace les segments [EC] et [ED) et on les mesure ainsi que CA et BD. On reproduit sur papier la configuration à échelle réduite, on mesure sur le papier la longueur AB et on applique un coefficient d’agrandissement de la manière suivante. Si l’on a divisé les longueurs réelles par 10, (par 100 …) pour obtenir la figure à échelle réduite, on multiplie la mesure de AB sur papier par 10 (par 100…) pour avoir la longueur réelle de AB. C’est une situation de proportionnalité.

[7] On pourrait aussi évoquer le tracé d’un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 ce avec un compas. Pourquoi pas ?

L'étude sur papier de la technique ainsi esquissée devrait conduire à son invalidation. Connaître les longueurs CE et ED ne suffit pas pour pouvoir déterminer CD.
Ceci peut conduire à l'étude de la question cruciale suivante : que faut-il connaître pour pouvoir reproduire un triangle ABC à l'identique, c'est à dire pour que le triangle reproduit se superpose à ABC ?
La notion d'angle introduite, on peut alors proposer une technique adéquate.

Que peut-on espérer motiver ainsi ?

- L'objet triangle, objet central en géométrie s'il en est !
- La caractérisation des triangles (cas d'isométries)
- Les angles et leurs mesures
- Une étude d'une situation de proportionnalité avec un travail à l'échelle.

6. La détermination de distances : un domaine dont la modernité nous échappe ?

Un domaine à mettre au musée de l'histoire des mathématiques ?

La détermination de grandeurs comme longueurs, aires, volumes, masses avait autrefois une forte visibilité sociale. Aujourd'hui il n'en est plus de même et nombres d'appareils de mesures fonctionnent comme des boîtes noires et donnent sous forme d'affichage les résultats des mesures. La mesure des longueurs n'échappent pas à cette règle avec l'apparition d'outils télémétriques ultrasoniques ou avec faisceau laser.

Un domaine qui nous échappe au profit du physicien ?

On peut lire dans un programme les propositions d'activités suivantes :

- Comment évaluer la distance et les dimensions d'un immeuble ? *Méthode de la parallaxe. Technique de la visée. Utilisation du diamètre apparent.*
- Comment mesurer le rayon de la terre ? Méthode d'Erathostène.
- Comment mesurer la distance de la Terre à la Lune ?

Mais aussi :

- Comment déterminer l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'un cheveu ?
- Comment déterminer l'ordre de grandeur d'une molécule ?

Ce programme est celui de Physique Chimie de la classe de seconde !!
Il n'est pas inintéressant d'examiner comment est traité en Physique une question comme celle de la mesure de la distance d'un point donné à un point éloigné avec la technique dite de parallaxe.

La méthode de parallaxe.

Ouvrons un manuel de physique, celui publié par Nathan : on y trouve, p 24, l'activité suivante.
Les auteurs proposent de mesurer la distance qui sépare le mur de la salle de classe d'un objet éloigné (arbre, lampadaire…) sans quitter la salle.
On peut résumer la démarche proposée de la manière suivante :

- Un matériel de visée avec un rapporteur permettant de déterminer des angles
- On place l'appareil aux deux extrémités du mur, l'œil de l'observateur est en O_1, puis en O_2. On mesure deux angles et la distance O_1O_2.
- On représente à échelle réduite, l'objet observé et les deux positions de l'œil.
- On déduit de la construction précédente la distance réelle du mur à l'objet. Dans la partie « Cours » du manuel, page 30, on peut lire ceci : « *Lorsque l'observateur vise E (l'objet) depuis O_1, il reçoit des rayons lumineux ayant suivis le trajet EO_1,. De même lorsqu'il vise E depuis O_2, il reçoit des rayons lumineux ayant suivis le trajet EO_2. Les mesures de la distance O_1O_2 et des*

angles α_1 α_2 permettent soit par le calcul, soit par construction avec une échelle de réduction convenable de déterminer EO_1, EO_2 ou EH. Cette méthode constitue la méthode de parallaxe ».

On peut faire deux remarques.

La première est que des mesures effectives sont clairement évoquées. Il est peu vraisemblable qu'en mathématiques en seconde, on pratique une telle activité. Le physicien aussi, semble ne pas hésiter à recourir à un dessin avec une échelle convenable, pour la détermination des distances recherchées. On peut penser que ce qu'autorise la physique aurait peu de chances de recevoir un agrément en mathématiques à ce niveau scolaire tout du moins. La possibilité de recourir au graphique, avec ses imprécisions, est analogue à ce que nous avons proposé ci-dessus en classe de sixième (cf. la réponse R2)

La seconde porte sur la référence aux rayons lumineux. Nous sommes en physique, et la justification de la technique est ainsi formulée dans le cours : « Pour mesurer des longueurs concernant des objets lointains, on utilise la propriété de la propagation de la lumière.

Dans le vide et dans les milieux homogènes, la lumière se propage en ligne droite.

Le trajet de la lumière entre deux points est modélisé par un segment de droite, orienté dans le sens de la propagation qui est appelé rayon lumineux ».

En mathématiques, on attendrait, soit la loi des sinus pour faire le calcul, soit des propriétés des triangles semblables pour justifier le recours à un dessin à l'échelle.

Où l'on rencontre un constructivisme mal intégré conduisant à l'ostension déguisée :

Il n'est pas inintéressant d'examiner ce qui est proposé en activité dans des manuels d'une discipline étrangère à la sienne car on peut y percevoir les effets d'une mode voulant que l'élève découvre tout par lui-même.

Dans l'activité examinée ci-dessus les auteurs du manuels proposent aux élèves une démarche de découverte dont les premières étapes sont les suivantes :

- 1°Choisir un objet bien visible depuis la salle de classe et éloigné de plusieurs dizaines de mètres.
- 2° Observer les yeux d'un camarade qui se déplace parallèlement au mur de la classe en regardant en permanence l'objet désigné.
- 3° Quelles remarques peut-on faire ?
- 4°Quelles grandeurs, facilement mesurables, pourraient apporter des renseignements utiles pour trouver la distance demandée ?

Les points 2 et 3 supposent que l'élève voie ce qu'il convient de voir en relation avec le problème posé. Difficile si l'on ne connaît pas la réponse ! L'ostension se déguise, l'élève étant supposé apte à voir sans l'aide du maître. Il nous semblerait plus pertinent comme nous l'avons déjà proposé ci-dessus d'intégrer des éléments de réponses dans l'étude de la question posée. Celle-ci pilotée par l'enseignant peut être ponctuée à l'aide de questions cruciales portant sur le problème mais aussi sur les éléments de réponses qui sont donnés.