# Les nombres relatifs en 5e

Avertissement :
On trouvera, dans les lignes qui suivent, une proposition de Parcours d'Etude et de Recherche sur les nombres relatifs, leur addition et leur soustraction. En tant que parcours, il concernera aussi, pour la classe de 5e, leur comparaison puis, pour la classe de 4e, la multiplication, la division et l'élévation à une puissance. Ces dernières parties ne figurent pas dans ce fichier, mais les problèmes historiques et épistémologiques qui s'y rapportent, concernant « la règle des signes » notamment, sont abordés dans la première partie du texte qui les appelle.

## Sommaire



### Notre choix didactique et l'émergence historique des nombres relatifs : les nombres relatifs comme programmes de calcul

Divers contextes sont usuellement utilisés pour amener les élèves vers une première rencontre avec les nombres relatifs. Dans ces lignes, nous ne reprenons pas l'analyse qui a pu être faite des obstacles didactiques vers lesquels aboutissent les diverses métaphores traditionnellement en usage : recettes et dépenses, gains et pertes, températures, altitudes, avancer et reculer, etc. Nous partageons ces analyses. Afin de ne pas nous encombrer ici de la question de la médélisation, qu'il nous faudra traiter à l'occasion, nous avons choisi de nous placer résolument dans un cadre interne aux mathématiques afin d'amener les élèves vers une première fréquentation des relatifs ; en fait, essentiellement vers la nouveauté représentée par les négatifs comme types de nombres.

Dans l'entrée que nous avons choisie, les relatifs sont vus comme des programmes de calcul permettant de simplifier les calculs au sein d'un programme complexe. Le programme de calcul initial considéré est essentiellement $P_1$ : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième ». Le relatif est vu comme un programme $P_2$, simplifié à partir de $P_1$ tout en lui étant équivalent : « à un nombre on ajoute ou soustrait un deuxième »[1]. On omet de

[1] Nous suivons ainsi le cadre proposé par Yves Chevallard dans son séminaire 2004 – 2005 pour les PCL2 de l'IUFM d'Aix-Marseille, pages 457 et suivantes. Ce que ne dit pas la « notion » de programme de calcul, c'est que les nombres sont *aussi* des opérateurs c'est-à-dire que les fonctions « opérateur additif » peuvent être dénotées par la notation de l'opérateur seul. Ainsi +3 dénote la fonction « ajouter 3 » que l'on nomme « programme de calcul » parce qu'on ne dispose pas de la notion d'opérateur sur un ensemble de nombres (opérateur étant défini par exemple en association à opérande dans la description d'une opération, +3 est alors *a*

signaler que dans **N**, ce programme ne donne pas toujours un résultat : ce pour quoi on remplace le résultat possiblement inexistant par l'indication du programme, sans faire de démonstration d'existence.

A l'intérieur des mathématiques, que l'on choisisse d'amener les négatifs par la nécessité de résoudre dans tous les cas l'équation $a + x = b$ ($a$ et $b$ entiers naturels) ou par la commodité qu'ils apportent dans les calculs[2], se pose toujours, au plan didactique, la question de l'identification à un nombre de ce qui a d'abord été fonctionnellement rencontré soit comme une classe d'équivalence dans le cas des équations, soit comme un programme dans le cas des programmes de calcul. C'est une position épistémologique qui a en principe été rencontrée dans le cas des fractions, mais qui n'est jamais explicitée par les professeurs, à l'intention des élèves : elle peut donc se constituer en obstacle durable. Elle suppose que l'on ait les moyens de montrer ce que l'on gagne à élargir la notion de nombre : et ce sont les techniques de calcul qui sont conservées, tandis que la notion évolue et perd des propriétés qui semblaient essentielles. Il y a une sorte de nécessité à accepter que le produit de deux négatifs soit positif, si l'on veut que l'ensemble des calculs sur tous les nombres, positifs et négatifs, soient cohérents : c'est-à-dire si l'on veut que les négatifs soient des nombres. Quoiqu'il en soit, cette nécessité, manipulée formellement sans problème, heurte le bon sens qui cherche à maintenir les sens antérieurs attribués au nombre, et c'est pire encore quand on explicite « la règle des signes » sans avoir défini une « multiplication des signes ».

Ainsi les mathématiciens, parmi les plus grands, essaient de donner des justifications. Leurs explications sont variables, selon les auteurs et les publics auxquels ils s'adressent :

***Celle de Stevin (1625) :***

---

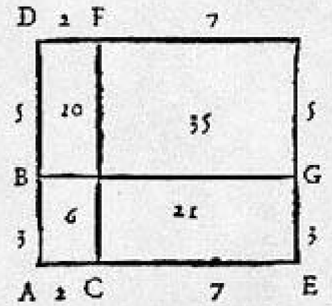
*minima* un « opérateur constant »), ou de la notion de fonction numérique, bien plus élaborée. La désignation *programme de calcul* est donc seulement une forme langagière, mais c'est surtout un élément générateur d'un jeu de langage parce qu'il désigne un objet autrement inaccessible, sinon par métaphore ou par la description de son usage « ça, c'est pour manger », « ça, c'est pour ajouter 3 ». Les explications métaphoriques ne sont pas propres à l'enseignement : elles n'aident pas à produire des jeux de langage ; et les définitions fonctionnelles ne dispensent pas d'un nom.

[2] Ils évitent d'avoir à distinguer des cas de figure, comme l'explique fort clairement Chasles lorsqu'il invente les « mesures algébriques » qui orientent les segments et permettent un calcul automatique de leur mesure orientée.

***Il s'agit en fait de comparer les aires des rectangles en les prenant globalement, puis en ajoutant les différentes petites parties, et d'arriver, en développant***

***(a - b) (c - d) où a, b, c, d sont des réels positifs à la nécessité d'écrire que (- b) x (- d) = bd.***

***Le calcul sur des grandeurs quelconques se fait, à l'époque de Stevin et depuis Euclide, en les représentant par des longueurs. L'explication conduit Stevin à donner des valeurs numériques aux grandeurs, pour « faire exemple ».***



Soit AB 8 — 5 (à sçavoir AD 8 — DB 5) Puis AC 9 — 7 (à sçavoir AE 9 — EC 7) leur produict sera CB : ou bien selon la multiplication precedante ED 72 — EF 56 — DG 45 + GF 35, Lesquelles nous demonstrerons estre egales à CB en ceste sorte. De tout le ED + GF, soubstraict EF, & DG, reste CB.
*Conclusion.* Plus donceques multiplié par plus, donne produict plus. & moins multiplié par moins, donne produict plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produict moins ; ce qu'il falloit demonstrer.

***Celles de Mac Laurin, (1748) :***

*On pourrait de là déduire la règle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que les signes semblables dans les termes du multiplicateur et du multiplicande donnent + au produit, et les signes différents donnent -. Nous avons évité cette manière de présenter la règle, pour épargner aux* ***commençants l'expression révoltante - par - donne +****, qui est cependant une conséquence nécessaire de la règle. : on peut, comme nous avons fait, la déguiser , mais non la contredire ou l'anéantir ; le lecteur, sans s'en apercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédents ; familiarisé avec la chose, pourrait-il encore s'effaroucher des mots ? S'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté. + a - a = 0, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie + a - a, le produit doit être 0 : si je le multiplie par n, j'aurai pour le premier terme + na, donc j'aurai pour le second - na, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différents donnent - au produit? Si je multiplie + a - a par - n, par le cas précédent, j'aurai - na pour le premier terme; donc j'aurai + na pour le second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent :* ***donc - multiplié par - donne + au produit****.*

La « règle des signes » énoncée par Stevin : « moins multiplié par moins donne produit plus » est ici aussi énoncée. Elle semble être la forme mnémotechnique culturellement reconnue qui pourtant est dite « une expression révoltante » pour les commençants, parce qu'elle est « la règle des signes » venue d'une interprétation de l'écriture *–a* comme « *a* (naturellement positif) précédé d'un signe ». Mais elle n'est plus écrite en langue naturelle : elle est devenue composition des symboles.

***Celle de Euler, (1770) :***

*Il nous reste à résoudre encore* **ce cas où - est multiplié par -** *ou, par exemple - a par - b. Il est évident d'abord que quant aux lettres, le produit sera ab ; mais il est incertain encore si c'est le signe + ou bien le signe - qu'il faut mettre devant ce produit ; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe - ; car - a par +*

*b donne - ab et - a par - b ne peut produire le même résultat que - a par + b ; mais il doit en résulter* ***l'opposé,*** (du résultat *–ab*) *c'est à dire + ab ; par conséquent nous avons cette règle : + multiplié par + fait +, de même que - multiplié par -.*

Nous comprenons bien qu'il s'agit de la règle des signes, puisqu'il n'y a en fait que des quantités négatives, désignées par un nombre positif, et précédé du signe -. Mais si l'auteur ne nomme pas les « nombres négatifs », il nomme *l'opposé* d'un nombre et peut asseoir son raisonnement sur ce commencement de jeu de langage.

***Celle de Cauchy (1821) :***

*D'après ces conventions, si l'on représente par A soit un nombre, soit une quantité quelconque, et que l'on fasse a = + A,   b = - A  On aura : +a = + A , + b = - A,  - a = - A , - b = + A  Si dans les quatre dernières équations l'on remet pour a et b leurs valeurs entre parenthèses, on obtiendra les formules : + (+ A) = + A ; + (- A) = - A ; - (+ A) = - A ; - ( - A) = + A Dans chacune de ces formules le signe du second membre est ce qu'on appelle le produit des deux signes du premier. Multiplier deux signes l'un par l'autre c'est former leur produit. L'inspection seule des équations suffit pour établir la règle des signes.*

Comme on le voit, l'auteur joue en algébriste sur les symboles, -*A* désignant l'opposé de *A* et étant lui même noté *a* (c'est nouveau : la lettre *a* dénote ici un opposé qui donc peut-être « un négatif » comme nous disons),  alors $-a = -(-A) = +A = A$. Le jeu de langage se poursuit en jeu de notations, dans une dialectique connue.

***Celle de Hankel (1867) :***

Son explication peut se résumer par un calcul qui, fondé sur une axiomatique, démontre la propriété sans autre forme de discours : le jeu de langage est algébrisé, il obéit dorénavant à une logique calculable, mais… a disparu ce qui va poser problème au professeur !

$0 = a \times 0 = a \times (b + opp\ b) = ab + a \times (opp\ b)$

$0 = 0 \times (opp\ b) = (a + opp\ a) \times (opp\ b) = a \times (opp\ b) + (opp\ a \times opp\ b)$

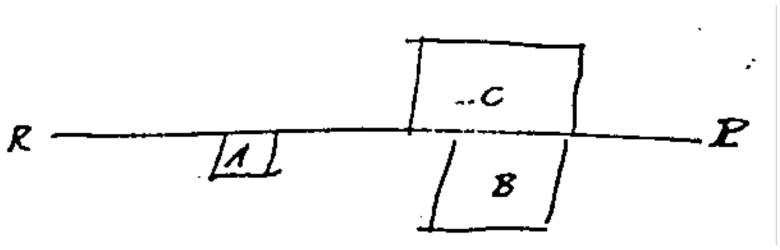
*donc* $(opp\ a) \times (opp\ b) = ab$.

Dans cette perspective, les négatifs ont le statut de nombre et Hankel distingue alors de façon nette le signe opératoire « - » du signe « opp » qui dénote l'opposé. La règle est devenue « règle de multiplication des opposés » et c'est dorénavant ce jeu de langage là qui, seul, rend compte du travail algébrique. Le règle des signes n'a en principe plus droit de cité. En fait, le bouleversement apporté par Hankel s'inscrit dans la rupture de la pensée mathématique de la fin du XIX^e siècle à propos des relations entre les mathématiques et la réalité physique. Jusque là, si l'on inventait de nouveaux « nombres » qui choquaient les idées reçues, ils étaient automatiquement qualifiés de incompréhensibles, inconcevables, absurdes, sourds, irrationnels, faux, imaginaires, ou même, négatifs. Hankel accepte que $(-3)^2 > (2)^2$, car ce résultat est cohérent, et il écrit ainsi :

« *Le nombre n'est plus aujourd'hui une chose, une substance qui existerait en toute indépendance en dehors du sujet pensant ou des objets qui en sont l'occasion ; ce n'est plus un principe indépendant comme l'ont cru les pythagoriciens. La question de l'existence des* *nombres nous renvoie soit au sujet pensant, soit aux objets pensés dont les nombres présentent des relations. Le mathématicien tient pour impossible au sens strict cela seul qui est logiquement impossible, c'est-à-dire qui implique une contradiction. Il n'est pas besoin de démontrer qu'on peut admettre des nombres impossibles en ce sens. Mais si les nombres considérés sont logiquement possibles, si leur concept est défini clairement et distinctement, s'il est donc libre de toute contradiction, la question ne peut plus être de savoir s'il y a dans le domaine du réel, dans ce qui est intuitif ou actuellement donné, un substrat pour ce nombre, s'il existe des objets qui puissent donner matière aux nombres en tant qu'ils sont relations intellectuelles d'un certain type ».* « Théorie du système des nombres complexes », H. Hankel, 1867.

Revenant à une problématique d'apprentissage, voici ce qu'écrivait par exemple l'écrivain français Stendhal, dans son roman autobiographique *La vie d'Henri Brulard*, en 1835, pour exprimer son désarroi face à une interprétation mal présentée de la règle des signes (d'après Anne Boyé, IREM, Nantes) :

*Mon grand malheur était cette figure :*




*Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ?*

*Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions de francs ?*

La transition entre programme de calcul et nombre relatif doit être accompagnée, et nous tentons de la ménager au cours de l'AER proposée, par l'identification, par exemple, de +5 à 5 (car 0 + 5 =5 ; le programme « ajouter 5 », noté +5, est alors identifié au nombre obtenu 5), et de 0 – 4 à -4 (car la première écriture signifie que l'on soustrait 4 à 0, donc que l'on utilise le programme « soustraire 4 », noté -4). Cette identification est facilitée par l'utilisation en acte de la commutativité dans les programmes de calcul, en fait pour nous dans les sommes algébriques, qui « favorise » l'arrivée des additions dans des calculs où les relatifs sont écrits avec des parenthèses.

L'identification est encore facilitée pour les élèves par un travail de routinisation conduit à l'aide d'un nombre important d'exercices d'entraînement. Lorsqu'au cours de cet apprentissage, on a besoin de s'assurer de la justesse du résultat que l'on a obtenu en ne considérant plus les relatifs que comme des nombres, on peut toujours vérifier la coïncidence des résultats trouvés avec ceux obtenus en revenant au sens primitivement donné aux relatifs : celui de programme de calcul.

Avant d'aborder ce travail, il est nécessaire que les élèves aient tout d'abord travaillé la définition de la différence (dans **N** ou dans $\mathscr{D}$) ; cela doit constituer une connaissance disponible, élément non problématique, faisant partie du « milieu », comme ensemble des connaissances stabilisées, disponibles, non problématiques. Il est nécessaire de savoir que :
la différence des nombres $a$ et $b$ est le nombre $d$ tel que $a + d = b$ et on note $d = b - a$

**Le parcours**

Le début de l'enseignement proposé dans les pages qui suivent s'appuie sur des moments de calcul mental. L'approche choisie est progressive, afin que les élèves s'habituent à une technique de calcul qui les rend plus simples et qui va conduire tout d'abord à utiliser de nouveaux nombres, puis à les étudier. Aussi, est-il nécessaire que ***ces temps de calcul mental*** qui inaugurent cette première phase soient à la fois ***courts,*** de l'ordre de 10 min en début d'heure par exemple, et ***étalés dans le temps*** : à la suite de ce temps court de calcul mental, on passe à l'étude d'une autre partie du programme, menée simultanément.

*Temps 1 : élaboration d'un stratégie pour calculer mentalement $a + b - c$*

**Etape 1 : cas $b > c$**

*Cette étape a pour fonction d'organiser une (nouvelle ?) première rencontre avec le type de tâches T : « exécuter le programme de calcul $a + b - c$ (a, b et c entiers naturels) » afin de mettre en échec la technique consistant à réaliser les calculs de gauche à droite en posant les opérations. Il faut donc « inventer » une nouvelle technique ; c'est le moment le plus important du déroulement de cette phase. L'ayant trouvé, il reste encore à s'assurer de sa validité. Un moment technologique garantissant partiellement la justification du recours à cette technique conclut donc cette phase ; il est réalisé à travers la vérification à la calculatrice de l'exactitude des réponses données. On institutionnalise ensuite la technique trouvée.*

On engage les élèves dans des calculs du type de ceux qu'ils ont l'habitude de faire : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième ». Mais on cherche à ce que, chez les élèves, apparaisse rapidement la nécessité d'organiser commodément les calculs afin de les rendre plus simples. Il s'agit tout d'abord, pour la consigne 1, de travailler en acte mais bien sûr sans l'expliciter, l'égalité $(a + b) - c = a + (b - c)$ avec $a$, $b$ et $c$ entiers naturels, dans le cas où $b > c$. Le professeur annonce qu'on s'intéresse au programme de calcul suivant : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième » que l'on va exécuter mentalement sur des cas particuliers. Il distribue une feuille ou écrit au tableau.

Pour conserver la maîtrise du temps imparti à chaque calcul, les calculs doivent être écrits au tableau au fur et à mesure, les élèves recopiant sur leur feuille le calcul et inscrivant à la suite leur réponse.
Remarque issue des observations de classes : le professeur a tout intérêt à dire et à demander que l'on dise « ajouter… puis soustraire… c'est comme ajouter (ou soustraire)… », puis à faire passer de l'écriture en français à l'écriture en nombres. Apparemment, certains élèves rencontrent des difficultés ***pour rédiger des phrases***, ce travail peut donc se poursuivre en

travail à la maison… La rédaction des phrases et leur verbalisation visent à faire éprouver par les élèves l'économie substantielle que réalisera l'écriture en nombres relatifs.

Le professeur fixe lui-même le temps pour la recherche du premier calcul et demande oralement le résultat avant d'engager la classe dans le calcul du second. Si la technique consistant à calculer d'abord $b - c$ n'apparaît pas dans le calcul de 17 + 21 – 1, elle a de fortes chances de devenir nécessaire dans le calcul suivant : 148 + 199 – 99. On l'éprouve ensuite sur les autres calculs, le professeur déterminant le temps de la recherche de chaque calcul. Ce temps doit être bref car cette brièveté force à rechercher les stratégies de calcul les plus efficaces.
L'ensemble des consignes a été regroupé dans le cadre qui suit, afin que le professeur dispose d'une vision globale. Comme indiqué page précédente, ces diverses consignes doivent être données aux élèves ***de façon étalée***, doivent occuper un temps court en début d'heure et pendant plusieurs séances. On peut évidemment fabriquer d'autres types de calcul, l'essentiel étant que la philosophie propre à chaque étape soit conservée. On peut aussi, selon l'aisance plus ou moins grande des élèves – et cela permet de faire davantage apparaître l'économie procurée –, utiliser des ***décimaux non entiers***.

Consigne 1 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
17 + 21 - 1 ;
148 + 199 - 99 ;
17 + 35 - 15 ;
131 + 256 - 56 ;
39 + 58 – 8 ;
185 + 2017 -17.
Consigne 2 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
14 + 17 - 15 ;
114 + 17 - 15 ;
1802 + 319 - 315 ;
4374 + 62 - 61 ;
4374 + 61 – 62 ;
7081 + 61 – 62.
Consigne 3 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
458 + 45 - 46 ;
3469 + 45 – 46 ;
3469 + 124 - 125 ;
15627 + 124 – 125 ;
15627 + 313 - 314 ;
823 + 313 – 314 ; `
823 + 32 - 33 ;
4586 + 32 – 33 ;
4586 + 7538 - 7539.
Consigne 4 :
Effectue mentalement les calculs suivants, puis écris sous forme simplifiée à quoi équivaut l'application au premier nombre de l'addition suivie de la soustraction, dans ces calculs :
15627 + 314 - 316 ;
823 + 34 - 37 ;

| |
|---|
| 4586 + 34 – 38 ;<br>126 + 12 – 15 ;<br>3645 + 5241 – 5246 ;<br>1010 + 21 – 31 ;<br>236 + 22 – 29. |

Feuille dont dispose le professeur

Les élèves recherchent ***individuellement*** et ***mentalement*** les calculs de la consigne 1 et notent au crayon leurs résultats en face de chacun des calculs proposés. Le calcul se faisant mentalement, les élèves ***ne sont pas autorisés*** à poser les opérations ; ils doivent seulement noter au crayon le résultat qu'ils trouvent pour chacun des calculs. Si les élèves peinent, le professeur peut indiquer qu'ils ont intérêt à rechercher « un truc » permettant de faire les calculs très facilement. En principe, au moins un élève devrait trouver « ce truc » et le communiquer rapidement à la classe, sinon le professeur attire l'attention sur les deux derniers nombres.

| |
|---|
| Consigne 1 :<br>Effectue mentalement les calculs suivants :<br>17 + 21 - 1 ;<br>148 + 199 - 99 ;<br>17 + 35 - 15 ;<br>131 + 256 - 56 ;<br>39 + 58 – 8 ;<br>185 + 2017 - 17. |

Les calculs ayant été menés à bien, le professeur ou un élève peuvent faire remarquer que l'on n'a pas suivi l'ordre qui paraît canonique d'exécution des calculs, de la gauche vers la droite. En fait, des manuels de primaire proposent des techniques de calcul en ligne avec des arbres de calcul : il est possible que cette disposition réapparaisse alors.

Le professeur demande : ***faisant de la sorte, est-on sûr d'avoir obtenu les résultats exacts ?*** On se contente de vérifier l'exactitude des résultats avec **une calculatrice que le professeur donne à un « élève-vérificateur »** ; ce qui permet de gagner du temps et d'éviter de provoquer chez les élèves des erreurs de type opératoire. On est donc certain que nos calculs sont justes et que la technique utilisée est pourvue d'une certaine justesse.
La passation effective de ce travail a montré que ce dispositif peut être proposé, puis être abandonné très vite dans le cas où les élèves ne rencontrent aucune difficulté et sont certains que leurs calculs sont exacts.

Etant certains que la technique trouvée est valide, cette phase se termine par ***une institutionnalisation de cette nouvelle technique***. Pour cela, on peut demander aux élèves de la donner publiquement et oralement en la déclinant, pour chacun des calculs, sur le modèle suivant correspondant au premier calcul : « ajouter 21 et soustraire 1 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre », etc.

Ces résultats sont notés dans le cahier de cours dont le titre de chapitre devient :

La partie qui suit et qui porte sur l'écriture des phrases du type « ajouter… et soustraire… à un nombre revient à ajouter… à ce nombre » est longue à faire écrire par les élèves. On peut donc la raccourcir ; soit en limitant le nombre de phrases, soit en utilisant des exemples numériques écrits, soit en donnant une feuille à coller. Dans ce dernier cas, il est indispensable de ne pas tomber dans un travail du type des « exercices du Bled », mais de s'assurer que cette partie de l'institutionnalisation est assumée par la classe, donc est collective.

**Programmes de calculs « somme et différence »**
**I. Rendre plus simple des calculs pour calculer mentalement**
**1. Consigne 1.**
On fait coller la feuille « consigne 1 » sur le cahier et on fait dégager la régularité que l'on note par écrit :
Ajouter 21 et soustraire 1 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre
Ajouter 199 et soustraire 99 à un nombre revient à ajouter 100 à ce nombre
Ajouter 35 et soustraire 15 à un nombre revient à ajouter 20 à ce nombre
Ajouter 156 et soustraire 56 à un nombre revient à ajouter 100 à ce nombre
Ajouter 58 et soustraire 8 à un nombre revient à ajouter 50 à ce nombre
Ajouter 2017 et soustraire 17 à un nombre revient à ajouter 2000 à ce nombre

***On a simplifié des programmes de calculs pour calculer mentalement***

On peut prévoir ensuite quelques exercices à la maison sur le même modèle, en demandant l'écriture de phrases en français du même type que celles écrites dans le cahier de cours, par exemple avec des exercices comme :
15 + 37 – 7 ; 121 + 229 – 29 ; 58 + 1024 – 24 ; 104 + 72 – 12.

**Etape 2 : $b > c$ ou $b < c$**

*A travers les quatre premiers calculs, il s'agit de continuer à se familiariser avec la technique qui vient d'être mise au point ; ce qui conduit à être attentif au calcul de la différence $b - c$. Mais l'utilisation de cette technique est bloquée lors du cinquième calcul pour lequel on n'a plus $b > c$ ; ce qui rend la soustraction impossible à effectuer dans* **N**. *Les élèves sont contraints à devoir imaginer une nouvelle technique pour ce type de tâches qui était en passe de devenir routinier, mais s'avère problématique dans certains cas. Il est donc nécessaire d'ébaucher une nouvelle technique et de trouver des moyens de la justifier et la valider.*
Les élèves recherchent ***individuellement*** et ***mentalement*** les calculs de la consigne 2 et notent au crayon leurs résultats en face de chacun des calculs proposés.

Consigne 2 :
Effectue mentalement les calculs suivants :
14 + 17 - 15 ;
114 + 17 - 15 ;
1802 + 319 - 315 ;
4374 + 62 - 61 ;
4374 + 61 – 62 ;
7081 + 61 – 62 .

Pour chacun des quatre premiers calculs, le professeur fixe la durée de la recherche individuelle et continue de même pour le cinquième calcul. Il est possible que, dans le 5e calcul, des élèves continuent d'ajouter 1 sans avoir remarqué la nouveauté. On peut les convaincre de la fausseté de leur démarche en comparant le 4e et le 5e calcul. Au même nombre, 4374, si on ajoute 62 puis que l'on soustrait 61, il est vraisemblable que l'on obtiendra pas le même résultat que si on lui avait ajouté 1 de moins et soustrait 1 de plus. Rapidement, d'autres s'aperçoivent de l'impossibilité de l'application de la technique précédente.

Néanmoins, les nombres sont les mêmes que dans le calcul précédent, même si les places des deux derniers ont été échangées. Cette remarque, vue par des élèves ou indiquée par le professeur si ce n'est pas le cas, devrait attirer l'attention sur une comparaison possible entre le quatrième et le cinquième programme de calcul.

Dans le quatrième programme de calcul, « ajouter 62 puis soustraire 61 » équivaut à « ajouter 1 », la question cruciale est alors : ***à quoi équivaut le programme de calcul « ajouter 61 puis soustraire 62 » ?***
Des élèves devraient fournir la seule réponse possible ***dans le cadre « d'une logique des programmes de calcul »*** en disant : « à soustraire 1 »… Tout en le justifiant par : « car on soustrait 1 de plus que ce qu'on ajoute ! » Les élèves, éventuellement guidés par le professeur, peuvent expliquer que « enlever 62, c'est enlever 61 et enlever encore 1 » car décomposer une soustraction en une succession de petites différences est une méthode souvent utilisée en calcul mental.
Ces explications constituent des justifications (fonction technologique) qui suscitent l'approbation de la classe et doivent être reçues comme telles par le professeur. Dans le cadre d'un ***calcul mental*** et d'un ***échange oral***, il n'est en effet guère possible d'en attendre davantage. De nouveau, le recours rapide à la calculatrice permet de valider le calcul. Le dernier cas ne devrait alors pas poser de problème.

Le professeur peut alors indiquer qu'une justification plus mathématique est possible si l'on réécrit le programme de calcul en prenant au premier nombre ce qu'il manque pour rendre possible le calcul de la différence des deux autres. C'est une technique qui ressemble à une technique posée de « soustractions avec retenue » ; on l'appelle souvent « méthode anglo-saxonne ou aussi « méthode par emprunt », et il est possible que ce type de souvenirs soit évoqué par certains élèves.
Ainsi : $4374 + 61 – 62 = 4373 + 1 + 61 – 62 = 4373 + (61 + 1) – 62 = 4373 + 62 – 62 = 4373$.
Donc : $4374 + 61 – 62 = 4374 – 1$.
La comparaison des premier et dernier termes de cette suite d'égalités indique que l'on a effectivement soustrait 1 à 4374. Une telle justification peut servir d'aide et de vérification aux élèves débutants dans ces calculs.
Par exemple, si on ne sait pas comment faire pour $8456 + 671 – 677$, on dit qu'on « emprunte » à 8456 ce qu'il manque pour « transformer 671 en 677 », soit 6 ; et cela revient à lui retrancher 6. Ce qui s'écrit :
$8450 + 6 + 671 – 677 = 8450 + (6 + 671) – 677 = 8450 + 677 – 677 = 8450 = 8546 – 1$.

Une institutionnalisation est de nouveau à conduire, au cours de laquelle le professeur en interaction avec la classe, fait dégager l'essentiel. Elle débouche de nouveau, après collage de la feuille, sur un écrit consigné dans le cahier de cours, du type :

| **2. Consigne 2** |
|---|

Ajouter 17 et soustraire 15 à un nombre revient à ajouter 2 à ce nombre
Ajouter 319 et soustraire 315 à un nombre revient à ajouter 4 à ce nombre
Ajouter 62 et soustraire 61 à un nombre revient à ajouter 1 à ce nombre

Mais attention !
***Ajouter 61 et soustraire 62 à un nombre revient à soustraire 1 à ce nombre***
En effet, c'est ce que montre l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} 4374 + 61 - 62 &= 4373 + 1 + 61 - 62 \\ &= 4373 + (61 + 1) - 62 \\ &= 4373 + 62 - 62 \\ &= 4373. \end{aligned}$$

Donc : $4374 + 61 - 62 = 4374 - 1$.

***Simplifier un programme de calcul revient parfois à soustraire***

**Etape 3 : *c > b***

*Il s'agit maintenant d'éprouver la validité de la technique sur quelques tâches du même type afin de se convaincre de son efficacité, et d'institutionnaliser ce que l'on peut retirer de cette expérience.*

On propose encore aux élèves de travailler ***individuellement*** et ***mentalement*** afin de donner rapidement les résultats des calculs de la consigne 3. Les élèves notent au crayon leurs résultats en face de chacun des calculs proposés.

Consigne 3 :
Effectue mentalement les calculs suivants :

| | | |
|---|---|---|
| 458 + 45 - 46 ; | 3469 + 45 – 46 ; | |
| 3469 + 124 - 125 ; | 15627 + 124 – 125 ; | |
| 15627 + 313 - 314 ; | 823 + 313 – 314 ; | |
| 823 + 32 - 33 ; | 4586 + 32 – 33 ; | |
| 4586 + 7538 - 7539. | 3,5 + 32 – 31 ; | 823 + 7,2 – 8,2. |

Le professeur pose alors la question : ***Qu'avons-nous appris de ces calculs ?***

Les réponses vont certainement être imprécises, ou confuses, car il n'est pas facile d'exprimer sous la forme d'une seule phrase ce que l'on vient d'observer sur divers spécimens du même programme de calcul $a + b - c$, pour lesquels le choix des variables est toujours $c = b + 1$. Il faut donc s'attendre à ce que les élèves répondent par des phrases du type : « C'est toujours le nombre de départ moins 1 », « Ça revient à enlever (ou soustraire) 1 », etc.

La question qui vient alors est évidemment : ***En raison (ou à cause) de quelles opérations est-on amené à soustraire 1 (puisque ce n'était pas ce qui se produisait dans les calculs des étapes 1 et 2) ?***
Il est encore vraisemblable, pour les mêmes raisons, que les réponses soient imprécises ou maladroites, du type « parce qu'il y a un de plus (ou de moins) », etc., mais elles manifestent que l'attention des élèves est attirée par ***ce qui se fait*** avec $+ b - c$.

C'est alors au professeur d'indiquer que, pour noter qu'appliquer au premier nombre le résultat de la suite du programme de calcul revient à lui soustraire 1, on va utiliser une notation particulière. Ceci est écrit dans le cahier de cours après avoir de nouveau collé la feuille de la consigne 3.

**3. Une nouvelle notation pour simplifier l'écriture**

Pour simplifier l'écriture du programme de calcul, « à un nombre, on ajoute 45 et on soustrait 46 », on aurait pu écrire : … + 45 – 46 = … - 1.
On a préféré écrire :
***+45 – 46 = -1***
qui signifie que si à un nombre, on ajoute 45 puis on soustrait 46, alors on lui soustrait 1.

Ainsi : 458 + 45 – 46 = 458 – 1 = 457

P engage les élèves à écrire par eux-mêmes, dans la suite du cours, ce que l'on a alors observé avec les autres programmes de calcul :

***+124 – 125 = -1, ainsi 15627 + 124 – 125 = 15627 – 1 = 15626***
***+313 – 314 = -1, ainsi 823 + 313 – 314 = 823 – 1 = 822***
***+32 – 33 = -1, ainsi 4586 + 32 – 33 = 4586 – 1 = 4585***
***+7538 – 7539 = -1, ainsi 4586 + 7538 – 7539 = 4586 – 1 = 4587***

**Exercice :**
Trouver d'autres écritures qui donnent –1 ?
Lorsque cet exercice a été donné, les élèves utilisent assez vite des décimaux non entiers.

*Temps 2 : définition et opérations sur les nombres relatifs*

**Etape 4 : mise en évidence de nombres négatifs**

*Deux voies sont possibles pour mener à bien cette étape qui doit se conclure par la mise en évidence d'autres nombres négatifs.*

La première, sans doute ***la plus formatrice,*** consiste à demander aux élèves s'ils peuvent trouver des programmes de calculs qui reviendraient à soustraire 2, 3, 4, 5 ou 6 au premier nombre, donc des écritures qui équivalent à écrire –2, -3, -4, -5 ou –6. Les élèves comprennent qu'il suffit de choisir deux nombres dont la différence est 2, 3, 4, 5 ou 6 et d'écrire correctement qu'on ajoute le plus petit et que l'on retranche ensuite le plus grand. On sélectionne alors diverses propositions qui sont consignées dans le cours afin d'aboutir à des écritures du type :
***+34 – 37 = -3***
***+34 – 38 = -4***
***+12 – 15 = -3***
***+5241 – 5246 = -5***
***+21 – 31 = -10***
***+22 – 29 = -7***

La seconde consiste à fournir aux élèves une liste de calculs ***en travail à la maison***.

Consigne 4 :

Effectue mentalement les calculs suivants, puis écris sous forme simplifiée à quoi équivaut l'application au premier nombre de l'addition suivie de la soustraction, dans ces calculs :

15627 + 314 - 316 ; 823 + 31- 34 ;
4586 + 44 – 48 ; 26 + 52 – 55 ;
364,5 + 524,1 – 524,6 ; 1010 + 0,21 – 0,31 ;
23,6 + 2,2 – 2,9.

Exemple :
1350 + 242 – 247 = 1345 provient de la simplification du programme de calcul :
+242 – 247 = -5

Les nombres choisis poussent les élèves à utiliser la technique la plus économique, car ils sont assez grands pour rendre délicat le calcul mental de l'addition ; mais les deux derniers nombres sont suffisamment proches pour rendre la différence évidente. Arrivés à ce stade, on a déjà institutionnalisé, lors de l'étape précédente, le fait qu'un programme de calcul puisse être écrit, de manière beaucoup plus économique, par une soustraction, au premier nombre du programme, d'un nombre *c* ; soustraction que l'on a notée *–c.* Ceci justifie que l'on engage les élèves dans la deuxième partie de la question.

On aboutit encore, dans ce cas, à faire consigner par les élèves, dans le cahier de cours et à la suite dans la partie 3, les mêmes résultats :

On écrit aussi :
***+34 – 37 = -3***
***+34 – 38 = -4***
***+12 – 15 = -3***
***+5241 – 5246 = -5***
***+21 – 31 = -10***
***+22 – 29 = -7***

**Exercices (on peut en inventer d'autres du type +*a* – *b*, avec *a* et *b* entiers ou décimaux positifs)**
Pour chaque programme de calcul ci-dessous, donner le programme de calcul équivalent le plus simple :
+4 – 5 ; +3,7 – 4,7 ; +6,34 – 9,34 ; +503,9 – 510,9 ; +54 – 70 ; +768,3 – 769, 5 ; +72,165 – 74,166 ; +0,8 – 0,9 ; +1,7 – 1,79 ; +2,85 – 22,85.

*On vient de trouver et de travailler avec des écritures simplifiées de programmes de calcul équivalents, mais celles-ci ne sont pas encore identifiées à des nombres. Au cours de cette étape, on se dirige vers cette identification ; notamment en éprouvant la commutativité sur ces programmes de calcul (propriété spécifique de certaines opérations que les élèves connaissent), ce qui rapproche le travail mené sur les programmes de calcul de ce qui se fait avec des nombres.*

Arrivé en ce point, une question devrait surgir assez naturellement, soit de la part des élèves, soit portée par le professeur mais d'une manière qui paraîtra aller de soi aux élèves car elle

affleure du travail antérieurement fait. C'est la suivante : ***On a vu qu'on pouvait écrire de manière simplifiée un programme de calcul qui aboutit à soustraire, peut-on faire de même pour ajouter ?***
Il y a des chances que les élèves répondent « oui » car ils ont déjà rencontré, à défaut d'avoir écrit des positifs avec un signe +, des programmes de calcul équivalents à ajouter un nombre à un autre. Cela a été le cas, par exemple, dans des calculs des étapes 1 et 2 :

17 + 21 - 1 ; 148 + 199 - 99 ; 17 + 35 - 15 ; 131 + 256 - 56 ; 39 + 58 – 8 ; 185 + 2017 –17 ;
14 + 17 - 15 ; 114 + 17 - 15 ; 1802 + 319 - 315 ; 4374 + 62 – 61.

que l'on reprend désormais en s'intéressant au programme + $b$ – $c$ ; ce que le professeur peut montrer pour le premier de la liste : + 21 – 1 = + 20 (ajouter 21 puis soustraire 1 équivaut à ajouter 21)
Les élèves sont engagés à continuer. On note alors les résultats obtenus dans des programmes de calculs plus amples, pour lesquels ***on décide, par commodité, de ne pas écrire le premier nombre*** :

***+ 21 – 1 = + 20***
***+199 – 99 = +100***
***+ 35 – 15 = + 20***
***+ 256 – 56 = + 200***
***+ 58 – 8 = + 50***
***+ 2017 – 17 = + 2000***
***+17 – 15 = + 2***
***+ 319 – 315 = + 4***
***+ 62 – 61 = + 1***

On institutionnalise de nouveau ce qui vient d'être travaillé. Ce qui conduit à faire noter dans le cahier de cours et à la suite de ce qui a été précédemment écrit :

| |
|---|
| Si à un nombre on ajoute 199 puis on soustrait 99, alors on ajoute 100 à ce nombre :<br>on le note : +199 – 99 = +100 ;<br>Si à un nombre on ajoute 17 puis on soustrait 15, alors on ajoute 2 à ce nombre :<br>on le note : +17 – 15 = + 2 ;<br>Si à un nombre on ajoute 2017 puis on soustrait 17, alors on ajoute 2000 à ce nombre :<br>on le note : + 2017 – 17 = + 2000 ;<br>Remarque, pour gagner du temps, l'une des ces phrases peut être remplacée par<br>… + 2017 – 17 = … + 2000 |

On continue par un entraînement à ce type de calculs sur des programmes de calcul, c'est-à-dire sur des calculs menés en raisonnant de la manière suivante : « si, à un nombre, on ajoute un deuxième nombre, puis on retranche un troisième, cherchons quelle opération on applique à ce premier nombre ; autrement dit le programme de calcul équivalent le plus simple ». On change l'ordre des calculs en cours d'exercices :

| | | |
|---|---|---|
| + 7 – 11 = | + 5 – 2 = | + 8 – 13 = |
| - 12 + 10 = | + 8 – 3 = | - 7 + 4 = |
| - 11 + 7 = | - 2 + 5 = | - 13 + 8 = |
| + 10 – 12 = | - 3 + 8 = | + 4 – 7 = |

À l’issue de cette série de calculs une remarque devrait, en principe, être faite par les élèves : lorsqu’on change l’ordre dans un programme de calcul, on obtient un programme de calcul équivalent, propriété que l’on note.

**II. Un nouveau type de calculs**
**1. Exemples**
+7 – 11 = -4
- 3 + 8 = + 5

**2. Propriété de ce nouveau type de calculs**

**Propriété**
Si on change l’ordre des opérations dans un programme de calcul contenant des additions et des soustractions, on obtient un programme de calcul équivalent.

**Exemples**
+7 – 11 = - 11 + 7 = - 4
- 3 + 8 = + 8 – 3 = + 5

On poursuit les exercices sur les programmes de calcul :

| | | | |
|---|---|---|---|
| - 8 + 5 = | - 8 – 8 = | + 4 + 5 = | - 10 – 20 = |
| -8 + 8 = | - 5 + 5 – 1= | + 7 – 4 – 3 = | + 4– 4 + 2 = |

Au cours de ces calculs, plusieurs nouvelles rencontres sont faites : deux soustractions ou deux additions successives, des programmes comprenant trois opérations, des programmes équivalents à 0, des programmes au cours desquels une étape donne 0. L’idée commence à ***vivre*** que ce que l’on fait sur les programmes de calcul s’apparente à ce qui se fait avec des nombres. C’est désormais au professeur de dire que l’on « invente » de nouveaux nombres : les négatifs.

**III. De nouveaux nombres : les nombres négatifs**
**1. Les nombres négatifs, les nombres relatifs**
**Définition :**
On décide de considérer -1, -2, -3 … comme de nouveaux nombres. Ils sont précédés d’un signe « - » et on les appelle ***« nombres négatifs ».***
On les écrit : -1, -2, -3,…

**Remarques :**
a) - 5 + 5 – 1= - 1
Donc : 0 – 1= -1

b) + 4– 4 + 2 = + 2
Or 0 + 2 = 2
Donc +2 = 2

**Définitions :**
a) Les nombres entiers peuvent donc être notés avec un signe + ; on les appelle des ***nombres positifs.***

b) On a vu que – 8 + 8 = 0, que – 5 + 5 = 0, que + 4 – 4 = 0. On dit que - 8 est l'opposé de + 8 et que + 8 est l'opposé de - 8, ou encore que + 8 et – 8 sont ***opposés.***
Il en est de même pour -5 et + 5 qui sont deux nombres opposés, pour + 4 et – 4 qui sont deux nombres opposés.

c) Nombres positifs et négatifs sont appelés ***« nombres relatifs »*** *(obligé de signaler cela car le terme de nombre relatif est explicitement utilisé dans le programme ; notamment dans les « compétences » du socle commun !)* ; ils sont écrits avec un signe + ou – et un nombre que l'on appelle la ***valeur absolue.***

**Remarque :**
Le nombre 0 est un nombre à la fois positif et négatif (un programme de calcul ne change pas s'il est équivalent à ajouter ou soustraire 0)

Même si le terme de valeur absolue n'est pas au programme, nous avons décidé de l'utiliser car il remplit une fonction de désignation bien commode. Les réticences qui sont apparues concernant son utilisation sont liées à l'usage de la valeur absolue de $x$, $x$ désignant un relatif, puis aux calculs dans lesquelles figurent des valeurs absolues notées $| \, |$. Ce travail n'est évidemment pas mené au niveau de la 5$^{e}$ et ne risque donc pas d'entraîner ce genre d'erreurs ; on se gardera toutefois de prononcer des phrases comme « la valeur absolue d'un nombre, c'est le nombre sans son signe » !

**Etape 5 : addition des relatifs**

***Question cruciale : Comment savoir si ces nombres nouveaux, que l'on appelle nombres relatifs, se comportent comme les nombres que l'on connaissait auparavant ? Pour cela, recherchons ce qui se fait avec des nombres.***
C'est la question fondamentale qui engage ensuite à étudier les opérations et la comparaison sur les nombres relatifs ; rappelons que c'est elle qui engage les élèves de CM à étudier les rationnels dans *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* de Guy et Nadine Brousseau. Il faut donc ne pas passer rapidement sur cette question mais, au contraire, s'assurer que sa dévolution à la classe a eu lieu ; ce qui suppose qu'on passe du temps à la travailler.

Les élèves vont sans doute dire que les nombres servent à compter (dans le sens de dénombrer), ce qui est vrai pour certains d'entre eux. On évite de s'engager dans une discussion sur les décimaux, et on demande ce que l'on a fait au cours de ces séances avec les nombres qui étaient des simplifications de programmes de calcul. En principe, les élèves devraient dire qu'on calcule avec les nombres ; c'est ce qui a été observé en classe où les élèves proposent les quatre opérations. Certains peuvent dire aussi qu'on compare. ***Le professeur indique que l'on va donc étudier les calculs sur les nombres relatifs en commençant par l'addition et la soustraction sur des calculs simples.*** Si les élèves l'ont proposé, il indique aussi que l'on poursuivra par l'étude des autres opérations et de la comparaison.

Par exemple ***peut-on calculer la somme et la différence de +7 et +2, de +7 et -2, de -7 et -2, de -5 et +3 ?***
Les élèves ont à écrire chaque somme avec le signe + d'addition et à calculer le résultat.

Un premier problème surgit : dans ces écritures, deux signes apparaissent parfois, ce qui implique que l'on écrive l'un des nombres entre parenthèses.
Un deuxième problème provient de ce qu'on ne sait pas calculer certaines sommes.
Pour +7 + (+2) et -5 + (+3), le problème se règle en écrivant le positif sans le signe +.
On a ainsi : +7 + (+2) = 7 + 2 = 9, ou encore +9
et -5 + (+3) = -5 + 3 qui signifie en revenant au sens primitivement donné, celui des programmes de calcul, qu'à un nombre on soustrait 5 puis on ajoute 3, ce qui donne -2.

On entraîne les élèves sur des calculs du même type, les deux derniers, d'un type différent, posant problème en utilisant uniquement les connaissances dont disposent actuellement les élèves :

| |
|---|
| Consigne 5<br>Calculer les sommes suivantes de nombres relatifs :<br>+4,3 + (+6,7) ; -9 + (+2) ; -4 + (+10) ; +7 + (-2) ; -7 + (-2) ; +7 – (-2) ; -7 – (-2) |

Les élèves donnent des résultats pour les sommes +7 + (-2) ; -7 + (-2), sans pouvoir les justifier ni les valider, mais rencontrent des difficultés plus profondes pour +7 – (-2) et – 7 – (- 2).

Comme on l'a dit en préambule encadré à ce travail, avant d'aborder le calcul de 7 + (-2), il est nécessaire que les élèves aient tout d'abord, avant ce chapitre sur les relatifs, travaillé la définition de la différence (dans **N** ou dans $\mathscr{D}$) qui doit être une connaissance disponible, élément non problématique, faisant partie du « milieu », comme ensemble des connaissances stabilisées, disponibles, non problématiques :
La différence des nombres $a$ et $b$ est le nombre $d$ tel que $a + d = b$ et on note $d = b – a$.

Revenant au chapitre sur les relatifs. Dans le calcul des sommes, les élèves utilisent les techniques connues sur les programmes de calcul et trouvent le résultat exact. Par exemple, ils disent que +7 + (-2) c'est le programme de calcul qui, à un nombre quelconque, revient à lui ajouter 7 et lui retrancher 2, donc à lui ajouter 5, qui peut se noter + 5 ; et le raisonnement est analogue pour -7 + (-2) où les élèves donnent le résultat -9 en disant qu'on retranche 7 puis 2. De ce fait, il est difficile de faire entendre aux élèves qu'un problème mathématique se pose en ce point ; à savoir que le raisonnement qu'ils ont utilisé, basé sur les programmes de calcul, s'applique à 7 - 2 mais que son extension à +7 + (-2) mérite d'être interrogée, de même que pour la transformation de -7 + (-2) en –7 – 2.
En ce point, c'est le professeur qui reprend la main, après qu'il a fait apparaître le problème mathématique… même s'il n'apparaît pas comme un problème pour certains élèves ! Le fait que la classe n'ait pas forcément su calculer les différences renforce la nécessité de se pencher, d'un point de vue mathématique, sur ce que pourraient être les calculs de sommes et de différences de relatifs.

Le professeur annonce que l'on est engagé dans un passage délicat et qu'il y a une méthode pour en sortir que l'on va réaliser ensemble. Elle repose sur une idée que l'on aurait sans doute mis du temps à trouver. Il s'agit en effet d'introduire 0 dans le calcul de +7 + (-2).
On écrit ainsi que :
+7 + (-2)
= 7 + (-2)
= 7 + 0 + (-2)

Mais avant d'aller plus avant, il faut s'entraîner à écrire 0 à partir de deux nombres opposés ; ce sont des nombres que l'on a déjà rencontrés.
On a vu par exemple que – 8 + 8 = 0, – 5 + 5 = 0 et + 4 – 4 = 0. On demande aux élèves de réécrire ces égalités avec des additions ou soustractions de relatifs (– 8 + (+ 8) = 0, – 5 + (+ 5) = 0, + 4 – (+ 4) = 0), puis de trouver des écritures du même type avec d'autres nombres, puis une qui pourrait nous servir pour remplacer 0 dans le calcul de 7 + 0 + (-2). Deux possibilités sur le choix des nombres ont une forte probabilité d'apparition : utiliser 7 et son opposé, ou -2 et son opposé. Ce qui donne quatre écritures possibles : -7 + 7, +7 – 7, +2 – 2 et -2 + 2.

Il faut donc tester ces possibilités, et la classe peut être divisée en quatre pour cela.
7 + 0 + (-2) = 7 - 7 + 7 + (-2) = 7 + (-2). Le problème n'a pas avancé.
7 + 0 + (-2) = 7 + 7 - 7 + (-2) = 14 - 7 + (-2) = 7 + (-2). Le problème n'a pas avancé.
7 + 0 + (-2) = 7 + 2 – 2 + (-2) = 9 – (+2) + (-2) = 9 – 2 + (-2) = 7 + (-2). Le problème n'a pas avancé.
7 + 0 + (-2) = 7 – 2 + 2 + (-2) = 5 + 2 + (-2) = 7 + (-2). Le problème n'a pas avancé, mais on retrouve 5 dans l'une de ses étapes ; ce nombre ayant été envisagé comme résultat du calcul, sans qu'on l'ait prouvé.
On dresse donc un constat d'échec temporaire. Mais le professeur fait alors remarquer que si 0 peut être remplacé par la somme de deux opposés, la somme de deux opposés peut aussi être remplacée par 0. Soit les élèves reviennent alors sur le dernier calcul qui donnerait effectivement 5 si l'on pouvait « se débarrasser » de 2 + (-2), soit il faut les engager à répondre à :

***Question cruciale : Ne peut-on pas examiner de nouveau les quatre calculs précédents de manière à faire apparaître la somme de deux opposés et la remplacer par 0 ?***

Le premier cas, dans lequel on rencontre 7 – 7, ne donne rien. Il en est de même du second. Dans le troisième, il est possible que des élèves soient tentés de dire que -2 + (-2) donne 0 ; ce que l'on peut facilement contester puisque ces deux nombres sont les mêmes et non pas opposés. Il ne reste plus que la dernière écriture dans laquelle, au-delà de l'écriture – 2 + 2 devrait apparaître aussi 2 + (-2) *(translation du regard, de gauche à droite).*

P pose alors la question dont la première partie devrait émerger d'elle-même dans la classe, il la complète par la seconde, sans doute négligée des élèves : ***2 + (-2) est-il ou non égal à 0 ? Qu'est-ce qui nous le prouve ?***

Apparemment, certains élèves répondent sans hésiter que 2 + (-2) = 0. La difficulté qui surgit est de faire vivre auprès des élèves la nécessité de prouver cette affirmation perçue comme évidente, et qui si elle est vraie entraînerait peut-être aussi le fait que les sommes suivantes de relatifs opposés : 8 + (-8), 2 + (-2), 5 + (-5), etc. sont nulles et si oui pourquoi. On remarque que l'on n'avait pas à se poser ce problème auparavant puisque la réponse à la question faisait intervenir le retour au sens donné aux programmes de calcul : cela était possible du fait que le premier terme de la somme était négatif – 8 + 8 devenait – 8 + (+ 8), et – 5 + 5 devenait – 5 + (+ 5), etc.
L'affirmation 2 + (-2) = 0 n'est donc qu'une hypothèse que l'on va tester et tenter de valider d'un point de vue mathématique.

La question cruciale devient donc : ***Peut-on démontrer que lorsque qu'on ajoute à un nombre son opposé, alors la somme est nulle ? Peut-on le démontrer pour 2 + (-2) par exemple ?***

Une difficulté didactique surgit ***qui conduit à un passage délicat*** :
la question est « la somme 2 + (-2) est-elle égale à 0 ? » et il faut transformer la question de telle manière qu'elle devienne « quel est le nombre qui ajouté à 2 donne une somme égale à 0 ? » qui conduira à répondre à la question « est-ce effectivement -2 qui, ajouté à 2, donne 0 ? ».
On transforme ainsi la question « 2 + (-2) = 0 ? » en résoudre : « l'équation $2 + x = 0$ », donc trouver $x$ qui, ajouté à 2, donne 0.
Par définition de la différence, définition que l'on étend désormais puisque « planait l'interdit » de ne pouvoir soustraire à un nombre un nombre plus grand, l'écriture $2 + x = 0$ signifie que $x$ est la différence de 2 et 0. Ce qu'on note : $x = 0 – 2$.

Ce passage apparaît ***épistémologiquement inévitable***, puisque c'est précisément l'une des raisons d'être des nombres négatifs : la possibilité de l'extension de la soustraction dans **N**. Il ne peut guère être didactiquement accepté que si les élèves ont au préalable abondamment pratiqué la résolution dans **N** d'équations du type : $a + x = b$, soit sous forme algébrique, soit à partir de problèmes, géométriques par exemple (*cf.* la brochure du groupe didactique de l'IREM de Bordeaux sur l'algèbre, disponible à l'IREM), qui y aboutissent.

Arrivés à $x = 0 – 2$, la réponse $x = -2$ doit apparaître puisqu'établie dès les remarques qui succèdent à la définition des négatifs, ce qui suppose un certain entrainement des élèves (mais les élèves « savent » qu'établir que -2 est la solution du problème est effectivement le but visé). Rappelons que le résultat 0 – 2 = -2 a été établi à partir de la considération des relatifs comme « opérateurs », à l'issue du travail mené sur les programmes de calcul.

On vient donc de démontrer que 2 + (-2) = 0. Il en est de même pour 3 + (-3), 1 + (-1), etc.
Remarquons que -2 + (+2) = -2 + 2 = 0 (puisque +2 = 2), ce qui établit la ***commutativité pour l'addition des opposés***.

On peut alors revenir au problème du calcul de +7 + (-2) puisque :
On était arrivé à +7 + (-2) = 7 - 2 + 2 + (-2)
= 7 – 2 + 0 puisqu'on a démontré que 2 + (-2) = 0
= 7 - 2

***Lors de la phase qui précède, c'est bien sûr le professeur qui a repris la main. Il est peut-être nécessaire que le professeur dispose d'un guide, lui permettant d'ajuster les places des élèves et la sienne en fonction des réponses des élèves. Quoi qu'il en soit, on se dirige vers une ostension assumée de la réponse, éventuellement à travers une forme dialoguée du cours. Par contre, il sera possible de laisser davantage de place aux élèves, parce que cette démonstration et sa technique ont déjà été montrées, lors du raisonnement similaire relatif à la différence des relatifs.***

***INTERET ET LIMITE DE CETTE MANIÈRE DE FAIRE :***
*Pour ce qui est de l'intérêt : on a établi la commutativité de l'addition lorsqu'il s'agit de la somme des opposés. On a retravaillé et étendu la définition de la différence au cas où, ajoutant un nombre à un autre, on obtient un nombre plus petit que le premier (2 + x = 0).*

*Pour ce qui est de la limite : la gestion est didactiquement délicate, risque de réduire la place des élèves, et certains risquent de ne pas comprendre pourquoi tant de « complications ». Mais faire des mathématiques, c'est parfois s'affronter à des « complications » que les autres nous font voir parce qu'on ne s'en est pas aperçu soi-même…*

De même, ***le professeur reprend la main pour le dernier calcul car la technique faisant intervenir 0 comme addition d'opposés n'est pas réutilisée ici, bien que l'on fasse encore intervenir le rôle de 0 :***

- 7 + (-2)
= -7 + (0 – 2) puisqu'on a posé l'écriture 0 - 2 = – 2
= -7 + 0 -2
= -7 – 2
= -9

Autre calcul possible :
-7 + (-2)
= -7 + 0 + (-2)
= -7 – 2 + 2 + (-2)
= -9 + 0
= -9

On s'exerce avec d'autres calculs dans lesquels on ***recourt aux deux techniques précédemment utilisées faisant intervenir 0*** :

| | | |
|---|---|---|
| 10 + (-15) = | -3 + (-9) = | -4 + (+9) = |
| -9 + (-3) = | 8 + (-5) = | 5,3 + (-5,12) = |
| -5 + (+ 8) = | -15 + (+ 10) = | 9 + (-4) = |

Cet exercice a pour but de montrer que le recours systématique aux techniques s'appuyant sur « le passage par 0 » est coûteux. On a donc intérêt à observer des régularités qui permettent de dégager la règle de calcul. La commutativité que l'on soupçonne en remarquant l'égalité des résultats obtenus en commutant les termes est admise, mais il est possible d'en faire une démonstration orale puisque l'écriture de la technique de calcul de la somme, consignée dans le cahier de cours, la contient.

Il est temps de consigner ce que l'on vient de trouver dans le cahier de cours, après que l'on a observé les régularités permettant de dégager une règle de calcul.

**2. L'addition des nombres relatifs**

**Définition :** Etant donnés deux nombres relatifs, on peut calculer leur ***somme*** qui est un nombre relatif. L'opération qui, à deux relatifs, associe leur somme s'appelle ***l'addition des relatifs.***

Différents cas sont possibles :
- On ajoute ***deux nombres positifs***
+7 + (+4) = 7 + 4 = 11 = +11 on obtient un nombre positif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues
- On ajoute ***deux nombres négatifs***
-7 + (-4) = -7 – 4 = -11 on obtient un nombre négatif dont la valeur absolue est la somme des valeurs absolues
- On ajoute ***un négatif et un positif***

-7 + (+2) = -7 + 2 = -5
-7 + (+10) = -7 +10 = +3 = 3
- On ajoute ***un positif et un négatif***
+7 + (-2) = 7 – 2 = 5
+7 + (-10) = 7 - 10 = -3

**Règle de calcul de la somme de deux relatifs**
Si on ajoute deux relatifs de ***même signe***, leur somme est le relatif de même signe qui a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues
Si on ajoute deux relatifs de ***signes différents***, leur somme est le relatif de signe le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue et de valeur absolue la différence des valeurs absolues

**Deux remarques importantes**
- l'addition des relatifs est ***commutative*** : on ne change pas la valeur de la somme lorsqu'on change l'ordre des termes d'une addition
- on s'aperçoit que 10 + (-15) = 10 – 15 ; -15 + (+ 10) = -15 + 10 ; -9 + (-3) = - 9 – 3 ;
-3 + (-9) = - 3 – 9 ; -5 + (+ 8) = - 5 + 8 ; 8 + (-5) = 8 – 5.
Dans une somme de relatifs, il est plus simple de supprimer les parenthèses et les signes + d'addition afin de pouvoir calculer comme dans les programmes de calcul

**Exercices**
Calculer les sommes suivantes :
-5 + (+9) ; -10,5 + (-4,9) ; 9,8 + (-9,75) ; +9,3 + (+7,7) ; -4,5 + (+4,25) ; (+4,2) + (-7) ; (-7) + (+4,2) ; (-10,3) + (+10,3) ; (+10,3) + (-10,3) ; -10,3 + (+4,2) ; -10,3 + (-4,2) ; (-7) + (-10) + (+4,2) + (+7) ; 4,9 + (-2,6) ; (-7,65) + (+7,7) ; etc.
Calculer :
-7,25 + 4,39 + (-5,75) + 2,31 ; 8,63 + (-9,23) + (-10,5) + (+10,1) ; -3 + 7 +10,2 – 5 ; +8 + 3 - 11 ; -15 -3,6 ; -2 + 3 – 5 ; -6 +4,2 + 0,8 ; etc.

***On peut désormais donner aux élèves les exercices classiques d'entraînement au calcul de la somme de deux relatifs.***

**Etape 6**

Une nouvelle question est amenée par le professeur : ***Après l'addition, la soustraction est-elle une autre opération possible avec les relatifs ?*** Par exemple peut-on calculer la différence de +7 et +2, de +7 et -2, de -7 et -2, de -5 et +3 ? On se souvient que l'on avait buté sur les calculs +7 – (-2) et -7 – (-2).

Les élèves ont à écrire chaque différence avec le signe – de soustraction et à calculer le résultat. Le recours aux parenthèses ne doit plus poser de problèmes. On se relance dans des tentatives de calcul : +7 – (+2) ; +7 – (-2) ; -7 – (-2) ; -7 – (+ 2) ; -5 – (+3). Certains de ces calculs, comme les suivants, ne posent pas problème car : +7 – (+2) = 7 – 2 = 5 et -5 – (+3) = -5 – 3 = -8.

Le problème est plus délicat pour les calculs de +7 – (-2) et -7 – (-2). On peut attendre les propositions des élèves, mais à ce stade, il paraît difficile qu'ils puissent les justifier à partir des connaissances dont ils disposent. Néanmoins, nous avons pu observer un élève qui a raisonné ainsi :

« +7 – (+2) = 7 – 2 = 5, donc -7 – (-2), qui est son opposé (car il suffit de calculer la somme des deux nombres +7 – (+2) et -7 – (-2) pour s'apercevoir qu'elle est nulle), est égal à -5.
Il en est de même pour -7 – (+2) et 7 - (-2) qui sont opposés. Comme on sait que -7 – (+2) = -7 – 2 = -9, il en résulte que 7 - (-2) = 9 »

D'autres élèves essaient de faire intervenir 0, comme cela a été fait avec l'addition, en introduisant des sommes du type 2 – 2 dans le calcul, mais cela n'aboutit pas.

En examinant ces deux calculs qui posent problème, le professeur peut faire mettre en évidence leur différence de nature par rapport à ceux qui précèdent ; ce qui amène à la question suivante : ***Comment faire pour calculer la différence d'un nombre relatif, qu'il soit positif ou négatif, avec un autre qui est négatif ?***

Deux possibilités peuvent advenir à partir du moment où les élèves sont conscients du problème. Soit ils se souviennent que face à une difficulté comme celle-ci, rencontrées deux fois pour l'addition, on a introduit le nombre 0 dans le calcul, mais ne parviennent pas à le mener à bien, soit ils ne l'évoquent pas et c'est le professeur qui les guide vers la technique déjà utilisée pour résoudre le problème de l'addition en la leur rappelant.

Quelle que soit l'éventualité, la question qui vient ensuite est celle de la fonctionnalité du 0 : ***à quoi cela sert-il d'introduire 0 dans le calcul, par exemple dans le calcul de 7 – (-2) ? Ou encore 0 va être sans doute remplacé par une somme, laquelle et pourquoi celle-là ?*** C'est donc vers un élargissement de la place des élèves dans la construction de la réponse que l'on se dirige désormais.

La réponse attendue des élèves est que l'on se serve de l'opposé de -2 ; par exemple, que l'on écrive 0 = -2 + (+2). Il s'agit de faire discuter les élèves sur le choix le plus judicieux pour arriver à mener à bien le calcul de +7 – (-2) par exemple. La réponse consiste à dire qu'insérer 0 va servir à calculer avec -2, donc qu'il va falloir utiliser la somme de -2 et de son opposé ; il va donc falloir discuter pour choisir entre l'écriture -2 + (+2) ou bien l'écriture 2 + (-2). Une question surgit encore. Si on écrit par exemple, +7 – (-2) = +7 – 0 - (-2), écriture la plus probable en tenant compte des écritures utilisées avec les additions, ***comment faire pour remplacer 0 par la somme adéquate, sachant qu'il y a un signe « - » devant 0 et comment calculer ensuite ?*** La réponse consiste à dire que l'on n'est pas obligé de soustraire 0, puisque l'ajouter ne change rien. On préfèrera donc l'ajouter. C'est soit une réponse qui apparaît dans la classe, soit que le professeur donne. Il reste donc la question de savoir si on ajoute -2 + (+2) ou bien 2 + (-2).

Si on choisit d'écrire : +7 – (-2) = +7 -2 + (+2) – (-2), la seule possibilité de continuer la simplification est d'écrire +7 -2 + (+2) – (-2) = +7 + (+2) -2 – (-2) en commutant -2 et +2. Le professeur doit accompagner ce passage, non trivial, puis accompagner peut-être celui qui consiste à dire que, si à -2 on soustrait -2, on obtient 0.

Si on choisit d'écrire : +7 – (-2) = 7 +2 + (-2) – (-2), le seul point délicat, méritant peut-être un accompagnement par le professeur, est celui qui consiste à dire que, ***si à -2 on soustrait -2, on obtient 0***.

Une autre technique consiste à ajouter 0 en tant que dernier terme de la somme :
+7 – (-2)
= 7 – (-2) + 0
= 7 – (-2) + (-2) + (+2)
= 7 + 0 + 2 (car on soustrait -2 puis on ajoute -2)
= 9

C'est, ici encore, un passage délicat et il y a de fortes chances que ce soit le professeur qui l'indique : car il faut à la fois que le regard se déplace du bloc des deux derniers termes vers celui constitué du second et du troisième, et que l'on accepte que ***soustraire d'abord puis ajouter ensuite le même nombre donne 0*** (alors que traditionnellement, on ajoute d'abord, puis on soustrait). Lors de cette phase, la place des élèves risque d'être de nouveau réduite, le professeur reprenant la main. Néanmoins la place des élèves s'est élargie par rapport à ce qu'elle était au moment de l'addition. elle s'élargira encore lors du calcul suivant de -7 – (-2), puisque les élèves pourront s'appuyer sur la technique d'introduction de 0 qui a été rencontrée trois fois déjà.

On a donc résolu le problème que l'on se posait dans un cas : celui du calcul de +7 – (-2). C'est maintenant ***aux élèves de le résoudre par eux-mêmes***, sans l'aide du professeur, dans le deuxième cas, celui du calcul de -7 – (-2) ; le professeur pouvant seulement indiquer que l'on utilisera la même technique.
De même :
-7 – (-2)
= -7 – (-2) + 0
= -7 – (-2) + (-2) + (+2)
= -7 + 0 + 2 (car on soustrait -2 puis on ajoute -2)
Donc :
-7 – (-2)
= -7 + 2
= -5

Les élèves continuent seuls à utiliser cette technique dans d'autres calculs, ils ont à décomposer 0 le plus judicieusement possible :

| | | |
|---|---|---|
| 10 - (-15) = | -3 - (-9) = | -4 - (+9) = |
| -9 - (-3) = | 8 - (-5) = | 5,3 - (-5,12) = |
| -5 - (+ 8) = | -15 - (+ 10) = | 9 - (-4) = |

La fonction de cet exercice est encore, parmi celle d'entraînement, de montrer que l'on a intérêt à trouver une technique plus économique que celle du passage par 0, de montrer aussi la non commutativité de la soustraction.

Ce que l'on consigne dans le cahier de cours :

**3. La soustraction des nombres relatifs**

**Définition :** Etant donnés deux nombres relatifs, on peut calculer leur ***différence*** qui est un nombre relatif. L'opération qui, à deux relatifs, associe leur différence s'appelle ***la soustraction des relatifs.***

**Règle de calcul de la différence de deux relatifs**
Pour calculer la différence de deux relatifs, on ajoute au premier l'opposé du second.
*Ou encore, selon la formulation du programme actuel : pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.*
Exemples :
10 – (-15) = 10 + 15 ; -9 – (-3) = -9 + 3 ; -3 – (-9) = -3 + 9 ; 8 – (-5) = 8 + 5.
+7 – (+2) = 7 – 2 = 7 + (-2) ; -5 – (+3) = -5 – 3 = -5 + (-3)
**Deux remarques importantes**
10 – (-15) = 25 et -15 – 10 = - 25 ; ***la soustraction n'est pas commutative***
9 – 11 = -2 ; la soustraction est toujours possible

**Exercices A PROPOSER**

Parmi les exercices d'entraînement, un type d'exercices est intéressant afin d'aller vers la résolution des équations qui n'est plus au programme de 5$^e$ en tant que telle, mais que l'on rencontre néanmoins à travers la recherche de la différence de deux nombres. Ce type d'exercices facilite ensuite la mise en place de techniques permettant la résolution d'équations (la transposition).

**Exercice :** Par définition, la différence $d$ de deux nombres est le nombre qu'il faut ajouter au premier pour obtenir le second. Cette définition, rencontrée pour les entiers et les décimaux positifs, reste vraie pour les relatifs.
Ainsi, la différence $d$ de -5,4 et +2,1 est telle que : $-5{,}4 + d = +2{,}1$, donc $d = +2{,}1 – (-5{,}4)$.
Dans l'écriture $d + (-4{,}8) = -0{,}4$, $d$ est la différence de -4,8 et -0,4, donc $d = -0{,}4 – (+4{,}8)$.

Déterminer les valeurs de $d$ dans les différents cas suivants :
$6{,}3 + d = 2{,}9$ ; $d + (-1{,}7) = -2{,}4$ ; $-5{,}3 = d +(-2{,}8)$ ; $d +3{,}26 = 2{,}14$ ; $0{,}0101 + d = 1{,}101$ ; etc.