

Organiser l'enseignement autour d'un PER en classe de Seconde

L'exemple de la géométrie plane

On peut lire dans l'introduction du programme de Seconde de détermination qu'il est « composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonctions, géométrie, pour chacun desquels les capacités attendues, en nombre volontairement limité, constituent la base commune des programmes des années ultérieures ».

Nous nous sommes posé les questions suivantes, très générales, sur la recherche des raisons d'être de l'étude de ces trois domaines des mathématiques :

Pourquoi étudier les fonctions ? Pourquoi étudier la géométrie ? Pourquoi étudier les statistiques ?

Rares sont les réponses fournies par les programmes ; il faut faire des recherches à la fois dans et hors des mathématiques. Si une liste de réponses à ces questions n'est jamais exhaustive, du moins son contenu n'est-il pas de l'ordre d'un choix personnel de tel ou tel membre de la communauté des Mathématiciens, mais bel et bien constitué en puisant dans l'Histoire (et l'histoire des mathématiques en particulier), dans les autres disciplines, dans les problèmes actuels qui se posent à la société, ...

A- Recherche *a priori* des raisons d'être de l'étude la géométrie

Indépendamment des contenus des programmes, que pouvons-nous répondre à la question générale :

Pourquoi étudier la géométrie ?

Voici quelques réponses possibles élaborées au sein de notre groupe de recherche. Ces réponses fournissent des pistes sur l'écologie des savoirs géométriques.

1. Pour construire (ou reproduire) des figures

Reproduire des figures telles que les sangakus (figures géométriques de l'art japonais), savoir comment on peut reproduire certains motifs architecturaux (les rosaces gothiques de nombreuses églises) ou bien savoir comment tel peintre a composé certains tableaux, sont autant de savoirs utiles pour comprendre le monde dans lequel on vit.

Pour résoudre ce type de tâches, il est nécessaire d'analyser la figure à construire ou à reproduire.

Les techniques varient selon les situations :

- la figure est disponible sur papier ou pas : on peut alors imaginer que le papier calque fera l'affaire,
- les dimensions sont directement accessibles,
- ...

Mais souvent les figures à reproduire ou à construire présentent des contraintes (ce que l'on nomme classiquement les problèmes de construction en géométrie) qui mettent jeu des connaissances mathématiques.

Certaines constructions seront des constructions utilisant des méthodes approchées, d'autres seront le fruit de méthodes exactes. Il reste à savoir comment on peut valider si une méthode est exacte... mais aussi à estimer dans quelle mesure une méthode approchée est acceptable, question non abordée dans notre enseignement.

2. Pour comparer des grandeurs géométriques

Savoir si deux grandeurs sont égales ou si l'une est plus grande que l'autre est une question qui peut être considérée comme créatrice de la géométrie en Egypte dans l'antiquité.

Les techniques sont diverses :

- découpages,
- pesées (aires, volumes),
- quadrillage pour les aires,
- utilisation de formules établies éventuellement à l'aide de calcul intégral,
- quadratures ou cubatures,
- démonstrations (à l'aide de triangles isométriques par exemple)
- ...

3. Pour étudier des lieux

L'étude de lieux géométriques a été une des techniques utilisées dès l'antiquité pour résoudre des constructions par la méthode des deux lieux (trisection de l'angle par exemple).

Les lieux ont aussi été largement utilisés au XVIIIe siècle pour définir des courbes que les mathématiciens étudiaient suite à la création de la géométrie analytique.

La mécanique a aussi utilisé l'étude des lieux pour connaître la façon dont se déplaçaient certains points d'une machine (bielle manivelle par exemple).

4. Pour déterminer la mesure d'une grandeur ou une mesure approchée d'une grandeur

La mesure de distances inaccessibles a été une des préoccupations des hommes. Thalès mesurant les pyramides est une légende bien connue, mais on retrouve aussi des distances de mesures inaccessibles dans l'œuvre de Jules Verne par exemple.

Prévoir une mesure par le calcul sans passer par des instruments ou des expériences est aussi une tâche largement pratiquée depuis l'antiquité comme en témoignent les premières formules données par les égyptiens et les babyloniens.

5. Pour exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs

La dépendance d'une grandeur géométrique en fonction d'une autre apparaît dans les tablettes babyloniennes (Plimpton). Etablir une formule a été une avancée importante dès que le calcul algébrique a été créé par les mathématiciens de la fin du XVIe et du XVIIe siècle (Fermat, Descartes, Viète ...).

6. Pour construire des segments de longueur donnée

Les constructions à la règle et au compas sont issues des mathématiques grecques, la ficelle étant l'outil adéquat pour des tracés de figures sur le sable tels que les Grecs le pratiquaient. Descartes par l'adjonction d'un segment unité pourra construire des segments représentant n'importe quelle grandeur (aires, volumes etc.).

Cette question a été importante dans l'histoire de la construction des nombres réels. Elle a été source de nombreuses découvertes allant bien au-delà des nombres constructibles dans les théories ultérieures (théorie de Galois par exemple)

B- Quelques éléments historiques utiles pour faire des choix quant aux organisations mathématiques

Notre point de vue n'est pas de retracer une histoire de la géométrie mais de retrouver les questions originelles qui ont permis l'émergence des notions que nous enseignons en classe.

1. La géométrie grecque :

La géométrie grecque mise en forme par Euclide est dans les grandes lignes, la géométrie que nous retrouvons dans les programmes de collège, mais aussi dans le programme de seconde, avec les triangles semblables et isométriques qui sont deux techniques importantes entrant dans les démonstrations de l'époque d'Euclide.

Ces mathématiques se sont essentiellement forgées dans les résolutions de **problèmes de construction** :

- inscrire ou circonscrire une figure à une autre,
- construire des polygones réguliers,
- réaliser des quadratures ou des cubatures.

Les grecs n'ayant pas d'algèbre au sens ou nous l'entendons développent ce que l'on appelle l'algèbre géométrique. Ainsi quand il s'agit de déterminer un point C d'un segment [AB] tel que le carré de côté CB ait la même aire que le rectangle dont les côtés mesurent AB et AC, les Grecs construisent géométriquement le point C et justifient cette construction.

Les méthodes de construction sont des méthodes exactes et les démonstrations sont présentes pour le rappeler.

Remarques didactiques :

Ayant à enseigner des contenus grecs (triangles isométriques, semblables), il semble que l'on puisse motiver l'enseignement des notions à partir de questions qui ont motivé les géomètres grecs.

2. la géométrie de Descartes

Le XVII^e siècle apporte une rupture quant aux méthodes de résolution. A cette époque on se met à critiquer les méthodes des Anciens. Deux critiques essentielles voient le jour:

- le cadre euclidien est trop étroit : il ne permet pas de trouver de nouveaux résultats mathématiques
- les démonstrations semblent artificielles : en effet de nombreux résultats sont démontrés par l'absurde dans les *Eléments*. Or pour démontrer par l'absurde, il faut connaître le résultat : comment les Anciens trouvaient-ils ces résultats ?

Ces critiques sont clairement formulées par Descartes :

« Quand je me suis d'abord appliqué aux disciplines mathématiques, j'ai lu immédiatement en entier la plupart des choses qu'enseignent d'ordinaire leurs promoteurs et j'ai cultivé de préférence l'Arithmétique et la Géométrie, parce qu'elles étaient, disait-on, les plus simples et comme un cheminement au reste. Mais, ni dans l'une ni dans l'autre, il ne

m'est alors par hasard tombé sous la main des auteurs capables de me satisfaire pleinement. Certes j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité ; quant aux figures, il y avait beaucoup de choses qu'ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux mêmes et qui étaient la suite de conséquences rigoureuses. Mais pourquoi en était-il ainsi et comment parvenait-on à le trouver, ils ne me paraissaient pas le montrer à l'intelligence elle-même. »

Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, 1628.

Descartes se forge une méthode pour « pour augmenter par degrés » sa connaissance. Cette méthode est exposée dans le *Discours de la méthode*, paru en 1637, avec ses trois essais scientifiques *La géométrie*, *La dioptrique* et *Les météores*.

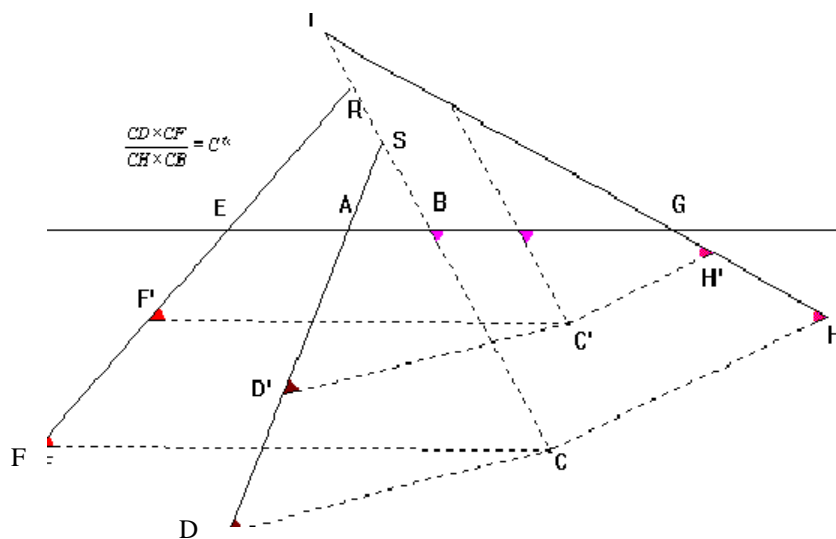
Dans sa *Géométrie*, Descartes applique sa doctrine aux mathématiques. On peut résumer la méthode de Descartes en quatre points :

- Supposer le problème résolu
- Mettre le problème en équation
- Analyser l'équation (y a-t-il une seule inconnue ? Y a-t-il plusieurs inconnues ? Quelle courbe cette équation représente-t-elle ?).
- Revenir au problème

Pour montrer toute la puissance de cette méthode, il démontre un problème de Pappus (vers 300) dont on ne connaissait aucune solution jusqu'alors.

Le problème de Pappus : étant données quatre droites (AG), (IG), (AS) et (ER) d'une part, quatre angles et un rapport k d'autre part, il s'agit de déterminer des points C tels que les projections de C sur les quatre droites suivant les directions données par les angles (cf la figure où les angles donnés sont marqués dans des couleurs différentes) vérifient $\frac{CD \times CF}{CH \times CB} = k$.

Pour résoudre ce problème Descartes pose $AB=x$ et $CB=y$ et il exprime les autres quantités CD , CH , CE et CF en fonction de x et y . Descartes, par sa résolution, fonde bien la géométrie analytique, car le choix de A , de la direction (EG), et de la direction (CB) - qui est fixe car l'angle entre (EG) et (CB) est donné - revient à choisir deux axes comme nous le faisons habituellement et à repérer un point par deux nombres.

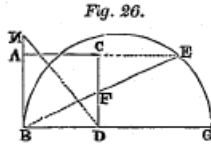


Comme le montre cet exemple, Descartes crée **un nouvel outil pour résoudre un problème de géométrie** : il s'agit dans le problème de Pappus, **d'un problème de lieu**. Pour faire fonctionner cet outil il adopte :

- une nouvelle **façon de penser les objets mathématiques** : les courbes sont des équations. Des coniques seront des équations du second degré etc...
- **une nouvelle façon de raisonner** résumée dans les quatre points exposés ci-dessus. La mise en équation de problèmes, la manipulation de calculs littéraux et la résolution des équations sont les clés de voûte de cette façon de raisonner.

Descartes montre aussi la puissance de sa méthode dans des problèmes de constructions

Si le carré AD (*fig. 26*) et la ligne BN étant donnés, il faut prolonger le côté AC jusques à E, en sorte que EF, tirée de E vers B, soit égale à NB : on apprend de Pappus, qu'ayant premièrement prolongé BD jusques à G,



en sorte que DG soit égale à DN, et ayant décrit un cercle dont le diamètre soit BG, si on prolonge la ligne droite AC, elle rencontrera la circonférence de ce cercle au point E qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne sauroient point cette construction, elle seroit assez difficile à rencontrer; et, en la cherchant par la méthode ici proposée, ils ne s'aviseroient jamais de prendre DG pour la quantité inconnue, mais plutôt CF ou FD, à cause que ce sont elles qui conduisent le plus aisément à l'équation; et lors ils en trouveroient une qui ne seroit pas facile à démêler sans la règle que je viens d'expliquer. Car posant a pour BD ou CD, et c pour EF, et x pour DF, on a $CF = a - x$, et comme CF ou $a - x$ est à FE ou c , ainsi FD ou x est à BF, qui par conséquent est $\frac{cx}{a-x}$. Puis à cause du triangle rectangle BDF dont les côtés sont l'un x et l'autre a , leurs carrés, qui sont $x^2 + a^2$, sont égaux à celui de la base, qui est $\frac{c^2 x^2}{x^2 - 2ax + a^2}$; de façon que, multipliant le tout par $x^2 - 2ax + a^2$, on trouve que l'équation est

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = c^2x^2,$$

ou bien

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0;$$

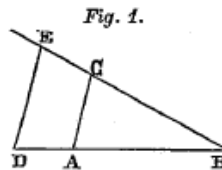
et on connoît par les règles précédentes que sa racine, qui est la longueur de la ligne DF, est

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2} - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

D'autre part Descartes crée d'une certaine manière le calcul graphique en adoptant le choix d'une unité. En se fondant sur des propriétés euclidiennes élémentaires, il peut ainsi construire un segment dont la longueur est un produit de longueurs (jusque à Descartes un produit de deux longueurs ne pouvait être représenté que par une aire), mais aussi construire l'inverse ou la racine carrée d'un nombre:

La multiplication.

Soit, par exemple, AB (*fig. 1*) l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC



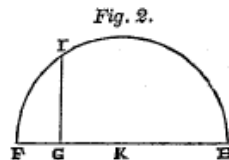
je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE es le produit de cette multiplication.

La division.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, j tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

L'extraction de la racine carrée.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH (*fig. 2*), je lui ajoute en lign



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K du centre K je tire le cercle FKH, puis élevant du point G une ligne droit jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne di rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plu commodément ci-après.

Cependant la méthode de Descartes n'est pas sans inconvénients : d'une part de nombreux calculs sont nécessaires, d'autre part une fois le problème algébrisé, on perd le sens du problème géométrique initial. Ces critiques seront en particulier formulées par Leibniz, en particulier.

Remarques didactiques :

Cette étude nous instruit sur plusieurs points :

- l'algèbre a été créée pour résoudre des problèmes en particulier des problèmes de construction et de lieux en géométrie. Ils mettent en œuvre une **compétence** essentielle dans notre enseignement : calculer une grandeur en fonction d'une autre grandeur. Peut-être cela peut-il nous aider à revisiter l'enseignement de l'algèbre ?
- le calcul graphique créé par Descartes permet la construction effective des figures. Il est justifié par des outils de la géométrie euclidienne.
- Descartes algébrise la géométrie. La question qui consiste à ramener un problème de géométrie à un problème de calcul est une question interne aux mathématiques qui peut aussi être une vraie question au niveau de notre enseignement.

3. La géométrie vectorielle

On peut penser que les vecteurs tirent leurs origines de la physique : la représentation des forces et des vitesses par des vecteurs en vue de leur composition par la règle du parallélogramme est connue depuis longtemps : on cite Archimède (vers -287, -212), Heron d'Alexandrie (premier siècle après J.C.), puis plus près de nous Stevin (1586), Galilée ("Mechanique" 1593-1594).

Mais si on en croit Bourbaki :

" la composition des forces et la composition des vitesses, bien connues en mécanique dès la fin du XVIIe siècle, n'exercèrent aucune répercussion sur l'algèbre, bien qu'elles renfermassent déjà en germe le calcul vectoriel. Il faut attendre en effet le mouvement d'idées qui, aux environs de 1800, conduit à la représentation géométrique des nombres complexes pour voir utiliser en mathématiques pures l'addition des vecteurs. Cette opération est d'ailleurs introduite sans aucune référence à la mécanique et le lien entre les deux théories n'est explicitement reconnu par les fondateurs du calcul vectoriel que dans le second tiers du XIXe siècle"

Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*.

Avant que **Wessel** et **Argand** entre autres, vers 1800 ne donnent, et ce de manière indépendante, la représentation géométrique des nombres complexes, **Leibniz** (vers 1679) avait déjà recherché une troisième voie pour résoudre les problèmes de géométrie, voie qu'il situe entre la géométrie des Anciens (la géométrie des figures) et la géométrie dite analytique créé par Descartes:

" je ne suis pas satisfait de l'algèbre car elle ne fournit, ni les méthodes les plus rapides, ni les plus belles constructions géométriques. C'est pourquoi, je crois que, en ce qui concerne tout au moins la géométrie, nous avons besoin d'une analyse différente qui soit essentiellement géométrique et linéaire et qui soit capable d'exprimer directement le "situs", de même que l'algèbre exprime directement les positions. Je crois avoir mis au point une telle méthode qui permet de représenter les figures, et même les machines et les mouvements par des signes, de même que l'algèbre représente les nombres et les positions par des signes..."

et il poursuit :

"Sa principale valeur réside dans le raisonnement que l'on peut faire et dans les conclusions qui peuvent être déduites grâce aux opérations de cette théorie ; conclusions qui peuvent être établies par une simple étude de figures sans les multiplier de manière considérable et sans faire apparaître des confusions entre les différentes droites et les différents points des figures que l'on est amené à tracer. Cette méthode, par contre, nous conduit de manière sûre et sans effort. Je suis persuadé que grâce à une telle méthode on peut étudier la mécanique aussi simplement que la géométrie, et que l'on peut même tester les propriétés des métaux puisqu'elles dépendent généralement de la forme de leur partie visible. Enfin, je ne pense pas que la physique puisse progresser, tant qu'une telle méthode rapide, allégeant le fardeau de l'imagination n'aura été mise au point"

Comme on peut le constater à la lecture du visionnaire qu'était Leibniz, la recherche de «cette troisième voie » est interne aux mathématiques : il s'agit de rechercher un outil efficace et fournissant de belles solutions, et non pas de créer un outil qui va résoudre de nouveaux problèmes.

Leibniz est un esprit universel qui se contente de poser des jalons et qui ne poussera pas plus avant ses idées. Tout comme son calcul infinitésimal qui sera peaufiné et popularisé par le Marquis de l'Hospital, sa théorie sera améliorée par Grassmann.

La représentation géométrique des nombres complexes créée au début du XIXe siècle peut sembler porter en germe le calcul vectoriel. Cependant l'objet est de donner une image à ces quantités mystérieuses que sont les nombres complexes et non de mettre en place un outil pour résoudre autrement et plus efficacement des problèmes de géométrie. Les applications de cette représentation sont d'ailleurs perçues comme quasi nulles, comme en témoigne une lettre de Servois en 1813 au rédacteur des Annales de Gergonne¹ :

« *Cependant il [Argand] convient lui même avec franchise qu'on ne pourrait ne voir là que le simple emploi d'une notation particulière. Pour moi, j'avoue que je ne vois qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif.* »

Grassmann publie en 1844 l' "Ausdehnungslehre" ("Calcul de l'extension"), travail avec lequel il remporte l'année suivante un concours organisé à l'occasion du deuxième centenaire de la naissance de Leibniz et dont le thème était: "reconstituer et développer le calcul géométrique inventé par Leibniz ou, instituer un calcul semblable". La forme d'exposition de Grassmann, "excessivement abstraite" selon Burali-Forti, se diffusera difficilement. Les travaux de Grassmann seront repris par Peano.

Hamilton (1843), cherchant des "nombres" qui se comporteraient vis à vis de l'espace comme les complexes vis à vis du plan, découvre les quaternions, premier système de "nombres" ne vérifiant pas la commutativité C'est Hamilton qui le premier parle "vecteur". Le calcul d'Hamilton est diffusé par des physiciens tels que Tait ou Maxwell (qui écrira son traité d'électromagnétisme en utilisant les quaternions). Avec nos yeux d'aujourd'hui, on peut remarquer que le calcul quaternionique contient le produit scalaire et vectoriel.

En 1854, Bellavitis expose sa théorie des équipollences (très proche de nos vecteurs), et Laisant, mathématicien français, en perçoit la portée :

« *il a le premier, créé, sous une forme réellement méthodique, un système nouveau de géométrie analytique, lequel se prête de façon la plus heureuse à un grand nombre de questions et fournit souvent des résultats d'une extrême élégance* ».

Peano publie en 1888 "Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann". Il part des équipollences de Bellavitis en modifiant les notations de ce dernier. Il définit le produit scalaire, puis les aires algébriques et les volumes algébriques. En développant les idées de Bellavitis, il semble que Peano ait vu sous un jour nouveau le calcul de Grassmann...Peano énonce déjà des axiomes qui définissent les espaces vectoriels.

Ce bref tour d'horizon ne peut passer sous silence la création du calcul barycentrique par Möbius (1790-1868). En effet si nous trouvons maintenant que le cadre barycentrique (façon de penser les objets et façon de raisonner) diffère du cadre vectoriel, il n'en demeure pas moins que la création de ce calcul se situe dans le mouvement des idées de l'époque qui ont présidé aux travaux de Grassmann.

Les vecteurs n'entrent que tardivement dans l'enseignement. Bouligand, dans son traité : *Initiation aux méthodes vectorielle* (paru en 1926 et destiné aux étudiants de faculté), présente ainsi la géométrie vectorielle :

« *La géométrie élémentaire étudie par des procédés variés, les propriétés de figures indispensables à connaître pour mener à bien toute étude ultérieure. Mais, à cause même de cette variété, elle ne donne pas par elle même de méthode définie pour la recherche de problème.*

Descartes a réalisé un grand progrès en inventant la géométrie analytique et en réduisant toute question de géométrie pure à un problème d'algèbre, résoluble par des méthodes régulières...

L'avantage [de la géométrie analytique] est le fait de réduire un problème de géométrie (dont la solution est incertaine) à un problème d'algèbre dont la solution procède de règles permanentes...

Les inconvénients de la méthode analytique sont :

- *la longueur des calculs*
- *le fait de perdre le contact, pendant le calcul, avec le problème étudié*
- *le fait d'introduire un système d'axe jouant un rôle arbitraire et qui, le problème achevé, doit s'effacer des résultats...*

¹ Les Annales mathématiques de Gergonne sont un journal scientifique fondé par Gergonne (1771-1859)

Le calcul vectoriel est l'étude de certains modes de combinaison de vecteurs entre eux et des vecteurs avec des nombres ordinaires. »

Remarques didactiques

Une des difficultés de l'enseignement du calcul vectoriel est de faire percevoir l'utilité de ce nouvel outil aux élèves. Son utilité peut-elle être accréditée par la physique ? Si on reprend la dernière phrase de Bourbaki, il apparaît qu'historiquement, les deux aspects de la notion de vecteurs (mathématique d'une part, vitesse et force d'autre part) peuvent cohabiter simultanément en bonne intelligence. Il ne semble donc pas nécessairement pertinent de s'appuyer sur des propriétés tirées de la physique pour justifier l'utilisation des vecteurs.

Comme le montre le bref aperçu historique, on ne peut pas justifier l'usage des vecteurs par le type de problème que ceux-ci sont susceptibles de résoudre : la géométrie des figures et, à un moindre degré, la géométrie analytique avec lesquelles ils sont familiarisés fonctionnent efficacement.

Si on veut que les élèves comprennent pourquoi on leur apprend à manipuler les vecteurs, on ne peut pas échapper à l'explicitation de cette troisième voie préconisée par Leibniz. Ces préoccupations semblent loin des programmes qui effleurent la notion de vecteurs sans en montrer réellement l'intérêt.

4. Les transformations :

La première transformation apparue est liée à la création de la géométrie projective par Desargues au XVII^e. Il s'agit d'une projection centrale et l'idée essentielle est d'utiliser une projection centrale pour transporter des propriétés connues de certaines figures afin de découvrir des propriétés nouvelles. Le résultat le plus emblématique de cette méthode est le théorème de Pascal sur les coniques où certaines propriétés du cercle sont transportées sur les coniques. Cette méthode des transformations, oubliée durant deux siècles car écrasée par la nouvelle géométrie de Descartes, sera redécouverte au XIX^e siècle et d'autres transformations, toujours déformantes, apparaîtront (polaires réciproques, inversion etc.) Des problèmes difficiles sont alors résolus simplement comme le problème d'Apollonius : construire un cercle tangent à trois cercles donnés).

Ce n'est qu'avec la décomposition du mouvement d'un solide en mouvements simples (mouvement de translation et mouvement de rotation) que Petersen va créer les isométries (« Problèmes de constructions géométriques », 1866). Elles ne peuvent être alors un outil démonstratif car les cas d'égalités suffisent largement à démontrer les propriétés des figures.

Pour nourrir ces nouveaux objets, Petersen invente alors 400 problèmes qui sont des problèmes de lieux et des problèmes de construction qui ne se résolvent pour la plupart qu'avec les transformations.

Dès lors une tradition didactique se crée. La méthode des transformations initiée apparaît dans les manuels au début du XX^e siècle : Hadamard dans ses *Leçons de géométrie élémentaire* lui consacre un appendice qui en montre la spécificité.

Ses problèmes feront florès dans nombre de manuels à succès (Lebossé - Hémerly, Delteil et Caire) du XX^e siècle. Les raisons d'être de l'enseignement des transformations est conforme à l'objectif fixé par Petersen : résoudre des problèmes de construction.

Dans les années 1970, la réforme des maths modernes provoque l'abandon partiel de l'enseignement de la géométrie et de fait des problèmes de construction et de lieux. Néanmoins les transformations subsistent car elles trouvent leurs raisons d'être dans la théorie des groupes alors enseignée : le groupe des isométries conservant le carré ou bien le rectangle fournissent des exemples permettant de donner de la chair à des contenus très théoriques.

L'échec (réel ou jugé comme tel) des maths modernes dans les années 1980 permet de revenir à un enseignement de la géométrie. Les transformations apparaissent simplement comme outil démonstratif dans des problèmes que l'on peut en général résoudre par des considérations euclidiennes. Les problèmes de construction, même s'ils sont encore mentionnés dans les programmes, sont jugés difficiles et disparaissent de l'enseignement effectif dans les classes. L'étude des transformations ressemble alors à une visite d'objets dans un musée.

Remarques didactiques :

Actuellement, le programme de 2nde demande de « résoudre des problèmes en utilisant les configurations et les transformations de collège ». Aucun nouveau contenu n'apparaît. La méthode démonstrative propre aux transformations doit-elle être enseignée ? Pour résoudre quels types de tâches : des tâches de constructions, de démonstrations ou de détermination de lieux ?

L'habituelle conception des « petites marches » est en cause : l'étude de figures à des fins démonstratives permet de ne pas perdre la main en 2nde, entre les transformations vues au collège et l'homothétie qui arrive en 1^{ère} S dans un

programme déjà « très conséquemment chargé ». Le document d'accompagnement ne peut donner d'autre motivation que « la résolution de problèmes que les acquis de collège permettent de traiter » et « la richesse mathématique (sic) qu'ils permettent de développer ». L'accent est mis également sur leur contribution à « l'apprentissage d'une démarche déductive et la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté ». On ne motive pas l'étude de ces objets mathématiques par des raisons d'être – y en a-t-il au niveau 2^{nde} ? - et on ne peut justifier leur présence autrement que par leur contribution à la « formation de l'individu au raisonnement déductif ».

C- En résumé

Les domaines où intervient la géométrie en dehors des mathématiques sont nombreux :

- les arts : architecture, peinture, sculpture, arts décoratifs ;
- les sciences : physique (en particulier optique, balistique..)
- l'économie
- l'informatique (dessin en 3D...)
- etc.

En mathématiques, peu de concepts n'ont pas d'images mentales plus ou moins géométriques.

Les types de tâches rencontrés dans ces domaines sont nombreux eux aussi :

- inscrire ou circonscrire une figure à une autre,
- construire des polygones réguliers,
- paver le plan avec motifs répétés (Idem avec les frises),
- construire une figure astreinte à respecter des conditions,
- déterminer un lieu géométrique²,
- calculer des grandeurs,
- comparer deux grandeurs sans calcul,
- représenter un objet spatial dans le plan,
- déterminer des grandeurs inaccessibles,
- déterminer une trajectoire,
- modéliser une figure complexe par des objets géométriques,
- ...

Certains types de tâches sont plus mathématiques

- savoir si une méthode de construction est exacte ou approchée³,
- exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs,
- construire des segments de longueurs données par une relation na ; a/b etc. a et b étant les mesures de segments donnés,
- ramener une démonstration géométrique à un problème de calcul ,
- ...

Ces types de tâches qui donnent des raisons d'être sont-elles encore des questions vives des mathématiques actuelles ? Pas toutes : il est évident que le télémètres ont révolutionné l'arpentage et que la triangulation pour déterminer la mesure des méridiens a été remplacée par des mesures satellitaires etc. Mais les mathématiques actuelles doivent-elles être nécessairement la seule source de notre enseignement ?

Si l'enseignement demandé est fondé sur la géométrie d'Euclide, c'est que celle-ci est nécessaire à la compréhension des problèmes géométriques actuels :

- la géométrie discrète (celle des ordinateurs) est porteuse au niveau de la recherche mais pour la comprendre, encore faut-il savoir en quoi elle diffère de la géométrie de tous les jours qui est celle d'Euclide.
- comprendre le fonctionnement d'un GPS nécessite des connaissances de géométrie non euclidienne, mais aussi des connaissances euclidiennes non triviales.

Le rôle de la géométrie « classique » ne se dément pas aujourd'hui même si les problèmes sont issus de domaines non mathématiques⁴ (constructions de ponts, de gratte-ciel ou bien d'échangeur d'autoroutes mais aussi de morphing...). Ainsi est-il possible de justifier aux yeux des élèves les raisons de l'étude de la géométrie, en particulier pour la compréhension de notre environnement présent à travers l'histoire.

² Tout en étant incluse dans la question précédente, elle est également un problème à part entière (en mécanique)

³ Cette question est interne aux mathématiques et conduit naturellement aux démonstrations.

⁴ Voir diaporama.

D- Choix possibles de PER sur la géométrie plane en classe de 2^{nde}

Les grandes questions pouvant motiver l'enseignement des notions de géométrie du programme de seconde sont nombreuses et des choix doivent être faits.

Ces choix sont guidés par :

- l'analyse des programmes (les contenus du programme doivent apporter des techniques qui aident à répondre aux questions),
- l'étude écologique (où rencontre-t-on des figures géométriques ?)
- les problématiques historiques qui ont données naissance aux notions (Voir partie I).

Nous proposons d'organiser notre enseignement de la géométrie des figures autour des problèmes de construction. Les questions que nous envisageons de traiter sont très générales :

- *Comment construire une figure astreinte à respecter des conditions ?*
 - o *La construction est-elle unique ?*
 - o *Comment réaliser la construction ?*

Ces questions vont engendrer une multitude d'autres questions. Nous en traiterons que quelques unes qui nous permettront de baliser notre parcours :

- *Comment reproduire une figure ?*
- *Comment construire des figures à l'aide du calcul algébrique ?*
- *Comment exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs ?*
- *Comment construire des segments de longueur donnée à partir de segments de longueurs données ?*
- *Comment savoir si une méthode de construction est exacte ou approchée ?*

Pour aider à l'étude de ces questions, nous devons concevoir une organisation mathématique des savoirs enseignés. Ce que nous nommons un PER (**P**arcours d'**E**tude et de **R**echerche). Ce parcours est organisé autour d'Activités d'Etude et de Recherche (AER) qui permettent aux élèves soit de construire des connaissances soit d'étudier des réponses déjà fournies par la communauté mathématique.

Chaque AER est l'occasion d'aborder une ou plusieurs réponses aux grandes questions traitées.

Le parcours, quant à lui, se porte garant du lien entre les AER.

E- Détail d'un PER : les constructions géométriques

Les questions précédemment citées nous semblent trop vastes pour que des réponses puissent constituer un PER cohérent au niveau où nous nous plaçons.

Nous avons donc choisi de les spécifier :

- Comment inscrire ou circonscrire une figure à une autre ?
- Comment construire des segments de longueur donnée par de relation entre d'autres longueurs.

La deuxième question est liée à la première si on exige que les constructions soient possibles à la règle et au compas.

Nous ne pourrions que répondre partiellement à ces questions car les méthodes de résolution sont diverses et variées :

- renversement de la construction,
- oubli d'une condition,
- méthodes des deux lieux
- algébrisation du problème
- ...

Nous avons choisi d'aborder que les constructions possibles avec l'algèbre. Ce choix est guidé par notre volonté de redonner du sens à l'apprentissage de l'algèbre. Cela nous amène à un autre type de tâche : comment calculer une grandeur en fonction d'une autre ?

Enfin en liaison avec les exigences du programme mais aussi de l'apprentissage des mathématiques, nous abordons la sous question :

- comment savoir si une construction est exacte ou approchée ?

qui permet de revisiter la démonstration.

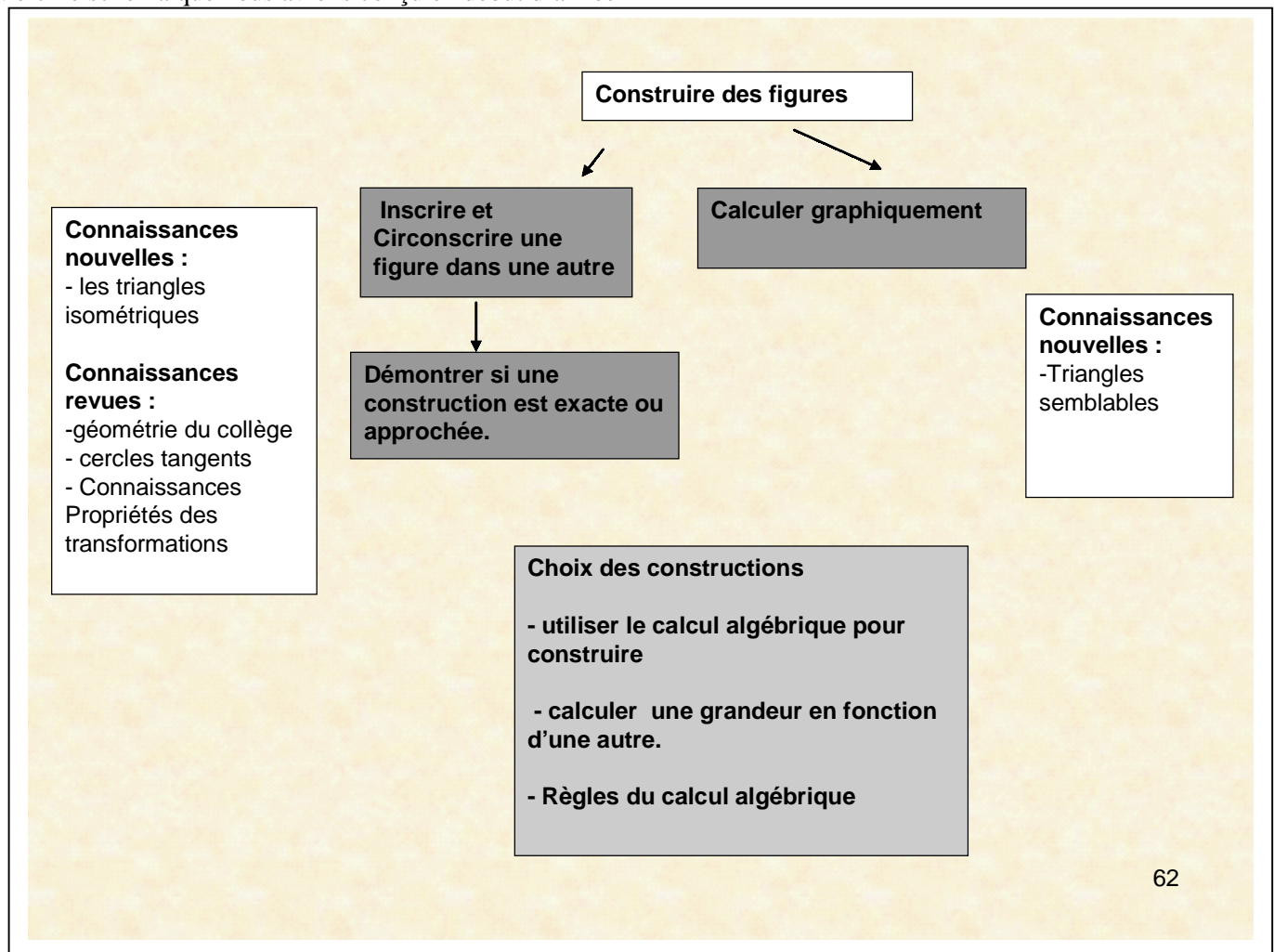
Il est à noter aussi que le travail sur la deuxième question révèle un autre type de tâche : savoir utiliser une écriture littérale et l'interpréter. Nous abordons ainsi une tâche qui sera aussi abordée avec les fonctions.

I- Description générale du parcours

Parmi les problèmes de constructions, nous avons choisi de nous intéresser à ceux qui relèvent (dans un sens très large) des inscriptions et circoncriptions, et ce pour deux raisons :

- ils permettent d'aborder les contenus du programme de seconde que nous souhaitons aborder,
- ils sont susceptibles d'être reliés facilement à des « situations du monde » que les hommes ont eu à résoudre comme le montre le diaporama introductif.

Voici le schéma que nous avons conçu en début d'année



Comme le montre ce schéma,

- les anciennes connaissances de géométrie côtoient les nouvelles.
- l'enseignement de l'algèbre est intimement lié à celui de la géométrie.
- le calcul algébrique est motivé par un de ses usages historiques : les problèmes de constructions. La démonstration se place dans un cadre purement intellectuel et interne aux mathématiques : il s'agit de savoir si les constructions proposées qui semblent satisfaisantes à l'œil sont exactes ou bien approchées.
- contrairement à ce qu'exposent de nombreux manuels suite au libellé du programme, les triangles semblables sont dissociés des triangles isométriques. A ce niveau les triangles isométriques sont avant tout un outil démonstratif alors que les triangles semblables sont surtout un outil de calcul

Ce schéma montre aussi la difficulté de la gestion en classe des savoirs enseignés et révisés : le risque est important que l'élève de seconde se perde au milieu des connaissances qui s'imbriquent énormément.

Cela nous a amené en cours d'année à structurer les études de manière rigoureuse :

1. temps de recherche de l'étude proposée,
2. bilans de l'étude
 - o correction, étude des solutions, rédaction des solutions
 - o recherche des savoirs et savoir-faire anciens rencontrés dans l'étude : fiche de révision éventuelle distribuée aux élèves, fiche de méthodes.

- repérage de ce qui est nouveau (cours) et qui doit être objet d'un apprentissage spécifique.
 - Situer l'étude par rapport à la grande question initiale ce qui conduit à un historique des réponses apportées à la question initiale
3. travail de la technique sur les savoir-faire nouveaux.

Ainsi, les élèves organisent leurs classeurs en différentes parties :

- les études avec l'historique des réponses à la grande question
- le cours
- les exercices
- les fiches de rappels et les fiches de méthode
- les devoirs.

II- Détail du parcours

L'introduction du parcours est constituée d'un petit diaporama⁵ qui montre l'écologie de la géométrie et qui situe les premiers pas du parcours.

1-Première étape du parcours : présentation aux élèves

Les élèves doivent connaître la ou les questions que nous proposons de leur faire étudier. Autrement dit il doit y avoir dévolution de ou des questions.

a- Premier temps

Intervention du professeur :

Dans quel domaine de la vie a-t-on besoin de la géométrie ? (On peut regarder autour de nous ou regarder les professions qui utilisent la géométrie).

Pourquoi a-t-on besoin de la géométrie : pourquoi faire ?

Par ces questions il s'agit que les élèves prennent conscience que l'étude de la géométrie a d'autres buts que l'acquisition de connaissances purement scolaires.

b- Deuxième temps

Intervention du professeur :

Parmi les domaines et types de tâches listées, on retient la question des constructions de figures qui intervient dans de nombreux domaines. (On passe le diaporama pour illustrer notre propos).

Nous choisissons d'apporter des réponses à la question suivante :

Comment inscrire ou circoncrire une figure à une autre ?

Ce faisant, nous aborderons un certain nombre de connaissances et méthodes anciennes et nouvelles. Nous devons aussi garder en mémoire les réponses que nous apporterons à cette question.

2- Deuxième étape du parcours : Analyser une figure et reproduire cette figure.

a- Dynamique de l'étude

Intervention du professeur :

On trouve dans les tablettes de bois japonaises de nombreuses figures mathématiques. Elles sont accompagnées d'écrits qui sont en fait des calculs de grandeurs (longueurs de segments, aires etc.). En revanche, les constructions parfois très difficiles ne sont pas explicitées. On se propose de reproduire une telle construction.

⁵ Ce diaporama sera disponible sur le site de l'IREM de Poitiers et sur le site Educmath.

b- L'étude

Etude 1 : reproduire une figure

Reproduire ce sangaku à l'aide d'un logiciel de géométrie ou bien sur papier et en utilisant les instruments de géométrie (règle, équerre et compas). On partira du triangle équilatéral.



c- Organisation mathématique

La tâche :

Reproduire une figure donnée sur logiciel et avec papier crayon.

Types de tâches rencontrés

- analyser une figure,
- construire un triangle équilatéral, des cercles tangents, un carré,
- Justifier la construction.

Techniques utilisées :

Le type de tâche proposé met en jeu des figures du collège que l'élève doit savoir construire ainsi que des cercles tangents.

L'analyse de la tâche montre les connaissances requises pour réussir celle-ci :

- tracé d'un triangle équilatéral
- tracé du cercle inscrit,
- tracé d'un carré inscrit dans un cercle ayant un côté parallèle à une droite donnée
- tracé d'un carré inscrit dans un autre carré par les milieux des côtés
- tracé d'un cercle tangent à deux droites et un cercle.

Les techniques utilisées par les élèves peuvent être variées :

- tracer des hauteurs (il nous faudrait parler de bissectrices et cela justifie les exercices qui suivent)
- tracer du cercle inscrit en abaissant une perpendiculaire,
- construire un carré inscrit en utilisant les propriétés de ses axes de symétries : les diagonales font un angle de 45° avec l'axe médian,
- construire deux cercles tangents en un point à l'aide de leur tangente commune en ce point.

Le tracé sur logiciel (géogebra) permet de revoir la construction du triangle équilatéral :

- à l'aide de cercles
- à l'aide d'une rotation : cela permet de faire fonctionner en situation la rotation et d'associer aux figures usuelles leurs transformations naturelles.

Notons que cette étude permet aux élèves d'utiliser pour la première fois le logiciel. L'exactitude de la construction peut être vite vérifiée sur logiciel.

d- Organisation didactique

L'analyse de la figure doit être faite en commun sous la direction du professeur. Rien n'indique que le triangle est équilatéral, le cercle tangent aux côtés etc.

Ensuite seulement, le travail de l'élève peut commencer dans de petits groupes de préférence afin que s'opèrent des échanges.

Le professeur doit relancer l'étude dans chaque petit groupe, par l'intermédiaire de questions cruciales qui sont autant de sous questions :

- Comment construire le cercle inscrit dans un triangle ? Pourquoi la construction « marche-t-elle » ? Si les élèves travaillent sur logiciel, on peut déplacer un point pour voir si la figure suit.
- Comment construire dans un cercle un carré ayant un côté étant parallèle à une droite donnée ?
- Comment construire un cercle tangent à deux droites et un cercle ?

Il n'est peut être pas utile de demander le programme de construction : une construction effective sur papier avec les tracés intermédiaire ou bien l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut suffire.

Bilans de l'étude :

d1- Mise en commun : elle est faite sur les constructions effectives faites par les élèves en particulier sur logiciel. Certaines constructions paraissant douteuses, il est nécessaire d'argumenter pour justifier celles-ci.

d2- Les connaissances utilisées ?

Ce qui ressort :

- construire un triangle équilatéral,
- le cercle inscrit et les bissectrices,
- les cercles tangents et leurs propriétés,
- les propriétés du carré et les constructions possibles du carré.

Les connaissances dégagées sont **institutionnalisées** par des fiches données aux élèves.

- ce que sont les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices ainsi que leurs propriétés. (**annexe 1**)
- les positions relatives de deux cercles (**annexe 2**)
- les propriétés du triangle équilatéral et ses constructions usuelles (**annexe 3**),
- les propriétés du carré et ses constructions usuelles (**annexe 4**).

d3- L'histoire

Un premier type de construction est la reproduction. Pour reproduire une figure, on doit savoir :

- analyser une figure pour savoir dans quel ordre on la construit.
- justifier les constructions faites par recours à des théorèmes et des définitions.

Aucun cours nouveau de seconde n'apparaît lors de cette étude.

Les exercices d'application des connaissances doivent être des tâches « équivalentes » à la tâche précédente c'est-à-dire dans ce cas des reproductions. Des choix sont nécessaires, car de nombreuses connaissances ont été institutionnalisées lors de la première étude.

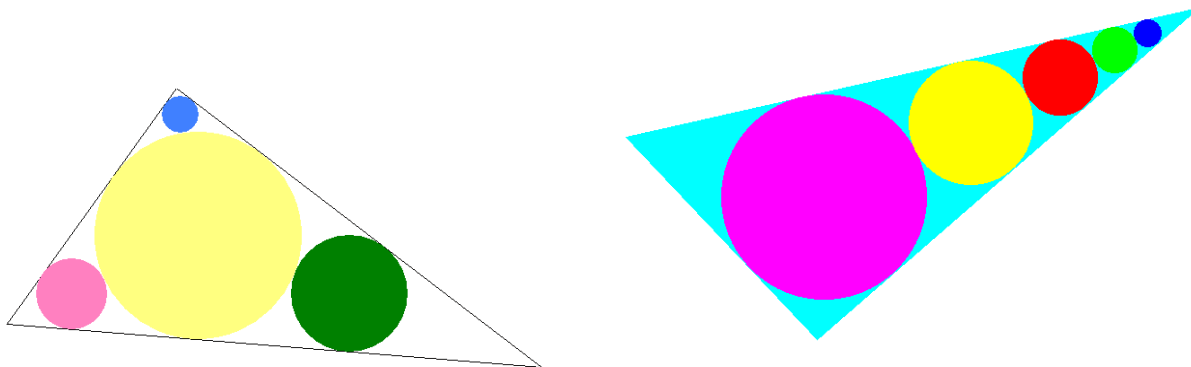
Nous nous centrons sur ce qui est le plus nouveau : les cercles tangents et les propriétés des bissectrices.

e- le travail de la technique.

Toutes les constructions se feront sur logiciel.

Exercice 1:

Reproduire à la règle non graduée et au compas les deux Sangakus suivants en partant des triangles qui sont quelconques :



Ces exercices permettent aussi de continuer à utiliser le logiciel.

3- Troisième étape du parcours : constructions exactes ou approchées ?

a-Dynamique de l'étude

Nous dynamisons l'étude par la dévolution du problème de l'exactitude de la construction.

En tant qu'apprenti mathématicien, il convient de savoir si les constructions effectuées sont exactes ou approchées !

Nous proposons des constructions qui sont tirées d'un livre d'Abul-Wafa mathématicien arabe du Xe siècle.

On se place en tant que mathématicien qui cherche à savoir si les méthodes proposées par Abul-Wafa sont des méthodes exactes ou approchées, en sachant que les constructions effectives ne peuvent être qu'approchées.

La démonstration, qui oblige à se placer en dehors de toute réalité matérielle, permettra de trancher la question.

b- L'étude

Etude 2 :

Parmi les problèmes de géométrie rencontrés par les artisans et artistes depuis l'Antiquité, figurent en particulier des problèmes « d'inscription » et « de circonscription ».

*On les retrouve chez les **géomètres grecs de l'Antiquité** (voir lien avec le cours d'histoire) ou les **mathématiciens chinois** bien avant notre ère. On les trouve aussi chez les artisans Arabes pour construire des fresques (comme dans l'Alhambra de Grenade) ce qui a conduit Abul Wafa à écrire un ouvrage intitulé : « **Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en science de la géométrie** » dans lequel il donne des moyens de construire des figures en particulier inscrites ou circonscrites à d'autres figures. Certaines constructions sont mathématiquement exactes, d'autres sont des constructions approchées.*

Construction 1 : Circonscrire un carré à un triangle équilatéral par Abul Wafa

Soit ABE un triangle équilatéral.

On trace la médiatrice de [AE] et on place D le milieu de [AE]. On place C sur [BD) extérieur au triangle ABE tel que $DC = DE$.

La perpendiculaire à (CE) passant par B coupe (CE) en H et la perpendiculaire à (CA) passant par B coupe (CA) en G.

CHBG est un carré circonscrit à ABE.

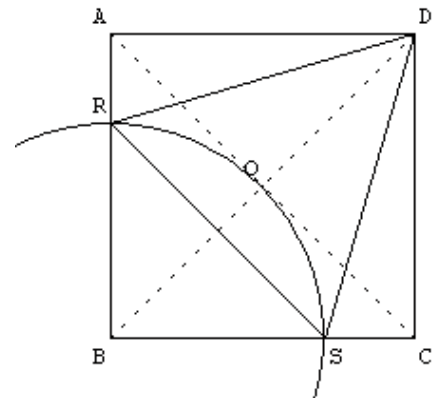
La construction proposée par Abul Wafa est-elle exacte ?

Construction 2 : Inscrire un triangle équilatéral dans un carré.

Soit ABCD un carré de centre O et \mathcal{C} le cercle de centre B passant par O.

Le cercle \mathcal{C} coupe [AB] en R et [BC] en S.

Abul Wafa affirme que DHG est équilatéral. Est-ce vrai ?



b- Organisation mathématique

Deux constructions sont proposées l'une exacte et l'autre approchée.

Le type de tâche proposée met avant les connaissances de collègues. La résolution fait intervenir volontairement le calcul littéral qui est un passage obligé de notre parcours.

La tâche :

Première construction :

- Exécuter une construction donnée pas à pas.
- Démontrer si un triangle est équilatéral.

Techniques utilisées

Utiliser les propriétés du triangle rectangle isocèle,
Utiliser les propriétés du carré (symétrie entre autre)

Deuxième construction

- Démontrer que le triangle n'est pas équilatéral en démontrant que ses trois côtés ne sont pas égaux,
- Démontrer que deux grandeurs sont inégales.

Techniques utilisées

- Calculer deux longueurs en fonction de a côté du carré,
- Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle connaissant les deux autres côtés.
- Utiliser les règles sur le calcul littéral,
- Utiliser le logiciel pour voir si les longueurs sont égales. (Pour se persuader que la méthode de construction proposée n'est pas exacte, l'élève peut soigner sa construction ou bien chercher une « preuve » sur ordinateur. Mais peut-on se fier à l'ordinateur ? Ce que le professeur doit imposer, c'est une démonstration utilisant des calculs).

d- Organisation didactique

Le professeur doit organiser l'étude par l'intermédiaire de questions cruciales.

Dans la première démonstration, après une recherche individuelle, il peut faire lister un certain nombre de techniques qui pourront être répertoriées dans un fichier :

- comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?
- comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?
- comment démontrer que deux segments ont la même longueur ?
- comment démontrer qu'un triangle est rectangle, rectangle isocèle ? (annexe 3)
- ...

Ces techniques doivent être justifiées par des théorèmes ou des définitions vues au collège.

On doit expliquer une (ou plusieurs) techniques de recherche et de rédaction d'une démonstration en partant des données pour arriver à la conclusion ainsi que l'usage bien pensé d'un fichier méthode.

Dans la seconde démonstration il s'agit de se convaincre que la méthode est approchée. Cette fonction de la démonstration est peu fréquentée par les élèves : on leur demande trop rarement de démontrer qu'une assertion est fausse sinon par contre exemple.

Une fiche rappelant les règles du calcul littéral est distribuée. (**annexe 5**)

Bilans de l'étude

d1-Mise commun : elle porte sur les recherches et la correction

d2- Les connaissances utilisées?

- savoir pourquoi et comment démontrer en mathématiques.

Savoir si une méthode est exacte ou approchée, savoir si telle figure qui semble être... l'est vraiment nécessite des arguments qui ne peuvent pas être issus de nos sens (vue, mesure, ordinateur) mais nécessitent une argumentation qui, en mathématiques, a une certaine forme : c'est un discours logique utilisant des données, des théorèmes et des définitions. Le discours doit être logiquement imparable.

Pour faire une démonstration, il faut repérer les données, la conclusion et se poser les bonnes questions dont les réponses se trouvent en général dans le fichier méthodes

- savoir mener à bien un calcul

Des rappels d'éléments techniques dans les fiches méthodes et dans les règles de calcul.

Ce type de tâche réapparaît en permanence dans les exercices qui suivent. Une feuille de calculs systématiques est donnée. Les exercices seront faits régulièrement à raison de deux ou trois par semaine.

d3- l'histoire

Savoir si la construction est exacte ou approchée requiert des démonstrations donc la connaissance de définitions et théorèmes.

Une possibilité est de calculer. Cela nécessite de connaître les règles usuelles du calcul littéral et de savoir calculer une grandeur en fonction d'une autre.

e- Le travail de la technique centré sur le calcul d'une grandeur en fonction d'une autre

Exercice 1 :

Dans un cercle de rayon R et de centre O , on trace un diamètre $[AB]$. Soit I le milieu de $[OB]$.
La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe le cercle en D et E .
Le triangle ADE est-il équilatéral ?

Exercice 2 :

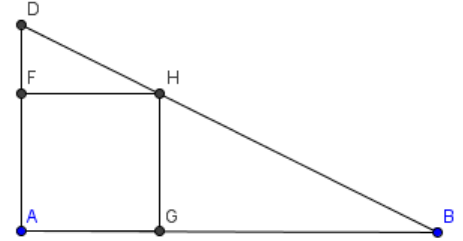
ABD est un triangle rectangle. $AD=a$ et $AB=2a$.

On place F sur $[AD]$ tel que $AF=\frac{2}{3}a$.

La perpendiculaire à (AD) passant par F coupe (BD) en H .

La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe (AB) en G .

$FHGA$ est-il un carré ?



Exercice 3 :

$ABCD$ est un rectangle dont la longueur $[AB]$ mesure $8a$ et la largeur $[BC]$ mesure $4a$, a étant un nombre positif. Soit E le point de $[AB]$ tel que $AE=5a$ et F le point de $[CD]$ tel que $DF=5a$.
 $AAECF$ est-il un parallélogramme ?

3- Troisième étape du parcours : donner de nouvelles techniques pour justifier si des constructions sont exactes

1- Dynamique de l'étude

Intervention du professeur :

Savoir si une construction est exacte ou approchée suppose des théorèmes afin de faire des démonstrations.
Vos connaissances suffisent-elles ?

2- L'étude

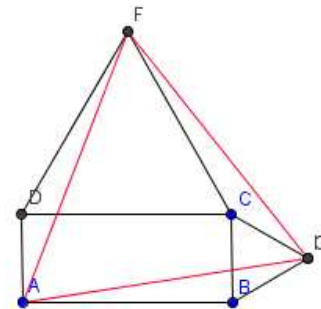
Etude 3

On souhaite résoudre le problème suivant :

$ABCD$ est un rectangle. On construit les triangles équilatéraux

BCG et CDF

BFE est-il équilatéral ?



c- Organisation mathématique :

La tâche :

Il s'agit de démontrer qu'un triangle est équilatéral.

Types de tâche rencontrés :

- démontrer que deux longueurs sont égales.

Techniques :

Utiliser le 2^{ème} cas d'isométrie des triangles (deux côtés adjacents à un angle)

On peut remarquer que dans 90% des problèmes, c'est ce cas d'isométrie qui est utilisé.

d- Organisation didactique :

Le professeur organise la recherche du problème par l'intermédiaire de questions cruciales :

- comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?
- comment savoir que deux segments ont la même longueur ?

On peut s'attendre à ce que les élèves disent que les triangles sont superposables. Les élèves n'ont pas a priori les connaissances requises : ils possèdent depuis la cinquième la technique qui ne peut être qu'empirique : par habitude les élèves savent que le triangle dont on connaît deux côtés adjacents à un angle est unique (nous dirions à une isométrie près) et donc que deux triangles qui ont deux côtés respectifs égaux adjacents à deux angles égaux ont leurs autres éléments (côtés et angles) de même mesure.

Ils ont alors un élément technique sans technologie (c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas justifier).

Ne pouvant s'appuyer sur aucun théorème pour justifier, nous introduisons la définition des triangles isométriques.

Définition :

Deux triangles sont isométriques si leurs côtés respectifs ont les mêmes mesures.

Si ABC et PQR sont deux triangles vérifiant $AB=PQ$, $AC=QR$ et $BC=PR$ alors ABC et PQR sont isométriques.

Intervention du professeur :

Quand peut-on affirmer que deux triangles sont isométriques ?

Pour aider les élèves à répondre à cette question, il peut proposer d'étudier quelques exemples comme ci-dessous:

Un triangle ABC est donné : il possède 6 données numériques facilement accessibles : les mesures de ses côtés AB , BC , AC et de ses angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .

Construire un triangle MNP dans différents cas suivants:

			Isométriques	Non isométriques
$BC= MN$	$\hat{A} = \hat{M}$	$\hat{C} = \hat{N}$		
$AC= MN$	$AB=MP$	$\hat{A} = \hat{M}$		
$AB= MP$	$\hat{B} = \hat{C}$			
$\hat{A} = \hat{M}$	$\hat{B} = \hat{P}$	$\hat{C} = \hat{N}$		
$AB= MP$	$AC= MN$	$BC= PN$		
$AB=PM$	$BC= PN$	$\hat{A} = \hat{M}$		

Dans quel cas semble-t-on assuré que les triangles ABC et MNP sont isométriques.

Quel nombre minimal de données faut-il avoir sur MNP pour être sûr que MNP et ABC soient isométriques ?

Bilans

d1- Le cours

Suite à cette étude on institutionnalise (cela constitue le cours):

- les théorèmes donnant les cas d'isométrie des triangles.
- Si deux triangles sont isométriques, leurs angles respectifs sont égaux.
- la définition des triangles semblables qui apparaissent dans la recherche des cas d'isométrie.

Ces théorèmes sont admis.

Les exemples précédents permettent de remarquer que des triangles qui ont les mêmes angles ne sont pas nécessairement isométriques.

Intervention du professeur :

Suite à ce cours, on reprend l'étude du problème initial en posant la question cruciale :

En quoi la notion de triangle isométrique permet-elle de résoudre le problème ?

d2- Les connaissances utilisées ?

On a utilisé les triangles isométriques qui servent :

- pour démontrer que deux longueurs sont égales, il suffit de reconnaître des triangles dont on peut démontrer qu'ils sont isométriques

- pour démontrer que deux angles ont la même mesure, il suffit de reconnaître des triangles dont on peut démontrer qu'ils sont isométriques.

Savoir utiliser les triangles isométriques pour démontrer des propriétés est une technique à maîtriser.

d3- L'histoire

Pour savoir si une construction est exacte ou approchée, une démonstration est nécessaire.

Les triangles isométriques permettent de savoir si deux longueurs sont égales ou deux angles sont égaux.

e- Exercices possibles de travail de la technique

Exercice 1 :

- construire deux triangles ABC et MNP non isométriques tels que $\hat{A} = \hat{M} = 30^\circ$ et $\hat{B} = \hat{N} = 100^\circ$
- construire deux triangles ABC et MNP non isométriques tels que $AB = MN = 5\text{cm}$ et $BC = NP = 6\text{cm}$.

Exercice 2 :

Résoudre le problème initial.

Exercice 3

On souhaite résoudre le problème suivant :

$ACFD$ est un parallélogramme. On construit les triangles équilatéraux ABC et ADE .

BFE est-il équilatéral.

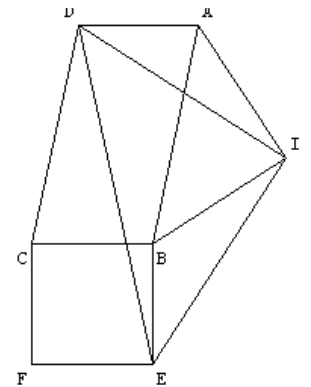
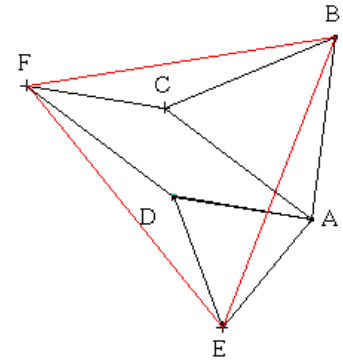
Exercice 4:

Un triangle isocèle rectangle inscrit ?

$ABCD$ est un parallélogramme.

$BCFE$ est un carré et AIB un triangle isocèle rectangle en A extérieur à $ABCD$.

Le triangle IDE est-il rectangle isocèle ?

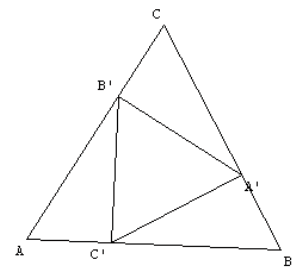


Exercice 5 :

ABC est un triangle équilatéral.

Voici la construction d'un triangle $A'B'C'$ équilatéral inscrit dans ABC .

$AC' = BA' = CB'$. Justifier la construction.



Exercice 6 :

Les polygones réguliers ont été étudiés dès l'antiquité par les mathématiciens nombreux motifs architecturaux comme les vitraux (rosaces) mais aussi en peinture. On rappelle qu'un polygone régulier est un polygone inscrit dans un cercle longueur.

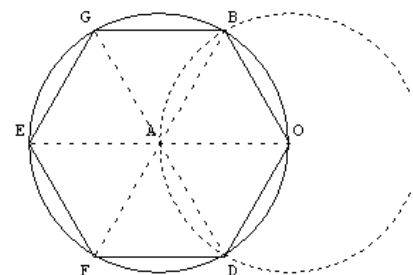
Voici une construction donnée par Euclide au III^{ème} avant notre ère :

On veut inscrire un hexagone régulier dans un cercle de centre A . On choisit O sur ce cercle puis on trace le cercle de centre O passant par A qui coupe le cercle (C) en B et D .

On trace les points E, F et G diamétralement opposés respectivement à O, B et D sur le cercle de centre A .

Justifier que la figure obtenue est un hexagone régulier.

(un hexagone régulier est un hexagone qui a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles au sommet égaux.)



Exercice 7 :

Sur la figure ci-dessus $ABCD$, $ZOKY$ et $DION$ sont des carrés.

1. Démontrer que les triangles CID et IZO sont isométriques.
2. En déduire que l'aire du carré $DION$ est égale à la somme des aires des deux autres carrés $ABCD$ et $ZOKY$.

Il semble que le deuxième cas d'égalité (un côté et deux angles) des triangles quelconques a surtout pour fonction de démontrer le cas d'égalité des triangles rectangles si on s'en réfère aux ouvrages consultés jusqu'aux années 1970) : deux triangles rectangles sont isométriques si ils ont la même hypoténuse et un même angle aigu. C'est cette propriété qui est utilisée ci-dessus.

Exercice 8 :

Démontrer qu'en joignant les milieux des côtés d'un triangle quelconque, on obtient 4 triangles isométriques.

Exercice 9 :

Un parallélogramme est partagé en deux paires de triangles isométriques par ces diagonales. Pourquoi ?
Les 4 triangles ont la même aire. Pourquoi ?

Exercice 10 :

MNP est un triangle quelconque. Soit Q le symétrique M par rapport à N .

E est un point du plan. On construit I et J tels que $NEIQ$ et $MEJP$ soient des parallélogrammes.

Démontrer que EIJ et MNP sont isométriques

Les deux derniers exercices peuvent se résoudre à l'aide des transformations ou bien des triangles isométriques. On peut alors en profiter pour institutionnaliser qu'un triangle qui est image par une transformation connue d'un autre triangle est isométrique à ce dernier.

On peut encore compléter le cours en disant que deux triangles isométriques ont la même aire mais que la réciproque est fausse.

Exercice 11 : Inscription du triangle équilatéral dans un carré.

Voici deux solutions que donne Abul-Wafa pour inscrire un triangle équilatéral dans un carré.

Construction 1 :

$ABCD$ est un carré.

F est la symétrique de A par rapport à B .

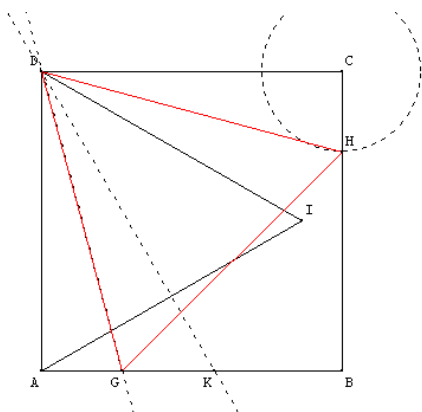
ABN est un triangle équilatéral extérieur au carré.

Le cercle de centre F et de rayon NF coupe $[AB]$ en G .

Soit H le point de $[BC]$ tel que $CH=AG$.

Abul-Wafa affirme que DGH est équilatéral.

Est-ce vrai ?



Construction 2 :

$ABCD$ est un carré.

ADI est équilatéral, I étant à l'intérieur du carré $ABCD$.

La bissectrice de \widehat{ADI} coupe $[AB]$ en K , et la bissectrice de

\widehat{ADK} coupe $[AB]$ en G .

Soit H le point de $[CB]$ tel que $CH=AG$.

Abul-Wafa affirme que DGH est équilatéral.

Est-ce vrai ?

4- Quatrième étape du parcours : l'algèbre pour construire

a- Dynamique de l'étude

Intervention du professeur :

On a vu des moyens pour vérifier si des constructions étaient exactes ou approchées. On revient aux constructions.

b- L'étude

<http://perso.orange.fr/nvogel/Dossiers/Athenes2.htm>

Raphaël dans sa fresque célèbre L'école d'Athènes a utilisé la construction d'un carré dans un demi-cercle. Pouvez-vous retrouver ce tableau dans votre manuel d'histoire ? Un diaporama bref montre le tableau et situe historiquement le tableau.

Vous pouvez le consulter par exemple sur :

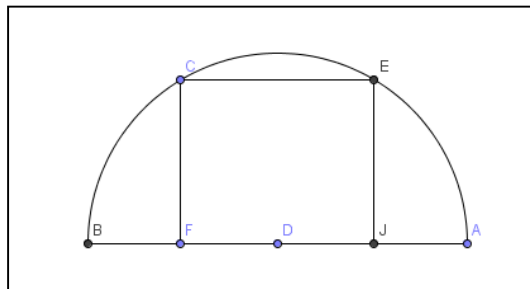
<http://www.astrosurf.com/luxorion/Documents/philo-ecole-athenes.jpg>

Dans cette œuvre symbolisant la recherche rationnelle de la vérité, l'artiste a réuni les sages d'époques variées. L'analyse du tableau fait apparaître un carré inscrit dans un cercle.

On se propose, tout comme Raphaël, de construire un carré dans un demi-cercle, un des côtés du carré étant porté par le diamètre.

Soit (C) un demi cercle quelconque de centre O et de rayon r.

- 1- On suppose que la figure est construite pour l'analyser
(Faire un dessin à main levée)
 - Expliquer pourquoi la figure possède un axe de symétrie.
 - Calculer le côté a du carré en fonction de r.
- 2- Utiliser ce résultat pour construire le carré. Justifier.



c- Organisation mathématique

La tâche

Nous partons d'une situation du monde : une fresque. A l'époque de Raphaël, la fresque est fortement « géométrisée » : avec la découverte des techniques mathématiques de perspective artistique, les peintres composent les tableaux de manière rationnelle.

On ne s'intéresse ici qu'à un des aspects du tableau à savoir l'inscription d'un carré dans un demi-cercle.

Cette tâche est en fait un moyen d'atteindre un objectif : le calcul d'une grandeur en fonction d'une autre (et ainsi de revoir les règles du calcul littéral) en vue de construire des figures.

Types de tâches rencontrées :

- calculer une grandeur en fonction d'une autre,

Techniques utilisées :

- calcul d'une longueur à l'aide du théorème de Pythagore,
- utiliser les éléments de symétrie du demi-cercle et du carré.
- procéder par analyse-synthèse

Le dessin à main levée suggère le calcul d'éléments métriques qui doivent être suffisants pour donner les clés de la construction.

Voici une solution possible :

D centre du demi-cercle est milieu de [FJ] car DC = ED.

Le triangle étant isocèle les angles FCD et DEJ sont égaux et les triangles CFI le milieu de [FJ].

On peut aussi dire que l'axe médian du carré est axe de symétrie de la figure.

Appelons $x = DE$, on a $(\frac{x}{2})^2 + x^2 = r^2$ donc $\frac{5x^2}{4} = r^2$ soit $x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$.

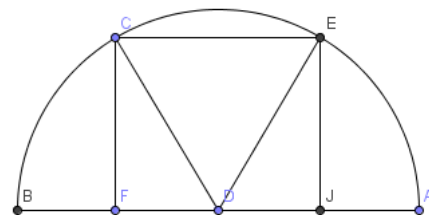
Ce calcul de x suffit-il pour construire le carré ?

On peut placer F, puis C, puis vérifier que FC = x.

On trace la perpendiculaire à la médiatrice de [FJ].

On obtient un rectangle qu'il suffit de symétriser. On peut remarquer les triangles FDC et DJE sont isométriques donc EJ=FC ainsi FCEJ est un parallélogramme qui a un angle droit. C'est un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux. C'est un carré.

La construction effective permet de valider l'exactitude des calculs.



c- Organisation didactique

Dans un premier temps, la fresque de Raphaël ainsi que le commentaire sont faits de manière magistrale sous forme d'un petit diaporama.

L'étude mathématique doit être conduite sous la direction du professeur après une recherche individuelle pour que l'élève s'imprègne du texte.

- On explique la méthode à savoir que l'analyse d'une figure à main levée doit nous conduire à la détermination d'une donnée qui permet la construction.
- On fait alors analyser aux élèves la figure en demandant quels points suffirait-il de placer pour construire la figure ?
- Comment déterminer ce point ?
- On effectue la construction.
- On fait justifier la construction.

Le calcul constitue un pas important dans la résolution.

La construction effective se fera à la main en utilisant la donnée numérique de son dessin et une valeur approchée de $\sqrt{5}$

. Sur logiciel on fera $x = \frac{2r}{\sqrt{5}}$. Une valeur approchée de $\frac{2r}{\sqrt{5}}$ peut être utilisée en mentionnant qu'une construction à la règle et au compas sera possible avec les contenus du chapitre suivant.

D'autres constructions peuvent être trouvées, en particulier à l'aide du théorème de Thalès ou des triangles semblables. Le choix du parcours a été différent, cela n'empêche pas d'en parler si certains élèves y ont pensé. Cependant la synthèse se fera clairement sur le calcul littéral, qui sera re-travaillé dans les exercices proposés.

Bilans

d1- Mise en commun

On effectue la construction effective sur logiciel ou sur papier.

d2- Les connaissances utilisées.

- règles sur le calcul littéral.

d3-L historique

La résolution d'un problème de construction fait souvent intervenir la démarche suivante

- on fait une figure à main levée que l'on analyse pour trouver des éléments qui peuvent permettre la construction.
- A l'aide des éléments on construit.
- On étudie l'exactitude de la construction.

- o Qu'est-ce qu'un problème de construction ?

Dans un problème de construction, il est souvent utile de tracer à main levée la figure demandée pour trouver des éléments pertinents qui permettent de construire la figure.

Ensuite il faut vérifier que la construction est exacte par une démonstration.

Dans cet exercice, on a calculé une grandeur en fonction d'une autre, c'est-à-dire établi une formule. Pour cela il a fallu employer des règles sur le calcul littéral.

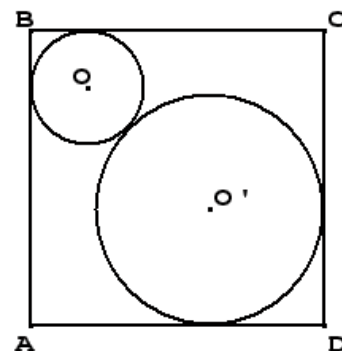
- maîtriser le calcul littéral et en particulier savoir calculer une quantité en fonction d'une autre qu'il faut insister.

e- Exercices possibles de travail de la technique

Les constructions se feront sur logiciel.

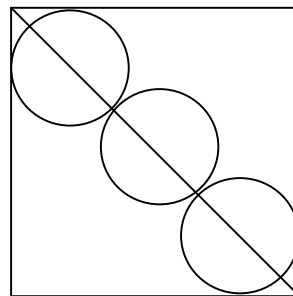
Exercice 1 :

Dans un carré de côté 4, inscrire deux cercles comme ci-contre le rayon de l'un étant de double de l'autre.



Exercice 2 :

Reproduire la figure suivante : trois cercles dans un carré.

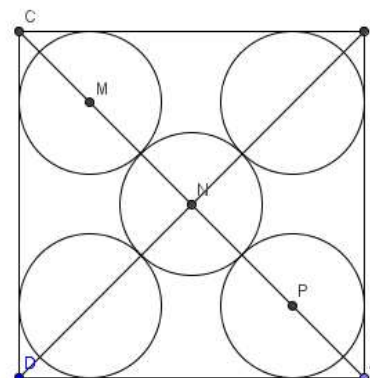


Exercice 3 :

Reproduire la figure suivante : 5 cercles de même rayon dans un carré.

Les cercles sont centrés sur les diagonales.

4 cercles sont tangents au cercle central et chacun est tangent à deux côtés du carré.



Exercice 4 :

Un cercle de centre O et de rayon r est donné. Construire un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. (Rappeur non autorisé). Calculer son côté en fonction du rayon.

Exercice 5:

Construire un triangle équilatéral dont l'aire est 12.

5- Cinquième étape du parcours : l’algèbre pour construire à l’aide des identités remarquables

a- Dynamique de l’étude

Intervention du professeur

L’algèbre permet de déterminer une grandeur en fonction d’une autre. On peut aussi résoudre des problèmes de construction en utilisant un peu plus d’algèbre à savoir les identités remarquables.

b- L’étude

Etude 5 : Utiliser les identités remarquables pour construire

Inscrire dans un cercle de diamètre 5, un rectangle d’aire 8.

c- Organisation mathématique

Pourquoi étudier les identités remarquables ? Pourquoi et quand sont-elles apparues dans notre enseignement ?

Il semble si on en croit les usages qu’en fait Viète que les identités remarquables soient des techniques susceptibles de ramener un problème du second degré à un problème du premier degré. Longtemps considérées comme techniques de calcul rapide, les identités ont perdu cette fonction par l’arrivée des logiciels de calcul formel.

Mais les identités remarquables peuvent aussi être réinterprétées en cherchant les ostensifs qui se cachent derrière ces écritures. C’est un des enjeux de cette étude : $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$, $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ signifient que si on connaît :

- la somme des carrés de deux nombres positifs et le produit de ces deux nombres alors on connaît leur somme et leur différence,
- si on connaît la différence de leurs carrés et leur somme ou leur différence on connaît leur et leur différence.
- ...

La tâche :

- construire un rectangle dans un cercle,

Types de tâches rencontrés

L'analyse à main levée montre que les diagonales sont des diamètres.

Si on pose x et y pour dimensions du rectangle on a $x^2+y^2=25$ et $xy=8$. On est alors amené à chercher deux connaissant somme et produit.

On peut aussi poser $y=\frac{8}{x}$ et avoir $x^2+\frac{64}{x^2}=25$ et là ce qui mène les élèves à une impasse.

Ayant trouvé x et y , on peut placer A, B et C. Il faut alors vérifier que ABC est rectangle par la réciproque du théorème de Pythagore, puis placer D diamétralement opposé à A.

Les types de tâches qui interviennent sont donc les suivantes :

- mettre en équation le problème,
- se ramener à un problème d'algèbre connu,
- démontrer qu'un triangle est rectangle.

Techniques utilisées

- un triangle inscrit dans le demi-cercle est rectangle,
- l'analyse des identités remarquables,
- la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues
- la réciproque du théorème de Pythagore.

d- Organisation didactique

Après la figure à main levée et son analyse, on peut imaginer que les élèves peuvent aller jusqu'au système.

Question cruciale : comment résoudre le système ? Si la deuxième solution apparaît, on fait valoir qu'une telle résolution n'est pas possible à ce niveau.

Il faut faire parler les identités remarquables (voir plus haut) pour se ramener à un problème connu.

Bilans**d1- Mise en commun :**

Elle consiste en la correction détaillée de l'exercice.

d2- les connaissances utilisées

On fait noter les identités remarquables et surtout on explique ce qu'elles peuvent dire : si on connaît a^2+b^2 et ab on connaît $a+b$ et $a-b$ donc a et b si a et b sont positifs et $a>b$ etc.

On fait un rapide point sur la résolution des systèmes.

d3- l'historique

On peut résoudre des problèmes de construction en utilisant les identités remarquables. Pour cela il faut pouvoir algébriser le problème avec deux inconnues.

e- travail de la technique*Exercice 1 :*

Inscrire dans un cercle de diamètre 5 un rectangle de périmètre 24.

Exercice 2 :

Inscrire dans un demi-cercle de rayon 5 un triangle rectangle dont la différence des côtés de l'angle droit est 2

Exercice 3 :

Construction de triangles rectangles d'après le mathématicien Viète du XVI^e siècle.

Viète utilise les identités remarquables pour construire des triangles rectangles. Peux-tu faire de même ?

1. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la différence entre l'autre côté et l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 1
2. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la somme de l'autre côté et de l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 25
3. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence entre les deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.
4. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.

6- Sixième étape du parcours : Construire des figures à la règle non graduée et au

compas

a- Dynamique de l'étude

Intervention du professeur

Dans cette partie nous allons imposer des contraintes : les constructions doivent être possibles à l'aide de la règle et du compas. Cette contrainte vient des grecs qui dans l'antiquité n'avaient comme seul instrument une ficelle.

Les problèmes posés sont différents sur informatique car des procédures de constructions sont souvent internes aux logiciels.

b- L'étude

Étude 6 :

On sait construire des figures élémentaires à la règle et au compas.

Dans la fiche ci-contre (annexe 5), sont expliquées les techniques que les élèves doivent justifier :

- parallèle à une droite,
- médiatrice d'un segment,
- bissectrice,
- perpendiculaire à une droite,

Donner une construction du carré, du triangle équilatéral à la règle et au compas.

Intervention du professeur

Nous posons maintenant la question de savoir si on peut construire des segments de longueurs données à l'aide de la règle et du compas, ce qui permettrait de résoudre sur papier sans recours à la calculatrice les problèmes rencontrés dans la feuille précédente.

Question :

Des segments de longueurs a, b, \dots étant donnés, comment construire des segments dont les longueurs dépendent de a, b, \dots en n'utilisant que la règle non graduée et le compas?

Etude 6-1

Deux segments de longueurs a et b étant donnés ($a > b$), construire à la règle non graduée et au compas des segments de longueurs $a+b$, $a-b$, $\frac{a}{2}$, $a\sqrt{2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$

c-Organisation mathématique

La tâche :

- construire des segments dont la longueur est donnée par une formule.

Types de tâches rencontrées

- analyser une formule
- interpréter une formule géométriquement.

Techniques :

- construire un carré connaissant son côté,
- construire un triangle rectangle connaissant soit les deux côtés de l'angle droit, soit un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.

Des connaissances nouvelles apparaissent mais des connaissances anciennes sont réinvesties avec éventuellement un statut différent. Les triangles semblables et le théorème de Thalès sont des outils pour calculer une quantité en fonction d'une autre.

Le calcul littéral est fortement présent...

C'est sur la maîtrise de ces nouvelles connaissances que l'on se doit d'insister... compte tenu des programmes.

d- Organisation didactique

Les constructions sont élémentaires et utilisent les propriétés du triangle rectangle ou du triangle rectangle isocèle.

Bilans

d1- Bilan de l'étude

L'analyse de la formule permet de se ramener au théorème de Pythagore.

d2- connaissances rencontrées

Connaissant deux longueurs a et b il est facile de construire un segment de longueur $a+b$, $a-b$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ et $a\sqrt{2}$.

e- Travail de la technique

Exercice :

Deux segments de longueurs a et b étant donnés ($a > b$), construire à la règle non graduée et au compas des segments de longueurs $\frac{5a+3b}{2}$, $b + a\sqrt{2}$, $a + \sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Etude 6-2 :

a- Dynamique de l'étude

Intervention du professeur

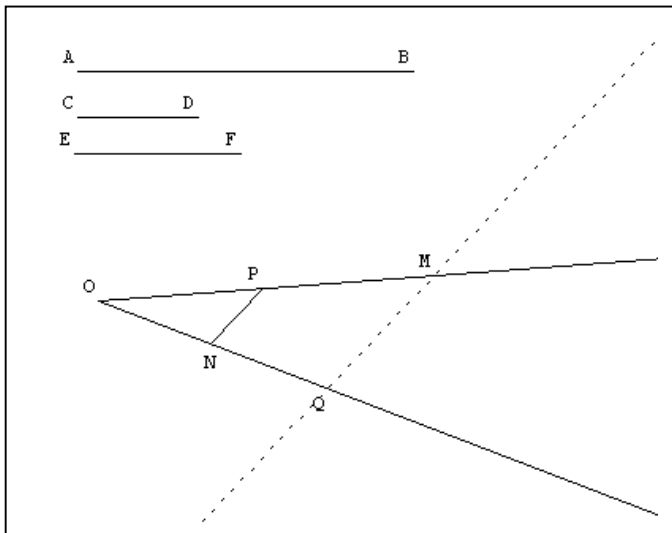
Deux segments de longueurs a et b étant données, on sait construire un segment de longueur $a+b$, $a-b$ Mais, peut-on construire des segments de longueurs ab ou a/b ou \sqrt{ab} ?

b- L'étude

Trois segments ont pour longueurs respectives a , b et c : $AB = a$, $CD = b$ et $EF = c$.

Voici comment on peut construire à la règle non graduée et au compas un segment de longueur $\frac{ab}{c}$.

- on choisit deux demi-droites d'origine O , d et d' .
- on place P , M et N tels que $OP = c$, $OM = a$ sur la première demi-droite d et $ON = b$ sur la seconde d' .
- La parallèle à (PN) passant par M coupe d' en Q .
- OQ mesure $\frac{ab}{c}$. Pourquoi ?



Que se passet-il si c est un segment unité soit $c=1$? Si $b=1$?

A l'aide de ce qui précède, construire un segment de longueur $\frac{1}{a}$; a^2 .

c- Organisation mathématique

La tâche :

- Construire un segment donné par une relation.

Types de tâches rencontrés

- analyse d'un discours mathématique,
- calcul d'une quatrième proportionnelle.

Techniques utilisées

- théorème de Thalès

d- organisation didactique

Bilans

d1- Mise en commun

Lors de la mise en commun on peut expliquer commun partager un segment en n parties égales suite à une question du professeur.

d2- les connaissances rencontrées :

le théorème de Thalès est énoncé et noté

d3 : Historique

On peut construire, à la règle et au compas, des segments de longueurs $a+b$; $n \times a$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, ab/c ...connaissant les longueurs a et b

Il facile de partager un segment en n parties égales.

e- travail de la technique

Exercice :

On donne un segment unité et un segment de longueur a .

Construire un segment de longueur a^3 puis un segment de longueur $a^2 \sqrt{2}$.

Etude 6- 3 :

a- Dynamique de l'étude

Intervention du professeur

Est-il possible de construire un segment de longueur \sqrt{ab} ?

Pour cela un outil est nécessaire : les triangles semblables .je vous explique.

Suit le cours

b- L'Etude

Comment construire un segment de longueur \sqrt{ab}

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

Démontrer que ABH ; ABC et AHC sont semblables.

En déduire que :

$$HB \times HC = AH^2$$

Deux segments mesurent a et b . Construire à l'aide de la relation précédente un segment de longueur \sqrt{ab} .

c- Organisation mathématique

le cours étant fait, il s'agit de l'appliquer pour montrer en quoi il permet de résoudre le problème.

d- organisation didactique

La construction qui est donnée suit le cours classique sur les triangles semblables déjà définis lors de l'étude 2.

Ce cours mentionne les usages des triangles semblables :

- à écrire des égalités de rapport et ainsi à calculer une longueur en fonction d'une autre.
- à montrer des égalités d'angles.

La tâche :

- Construire un segment de longueur donnée

Types de tâche rencontrés

- démontrer que deux triangles sont semblables,
- transformer une égalité.

Techniques :

- utiliser les triangles semblables pour écrire des rapports égaux

Bilan

d1 - Mise en commun

C'est la correction.

d2- connaissances rencontrées

les connaissances essentielles portent sur la manipulation des triangles semblables.

On insiste :

- sur le triangle rectangle et sa hauteur (3 triangles semblables) et les conséquences sur les égalités de rapport.
- sur les angles inscrits et les conséquences.

d3- historique

On peut construire à la règle et au compas de nombreuses figures et de nombreux segments à partir de segments de longueurs donnés voire aussi avec un segment unité.

De sorte que les constructions faites depuis le début étaient possible avec la règle non graduée et le compas.

e- travail de la technique

Exercice 1 :

ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables.

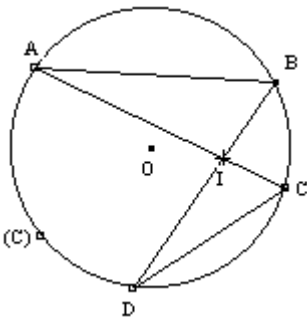
Soit H le pied de la hauteur issue de A au triangle ABC et H' celui issu de a' au triangle $A'B'C'$.

Démontrer que ABH et $A'B'H'$ sont semblables.

Qu'en est-il si H et H' sont les pieds des médianes ? des bissectrices ?

Exercice 2 :

a-



(C) est un cercle et A, B, C et D sont quatre points distincts de ce cercle I est le point d'intersection des droites (AC) et (BD) .

Démontrer que les triangles ABI et DCI sont semblables.

b- Le triangle ABC a pour mesures des côtés : $AB=7,5$; $BC=3$; $AC=6$

Le triangle ABC et le triangle $A'B'C'$ dont les mesures des côtés sont 5 ; $4,5$ et 4 sont-ils semblables ?

Exercice 3 :

ABC est un triangle rectangle en A dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b . Soit

H le pied de la hauteur issue de A . Calculer $x=AH$ en fonction de a et b .

Exercice 4 :

Une autre construction de $\frac{ab}{c}$ à l'aide des triangles semblables :

Trois segments ont pour longueurs respectives a, b et c : $AB= a, CD= b$ et $EF=c$.

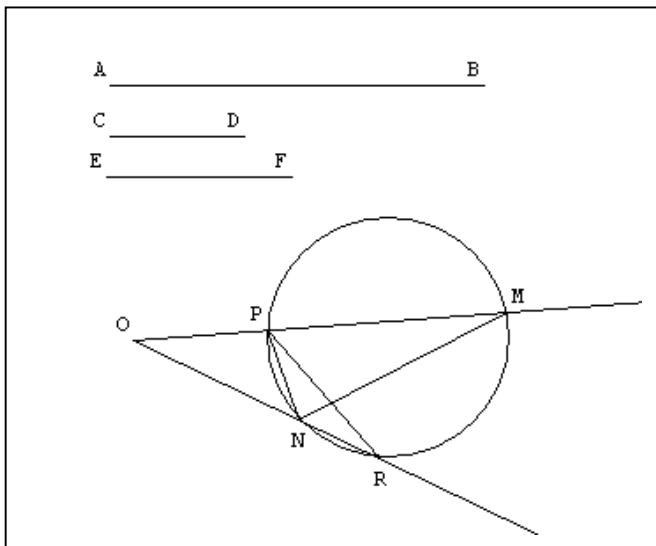
Voici une autre façon de construire à la règle non graduée et au compas un segment de longueur $\frac{ab}{c}$.

- on choisit deux demi droites d'origine O, d et d' .

- on place P, M et N tels que $OP=b, OM=a$ sur la première demi-droite d et $ON= c$ sur la seconde d' .

- le cercle circonscrit au triangle PMN recoupe d' en R .

OR mesure $\frac{ab}{c}$. Pourquoi ? On pourra utiliser le fait que OPR et ONM sont semblables.



Exercice 5 :

1- Les constructions se font à la règle et au compas.

ABC est un triangle donné.

Construire un triangle semblable à ABC dont le périmètre est le triple de celui de ABC .

Construire un triangle semblable à ABC dont le périmètre est $\frac{3}{7}$ de celui de ABC .

2- Construire un triangle semblable à ABC dont l'aire est le triple de celle de ABC .

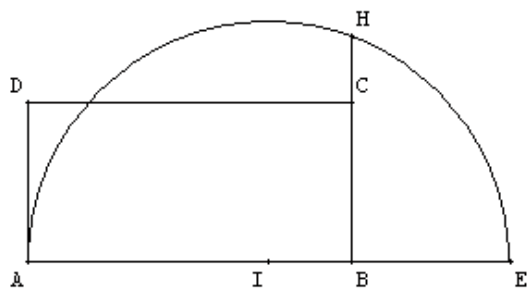
Doit-on imposer que les triangles ne sont pas en position de Thalès

Exercice 6 : La quadrature du rectangle.

Pour comparer des aires des surfaces il n'est nécessairement utile de calculer leurs aires. Une figure étant donnée, on construit à la règle non graduée et au compas un carré de même aire. Ainsi pour comparer les aires de deux surfaces on est ramené à comparer deux carrés.

Effectuer la quadrature d'une figure c'est construire à la règle et au compas un carré de même aire que la figure donnée.

Voici un quadrature du rectangle de côté a et b .



$AB=a$ et $BC=b$. $AE =BC$ et E est aligné avec A et B .

(BC) coupe le demi cercle de diamètre AE en H .

$AH= \sqrt{ab}$. Pourquoi ?

Etude 6-4 : Graduation de la droite : nombre constructibles

Un axe d'origine O et on note I le point d'abscisse 1.

Parmi les points suivants quels sont ceux qu'il est possible de construire à la règle et au compas :

$A(5)$; $B(\frac{8}{7})$; $C(\frac{3}{8})$; $D(\sqrt{3})$; $E(\sqrt{3} + \sqrt{2})$; $F(\sqrt{5} - \sqrt{2})$; $G(1,37)$; $H(\frac{2}{3} + \frac{4}{7})$; $I(1,7 + \frac{1}{3})$.

(On ne demande pas de construire ces points mais de dire comment on pourrait les construire.)

Institutionnalisation

On introduit la droite des nombres réels donc \mathbb{R} , mais aussi \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} .

On peut poser la question qui est de savoir si tous les nombres sont constructibles à la règle et au compas.

Enfin, on peut en profiter pour comparer des nombres et introduire la notion d'intervalle.

Pour aller plus loin :

Exercice 1 :

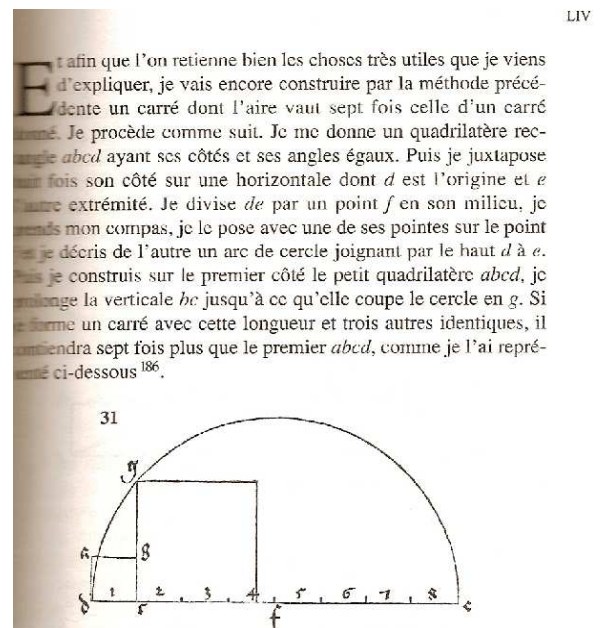
Réaliser la quadrature d'un triangle quelconque.

Application : des deux triangles donnés (à dessiner) lequel a la plus grande aire.

Exercice 2:

Dürer, peintre allemand du XVème siècle est l'un des créateurs de la perspective artistique (voir chapitre de géométrie dans l'espace). C'est aussi un mathématicien qui, dans son ouvrage « *La Géométrie* », donne des méthodes aux artisans pour faciliter leurs travaux.

Voici l'une d'elles. Est-elle exacte ?



V- Bilan

Difficile d'être à la fois acteur et observateur. Ce bilan doit être fait à plusieurs niveaux.

Concernant les enseignants :

Sur les contenus :

Trouver des fils conducteurs sur des parties de programmes n'est pas chose facile pour la simple raison que les programmes n'ont pas été conçus pour être gérés de cette manière. Trop souvent regroupés par chapitres, les notions enseignées ne permettent pas de travailler les classes de problèmes que ces notions sont censées résoudre : il en est ainsi des triangles isométriques, outil démonstratif et des triangles semblables qui est un outil essentiellement de calcul.

Le point de vue adopté qui est de mettre au premier plan les constructions, permet de ramener à sa juste place la démonstration qui est alors vue comme un moyen pour justifier ces constructions. L'usage des logiciels de géométrie est un élément de motivation supplémentaire aux constructions. Néanmoins, les problèmes de constructions font apparaître des raisonnements par analyse-synthèse qui sont difficiles en seconde et nécessitent un regard didactique particulier.

La recherche écologique que nous avons menée permet d'entrevoir des ouvertures interdisciplinaires et surtout de montrer que les mathématiques enseignées ne sont pas nécessairement une discipline coupée de toute réalité, simple outil de réussite scolaire. C'est une découverte pour un certain nombre d'enseignants ayant participé à la recherche.

L'apprentissage de l'algèbre peut-être revisité : dans des stages de liaisons entre mathématiciens et physiciens on est souvent frappé par les usages complètement différents fait de l'algèbre.

Deux points essentiels diffèrent : le calcul des physiciens utilise de nombreuses lettres chose rare en mathématiques au collège et au lycée, de plus dans les disciplines expérimentales, il s'agit d'exprimer une grandeur en fonction d'autres grandeurs, technique peu enseignée en mathématiques.

En mathématiques, les pratiques les plus courantes de l'enseignement de l'algèbre font apparaître du calcul techniciste de factorisation et développement ainsi que des résolutions d'équation du premier degré ou s'y ramenant bien souvent non contextualisées. Les problèmes qui donnent sens à l'algèbre ont disparu de la plupart des manuels. A l'instar de Descartes nous pensons que les constructions peuvent être un moyen de motiver l'enseignement de l'algèbre. La technique la plus importante nous rapproche des usages des physiciens à savoir calculer une grandeur en fonction d'une autre, technique qui sera incontournable lors de l'étude des fonctions.

Notre recherche nous a aussi permis de réfléchir sur l'usage et l'intérêt de l'enseignement des identités remarquables. Pourquoi une telle importance dans notre enseignement ? Nous avons effleuré des réponses à cette question. Néanmoins, la façon dont nous avons procédé en reprenant les problèmes historiques de Viète nous a permis de travailler le côté ostensif des écritures algébriques, pan souvent oublié de l'enseignement.

Ainsi le travail mené nous a ouvert des pistes de recherche que nous n'avions pas entrevues auparavant.

Sur la gestion :

Comme nous l'avons déjà mentionné, la gestion en classe doit être pensée.

- La recherche des études qui font intervenir de nombreuses notions anciennes et nouvelles doivent faire l'objet de bilans à plusieurs niveaux afin qu'il n'y ait pas de phénomènes de dilution : le professeur doit identifier dans chaque étude les savoirs et les techniques qui sont apparues dans la résolution (quitte à faire des choix) et qui font l'objet suite à cette étude d'un travail spécifique. Et c'est sur ces savoirs et techniques que les élèves sont évalués.
- La gestion des traces écrites des élèves est difficile surtout si comme nous le supposons les traces écrites constituent un élément structurant dans la formation de l'élève.
- Une place doit être faite aux calculs systématiques afin que les élèves acquièrent un peu de dextérité. Mais ces calculs systématiques sont-ils de même nature que ceux traditionnellement faits ? C'est une question que nous n'avons pas encore tranchée. Comment les gérer sans perdre de vue les parcours ?

L'impression qui domine chez les enseignants ayant expérimenté est que cette façon de faire a peu d'influence sur la gestion programme durant le temps imparti.

Concernant les élèves :

Rappelons :

- que notre ambition n'est pas a priori de motiver les élèves mais de motiver l'enseignement des notions qui nous l'espérons, motiveront les élèves.
- Que notre souci n'est pas de plaire aux élèves mais de faire en sorte que ceux-ci comprennent que les mathématiques ne sont pas enseignées qu'à des fins scolaires.

○

Force est de constater que :

- les élèves sont assez désarçonnés par cette pratique qui rompt bien souvent avec une représentation bien différente de l'enseignement des mathématiques,
- certains bons élèves regrettent les mathématiques algorithmiques mais aussi une structure rassurante « cours-exercices »,
- globalement les élèves comprennent mieux le pourquoi de l'enseignement des notions mathématiques et adhèrent à cette démarche qui leur paraît difficile..

Il convient aussi d'expliquer aux parents notre démarche.

Bibliographie :

Boyé Anne, *Le combat des deux géométries*, Les génies de la science, n°21, Novembre 2004,

Chevallard Yves, Actes de l'université d'été de La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand

Chevallard Yves, Université d'été Animaths,

Chevallard Yves, *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*

octobre 2005 , Conférence plénière donnée à Baeza en octobre 2005 dans le cadre du 1er congrès sur la théorie anthropologique du didactique.

Descartes René, *La géométrie*, 1637

Euclide : *Eléments de géométrie*, Traduction Peyrard

Bréal Seconde, *Livre du professeur*, 2001

Thiénard Jean Claude, *Notion de transformations*, IREM de Poitiers, 1995

Vitrac Bernard, *Les géomètres de la Grèce antique*, Les génies de la science, n°21, Novembre 2004,

Guichard, Jean Paul , Viète,