Mathématiques et résolution de problèmes : un point de vue didactique. Pages 43-52
Actes des journées de formation, IREM Montpellier 13-14 mai 2004

Mathématiques, didactique et découpages : la richesse d'un problème

CATHERINE HOUDEMENT
IUFM de l'Académie de Rouen, DIDIREM Paris 7

L'occasion du séminaire de l'IREM de Montpellier (juin 20004) consacré à la notion de 'problème et ses aspects didactiques' m'a donné l'occasion de revisiter une situation initialisée par M.L. Peltier et moi-même pour la formation des professeurs des écoles (Houdement, Peltier 1992 et 2003) et à montrer sa grande richesse, tant du point de vue mathématique que didactique. C'est ainsi que j'ai répondu modestement à la commande *d'illustrer certains concepts de didactique*, notamment de la Théorie des Situations.
Dans la mesure où cette situation peut se proposer à différents publics, y compris en partie aux élèves de l'école primaire (Houdement Peltier 1994), et donc conduire à différents objectifs, je parlerai de meneur et de participants et, plutôt que de formateur et de stagiaires, de professeur et d'étudiants, de professeur et d'élèves.

1. ENJEU

Le point de départ du travail consiste en la demande aux participants (quels qu'ils soient) de production matérielle de surfaces de papier, production soumise aux contraintes contenues dans la consigne suivante. Le matériel disponible pour ce travail consiste en un grand nombre de feuilles rectangulaires toutes superposables, du matériel de géométrie, des ciseaux, etc.

Consigne 1 : partager une feuille de bottin[1] en deux parties exactement superposables sans perte de papier ni recollage ; trouver le maximum de partages différents.

Cette demande de production est relayée, à la discrétion des participants ou sur décision du formateur, par la recherche de conditions écrites portant sur la ligne de partage.

Consigne 2 : formuler par écrit une ou deux (ou plus) conditions sur la ligne de partage pour que le partage « marche ».

Le travail collectif évolue vers la validation des conditions émises sur la ligne de partage, la recherche de leur caractère nécessaire ou suffisant. Un objectif postérieur serait la modélisation mathématique de la ligne de partage.

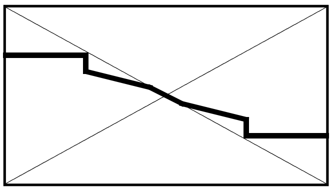
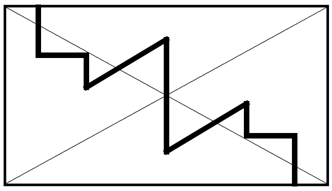
2. LE PROBLÈME

Après l'exhibition des lignes évidentes (les médianes puis les diagonales du rectangle qui modélise la feuille de papier initiale), l'activité est très vite ressentie comme un problème par tous les participants : pour les uns un problème de technologie (fabriquer des objets soumis à des contraintes), pour les autres un problème mathématique (trouver les conditions nécessaires, voire suffisantes, pour une ligne de partage idoine). Dans les deux cas, la fabrication effective joue le rôle d'une rétroaction par la superposition (réelle ou virtuelle) des deux surfaces obtenues. Chez les participants à la culture mathématique plus développée,

[1] Le choix du bottin est écologique (au sens usuel) : n'utiliser du papier usagé et recyclable.

l'activité technologique évolue souvent vers la question mathématique, l'enjeu résidant dans le fait de trouver le plus de lignes « différentes » possibles.

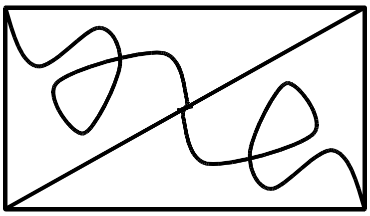
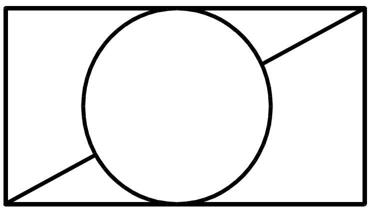
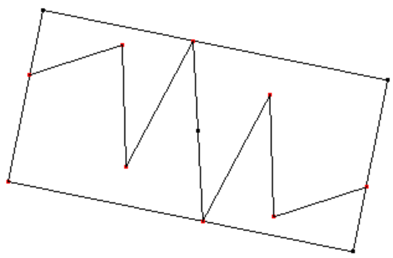
Précisons un peu le cours habituel de la recherche sur la « forme » de la ligne de partage.
Après les droites passant par le centre du rectangle, l'étape suivante est souvent une ligne brisée, obtenue par adaptations successives à l'anticipation du découpage (ou aux essais suivis de découpages effectifs) : les écritures liées à la consigne 2 reprennent en général le fait qu'elle passe par le centre, possède une régularité reconnue par certains participants[2] comme invariante par symétrie centrale de centre celui du rectangle, décrite par d'autres de façon constructive de bord du rectangle à un autre bord.

L'étape suivante est pour les uns la recherche de lignes courbes de partage idoines ; pour d'autres des conditions complémentaires des deux pré-citées reconnues comme nécessaires. Bien entendu le meneur fait évoluer le questionnement et se réserve la possibilité de recueillir sur transparent différents écrits répondant à la consigne 2, de façon à les rendre publics, les faire valider et compléter.
Un des buts possibles est de parvenir à un écrit satisfaisant le groupe de participants, les critères de « satisfaction » étant soit imposés, soit discutés dans le groupe avec le meneur.

La formulation la plus élaborée est en général :
« *La ligne de partage doit être invariante par symétrie centrale de centre le centre du rectangle, passer par ce centre, ne contenir aucun point double, et couper la frontière du rectangle deux fois seulement* »

Ces conditions sont reconnues comme conditions nécessaires.
En effet sont exclues les lignes suivantes (la diagonale est superflue)

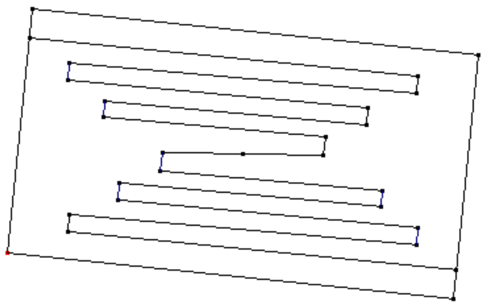
La question reste ouverte : ces conditions sont-elles suffisantes ? En ce sens le problème posé sur la ligne de partage reste ouvert.

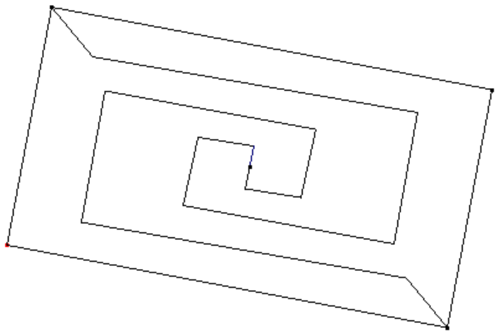
Dans le groupe de Montpellier, sont apparues les questions ou précisions suivantes
- Comment définir mathématiquement une telle « ligne » ?

2 Bien entendu le type de formulation sur la ligne de partage est en relation avec les connaissances des participants : par exemple le qualificatif symétrie centrale n'est pas naturel au cycle 3 ; il est automatique dans une population de professeurs de mathématiques.

- Sait-on écrire la fonction vectorielle dont cette courbe serait le graphe ?

Ces deux questions sont restées non résolues.





- Est possible de trouver une ligne idoine aussi longue que voulue ? Oui, pour l'exemple, il suffit de multiplier le nombre de segments de droite….

Le problème posé est un problème technologique (au sens de la discipline scolaire technologie). Les réponses sont matérielles avec une preuve pratique. Des connaissances mathématiques (symétrie centrale..) permettent d'avancer plus rapidement dans sa résolution.

Par contre le modéliser en question mathématique est plus complexe. La modélisation mathématique apporte-elle un plus pour la résolution pratique ? A priori non, elle ne remplit qu'une fonction intellectuelle, théorique dans la théorie des mathématiques.

3. Exploitations mathématiques possibles de ce problème

3.1 A l'école primaire, en dernières années du cycle 3

L'activité de production développe des capacités d'anticipation et d'analyse virtuelle des tracés. Une séance seule ne suffit pas. A partir de la première consigne, une première séance peut se conclure par l'exhibition de surfaces qui « marchent » validées par un contrôle collectif de la classe et un essai d'explicitation orale du « comment faire pour que ça marche ». Une seconde séance réitère la première consigne à partir de rectangles matérialisés par des demi-feuilles traditionnelles. La tâche est identique et permet un réinvestissement de la recherche ; en général les élèves produisent au moins une ligne plus « complexe »que celles qu'ils avaient éventuellement trouvées lors de la première séance. L'enseignant collecte sur des affiches séparées les surfaces de la première séance et celle de la seconde. Il dispose alors, sur chaque affiche, d'une collection de surfaces d'aires égales et de formes variées, en général non superposables. Il peut alors nommer le critère commun à toutes les surfaces d'une même collection « avoir même aire » et exhiber des surfaces d'aires différentes, dans un rapport 2. Si les élèves peuvent découvrir l'expression « aire » pour la première fois, par contre ils viennent de pratiquer des comparaisons d'aires et disposent de procédés pour vérifier l'égalité d'aires pour des figures non superposables (par exemple nécessiter la même quantité de papier).

La situation est **didactique par rapport à l'aire** : c'est l'intervention du professeur qui nomme et définit a posteriori le critère de classement effectif des surfaces comme « avoir même aire ». Bien entendu le professeur est conscient de livrer une définition qui, pour les élèves, reste liée, dans ce premier temps, à un matériel, des morceaux de papier. Cette définition est transférable aux figures virtuellement : par contre les conditions de vérification de la comparaison d'aires ne sont plus les mêmes, la validation pratique et expérimentale globale effective se mue progressivement en une validation expérimentale analytique, par exemple par le contrôle des propriétés des figures (longueurs, angles) qui les rendent superposables (ou « complémentaires » par rapport au rectangle ou à toute autre figure). Cette validation est du niveau collège.

3.2 Au collège

Cette activité dans sa première phase permet, comme à l'école primaire, de disposer d'une collection de surfaces de même aire, non classiques. C'est l'occasion de revenir sur le concept d'aire et sur les opérations mathématiques (matérialisées par des actions instrumentales) licites pour transformer une surface en une surface de même aire ou comparer certaines aires de deux surfaces dans un rapport entier.
Elle rend nécessaire, grâce à la consigne 2 une rencontre avec la symétrie centrale notamment comme caractère commun à toutes les lignes de partage qui « marchent » et comme mode de production de lignes de partage originales.
La symétrie centrale est ici un outil de résolution qui n'a pas besoin d'être explicité pour fonctionner mais qui est nécessaire à la résolution du problème : la situation est donc une **situation a-didactique de la symétrie centrale.**
Là encore c'est le professeur qui institutionnalise en nommant l'invariant des lignes.

3.3 En formation d'enseignants

- Professeurs des écoles

Avec une organisation assez semblable à celle qui pourrait se tenir dans une classe de sixième[3], cette situation permet de revisiter les savoirs mathématiques que sont aire et symétrie centrale et de compléter les connaissances des participants par un exposé du formateur.
Dans le même temps elle permet au formateur de donner des indications relatives au fonctionnement du savoir mathématique (notamment **le rôle des problèmes et de l'expérimentation**), et au renouveau des démarches pédagogiques (le rôle des situations a-didactiques), en tout cas depuis que ces mêmes étudiants ont été élèves de primaire.

- Professeurs de collège, lycée et au delà

Cette situation contribue à la réflexion sur la liaison entre réel et mathématiques, mathématiques et autres disciplines.
Concernant les apprentissages premiers (école primaire), elle permet de construire, de donner du sens, d'**abstraire** du mathématique (aire ou symétrie centrale) de la réalité (celle de la production d'une ligne de partage qui marche), d'**expérimenter** pour construire.
Elle peut questionner les spécialistes de mathématiques sur les conceptions qu'ils développent eux-mêmes sur les mathématiques, sur le rôle qu'ils font jouer à la rigueur (notamment l'intérêt qu'il y aurait ou non à modéliser ce problème en une question mathématique pour avancer dans sa résolution locale) et sa place dans les apprentissages. Elle invite à revisiter la notion de preuve…et ses fonctions : pour quoi ? Pour qui ? Elle les confronte au rôle de la schématisation.

---

3 Voir le principe des situations d'homologie (Houdement et Kuzniak 1996)

4. Niveaux d'analyse didactique de ce problème et exploitations possibles en formation d'enseignants

4.1 Un problème en géométrie

Il s'agit bien d'un **problème** au sens de Douady (1986), d'un problème de construction géométrique (construire une ligne de partage qui « marche). Rappelons ses caractéristiques :
- le problème est consistant, ce n'est pas une simple application de propriétés ou de résultats connus ;
- il existe des stratégies de résolution de base qui permettent aux élèves de s'engager dans le problème en mobilisant des connaissances antérieures ;
- il existe plusieurs stratégies de résolution mettant en jeu les connaissances dont l'apprentissage ou l'approfondissement est visé ;
- il existe des éléments de rétroaction pour la validation.

La notion de « problème » est totalement liée à celle du niveau de connaissances du sujet qui doit le résoudre. « *Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple.* » (Brun 1999).

Ce problème peut être résolu en **Géométrie I** (Houdement et Kuzniak) : la ligne peut être construite par ajustements successifs ou déduite de connaissances géométriques (comme la nécessité d'une invariance par symétrie centrale de centre celui du rectangle), sa production est validée par l'exhibition effective et le fait de ne pas trouver (immédiatement) de contre-exemple). C'est dans ce paradigme que se placent la plupart des participants y compris quand il s'agit de d'écrire des conditions sur la ligne. C'est ainsi qu'il relève d'une problématique spatio-géométrique au sens de Berthelot Salin[4].

Il pourrait être posé (résolu ?[5]) en **Géométrie II** : le contrôle de la validité se ferait alors sur la production d'un texte, suivie de l'analyse de sa cohérence avec les définitions mathématiques usuelles (liées aux courbes) et les règles hypothético-déductives du raisonnement mathématique. Des incursions dans ce paradigme sont nécessaires aux professeurs de mathématiques pour avancer dans la caractérisation de la ligne de partage.

4.2 Savoirs et connaissances (Conne et Brun 1992)

Cette situation permet également de mettre en évidence le caractère différent des connaissances mobilisées pour résoudre le problème, selon la culture des participants.

Pour des élèves de début de collège, construire une ligne brisée solution par un segment, puis son symétrique, puis un autre segment, puis son symétrique… est une *connaissance* liée à la symétrie centrale. Mais c'est le professeur qui donnera à cette connaissance le statut de *savoir,* en la nommant comme telle, en l'institutionnalisant comme construction de l'image d'une courbe par symétrie centrale. Il lui associera d'autres points de vue : la symétrie centrale présente dans l'activité à titre de *moyen* (cf. *outil* de Douady) deviendra alors *objet* d'étude.

D'autres participants, par exemple des professeurs de mathématiques, injectent immédiatement le *savoir* symétrie centrale dans l'activité : ils l'ont donc converti en *connaissances* opérationnelles.

---

4 Par contre il est possible d'obtenir des surfaces répondant à la question en restant dans une problématique pratique

5 Certains collègues avaient promis de poursuivre plus avant dans cette voie…..

La même analyse, en termes de dialectique savoirs connaissances peut se faire pour le concept d'aire. Si des élèves de cycle 3 sont amenés à développer sous la direction de leur professeur, selon la progression développée au paragraphe précédent, des connaissances liées aux **aires** appliquées à des surfaces de papier, c'est le professeur qui les positionne en savoir « avoir même aire » (qui contient le fait d'avoir même aire et le fait de la conserver après certaines transformations).

Penchons nous maintenant plus spécifiquement sur certains aspects de la TSD (Théorie des Situations Didactiques, Brousseau 1970-1990)

4.3 Phases de la situation a-didactique de la symétrie centrale

Cette activité correspond à une situation a-didactique de la symétrie centrale. Repérons dans le déroulement certaines phases pointées par la TSD.

La consigne d'émission d'un texte sur les conditions de la ligne de partage accompagnée d'une amélioration collective et successive des textes correspond à un processus **de formulation**, au sens de la TSD.
Par contre la consigne de production des surfaces ne déclenche qu'un processus d'action même si, pour certains, elle est indissociable de la production de textes sur la ligne. Le contrôle de la validité par découpage ou schéma correspond à des rétroactions.

« Une dialectique de la formulation consisterait à mettre au point progressivement un langage que tout le monde comprenne et qui prenne en compte les objets et les relations pertinentes de la situation de façon adéquate (c'est-à-dire en permettant les raisonnement utiles et les actions. (….) La construction d'un tel langage de code (répertoire, vocabulaire, quelquefois syntaxe) rend possible l'explicitation des actions et des modèles d'action. (…) Elle exige aussi la distinction entre « vouloir » et « pouvoir », entre ce qui se produira sûrement et ce qui se produira peut-être » Brousseau (1970-1990) p 36

Simultanément cet accès progressif à une formulation acceptable par le groupe des participants donne à voir un exemple de fonctionnement du savoir mathématique en acte : une première formulation a laissé possible des « monstres » au sens de Lakatos ; les formulations successives les ont progressivement exclus. Bien entendu le degré d'avancée dans la rigueur des conditions dépend de la culture mathématique des participants (et même de celle du meilleur en mathématiques, puisqu'il pourrait convaincre les autres de l'inadéquation de la formulation par l'exhibition d'un contre-exemple).

La recherche effective de lignes de partage correspondait à une **phase d'action,** contenant la possibilité de rétroactions du milieu matériel constitué, selon les participants, par la fabrication des surfaces ou les connaissances sur la symétrie centrale appliquées au rectangle schématisé.

4.4 Le concept de milieu

Il me semble que cette situation permet bien d'illustrer les trois milieux des niveaux a-didactiques de la structuration du milieu donné par Margolinas : milieu matériel, milieu objectif, milieu de référence. Margolinas a en effet repris et étendu le concept de milieu introduit par Brousseau , sous la forme de milieux emboîtés : par exemple le milieu (M 0) est

constitué des interactions entre un milieu (M-1), un sujet qui caractérise une des positions de l'élève (E-1) et un sujet qui caractérise un des positions du professeur (P-1).
Dans les milieux « intérieurs » (indices négatifs, Brousseau 1990) l'élève agit de façon privilégiée ; ce sont les milieux d'action de l'élève. Dans les milieux « extérieurs » (indices positifs, Margolinas 1993), c'est le professeur qui agit de façon privilégiée.

M3 : M-de construction		P3 : P-noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur
M2 : M-de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	tique
M0 : M-d'apprentissage	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur-pour l'élève**	**S0 : situation didactique**	
M-1 : M-de référence	E-1 : E-apprenant	P-1 : Professeur-en-action	S-1 : situation d'apprentissage	a-
M-2 : M-objectif	E-2 : E-agissant	P-2 : P-observateur	S-2 : situation de référence	didac
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif	P-3 : Organise le milieu matériel	S-3 : situation objective	tique

Je m'intéresse ici aux niveaux « intérieurs » (sous le niveau 0) : je rappelle que c'est dans le milieu (MO) que le prof institutionnalise.

Comment se déclinent les différents milieux dans notre exemple du problème des aires, en reprenant certaines caractérisations de Bloch (2003).

Le **milieu matériel** correspond aux objets familiers sur lesquels l'apprenant sait opérer des manipulations licites, où il agit. Il s'agit là :
- pour les élèves du papier et de la superposition,
- pour les professeurs des connaissances intuitives (mais construites) sur la symétrie centrale et ses propriétés.

Les actions dans ce milieu aident à valider ou invalider les productions matérielles ou textuelles.

Le **milieu objectif** est le milieu heuristique par excellence, celui des essais et des erreurs : l'élève se regarde agir. L'élève contrôle le fonctionnement de son action et énonce des phrases (éventuellement démenties par la confrontation au milieu). Les **justifications y sont empiriques.** L'installation de ce milieu objectif peut être long en particulier si l'élève a des connaissances mal assurées. Ce milieu là est bien présent dans l'activité étudiée, même pour les élèves de cycle 3 puisqu'il peut être matériel, au sens usuel.

Le **milieu de référence** est le milieu de l'argumentation ; on y contrôle la pertinence du savoir mathématique trouvé : permet il de résoudre ce problème et tous les problèmes du même ordre ? Ce milieu est travaillé dans la mise en commun et la réécriture des messages, pour un certain public de participants. Le**s justifications y sont théoriques ;** toutes les déclarations doivent être prouvées**.**

Ces trois milieux ne jouent pas le même rôle : en effet le dernier est indispensable à l'apprentissage mathématique car le savoir mathématique ne peut résulter d'une simple confrontation à un milieu qui renvoie une rétroaction en cas d'erreur. C'est un savoir théorique dont le statut vient de ce qu'il est enchâssé dans des réseaux d'autres savoirs. Il s'agit aussi de savoir **à quelle question mathématique est on en train de répondre.**
Ainsi il s'agit, pour des élèves de collège, de trouver une invariance des courbes qui marchent, pour des enseignants de mathématiques des conditions nécessaires (voire suffisantes) sur cette même ligne.

La situation étudiée me paraît ainsi bien **illustrer la pertinence de la modélisation des situations d'enseignement en termes de milieu**.
Par exemple, selon les participants auxquels cette situation s'adresse, M0 existe ou non selon qu'il y ait une intention de leur apprendre un savoir : ce qui est le cas au collège, mais pas plus tard, sauf si cette situation est propice (ce que je ne sais pas) à une définition des courbes en mathématiques.
Mentionnons qu'à Montpellier, comme souvent dans une situation a-didactique, certains participants sont déjà dans le milieu de référence lors de la première consigne (trouver des conditions mathématiques sur les lignes) alors que d'autres restent dans le milieu objectif (ils construisent successivement des lignes de partage qu'ils valident).

4.5 Une situation didactique de l'aire

La suite d'activités concernant l'école primaire et développée dans un paragraphe précédent est une situation didactique de l'aire. La consigne est une formulation naïve de « trouver des surfaces particulières d'aire la moitié de la feuille de départ ». Le professeur collecte sur des affiches, au fil des séances, suffisamment de collections de surfaces telles que deux surfaces d'une même affiche ont même aire, deux surfaces issues de deux affiches différentes n'ont pas même aire. C'est la partition (au sens mathématique) des surfaces, matérialisée par les affiches, que le professeur institutionnalise comme la relation « avoir même aire ».
On comprend mieux pourquoi il ne se trouve pas de situation a-didactique de l'aire : c'est-à-dire une situation d'action comportant des rétroactions qui ne peuvent être là, me semble-t-il que matérielles, compte tenu du niveau de connaissances des élèves visés (fin d'école primaire) : l'aire est d'abord une relation d'équivalence entre des objets, c'est donc un concept « organisateur ».

Références bibliographiques

- Bloch I. (1999) Milieux et connaissances du professeur dans une situation comportant une dimension a-didactique. *Actes de la X Ecole d'Eté de didactique des Mathématiques.* 50-59
- Bloch I. (2003) *La validation dans les situations problèmes* . Cahier du formateur. Tome 6 (Pau 2002) 27-33. IREM de Paris 7.
- Brousseau (1970-1990) 1998 *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brun J. (1999) La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math-Ecole 141*. 2-15. Neufchâtel Suisse.
- Conne F. et Brun J. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Volume 12/2-3. 221-270. Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Volume 7/2. 5-32. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Houdement C., Peltier M.L. (1992) 2003. Aires de surfaces planes.. *Concertum. Carnets de route de la COPIRELEM*. Ed. ARPEME. Tome 2. 199-208
- Houdement C., Peltier M.L. (1994) *La machine à partager. Fractions et décimaux au cours moyen*. IREM de Rouen. 46-55
- Houdement C. et Kuzniak A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Volume 16/3. 289-322. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Houdement C., Peltier M.L. (2002) Aire de formation. Cahier du formateur. Tome 5 (Maxéville 2001). 64-108. IREM de Paris 7.
- Lakatos I.(1976) *Preuves et réfutations* Paris : Hermann 1984
- Margolinas (1998) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. *Analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques*. Actes de La Rochelle juin 1998. 3-16.IREM de Clermont-Ferrand